UNIDAD 2. LA INTEGRAL COMO ANTIDERIVADA

Propósitos. Introducir el concepto de integral indefinida, a partir de analizar situaciones de variación en las que sólo se conoce su razón de cambio e inducir las primeras fórmulas para aplicarlas junto con los dos métodos de integración.

Sección 1. La antiderivada. Primer acercamiento a la solución de ecuaciones de los tipos:

$$f'(x) = c,\ f'(x) = ax + b\ \text{ y } f'(x) = ax^n.$$

En ésta sección, pretendemos que logres los siguientes aprendizajes:

- Explorar a través de tablas, gráficas o análisis del comportamiento de la variación, situaciones o problemas cuya solución lleva a encontrar la antiderivada de una función constante o lineal.
- Establecer la relación funcional que permite resolver el problema.
- Encontrar la función cuya derivada es de la forma $f'(x) = c$ ó $f'(x) = ax + b$.
- Utilizar la condición inicial del problema para encontrar la solución particular.
- Identificar que al modificarse la condición inicial, las funciones encontradas difieren en una constante.
- Explicar el significado de condición inicial y antiderivada.

Definición. Llamaremos a F una **antiderivada o primitiva** de f si F' = f.

Ejemplo 1. Encuentra una función F que tenga una derivada constante igual a 4 y que además F(3) = 2.
Solución. Para que F tenga la derivada indicada, F(x) = 4x + c. Ahora, como F(3) = 2, se tiene que F(3) = 4(3) + c = 2, de donde, c = -10, por lo que la función buscada es: F(x) = 4x – 10.

Ejemplo 2. Determina todas las funciones F tales que F´(x) = - 7x.
Solución. Las funciones F que cumplen con la condición indicada son, por ejemplo: $F(x) = -7\frac{x^2}{2} + 3$, $F(x) = -7\frac{x^2}{2} + 5$, $F(x) = -7\frac{x^2}{2} - \pi$, etc. Como sabes, la manera en que se acostumbra representar a todas, es: $F(x) = -7\frac{x^2}{2} + c$, en donde c es una constante llamada constante de integración.

Ejemplo 3. Encuentra la función F que satisfaga las siguientes condiciones: F´(x) = 10x – 3 y F(-1) = 2 .
Solución. Como podrás concluir, la función que cumple con la primera condición es: $F(x) = 5x^2 - 3x + c$. Ahora como F(-1) = 2, $5(-1)^2 - 3(-1) + c = 2$, es decir, 5 + 3 + c = 2, por lo que: c =- -6 y $F(x) = 5x^2 - 3x - 6$.

En los casos anteriores, y en los que siguen, se puede utilizar el siguiente resultado: la antiderivada general de $f(x) = ax^n$, con $n \neq -1$ es

$$F(x) = a\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

Ejemplo 4. Comprueba que si $F(x) = a\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$, con n ≠ -1, entonces $F'(x) = ax^n$

Solución. Al derivar la función F, obtenemos: $F'(x) = a(n+1)\dfrac{x^{(n+1)-1}}{n+1}$ = a x^n, con n ≠ -1

Recuerda que la derivada de lnx es 1/x, por lo que si $f(x) = \dfrac{1}{x}$, entonces su antiderivada es F(x) = lnx. Lo anterior se puede formular también como sigue:
si F´(x) = x^{-1}, entonces F(x) = lnx.

Ejemplo 5. Determina la función F tal que F´(x) = x^{-3}, x > 0 y F(2) = 5.

Solución. Como n = -3 y n + 1 = -2, F(x) = $\dfrac{x^{-2}}{-2} + c$ = $-\dfrac{1}{2x^2} + c$. Y de que F(2) = 5, se obtiene que:

$$-\frac{1}{2(2^2)} + c = 5$$

$$c = 5 + \frac{1}{8} = \frac{41}{8}$$

La función buscada es: F(x) = $-\dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{41}{8}$.

Ejemplo 6. Determina la función G, tal que *G´*(*x*) = $x^{1/3}$ y G(0) = 4.

Solución. Tenemos que n = $\dfrac{1}{3}$ y n + 1 = $\dfrac{4}{3}$, por lo tanto:

$$G(x) = \frac{x^{4/3}}{\frac{4}{3}} + c = \frac{3}{4}x^{4/3} + c$$

Y como G(0) = 4, entonces

$$\frac{3}{4}0^{4/3} + c = 4$$

$$c = 4$$

Por lo tanto: G(x) = $\dfrac{3}{4}x^{4/3} + 4$.

Ejemplo 7. Encuentra la antiderivada general de h(x) = $6\sqrt[3]{x^2}$.

Solución. Como $\sqrt[3]{x^2}$ = $x^{2/3}$, a = 6 y n = $\dfrac{2}{3}$, al aplicar la regla de las potencias se obtiene:

