UNIDAD 3. LA INTEGRAL DEFINIDA

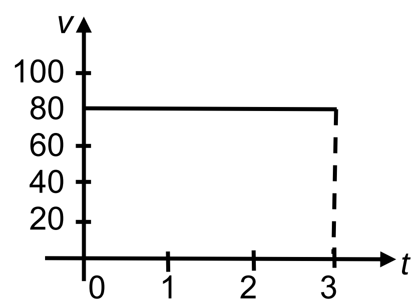
Propósitos: Introducir el concepto de integral definida como una función-área para construir su significado. Relacionar los conceptos de derivada e integral en la formulación del teorema Fundamental del Cálculo.

Sección 1. Situaciones que se representan mediante áreas.

Mediante el trabajo que realices en ésta sección, pretendemos que logres los siguientes aprendizajes:

- Asociar el área bajo una curva con la solución a una situación dada.
- Calcular el área bajo la gráfica de funciones constantes y lineales, auxiliándose de la figura geométrica respectiva.
- Obtener la función-área, que proporciona el área bajo la gráfica de una función constante o lineal en intervalos de la forma $[0, x]$, $[a, x]$, $[a, b]$.
- Relaciona la antiderivada de una función con la función–área asociada.

Ejemplo 1. Luis le preguntó a su amigo Juan: ¿Si manejé a una velocidad constante de 80 kilómetros por hora durante 3 horas, qué distancia recorrí? Juan le contestó que 240 kilómetros. Claro, dijo Luis, pero quiero que lo resuelvas utilizando una gráfica.
Juan trazó un dibujó como el que sigue y basándose en él le explicó a Luis la solución.

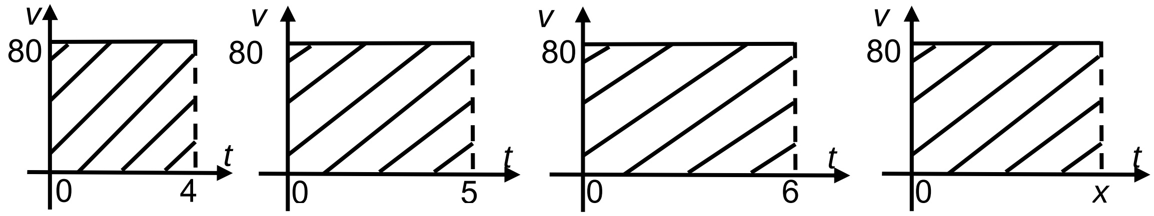


a) ¿Qué representa el segmento de recta horizontal que aparece en la gráfica?
b) ¿Cómo quedará representado en la gráfica el resultado correspondiente a la distancia recorrida?
c) Determina la representación gráfica y la distancia recorrida, si Manuel manejó durante: (i) 4 horas; (ii) 5 horas; (iii) 6 horas; (iv) x horas.
d) ¿Qué distancia recorrió de la segunda a la tercera hora y cuál es su representación gráfica?
e) Encuentra una representación gráfica y la distancia recorrida del tiempo $t = a$, al tiempo $t = b$.
f) Establece la función, $s(t)$, que relaciona la distancia recorrida s y el tiempo transcurrido t.

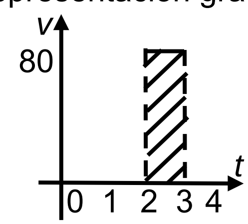
Solución.

a) Representa a la gráfica de la función $v(t)$ en el intervalo $[0, 3]$.
b) Cómo el área comprendida por la gráfica de $v(t)$, el eje x y el intervalo $[0, 3]$.
c) A continuación se representan gráficamente las soluciones:

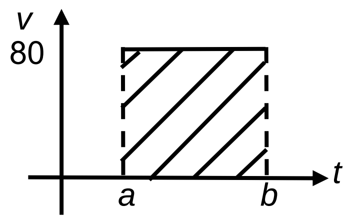
(i) 4 horas (ii) 5 horas (iii) 6 horas (iv) x horas.



d) Recorrió 80 kilómetros. Su representación gráfica es:



e) La distancia recorrida del tiempo $t = a$, al tiempo $t = b$ es: $80b - 80a$. Su representación gráfica es:



f) $s(t) = 80t$.

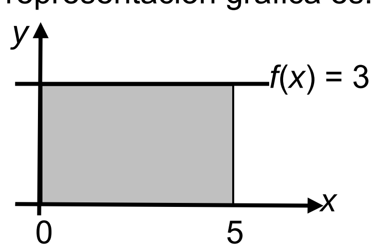
Ejemplo 2. Determina el resultado de la integral $\int_0^5 3dx$.

a) Escribe la función $f(x)$ que se está integrando.
b) Determina el área encerrada por la grafica de la función y el eje x en el intervalo [0,5]?

Solución.

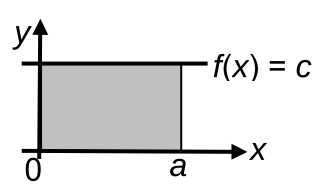
a) $f(x) = 3$.

b) El área es igual a 15 u^2 y su representación gráfica es:



Ejemplo 3. Encuentra $\int_0^a c\,dx$, así como su representación gráfica.

