# UNIDAD 3
# DERIVADA DE FUNCIONES ALGEBRAICAS

**Propósitos**: Continuar el estudio del concepto de derivada a través del manejo de su representación algebraica buscando que el alumno reconozca a las reglas de derivadas como un camino más eficaz de obtener la derivada de una función.

**Aprendizajes.** Al finalizar esta unidad el alumno:

- Obtiene la derivada de una función polinomial de 1°, 2^do ó 3^er grado usando la definición
$$f'(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
- Identifica el patrón de comportamiento de las derivadas obtenidas con el límite del cociente.
- Calcula la derivada de funciones algebraicas usando las reglas de derivación.
- Reconoce la jerarquía de las operaciones involucradas en la regla de correspondencia de una función para aplicar correctamente las reglas de derivación.
- Identifica las relaciones existentes entre la gráfica de una función y la gráfica de su derivada.
- Obtiene la ecuación de la recta tangente en un punto de la gráfica de una función.
- Obtiene la velocidad instantánea como la derivada de la función posición y la aceleración como la derivada de la velocidad.
- Da significado a la derivada de una función en el contexto de un problema.

**Introducción.**

En la primera unidad aprendimos a explorar y resolver diversos problemas que nos permitieron acercarnos a los procesos infinitos, este acercamiento nos permitió introducirnos al concepto de límite, primero de una sucesión y después de una función, en general, en un punto dado. En la segunda unidad analizamos a la variación y a la razón de cambio en problemas cuyos modelos matemáticos fueron funciones polinomiales de primer, segundo y tercer grado, esto lo hicimos con la ayuda de la noción de límite.

En esta sección seguiremos nuestro estudio de la variación y el cambio para funciones algebraicas, nuestro propósito fundamental es apropiarnos de las reglas de derivación y reconocerlas como un camino más eficaz para obtener la derivada de una función.

En la unidad anterior calculaste algunos límites, en las actividades siguientes se te pide recuerdes algunos de ellos y sin aproximar los valores conjetures los resultados de otros límites.

**Propiedades de los límites, resultados iniciales**

Hagamos algunos recordatorios de los límites de funciones. Iniciaremos estos cuando la función es constante, y posteriormente cuando la función es polinomial de cualquier grado.

**Actividad 1:**
Te recordamos los límites siguientes:

- $\lim\limits_{x \to a} c = c$
- $\lim\limits_{x \to a} x = a$
- $\lim\limits_{x \to a} x^2 = a^2$

1. Con base en estos resultados, conjetura el valor de:
   a) $\lim\limits_{x \to a} x^3$ b) $\lim\limits_{x \to a} x^4$ c) $\lim\limits_{x \to a} x^5$ d) $\lim\limits_{x \to a} x^{12}$
2. Ahora, si *n* representa a un número entero positivo, conjetura a qué será igual el $\lim\limits_{x \to a} x^{n}$.

**Propiedades de los límites.**
Los límites tienen varias propiedades muy importantes, algunas de ellas son:

- **El límite de una suma es la suma de los límites**

$$\lim_{x \to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) \qquad (1)$$

- **El límite de un producto es el producto de los límites**

$$\lim_{x \to a} f(x)g(x) = \left(\lim_{x \to a} f(x)\right)\left(\lim_{x \to a} g(x)\right) \qquad (2)$$

- **El límite de un cociente es el cociente de los límites**

$$\lim_{x \to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}, \quad \lim_{x \to a} g(x) \neq 0 \qquad (3)$$

Estas propiedades no te las justificaremos porque para ello hace falta contar con la definición de límite de una función. Lo que sí podemos hacer es tomar estos límites como base para encontrar otras propiedades a partir de ellas. Por ejemplo:

- **El límite de una constante por una función es la constante por el límite de la función.**

$$\lim_{x \to a} cg(x) = c \lim_{x \to a} g(x) \qquad (4)$$

Esta propiedad se justifica a partir de (2) y de que $\lim\limits_{x \to a} c = c$:

$$\lim_{x \to a} cg(x) = \left(\lim_{x \to a} c\right)\left(\lim_{x \to a} g(x)\right) = c \lim_{x \to a} g(x)$$