$$H(x) = 6\frac{x^{5/3}}{\frac{5}{3}} + c = 6(\frac{3}{5}x^{5/3}) + c$$

$$= \frac{18}{5}x^{5/3} + c$$

Ejercicios 1

1. Determina la antiderivada más general de:
   a) $f(x) = 4$ b) $f(x) = k$, k es una constante c) $f(x) = -6$
   d) $f(x) = 2x$ e) $f(x) = -6x$ f) $f(x) = 4x + 3$
2. Determina la antiderivada F que satisfaga las condiciones dadas.
   a) $f(x) = 2$, $F(0) = 0$ b) $f(x) = -4$, $F(5) = -4$ c) $f(x) = m$, $F(10) = b$
   d) $f(x) = -6x$, $F(0) = 1$ e) $f(x) = 4x - 7$, $F(2) = 3$ f) $f(x) = mx + b$, $F(0) = h$
3. Determinen la función F en cada caso:
   a) $F'(x) = 6x^2$ b) $F'(x) = -4x^3$ c) $F'(x) = 2x^4$ c) $F'(x) = -5x^5$
   d) $F'(x) = x^{-3}$ e) $F'(x) = x^{-4}$ f) $F'(x) = x^{-5}$ g) $F'(x) = -2x^{-3}$
   h) $F'(x) = -5x^{-8}$ i)$F'(x) = ax^n$
4. Determina funciones F que tengan por derivadas:
   a) $F'(x) = 2x$ b) $F'(x) = 3x^2$ c) $F'(x) = -6x^3$
   d) $F'(x) = -5x^{17}$ e) $F'(x) = -\frac{3}{2}x^{3/2}$ f) $F'(x) = \frac{2}{3x^5}$
5. Encuentra las funciones F que satisfagan las condiciones dadas para cada caso.
   a) $F'(x) = 8x^2$, $F(0) = 1$ b) $F'(x) = \sqrt{x}$, $F(1) = 2$
   c) $F'(x) = 14x^{-4/3}$, $F(8) = -60$ d) $F'(x) = x^2\sqrt{x}$, $F(1) = 0$

Sección 2. La integral indefinida de una función.

Mediante el estudio de ésta sección esperamos que logres los siguientes aprendizajes:

- Conocer la relación que existe entre la antiderivada y la integral indefinida. Manejar la notación respectiva.
- Inducir la fórmula de $\int ax^n dx$

Necesitamos una notación conveniente para las antiderivadas que facilite trabajar con ellas. Como después veremos, debido a la relación entre antiderivadas e integrales definidas que proporciona el teorema fundamental del cálculo, se usa la notación $\int f(x)dx$ para una antiderivada de f y se llama integral indefinida. En lugar de usar el término *antiderivación* para el proceso de hallar F dada f, usaremos la expresión **integración indefinida**. Por lo que convertiremos la definición de la antiderivada de f como:

$$\int f(x)dx = F(x) + c \text{ , si y sólo si } F'(x) = f(x)$$

La constante arbitraria c se llama la **constante de integración**, f(x) se llama el **integrando** y x la **variable de integración**. En general no daremos explícitamente el dominio de F. Siempre supondremos que se ha elegido un intervalo adecuado en el cual f es integrable. Por último, cabe mencionar que no importa el símbolo empleado para la variable de integración.

Una integral indefinida $\int f(x)dx$ puede representar una antiderivada particular de f, o bien, una familia completa de antiderivadas (una para cada valor de la constante c).

Ejemplo 8. Encuentra la antiderivada general de h(x) = $6\sqrt[3]{x^2}$, o como lo diremos ahora, encuentra la integral indefinida $\int 6\sqrt[3]{x^2}dx$.

Solución. A partir de la solución del ejemplo 3, el problema se resuelve como

$$\int 6\sqrt[3]{x^2}dx = \frac{18}{5}x^{5/3} + c$$

Ejemplo 9. Encuentra la función F que satisface las condiciones F´(x) = $8x^2$ y F(0) = 1. Como debes saber, te estamos pidiendo que encuentres la integral F(x) = $\int 8x^2dx$ que cumple la condición F(0) = 1.

Solución. En este caso a = 8 y n = 2. Luego, la integral indefinida es

$$F(x) = \int 8x^2dx = 8\frac{x^3}{3} + c = \frac{8}{3}x^3 + c$$

Como F(0) = 1, se tiene que $\frac{8}{3}0^3 + c = 1$, de donde c = 1.

Por lo tanto, F(x) = $\frac{8}{3}x^3 + 1$.

Ejercicios 2

1. Escribe en términos de integrales indefinidas y resuelve cada inciso, determinando las funciones F que tengan por derivadas:
   a) F´(x) = 2x b) F´(x) = $3x^2$ c) F´(x) = $-6x^3$
   d) F´(x) = $-5x^{17}$ e) F´(x) = $-\frac{3}{2}x^{3/2}$ f) F´(x) = $\frac{2}{3x^5}$
2. Calcula las siguientes integrales indefinidas.
   a) $\int x^7dx$ b) $\int \sqrt[3]{z}dz$ c) $\int \frac{dy}{y^5}$
   d) $\int 5x^{-6}dx$ e) $\int \frac{dy}{2\sqrt[4]{y}}$ f) $-\int \frac{3dz}{z^{-5/7}}$
3. Escribe en términos de integrales y resuelve lo siguientes problemas. Encuentra las funciones F que satisfagan las condiciones dadas para cada caso.
   a) F´(x) = $9x^3$, F(0) = 1 b) F´(x) = $\sqrt{x}$, F(1) = 2
   c) F´(x) = $14x^{-4/3}$, F(-1) = 60 d) F´(x) = $x^2\sqrt{x}$, F(0) = 0

Sección 3. Fórmulas y métodos de integración.

A lo largo de ésta sección aprenderás a:

- Utiliza una tabla de integrales inmediatas que incluyan funciones trigonométricas y exponenciales.
- Avanzar en el reconocimiento de estructuras al identificar la fórmula de la integral inmediata que requiere utilizar para obtener una integral dada.
- Identificar las transformaciones algebraicas pertinentes para convertir una integral a una forma inmediata.