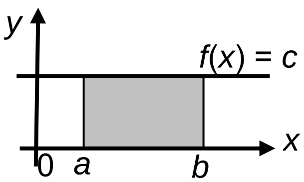
Solución. $\int_0^a c\,dx = ac\ u^2$. Su representación gráfica es:



En muchas ocasiones se omite u^2 (unidades cuadradas), porque se sobreentiende que si calculamos áreas tendremos ese tipo de unidades.

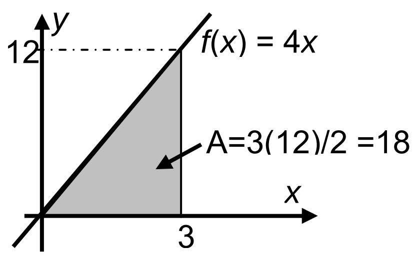
Ejemplo 4. Determina $\int_a^b cdx$. Traza su representación gráfica.

Solución. $\int_a^b cdx = (b-a)c$. Su representación gráfica es.



Ejemplo 5. Determina $\int_0^3 4xdx$. También encuéntrala como el área bajo la gráfica del la función que se está integrando y el eje *x*, en el intervalo [0,3].

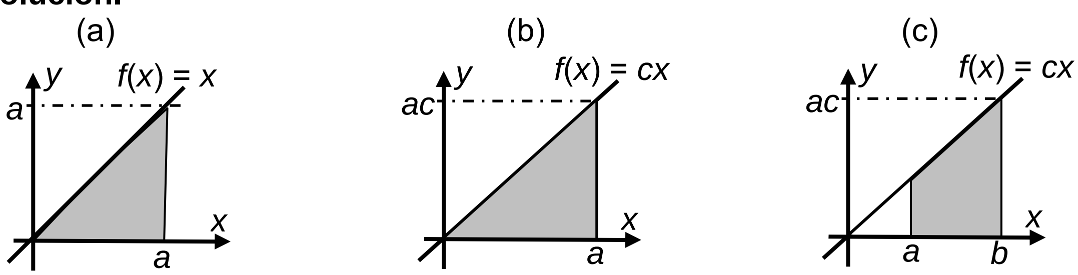
Solución. $\int_0^3 4xdx = (2(3)^2 - 2(0)^2) = 18$. Gráficamente:



Ejemplo 6. Comprueba gráficamente que:

a) $\int_0^a xdx = \frac{a^2}{2}$ b) $\int_0^a cxdx = \frac{a^2c}{2}$ c) $\int_a^b cxdx = c\frac{b^2}{2} - c\frac{a^2}{2} = c(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2})$

Solución.

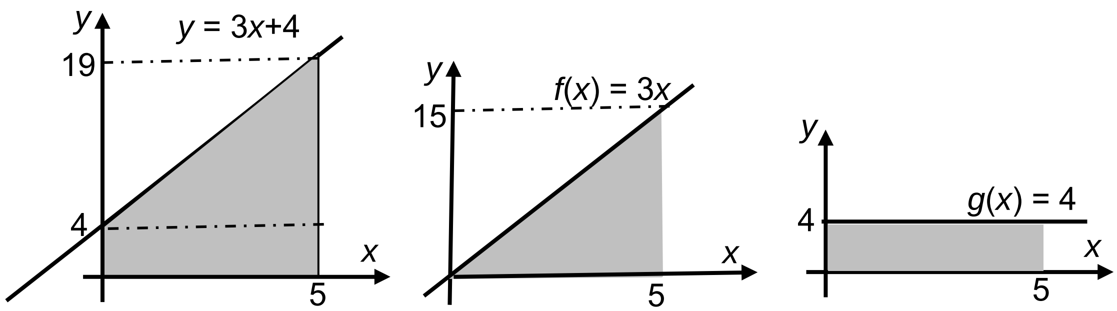


De los incisos anteriores, podemos observar dos propiedades de las integrales:

$$\int_0^a cxdx = c\int_0^a xdx = \quad \text{y} \quad \int_a^b f(x)dx = \int_0^b f(x)dx - \int_0^a f(x)dx$$

Ejemplo 8. Comprueba gráficamente, realizando los cálculos de las áreas respectivas, que: $\int_0^5 (3x+4)dx = \int_0^5 3xdx + \int_0^5 4dx = \frac{3(5^2)}{2} + 4(5) = 57.5$

Solución.

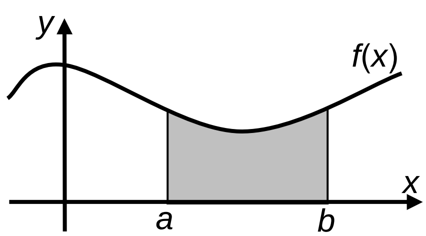


Lo anterior muestra otra propiedad que se cumple en todas las integrales:

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Hemos obtenido que el resultado de una integral lo podemos interpretar como el área bajo la gráfica de la función y el eje *x* en el intervalo dado.

Es posible afirmar que si deseamos determinar el área comprendida por la gráfica de una función, digamos *f*(*x*), y el eje *x*, en el intervalo [*a*,*b*], la podemos escribir como $\int_a^b f(x)dx$, la cual a su vez se puede representar como:



El área de la región sombreada es el resultado de la integral. Claro que concebir la integral como el área bajo una curva es sólo una de las distintas formas en que ésta se puede interpretar. A continuación trataremos esta idea, para lo cual vamos a trabajar con varios ejemplos que nos serán de utilidad.