- Mejorar su desempeño algebraico, a través de la resolución de ejercicios de integración.
- Reconocer que el método de integración por partes amplía las posibilidades de integrar productos de funciones y saber que se desprende de la derivada de un producto.
- Utilizar el método de integración por partes.

Integrales inmediatas.

Es necesario recordar que si deseamos encontrar la integral de la función f(x) existen infinidad de funciones F(x) que cumplen con la condición: F'(x) = f(x), las cuales sólo difieren en una constante. Así pues, en general podemos hablar de que su integral es: F(x) + c, en donde c representa a una constante.

A continuación hemos escrito, en la columna de la izquierda, algunas de las derivadas y en la columna de la derecha su integral respectiva.

$\frac{d}{dx}x=1$	$\int dx = x + c$
$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1.$
$\frac{d}{dx}(f(x) \pm g(x)) = \frac{df(x)}{du} \pm \frac{dg(x)}{dx}$	$\int (f(x)dx \pm g(x)dx) = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
$\frac{d}{dx}af(x) = a\frac{df(x)}{dx}$	$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$
$\frac{d}{dx}e^x = e^x$	$\int e^x dx = e^x + c$
$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + c$
$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
$\frac{d\,\mathrm{sen}\,x}{dx} = \cos x$	$\int \cos x dx = \mathrm{sen}\,x + c$
$\frac{d\cos x}{dx} = -\mathrm{sen}\,x$	$\int \mathrm{sen}\,x dx = -\cos x + c$
$\frac{d\tan x}{dx} = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x dx = \tan x + c$
$\frac{d\cot x}{dx} = -\csc^2 x$	$\int \csc^2 x dx = -\cot x + c$
$\frac{d\sec x}{dx} = \sec x \tan x$	$\int \sec x \tan x dx = \sec x + c$
$\frac{d\csc x}{dx} = -\csc x \cot x$	$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + c$

Ahora veamos unos ejemplos donde utilicemos las fórmulas anteriores.

Ejemplo 10. Calcula la integral indefinida $\int (3x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 4x^2 - 5x + 3 - \frac{5}{x^6})dx$.

Solución. Aplicando la regla de la suma de integrales indefinidas y la regla de las potencias, tenemos que

$$\int (3x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 4x^2 - 5x + 3 - \frac{5}{x^6})dx = \int (3x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 4x^2 - 5x + 3 - 5x^{-6})dx$$

$$= 3\int x^4 dx - \frac{1}{2}\int x^3 dx + 4\int x^2 dx - 5\int x dx + 3\int dx - 5\int x^{-6} dx$$

$$= 3\left(\frac{x^5}{5}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4}\right) + 4\left(\frac{x^3}{3}\right) - 5\left(\frac{x^2}{2}\right) + 3x + -5\left(\frac{x^{-5}}{-5}\right) + c$$

$$= \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 3x + \frac{1}{x^5} + c$$

Ejemplo 11. Determina la integral indefinida de la función:

$$f(x) = \frac{3x^5 - 6x^2 + 2x - 5}{x^3}$$

Solución. Primero efectuemos la división indicada y luego realizamos la integración:

$$\frac{3x^5 - 6x^2 + 2x - 5}{x^3} = 3x^2 - 6x^{-1} + 2x^{-2} - 5x^{-3}$$

$$\int \left(3x^2 - 6x^{-1} + 2x^{-2} - 5x^{-3}\right)dx = 3\int x^2 dx - 6\int \frac{dx}{x} + 2\int x^{-2}dx - 5\int x^{-3}dx$$

$$= x^3 - 6\ln|x| - 2x^{-1} + \frac{5}{2}x^{-2} + c$$

Ejemplo 12. Completa los pasos que se te piden para determinar cada integral.

a) Calcula la integral indefinida $\int \sqrt{x}\left(x^2 - 3x + 5\right)dx$

Solución. Desarrolla el producto indicado:

$$\sqrt{x}\left(x^2 - 3x + 5\right) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

De lo anterior, tenemos que:

$$\int \sqrt{x}\left(x^2 - 3x + 5\right)dx = \int (\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_)dx$$

Finalmente, comprueba que:

$$\int \sqrt{x}\left(x^2 - 3x + 5\right)dx = \frac{2}{7}x^{7/2} - \frac{6}{5}x^{5/2} + \frac{10}{3}x^{3/2} + c$$

b) Encuentra $\int \frac{3t^3 - 2t^2 + t^2\sqrt{t} - 1}{t^2}dt$.

Solución. Efectúa la división

$$\frac{3t^3 - 2t^2 + t^2\sqrt{t} - 1}{t^2} =$$

Con lo que se obtiene que:

$$\int \frac{3t^3 - 2t^2 + t^2\sqrt{t} - 1}{t^2}dt = \int (\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)dt$$

Por lo que podrás comprobar que:

$$\int \frac{3t^3 - 2t^2 + t^2\sqrt{t} - 1}{t^2} dt = \frac{3}{2}t^2 - 2t + \frac{2}{3}t^{3/2} + \frac{1}{t} + c$$

c) Determina la integral indefinida $\int \frac{seny}{\cos^2 y} dy$.

Solución. Escribe el integrando en una forma sencilla, para lo cual debes simplificar la expresión $\frac{seny}{\cos^2 y}$ haciendo uso de que tany = $\frac{seny}{\cos y}$ y de que secy = $\frac{1}{\cos y}$. Luego, utilizando la fórmula adecuada de integración llegarás al siguiente resultado:

$$\int \frac{seny}{\cos^2 y} dy = \sec y + c$$

Ejemplo 13. Resuelve las siguientes integrales:

a) $\int x^6 dx$ b) $\int \sqrt{x} dx$ c) $\int \frac{dx}{x^2}$

d) $\int ax^5 dx$ e) $\int \left(2x^3 - 5x^2 - 3x + 4\right) dx$ f) $\int \left(\frac{2m}{\sqrt{x}} - \frac{n}{x^2} + 3p\sqrt[3]{x^2} \right) dx$

Solución.

a) $\int x^6 dx = \frac{x^{6+1}}{6+1} + c = \frac{x^7}{7} + c$.

b) $\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + c$.

c) $\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x} + c$.

d) $\int ax^5 dx = a\int x^5 dx = \frac{ax^6}{6} + c$.

e)
$$\begin{aligned} \int \left(2x^3 - 5x^2 - 3x + 4\right) dx &= \int 2x^3 dx - \int 5x^2 dx - \int 3x dx + \int 4 dx \\ &= 2\int x^3 - 5\int x^2 dx - 3\int x dx + 4\int dx \\ &= \frac{x^4}{2} - \frac{5x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4x + c . \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} \int \left(\frac{2m}{\sqrt{x}} - \frac{n}{x^2} + 3p\sqrt[3]{x^2} \right) dx &= \int 2mx^{-\frac{1}{2}} dx - \int nx^{-2} dx + \int 3px^{\frac{2}{3}} dx \\ &= 2m\int x^{-\frac{1}{2}} dx - n\int x^{-2} dx + 3p\int x^{\frac{2}{3}} dx \\ &= 2m\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - n\frac{x^{-1}}{-1} + 3p\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + c = 4m\sqrt{x} + \frac{n}{x} + p\frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}} + c \end{aligned}$$

Ejemplo 14. Determinar las siguientes integrales

a) $\displaystyle\int\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^3 dx$ b) $\displaystyle\int\left(ax-bx\right)(ax+bx)dx$

Solución.

a) $$\int\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^3 dx=\int\left[(a^{\frac{2}{3}})^3+3(a^{\frac{2}{3}})^2(-x^{\frac{2}{3}})+3a^{\frac{2}{3}}(-x^{\frac{2}{3}})^2+(-x^{\frac{2}{3}})^3\right]dx$$

$$=\int\left(a^2-3a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}}+3a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}}-x^2\right)dx$$

$$=a^2x-\frac{9}{5}a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{5}{3}}+\frac{9}{7}a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{7}{3}}-\frac{x^3}{3}+c$$

b) $$\int\left(ax-bx\right)(ax+bx)dx=\int\left(a^2x^2-b^2x^2\right)dx$$

$$=a^2\frac{x^3}{3}-b^2\frac{x^3}{3}+c$$

$$=\frac{x^3}{3}(a^2-b^2)+c$$

Ejercicios 3

1. Calcula las siguientes integrales indefinidas:

   a) $\int 4senxdx$ b) $\int 3\cos xdx$ c) $\int(-2\sec^2 x)dx$

   d) $\int(-5\csc^2 x)dx$ e) $\int 6\sec x\tan xdx$ f) $\int(-7\csc x\cot x)dx$

   g) $\int 4e^x dx$ h) $\int 4\cdot 6^x dx$ i) $\int\frac{5}{x}dx$

2. Resuelve las siguientes integrales:

   a) $\int x^{\frac{3}{2}}dx$ b) $\int\sqrt{ax}dx$ c) $\int\frac{4x^2-2\sqrt{x}}{x}dx$

   d) $\int\left(\frac{x^2}{2}-\frac{2}{x^2}\right)dx$ e) $\int y(a-by^2)dy$ f) $\int x(2x+1)^2dx$

3. Determina la integral indefinida de las funciones siguientes.

   a) $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ b) $f(x) = 3x^4 + 5x - 6$ c) $f(x) = 1 - 2x^2 + 3x^3$

   d) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ e) $f(x) = \frac{2}{x^3} + 2x^{3/2} - 1$ f) $f(x) = x^{5/2} - \frac{5}{x^4} - \sqrt{x}$

   g) $f(x) = \frac{3}{2}x^{1/2} + 7e^x$ h) $f(x) = \frac{2}{x^{3/4}} - \frac{3}{x^{2/3}}$ i) $f(x) = \sqrt[3]{x}(4x^3 - 4x + 6)$

   j) $f(x) = (x^2 - 1)^2$ k) $f(x) = \frac{x^3+3x^2-1}{\sqrt{x}}$ l) $f(x) = \frac{1-\cos x}{sen^2x}$

Cambio de variable (sustitución).

Recordemos que toda regla para derivación puede transformarse en una regla para integración indefinida. Por ejemplo

$$D_x(\sqrt{x^3-1}) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}} \text{ implica que } \int \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}}dx = \sqrt{x^3-1}+c$$

$D_x(x^5 + 3x^2)^{12} = 12(x^5 + 3x^2)^{11}(5x^4 + 6x)$ implica que

$$\int 12(x^5+3x^2)^{11}(5x^4+6x)dx = (x^5 + 3x^2)^{12} + c$$

Se puede usar un procedimiento parecido utilizando la regla de la cadena para obtener una fórmula general para la integración indefinida. Supongamos que F es una antiderivada de una función f, de manera que F´= f. Además supongamos que g es otra función derivable tal que g(x) está en el dominio de F para todo x en algún intervalo cerrado [a, b]. Podemos ahora considerar la función compuesta definida por F(g(x)) para todo x en [a, b]. Utilizando la regla de la cadena y el hecho de que F´= f obtenemos:

$$D_xF(g(x)) = F'(g(x))\, g'(x) = f(g(x))\, g'(x).$$

Esto a su vez nos da la fórmula de integración:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + c \text{, donde } F' = f.$$

Hay una manera sencilla de recordar esta fórmula. Si hacemos u = g(x) y sustituimos formalmente g´(x) dx por la diferencial du, obtenemos

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + c = F(g(x)) + c.$$

Este artificio de memorización indica que se puede considerar a g´(x)dx como el producto de g´(x) y de dx.