Ejercicios 1

Determina el resultado de cada una de las siguientes integrales, para lo cual te pedimos, que determines la función que se está integrando y traces su gráfica respectiva, en la que indiques el resultado sombreando el área respectiva.

1. $\int_0^5 9dx$.

2. $\int_2^5 (7x+3)dx$

3. $\int_1^7 (ax+b)dx$

Sección 2. La integral Definida.

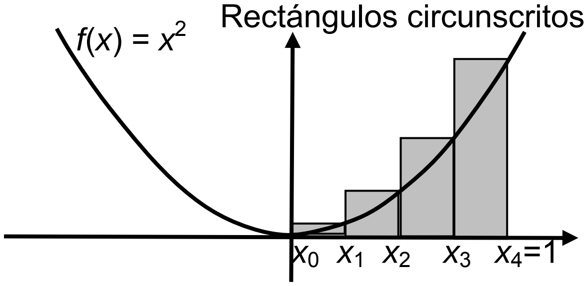
En ésta sección, pretendemos que logres los siguientes aprendizajes:

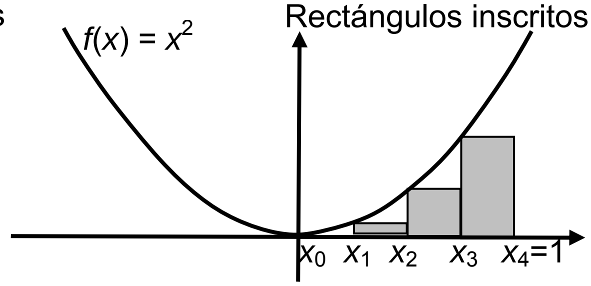
- Interpretar el área bajo una curva de la forma $f(x) = x^n$.
- Reconocer a la aproximación numérica como un método general para calcular el área bajo una curva.
- Asociar el método de aproximación numérica para calcular un área con un proceso infinito.
- Analizar el comportamiento del proceso infinito asociado a la aproximación numérica para conocer si tiene un valor límite y cuál es éste.
- Aproxima el área bajo una curva utilizando sumas de áreas.

Ejemplo 9. Determinar el área bajo la curva $\int_0^1 x^2 dx$.

Solución. Primero vamos a resolver el problema de manera aproximada, pues esa experiencia nos servirá para hacerlo de manera exacta.

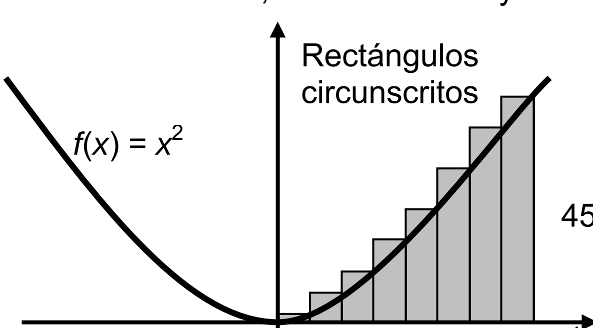
Debemos de encontrar el área bajo la curva $f(x) = x^2$ en el intervalo [0,1]. Para hacerlo se acostumbra inscribir o circunscribir rectángulos, como muestran las figuras.

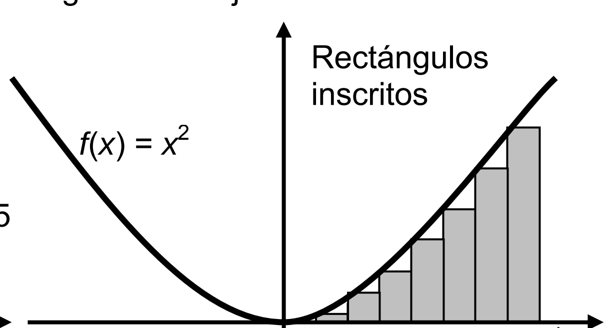




Como podrás ver cuando circunscribimos rectángulos habrá un exceso en el cálculo del área bajo la curva, y cuando inscribimos un faltante, al cual se acostumbra llamarlo defecto.

En nuestra figura el intervalo [0,1], quedará subdividido en subintervalos, cuyos extremos son: x_0, x_1, x_2, x_3 y x_4. Tanto el exceso como el defecto, en el cálculo de áreas, son el error que tendremos al determinarlas de esa forma. Si el número de intervalos aumenta, el error disminuye. En la figura de abajo ilustramos lo anterior.





Para determinar el área aproximada debemos sumar las áreas de cada uno de los rectángulos, para lo cual es necesario contar con el valor de la base y la altura de cada uno de ellos. Para determinar la base del primero, segundo, tercero y cuarto debemos calcular: x_1-x_0, x_2-x_1, x_3-x_2, x_4-x_3, respectivamente.

En general, para calcular la base del *k*-ésimo rectángulo debemos determinar la diferencia: x_k-x_{k-1}. A estos anchos de los rectángulos se les acostumbra denotar como:

$$\Delta x_1 = x_1\text{-}x_0,\ \Delta x_2 = x_2\text{-}x_1,\ \Delta x_3 = x_3\text{-}x_2,\ \Delta x_4 = x_4\text{-}x_3, \ldots,\ \Delta x_k = x_k\text{-}x_{k-1}$$

La altura del primero, segundo, tercero, cuarto,..., rectángulo circunscrito se determina calculando $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$ y $f(x_4)$,..., respectivamente. En general para determinar la altura del *k*-ésimo rectángulo circunscrito se calcula $f(x_k)$.