El método de sustitución desempeña el mismo papel para integrales que aquel que desempeña la regla de la cadena para derivadas, y que a continuación enunciamos:

Método de sustitución o cambio de variable. Sea g una función derivable y suponga que F es una antiderivada de f. Entonces, si u = g(x)

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + c = F(g(x)) + c.$$

Como una aplicación del método de sustitución extenderemos la regla de potencias a la siguiente fórmula de potencias de funciones:

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c \qquad (1)$$

donde u = g(x), du = g´(x)dx , f(x) = x^n y n ≠ -1. Las soluciones de la mayor parte de los ejercicios en está sección harán uso de la fórmula (1). Al final aplicaremos el método de sustitución a otros tipos de integrales.

Ejemplo 15. Calcula $\int (x^3+1)^5(3x^2)dx$.

Solución. Sea u = x^3 + 1. Entonces du = $3x^2$dx, por lo que:

$$\int (x^3+1)^5(3x^2)dx \;=\; \int u^5 du = \frac{u^6}{6} + c = \frac{\left(x^3+1\right)^6}{6} + c\,.$$

Ejemplo 16. Determina $\int x^2\sqrt{x^3 - 5}dx$.

Solución. Consideremos que u = x^3 – 5, de donde du = $3x^2$ dx. Para obtener la forma de (1) es necesario introducir el factor 3 en el integrando.
Para hacerlo sin modificar la expresión, multiplicamos y dividimos por 3, como sigue:

$$\int x^2\sqrt{x^3 - 5}dx = \frac{1}{3}\int \left(x^3 - 5\right)^{1/2}(3x^2dx)\,.$$

Ahora hacemos la sustitución indicada y obtenemos:

$$\int x^2\sqrt{x^3 - 5}dx = \frac{1}{3}\int u^{1/2}du = \frac{1}{3}\left[\frac{u^{3/2}}{3/2} + k\right]$$

donde k es una constante.

Es necesario volver a la variable original x, por lo que resulta:

$$\int x^2\sqrt{x^3 - 5}dx = \frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}(x^3 - 5)^{3/2} + k\right] = \frac{2}{9}(x^3 - 5)^{3/2} + \frac{1}{3}k\,.$$

En lugar de usar constantes de integración tales como $\frac{1}{3}k$, suele escribirse el resultado como:

$$\int x^2\sqrt{x^3 - 5}dx \;=\; \frac{2}{9}(x^3 - 5)^{3/2} + c\,.$$

De aquí en adelante manejaremos constantes de integración de diversas maneras sin mencionar explícitamente las relaciones que existen entre ellas. Más aún, en lugar de proceder como antes, debería estar claro que se puede integral como

$$\int x^2\sqrt{x^3 - 5}dx = \frac{1}{3}\int u^{1/2}du = \frac{1}{3}\left[\frac{u^{3/2}}{3/2}\right] + c = \frac{2}{9}(x^3 - 5)^{3/2} + c\,.$$

Ejemplo 17. Completa los pasos que se te piden y resuelve las siguientes integrales:

a) $\int \frac{6x^2}{\left(5x^3+7\right)^4}dx$

Solución. Escribe la integral con la constante fuera de ella

$$\int \frac{6x^2}{\left(5x^3+7\right)^4}dx \;=\; \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Ahora selecciona adecuadamente a u y encuentra du.

u = ________, du = _______,

Multiplica y divide por 15 en el integrando:

$$\int \frac{6x^2}{\left(5x^3+7\right)^4}dx = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Realiza el cambio de variable e integra. Si todo lo hiciste bien, obtendrás que:

$$\int \frac{6x^2}{\left(5x^3+7\right)^4}dx = -\frac{2}{15\left(5x^3+7\right)^3}+c.$$

b) Calcula $\int x\sqrt{x+1}\,dx$.

Solución. Si u = $\sqrt{x+1}$, entonces:

u^2 =_______, x = _______ y dx = _________

Sustituyendo los valores de x, $\sqrt{x+1}$ y dx, comprueba que se obtiene:

$$\int x\sqrt{x+1}\,dx = 2\int u^2(u^2-1)du$$

Al resolver la integral en términos de u, resulta:

$$\int x\sqrt{x+1}\,dx =$$

Finalmente, comprueba que haciendo la sustitución de u se llega a que:

$$\int x\sqrt{x+1}dx = \frac{2}{5}(x+1)^{5/2}-\frac{2}{3}(x+1)^{1/2}+c$$
$$=\frac{2}{15}(x+1)^{3/2}(3x-2)+c$$