Así, para determinar el área de *n* rectángulos circunscritos, debemos determinar la siguiente suma:

$$A(n) = f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + f(x_3)\Delta x_3 + \ldots + f(x_n)\Delta x_n$$

En matemáticas este tipo de sumas se acostumbra escribir utilizando la notación sigma, de la cual te damos varios ejemplos:

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^n$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{i+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \ldots + \frac{n}{n+1}$$

$$3(1-4) + 3(2-4) + 3(3-4) + 3(4-4) + 3(5-4) + \ldots + 3(n-4) = \sum_{i=1}^{n} 3(i-4)$$

El área de los *n* rectángulos circunscritos, se puede escribir como:

$$A(n) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k = f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + f(x_3)\Delta x_3 + \ldots + f(x_n)\Delta x_n$$

Una vez establecido lo anterior determinaremos, de manera aproximada, el área bajo la curva de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo [0,1] circunscribiendo ocho rectángulos del mismo ancho. Para hacerlo bastará realizar la siguiente suma:

$$A(8)=\sum_{k=1}^{8} f(x_k)\Delta x_k = f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + f(x_3)\Delta x_3 + ... + f(x_8)\Delta x_8 \approx \int_0^1 x^2 dx$$

en donde el ancho de cada rectángulo será igual a 1/8, porque el intervalo [0,1] tiene de ancho uno y lo hemos subdividido en ocho partes iguales. Así pues:

$$\Delta_k = x_k - x_{k-1} = 1/8, \text{ para } k = 1, 2,..., 8.$$

Por lo anterior y como $x_0 = 0$, x_1,=1/8, $x_2 = 2/8$, $x_3 = 3/8$,..., $x_8 = 8/8$, podemos concluir que $x_k = k/8$.

Pasemos ahora a determinar la altura $f(x_k)$ de cada uno de los rectángulos. La función que tenemos eleva al cuadrado la variable independiente, por lo que:

$$f(x_1) = x_1^{\,2} = \left(\frac{1}{8}\right)^2,\ f(x_2) = x_2^{\,2} = \left(\frac{2}{8}\right)^2,\ f(x_3) = x_3^{\,2} = \left(\frac{3}{8}\right)^2,...,\ f(x_k) = x_k^{\,2} = \left(\frac{k}{8}\right)^2.$$

$$A(8)=\sum_{k=1}^{8} f(x_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{8}\left(\frac{k}{8}\right)^2\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{8}\right)^2\frac{1}{8} + \left(\frac{2}{8}\right)^2\frac{1}{8} + \left(\frac{3}{8}\right)^2\frac{1}{8} + ... + \left(\frac{8}{8}\right)^2\frac{1}{8}$$

$$= \left(\frac{1^2}{8^2} + \frac{2^2}{8^2} + \frac{3^2}{8^2} + ... + \frac{8^2}{8^2}\right)\frac{1}{8} = \frac{1}{8^3}\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 8^2\right) =$$

$$= \frac{1}{8^3}(204) = \frac{51}{128} = 0.3984375$$

Resumiendo:

$$\int_0^1 x^2 dx \approx A(8) = \sum_{k=1}^{8} f(x_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{8}\left(\frac{k}{8}\right)^2\frac{1}{8} = \frac{51}{128} = 0.3984375$$

Es claro que conforme el número de rectángulos aumenta, la aproximación mejora, llegando a la situación límite cuando n tiende a infinito, en donde el exceso tiende a cero y por lo tanto se cumple que:

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n\to\infty} A(n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2\frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2\frac{1}{n} + \left(\frac{3}{n}\right)^2\frac{1}{n} + ... + \left(\frac{n}{n}\right)^2\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2\right)\right)$$

Como habrás notado el ancho de cada rectángulo es Δx_k =1/n (k = 1, 2, 3,..., n), resultado que se obtiene al dividir en n partes iguales el intervalo [0,1]. Observa que para concluir el problema nos hace falta conocer el resultado de la suma de los cuadrados, es decir $\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 =$ ¿?

A continuación abrimos un paréntesis para determinarla.

Primero recordemos lo que hizo el niño Gauss cuando su maestra, por latoso, lo mando a su asiento a sumar 1 + 2 + 3 + 4 +...+ 100, es decir, los primeros cien números enteros positivos. En menos de un minuto regreso Gauss con su maestra con la suma realizada, lo cual obviamente la sorprendió. Al preguntarle su maestra cómo la había realizado tan rápido Gauss contesto: “Sumé 1 + 100, 2 + 99, 3 + 98 y me di cuenta que cada suma da 101. Como en total son 50 sumas, el resultado es 50(101) = 5050”[6].

Nosotros seguiremos las ideas del ingenioso niño Gauss para sumar:

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n$$

Si sumamos el primero y el último, el segundo y el penúltimo, etc., obtenemos en cada caso n + 1. Y como existen n/2 términos de ese tipo, en total obtendremos:

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Al resultado así obtenido se le puede objetar que si n es impar, no tendremos n/2 términos. Esta objeción se puede superar sumando dos veces la misma sumatoria, colocando una de ellas del número mayor al menor.

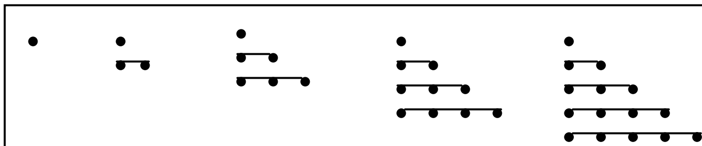
$$\begin{array}{rl} \sum_{i=1}^{n} i = & 1 \;+\; 2 \;+\; 3 \;+\ldots+ (n\text{-}2) \;+ (n\text{-}1) \;+\; n \\ \sum_{i=1}^{n} i = & n \;+\; (n\text{-}1) + (n\text{-}2) \;+\ldots+\; 3 \;+\; 2 \;+\; 1 \\ \hline 2\sum_{i=1}^{n} i = & (n+1) + (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) + (n+1) + (n+1) = n(n+1). \end{array}$$

La suma término a término: 1 con n, 2 con n–1, etc., nos resulta n términos de valor n+1 y por el otro lado dos veces la sumatoria buscada, por lo tanto:

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Los números que se obtienen cuando n = 1, 2, 3,..., son conocidos como números triangulares. ¿Por qué? Abajo te mostramos la razón.

$\sum_{i=1}^{1} i = 1$, $\sum_{i=1}^{2} i = 3$, $\sum_{i=1}^{3} i = 6$



1 3 6 10 15

Los primeros cinco números triangulares

[6]Se cuenta que cuando el famoso matemático F. Gauss (1777-1855) era un niño su maestra le dejo sumar los números enteros del 1 al 100, lo cual hizo en unos segundos.

$$\sum_{i=1}^{4} i = 10\,, \qquad \sum_{i=1}^{5} i = 15$$

Para obtener, de manera sencilla $\sum_{k=1}^{k=n} k^2$, hacemos lo siguiente:

$$\frac{1^2}{1} = \frac{3}{3}$$
$$\frac{1^2+2^2}{1+2} = \frac{5}{3}$$
$$\frac{1^2+2^2+3^2}{1+2+3} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$$
$$\frac{1^2+2^2+3^2+4^2}{1+2+3+4} = \frac{30}{10} = 3 = \frac{9}{3}$$

Sin hacer el cálculo, basándonos en lo anterior, podemos suponer que el siguiente resultado es correcto:

$$\frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2}{1+2+3+4+5} = \frac{11}{3}$$

No es difícil llegar a la conclusión, de que en general

$$\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-2)^2+(n-1)^2+n^2}{1+2+3+\ldots+(n-2)+(n-1)+n} = \frac{2n+1}{3}$$

Finalmente, con base en que $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, podemos establecer que:

$$\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-2)^2+(n-1)^2+n^2}{1+2+3+\ldots+(n-2)+(n-1)+n} = \frac{\sum_{k=1}^{k=n} k^2}{\sum_{k=1}^{k=n} k} = \frac{\sum_{k=1}^{k=n} k^2}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2n+1}{3}$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{2n+1}{3}\,\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Después de este “pequeño” paréntesis, podemos continuar con la solución exacta de nuestro problema:

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n\to\infty} A(n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \frac{1}{n} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^3}\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\right)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3}\left(1^2+2^2+3^2+...+n^2\right)\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^3}{6n^3}+\frac{3n^2}{6n^3}+\frac{n}{6n^3}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{6}+\frac{3}{6n}+\frac{1}{6n^2}\right)$$
$$= \frac{2}{6}+0+0=\frac{1}{3}$$

Resumiendo:

$$\int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}$$

Gracias a este resultado podemos ver que cuando circunscribimos 8 rectángulos nos excedemos en: $\frac{51}{128}-\frac{1}{3}=\frac{25}{384}=0.06510416\overline{6}$.

Ejemplo 10. Determina el área bajo la curva representada por la $\int_0^4 x^2dx$, circunscribiendo rectángulos del mismo ancho.

Solución. Circunscribimos *n* rectángulos del mismo ancho en el intervalo [0,4], por lo que el ancho de cada rectángulo será $\Delta x_k = 4/n$. Los extremos de los intervalos serán: $x_0 = 0$, $x_1 = 4/n$, $x_2 = 8/n$, $x_3 = 12/n$, $x_4 = 16/n$,..., $x_k = 4k/n$,..., $x_n = 4n/n$, por lo que las alturas estarán determinadas por: $f(x_1)=x_1^{\,2}=\left(\frac{4}{n}\right)^2$, $f(x_2)=x_2^{\,2}=\left(\frac{8}{n}\right)^2$, $f(x_3)=x_3^{\,2}=\left(\frac{12}{n}\right)^2$,..., $f(x_k)=x_k^{\,2}=\left(\frac{4k}{n}\right)^2$. La integral quedará como sigue:

$$\int_0^4 x^2dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4k}{n}\right)^2\frac{4}{n}=$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{4(1)}{n}\right)^2\frac{4}{n}+\left(\frac{4(2)}{n}\right)^2\frac{4}{n}+\left(\frac{4(3)}{n}\right)^2\frac{4}{n}+...+\left(\frac{4(n)}{n}\right)^2\frac{4}{n}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4^3}{n^3}\left(1^2+2^2+3^2+...+n^2\right)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4^3}{n^3}\left(\frac{2n^3+3n^2+n}{6}\right)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(4^3\left(\frac{2n^3}{6n^3}+\frac{3n^2}{6n^3}+\frac{n}{6n^3}\right)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(4^3\left(\frac{2}{6}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right)\right)$$

$$= 4^3\left(\frac{1}{3}+0+0\right)$$

$$\int_0^4 x^2dx = \frac{4^3}{3}$$

Ejemplo 11. Determina el área bajo la curva circunscribiendo rectángulos del mismo ancho, representada por la $\int_0^a x^2dx$.