Ejemplo 18. Determina $\int 2b^2\left(a^2+b^2x^2\right)^{\frac{1}{2}}xdx$**.**

Solución. Tomemos a $u=a^2+b^2x^2$. La diferencial de u es: du = $2b^2$xdx. Si realizamos la sustitución correspondiente en la integral obtenemos:

$$\int 2b^2\left(a^2+b^2x^2\right)^{\frac{1}{2}}xdx = \int\left(a^2+b^2x^2\right)^{\frac{1}{2}}2b^2xdx = \int u^{\frac{1}{2}}du$$

La integral que hemos obtenido es muy sencilla de calcular:

$$\int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+c$$

Finalmente, recordando que $u=a^2+b^2x^2$ obtenemos:

$$\int 2b^2\left(a^2+b^2x^2\right)^{\frac{1}{2}}xdx = \frac{2}{3}(a^2+b^2x^2)^{\frac{3}{2}}+c$$

Ejemplo 19. Encuentra $\int \frac{2xdx}{(x^2-3)^3}$.

Solución. En este caso usaremos la siguiente variable: u = x^2-3. La diferencial de u es: du = 2xdx. Ahora sustituimos en la integral y obtenemos:

$$\int \frac{du}{u^3} = \int u^{-3}du = \frac{u^{-2}}{-2} + c = -\frac{1}{2u^2} + c = -\frac{1}{2(x^2-3)^2} + c$$

Ejemplo 20. Determina $\int \operatorname{sen}x \cos x dx$.

Solución. Ahora consideremos que u = senx, por lo que du = cosxdx y:

$$\int \operatorname{sen}x \cos x dx = \int u du = \frac{u^2}{2} + c = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + c \square$$

Ejercicios 4

1. Comprueba las siguientes integrales:

a) $\int \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2 dx}{\sqrt{x}} = -\frac{2\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^3}{3} + c$

b) $\int \sqrt{a+bx}dx = \frac{2(a+bx)^{\frac{3}{2}}}{3b} + c$

c) $\int \frac{dy}{\sqrt{a-by}} = -\frac{2\sqrt{a-by}}{b} + c$

d) $\int \frac{xdx}{(a+bx^2)^3} = -\frac{1}{4b(a+bx^2)^2} + c$

e) $\int \frac{(2+\ln x)dx}{x} = \frac{(2+\ln x)^2}{2} + c$

f) $\int \operatorname{sen}^2 x \cos x dx = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + c$

g) $\int \tan\frac{x}{2}\sec^2 x dx = \tan^2\frac{x}{2} + c$

h) $\int \left(\frac{\sec x}{1+\tan x}\right)^2 dx = -\frac{1}{1+\tan x} + c$

i) $\int \frac{x^2 dx}{2+x^3} = \frac{\ln\left|2+x^3\right|}{3} + c$

j) $\int \frac{(y+2)dy}{y^2+4y} = \frac{\ln\left|y^2+4y\right|}{2} + c$

k) $\int \frac{e^\theta d\theta}{a+be^\theta} = \frac{\ln\left|a+be^\theta\right|}{b} + c$

l) $\int \frac{\sec^2 y dy}{a+b\tan y} = \frac{1}{b}\ln\left|a+b\tan y\right| + c$

m) $\int \frac{e^{2x}dx}{e^{2x}+1} = \frac{1}{2}\ln\left|e^{2x}+1\right| + c$

2. Calcula la integral indicada utilizando la sustitución propuesta u otra que consideres conveniente:

a) $\int x^3\sqrt{x^4+5}\, dx$, u = x^4 + 5

b) $\int \frac{\left(\sqrt{x}+4\right)^5}{\sqrt{x}}dx$, u = $\sqrt{x}$ +4

c) $\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}dx$, $u = \sqrt{x}+1$

3. Determina las siguientes integrales:

a) $\int x\left(x^2+5\right)^4 dx$ b) $\int x^3\sqrt[4]{x^4-3}\ dx$ c) $\int (2x+1)\left(x^2+x\right)^3 dx$

d) $\int \left(x^2+2x\right)\left(x^3+3x^2\right)^4 dx$ e) $\int \frac{2x+1}{\left(x^2+x-1\right)^2}dx$ f) $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x+3}}dx$

Método de integración por partes.

Este método puede aplicarse a una amplia variedad de integrales. Por ejemplo, funciona muy bien para resolver integrales como

$$\int xe^x dx,\ \int x\operatorname{sen}x\ dx,\ \int x\ln x\ dx,\ \int x^2\sqrt{x+1}\ dx\ ,\ \int \cos^2 x\ dx,\ ...$$

La integración por partes se basa en la fórmula de la derivada de un producto de funciones. Si u y v son funciones de x (u = f(x), v = g(x)) por la fórmula de la diferencial de un producto de funciones, tendremos:

$$d(uv) = udv + vdu$$

Ahora, despejamos udv obteniendo

$$udv = d(uv) – vdu$$

Integramos en ambos miembros y llegamos a que:

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu,$$

con lo que hemos llegado a la fórmula de integración por partes, que enunciaremos en el siguiente teorema:

Teorema. (Fórmula de integración por partes). Si u y v son funciones de x con derivadas continuas, entonces

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Ejemplo 21. Encuentra $\int xe^x dx$.

Solución. Para aplicar el método de integración por partes, necesitamos escribir la integral en la forma $\int udv$. Tenemos cuatro opciones posibles:

a) $u = x$ y $dv = e^x dx$ b) $u = e^x$ y $dv = xdx$
c) $u = 1$ y $dv = x e^x dx$ d) $u = x e^x$ y $dv = dx$

Desarrollemos la primera opción donde $u = x$ y $dv = e^x dx$: $du = dx$ y $v = e^x$. Así pues,

$$\begin{aligned}\int udv &= uv - \int vdu\\ \int xe^x dx &= x e^x - \int e^x dx\\ &= x e^x - e^x + c.\end{aligned}$$

Puedes comprobar el resultado derivándolo y viendo que se obtiene el integrando original.