Solución. Al circunscribir *n* rectángulos del mismo ancho en el intervalo [0,*a*], el ancho de cada uno de ellos será $\Delta x_k = a/n$, con k = 1, 2, 3,..., n. Los extremos en el eje x de los n rectángulos serán: $x_k = ak/n$, con k = 1, 2, 3,..., n. Por lo que las alturas estarán dadas por: $f(x_k) = x_k^2 = (ak/n)^2$. Así pues dicha integral quedará como sigue:

$$\int_0^a x^2dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{ak}{n}\right)^2\frac{a}{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{a(1)}{n}\right)^2\frac{a}{n}+\left(\frac{a(2)}{n}\right)^2\frac{a}{n}+\left(\frac{4(3)}{n}\right)^2\frac{a}{n}+\ldots+\left(\frac{a(n)}{n}\right)^2\frac{a}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^3}{n^3}\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\right)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^3}{n^3}\left(\frac{2n^3+3n^2+n}{6}\right)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(a^3\left(\frac{2n^3}{6n^3}+\frac{3n^2}{6n^3}+\frac{n}{6n^3}\right)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(a^3\left(\frac{2}{6}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right)\right)$$

$$= a^3\left(\frac{1}{3}+0+0\right)$$

$$\int_0^a x^2dx = \frac{a^3}{3}$$

Ejercicios 2

Siguiendo las ideas que hemos visto hasta aquí no te será difícil demostrar que:

1. $\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$
2. $\int_a^b cx^2 dx = c(\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3})$

Con base en todo lo anterior estás en condiciones de darle significado a la siguiente definición:

Si f es una función definida y continua en el intervalo [*a*,*b*], **el área bajo la curva *f* en ese intervalo** es:

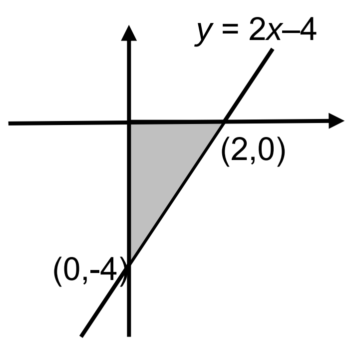
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k\right)$$

en donde n representa el número de intervalos del mismo ancho en los que se ha dividido el intervalo [*a,b*], $f(x_k)$ la altura del k-ésimo rectángulo y Δx_k su ancho.

La interpretación de la integral como área bajo la curva tiene el problema de que cuando calculamos, por ejemplo el área bajo la curva $y = 2x - 4$ en el intervalo [0,2] nos da:

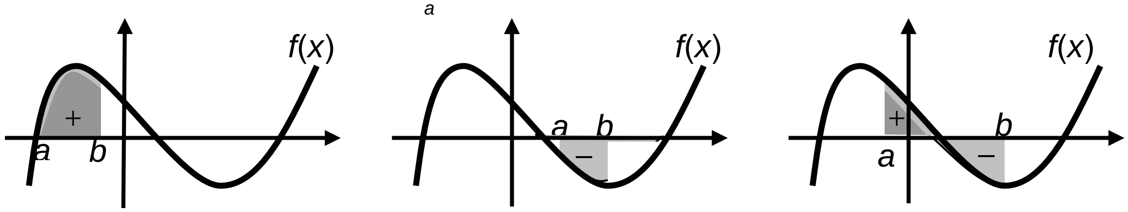
$$\int_0^2 (2x-4)dx = \int_0^2 2xdx - \int_0^2 4dx = \left(x^2 - 4x\right)\Big|_0^2 = (2^2 - 4(2)) - 0 = -4$$

Como bien sabemos, no existen áreas negativas, por lo que el resultado de –4 unidades cuadradas no tiene sentido. Si observamos la gráfica, podemos entender lo que esta ocurriendo.



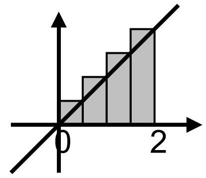
El área que hemos sombreado tiene 4 unidades cuadradas. Por lo que podemos interpretar que la integral $\int_0^2 (2x-4)dx$ nos proporciona el área que se encuentra entre la gráfica de la curva y el eje x, acotada por los extremos $x = 0$ y $x = 2$.

Así pues, debemos tener cuidado cuando interpretamos a la integral como “el área bajo una curva o recta”, porque pueden ocurrir casos como los siguientes cuando estemos trabajando con $\int_a^b f(x)dx$



Ejercicios 3

1. Calcula una aproximación del área bajo la curva de la función $f(x) = x$, en el intervalo [0,2], circunscribiendo 4 rectángulos.



2. Circunscribiendo cinco rectángulos del mismo ancho, determina la aproximación correspondiente a: $\int_0^1 x^2 dx$

3. Sigue y completa los siguientes pasos para encontrar el resultado de $\sum_{k=1}^{k=n} k^3$.

   Primero observa lo siguiente:

$$\frac{1^3}{1} = 1$$

$$\frac{1^3 + 2^3}{1+2} = \frac{9}{3} = 3$$

$$\frac{1^3 + 2^3 + 3^3}{1+2+3} = \frac{36}{6} = 6$$

$$\frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3}{1+2+3+4} = \frac{100}{10} = 10$$

   Ahora, sin realizar los cálculos, induciendo el resultado encuentra:

$$\frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3}{1+2+3+4+5} =$$

   Comprueba tu resultado haciendo los cálculos.

   En general tendremos que:

$$\frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + (n-2)^3 + (n-1)^3 + n^3}{1+2+3+...+(n-2)+(n-1)+n} =$$

Si no te es posible encontrar el resultado anterior, revisa los números triangulares.

Así pues, llegamos al siguiente resultado:

$$\frac{\sum_{k=1}^{k=n} k^3}{\sum_{k=1}^{k=n} k} = \frac{\sum_{k=1}^{k=n} k^3}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Y finalmente que:

$$\sum_{k=1}^{k=n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

4. Determina paso a paso, circunscribiendo rectángulos, la $\int_0^8 x^2 dx$. Comprueba tu resultado haciendo el cálculo con la fórmula $\int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3}$.

5. Encuentra el resultado de $\int_0^1 (x^2 - 2)dx$, traza su representación gráfica y explica por qué da el resultado que encontraste.

Sección 3. El Teorema Fundamental del Cálculo.

En ésta sección, pretendemos que logres los siguientes aprendizajes:

- Valorar las ventajas de la existencia de una antiderivada para encontrar la integral definida.
- Comprender la interrelación que se establece en el Teorema Fundamental del Cálculo.
- Aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo.
- Calcular el área entre dos curvas.

A continuación presentamos el **Teorema fundamental del Cálculo:**

Si *f* es una función continua en el intervalo [*a,b*] y $F'(x) = f(x)$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

F(*x*) es conocida como una primitiva o antiderivada de *f*(*x*).

Este teorema establece la relación que existe entre el cálculo integral y el diferencial, que la integración y la derivación son procesos inversos.

Si una función *f*(*x*) es integrada y a continuación derivada, obtendremos nuevamente *f*(*x*), y viceversa, salvo una constante, tal y como ya lo hemos visto.

Con base es este teorema, podemos verificar las integrales, o antiderivadas, que determinemos, pues al derivar $F(x)$, debemos obtener $f(x)$, o bien si conocemos la derivada de una función, sabemos que su integral será la función original.

Si $\int_o^t 2xdx = F(t)$, $F'(t)$ debe ser igual a $2x$. ¿Qué funciones cumplen que su derivada sea igual a $2x$?

Cumplen: $F(x) = x^2$, $F(x) = x^2 + 3$, $F(x) = x^2 - 8$, y en general $F(x) = x^2 + c$, por lo que los distintos valores que puede tomar $F(x)$ sólo difieren en una constante.

Es importante hacer notar que las propiedades que encontramos cuando interpretamos a la integral como el área bajo una curva, son válidas en general, es decir las siguientes son **propiedades de la integral**:

$$\int_0^a cf(x)dx = c\int_0^a f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_0^b f(x)dx - \int_0^a f(x)dx$$

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Y cuatro fórmulas:

$$\int_a^b dx = (b-a)$$

$$\int_a^b xdx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

$$\int_a^b x^2dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

$$\int_a^b x^n dx = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}, \text{ en donde } n \neq -1.$$

Ejercicios 4

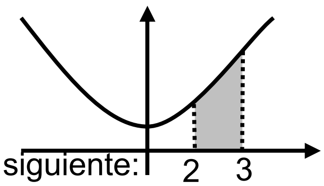
Comprueba que:

1. $\int_o^t \text{sen}x dx = -\cos t + 1$

2. $\int_o^t e^x dx = (e^t + c) - (e^0 + c) = e^t - 1$

3. $\int_{1}^{3}(3x^2 - 2x + 1)dx = 20$

Ejemplo 12. Calcula el área de la región comprendida por la gráfica de la función $f(x) = 2x^2+1$, el eje x y las rectas $x = 2$ y $x = 3$.
Solución. En la gráfica te mostramos el área que se desea encontrar.

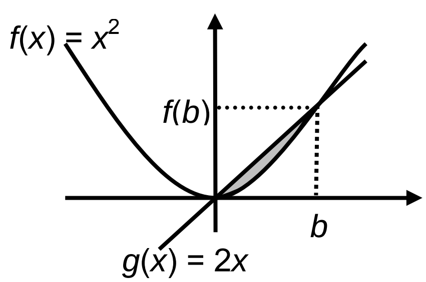


Para determinarla hacemos lo siguiente:

$$\int_{2}^{3}(2x^2 + 1)dx = \left(\frac{2x^3}{3} + x + c\right)\Big|_2^3$$
$$= \left(\frac{2(3^3)}{3} + 3 + c\right) - \left(\frac{2(2^3)}{3} + 2 + c\right)$$
$$= \left(\frac{54}{3} + 3 + c\right) - \left(\frac{16}{3} + 2 + c\right)$$
$$= \frac{41}{3}$$

Es importante observar en el ejemplo anterior que las constates de integración finalmente se cancelan, por lo que no se acostumbra escribirlas cuando se trabaja con integrales definidas.

Ejemplo 13. Determina el área de la región comprendida por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2x$.
Solución. Abajo tenemos la representación gráfica del problema. El área de la región comprendida por las dos curvas se encuentra sombreada.