En el cálculo anterior, en la obtención de la función v a partir de dv, se omitió la constante de integración y se escribió v = e^x. Si se hubiera escrito v = $e^x + c_1$, la constante c_1 se habría añadido a la constante c, obteniendo una nueva constante. Este es siempre el caso en la integración por partes, de modo que por lo general se omitirá la constante cuando se calcule v a partir de dv.

Ahora analizaremos la segunda opción:

En esta opción u = e^x y dv = xdx, luego du = e^x dx y v = $\frac{x^2}{2}$. Por lo tanto,

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int xe^x dx = \frac{x^2}{2}e^x - \int \frac{x^2}{2}e^x dx.$$

La integral de la izquierda nos resulta más complicada que la integral de la derecha, por lo que desechamos la opción y escogemos otra.

La opción 3 tenemos que u = 1 y dv = x e^xdx, por lo que du = dx y v = $\int xe^x dx$. Así pues,

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int xe^x dx = \int xe^x dx - \int (\int xe^x dx)dx.$$

Como se puede observar quedamos peor que cuando comenzamos, por lo que abandonamos esta opción.

En la opción 4 se tiene que u = x e^x y dv = dx, de donde du = (e^x + xe^x)dx y v = x. Así, tendremos que

$$\int xe^x dx = x^2 e^x - \int x(e^x + xe^x)dx$$

$$= x^2 e^x - \int xe^x dx - \int x^2 e^x dx.$$

Las dos integrales que nos quedan no las conocemos, siendo además más complicadas que la integral original.

De aquí en adelante no trabajaremos con las distintas opciones que se pueden intentar, como en el ejemplo anterior, únicamente trabajaremos con la que nos llevará al resultado que buscamos.

Ejemplo 22. Encuentra $\int x\sqrt{x+1}\,dx$.

Solución. Sean u = x y dv = $\sqrt{x+1}\,dx$, luego du = dx y v = $\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}$. Así pues,

$$\int x\sqrt{x+1}\,dx = \frac{2}{3}x(x+1)^{3/2} - \frac{2}{3}\int (x+1)^{3/2}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}x\left(x+1\right)^{3/2} - \frac{2}{3}\left(\frac{2}{5}\right)\left(x+1\right)^{5/2} + c$$

$$= \frac{2}{3}x\left(x+1\right)^{3/2} - \frac{4}{15}\left(x+1\right)^{5/2} + c.$$

A veces tenemos que usar la integración por partes más de una vez para obtener el resultado de una integral. A continuación te presentamos algunos ejemplos.

Ejemplo 23. Calcula $\int x^2 \text{senx}\, dx$.

Solución. Consideremos a u = x^2 y dv = senx dx, luego du = 2x dx y v = - cosx. Ahora, la integración por partes nos lleva a

$$\int x^2 \text{senx}\, dx = x^2(-\cos x) - \int (-\cos x)(2x dx)$$

$$= - x^2 \cos x + 2\int x\cos x\, dx.$$

Con la primera integración por partes hemos simplificado la integral original. La nueva integral es del mismo tipo que la inicial, por lo que volvemos a aplicar el método de integración por partes, esta vez tomaremos a u = x y a dv = cosx dx, por lo que du = dx y v = senx, luego integrando por partes obtenemos

$$\int x\cos x\, dx = x\, \text{senx} - \int \text{senx}\, dx$$

$$= x\, \text{senx} + \cos x + c.$$

Reuniendo los dos resultados, paso por paso, nos queda

$$\int x^2 \text{senx}\, dx = x^2(-\cos x) - \int (-\cos x)(2x dx)$$

$$= x^2(-\cos x) + 2\int x\cos x dx$$

$$= - x^2 \cos x + 2(x\, \text{senx} - \int \text{senx}\, dx)$$

$$= - x^2 \cos x + 2x\, \text{senx} + 2\cos x + c.$$

Ejemplo 24. Determina $\int x^2 e^{3x} dx$.

Solución. Sean u = x^2 y dv = e^{3x} dx, luego du = 2x dx y v = $\frac{1}{3}e^{3x}$. Así pues,

$$\int x^2 e^{3x} dx = \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{3}\int x e^{3x} dx$$

Para integrar $\int x e^{3x} dx$, consideremos que u = x y dv = e^{3x}dx, por lo que du = dx y v = $\frac{1}{3}e^{3x}$. Substituyendo tendremos que,

$$\int x^2 e^{3x} dx = \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{3}\int x e^{3x} dx$$

$$= \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x} dx\right)$$

$$= \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{3}\frac{1}{3} e^{3x}\right) + c$$

$$=\frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + c$$

Ejemplo 25. Calcula $\int e^x \cos x \, dx$.