Para determinar los puntos de intersección de las gráficas de f y g, debemos determinar los puntos en que son iguales $f(x)$ y $g(x)$, es decir, tenemos que resolver la ecuación:

$$x^2 = 2x$$

Los valores que satisfacen la ecuación son $x = 0$ y $x = 2$, por lo que los puntos de intersección son: (0,0) y (2,4).
El área que estamos buscando se encuentra haciendo lo siguiente:

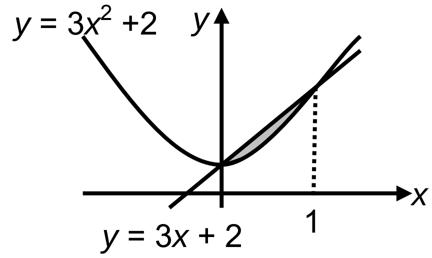
$$\int_0^2 g(x)dx - \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 (g(x) - f(x))dx = \int_0^2 (2x - x^2)dx = (\frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{3})\Big|_0^2 = (4 - \frac{8}{3}) = \frac{4}{3}$$

Ejemplo 14. Determina el área de la región determinada por las gráfica de la función $y = 3x + 2$, con la de la función $y = 3x^2 + 2$.

Solución. Primero determinemos los puntos de intersección de las dos curvas, para lo cual resolvemos el sistema por igualación.

$$3x + 2 = 3x^2 + 2,$$
$$0 = 3x^2 - 3x,$$
$$0 = 3x(x - 1),$$

de donde, las soluciones son: $x = 0$, o $x = 1$. Así pues las curvas se intersectan en x = 0 y en x = 1, como se muestra en la figura.

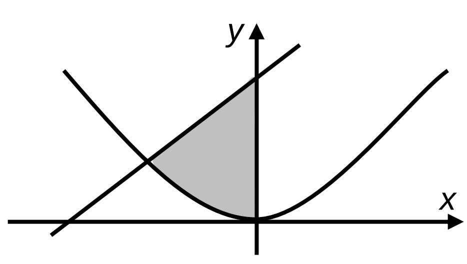


Después, calculamos la integral

$$\int_0^1 ((3x+2) - (3x^2+2))dx = \int_0^1 (3x - 3x^2)dx = (\frac{3x^2}{2} - \frac{3x^3}{3})\Big|_0^1 = (\frac{3}{2} - \frac{3}{3}) = \frac{1}{2}$$

Ejercicios 5

1. Determina $\int_2^3 x^2 dx$.
2. Encuentra $\int_1^4 2x dx$.
3. Calcula $\int_2^4 (2x^2 + 3x - 1)dx$.
4. Demuestra que $\int_{-1}^1 (4x^3 - 2x^2 - 3x - 1)dx = \frac{-10}{3}$.
5. Si la $\int_0^t \cos x dx = F(t)$, entonces a qué es igual $F(\frac{\pi}{4})$.
6. Si la $\int_1^t f(x)dx = e^{2t+5} - e^7$, entonces a qué es igual $f(x)$.
7. Determina el área encerrada por el eje y y las gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = x+6$

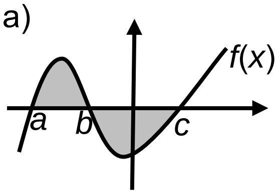


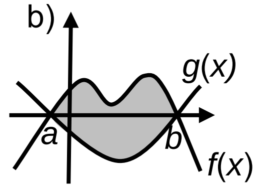
8. Comprueba que el área encerrada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = x$ es 1/2. Te sugerimos trazar las gráficas correspondientes.

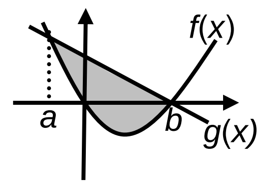
9. Encuentra el área encerrada por el eje x, y las gráficas de las funciones $y = \sqrt{x}$ y $y = x$

10. Calcula el área de la región encerrada por la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 4$ y el eje x.

11. Para cada caso, escribe la o las integrales mediante las cuales determinarías el área sombreada:

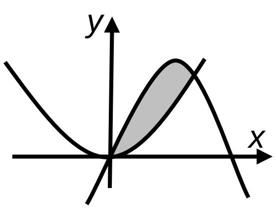
a)


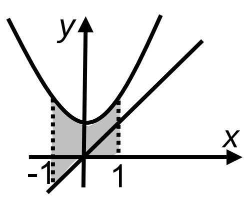
b)


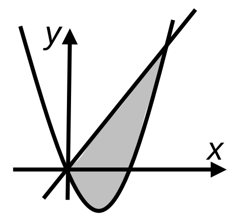
c)


12. Encuentra el área de la región encerrada por las gráficas de las funciones:

a) $y = x^2$ y $y = 2x - x^2$ b) $y = x^2 + 3$ y $y = x$ c) $y = x^2 - 4x$ y $y = 2x$







Bibliografía

1. Allan B. Cruse y Millianne Lehman. “Lecciones de Cálculo 2”. Fondo de Cultura Educativo Iberoamericano, México 1987. Lecciones 3, 4, 5 y 6.
2. James Stewart, “Cálculo. Conceptos y Contextos”. Thomson, México, 1999. Secciones 5.1, 5.2, 5.3 y 5.4.
3. Larson Hostetler Edwards, “Cálculo”. McGraw – Hill, México, 1999. Secciones 5.3, 5.4 y 5.6.