Solución. Consideremos que $u = e^x$ y $dv = \cos x dx$, luego, $du = e^x\, dx$, $v = \operatorname{sen} x$, por lo que:

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x \, dx.$$

La segunda integral es muy parecida a la primera, excepto que aparece la función senx en lugar de cosx. Para calcularla usamos nuevamente la integración por partes con

$$u = e^x,\ dv = \operatorname{sen} x dx,\ du = e^x\, dx,\ v = -\cos x,$$

obtenemos

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - [\,-e^x \cos x - \int (-\cos x)e^x dx\,]$$

$$= e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \, dx.$$

La integral desconocida aparece ahora en ambos lados de la ecuación pero con signos diferentes, esto nos permite unir las dos integrales

$$2\int e^x \cos x \, dx = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x + c_1.$$

Al dividir entre 2 y nombrar de nuevo la constante de integración, obtenemos

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x}{2} + c. \quad (c = \frac{c_1}{2})$$

Ejemplo 26. Calcula $\int \operatorname{sen}^2 x \, dx$.

Solución. Si $u = \operatorname{sen} x$ y $dv = \operatorname{sen} x$ entonces $du = \cos x dx$ y $v = -\cos x$. Luego,

$$\int \operatorname{sen}^2 x \, dx = -\operatorname{sen} x \cos x - \int (-\cos x)\cos x \, dx$$

$$= -\operatorname{sen} x \cos x + \int \cos^2 x \, dx$$

En vez de integrar otra vez por partes, se cambia la forma de la integral del lado derecho usando la identidad $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, de donde $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$. Esto da

$$\int \operatorname{sen}^2 x \, dx = -\operatorname{sen} x \cos x + \int (1 - \operatorname{sen}^2 x)dx$$

$$= -\operatorname{sen} x \cos x + \int dx - \int \operatorname{sen}^2 x \, dx$$

Sumando $\int sen^2 x dx$ a ambos lados de esta última ecuación, obtenemos

$$2\int \operatorname{sen}^2 x \, dx = -\operatorname{sen} x \cos x + x + c_1.$$

Al dividir entre 2 y nombrar de nuevo la constante de integración, obtenemos

$$\int \text{sen}^2 x\ dx = \frac{-\text{senxcosx} + x}{2} + c$$

Ejemplo 27. Calcula $\int \ln x\ dx$.

Solución. Sean u = lnx y dv = dx, por lo tanto, du = $\frac{dx}{x}$, v = x, y

$$\int \ln x\ dx = x \ln x - \int x\left(\frac{dx}{x}\right) = x \ln x - x + c.$$

Observa que para evaluar una integral definida, siempre es posible aplicar la integración por partes a la integral indefinida correspondiente, y luego, evaluar la antiderivada resultante entre los límites de integración. Sin embargo, cuando la integración no sea demasiado complicada debe aplicarse integración por partes directamente a la integral definida.

Por último, veamos el denominado **método tabular**. En problemas que exigen sucesivas integraciones por partes, conviene organizar el trabajo. Este método funciona bien en integrales de los tipos $\int x^n senaxdx$, $\int x^n \cos axdx$ y $\int x^n e^{ax}dx$.

Ejemplo 28. Determina $\int x^3 e^{2x} dx$.

Solución. Comenzamos haciendo u = x^3 y dv = e^{2x}dx. A continuación, elaboramos una tabla de tres columnas como sigue.

Signos alternados		u y sus derivadas	v´y sus primitivas
+	$\longrightarrow$	x^3	e^{2x}
-	$\longrightarrow$	$3x^2$	$\frac{1}{2}e^{2x}$
+	$\longrightarrow$	$6x$	$\frac{1}{4}e^{2x}$
-	$\longrightarrow$	6	$\frac{1}{8}e^{2x}$
+	$\longrightarrow$	0	$\frac{1}{16}e^{2x}$

Derivar hasta obtener una derivada nula

La solución se obtiene sumando los productos con signo de las entradas diagonales.

$$\int x^3 e^{2x} dx = \frac{1}{2}x^3 e^{2x} - \frac{3}{4}x^2 e^{2x} + \frac{3}{4}xe^{2x} - \frac{3}{8}e^{2x} + c$$

Ejercicios 5

Determina las siguientes integrales:

1. $\int xe^{-x}dx$
2. $\int x\ln x\ dx$
3. $\int xsen\left(\frac{x}{2}\right)dx$
4. $\int x^2\cos xdx$
5. $\int x^2\sqrt{1-x}dx$
6. $\int x\sec^2 xdx$
7. $\int\left(x^2-5x\right)e^x dx$
8. $\int \cos^2 xdx$
9. $\int e^{2x}\cos 3xdx$
10. $\int e^{-2x}sen2xdx$
11. $\int sen^3 xdx$
12. $\int \frac{xe^x dx}{\left(1+x\right)^2}$
13. $\int x^2e^{-3x}dx$
14. $\int x^3senxdx$
15. $\int x^5e^xdx$
16. $\int x^2\left(1+x\right)^{-1/2}dx$

Bibliografía

1. Allan B. Cruse y Millianne Lehman. "Lecciones de Cálculo 1". Fondo de Cultura Educativo Iberoamericano, México 1987. Leccion 17.
2. Earl W. Swokowski, "Cálculo con geometría analítica". Wadsworth Internacional Iberoamérica, México 1982. Secciones 4.9, 5.6 y 10.1.
3. Del Grande - Duff. "Introducción al Cálculo Elemental". Harla . México 1976. Capítulo 6 y secciones 7.5, 7.7 y 7.8.
4. James Stewart, "Cálculo. Conceptos y Contextos". Thomson, México, 1999. Secciones de 4.9, 5.5 y 5.6.
5. Larson – Hostetler – Edwards, "Cálculo". Sexta Edición , Volumen 1. Mc Graw – Hill, México. Secciones 6.1, 10.1, 10.3 y 10.7