El resultado anterior, nos permite “extraer” del límite a una constante, como se muestra a continuación:

$$\lim_{x \to a}(7x) = \left(\lim_{x \to a} 7\right)\left(\lim_{x \to a} x\right) = 7 \lim_{x \to a} x = 7a$$

Utilizando las propiedades (1) y (4), podemos hacer lo siguiente:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to a}(f(x) + cg(x)) &= \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} cg(x) \\ &= \lim_{x \to a} f(x) + c \lim_{x \to a} g(x)\end{aligned}$$

Si $c = -1$, se tiene que: $\lim\limits_{x \to a}(f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) - \lim\limits_{x \to a} g(x)$, es decir:

• **El límite de una diferencia es la diferencia de los límites**

$$\lim_{x\to a}(f(x)-g(x))=\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}g(x) \qquad (5)$$

Las propiedades antes listadas y los límites ya encontrados nos ayudarán a calcular límites más complicados.

**Actividad 2.**

1. Utilizando las propiedades anteriores y los resultados que se han obtenido calcula el $\lim_{x\to 5}(2x^2-3x+1)$.

   a) Sabemos que $\lim_{x\to 5}x=$_____ y $\lim_{x\to 5}x^2=$_______

   b) Aplicando las propiedades (1) y (5) se tiene:

   $$\lim_{x\to 5}(2x^2-3x+1)=\lim_{x\to 5}2x^2-\lim_{x\to 5}3x+\lim_{x\to 5}1$$

   Ahora, aplicando la (4) se obtiene:

   $=$____________________

   Finalmente:

   $=$ ______

2. Siguiendo un procedimiento similar al utilizado en el problema anterior, comprueba los siguientes resultados:

   a) $\lim_{x\to 2}(5x^3-2x+7)=43$

   b) $\lim_{x\to -3}\dfrac{3x^2-5}{x+4}=4$

   c) $\lim_{x\to 0}(-2x^5+2x^3-3)=-3$

   d) $\lim_{x\to -3}\dfrac{3x^2-5}{x+4}=22$

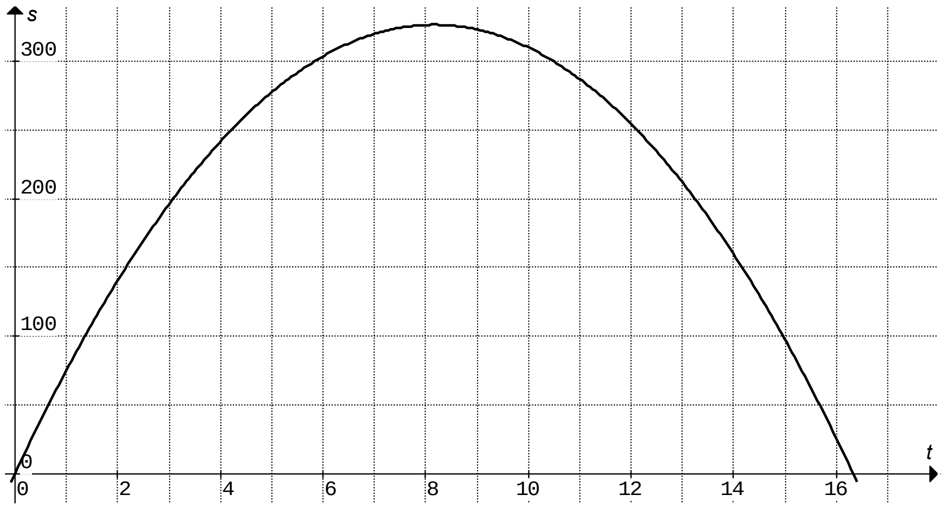
   e) $\lim_{x\to -1}(4x^3+2x^2-3)(5x-6)=55$

   f) $\lim_{x\to 4}\dfrac{1}{-2x^2+3x-5}=-\dfrac{1}{25}$

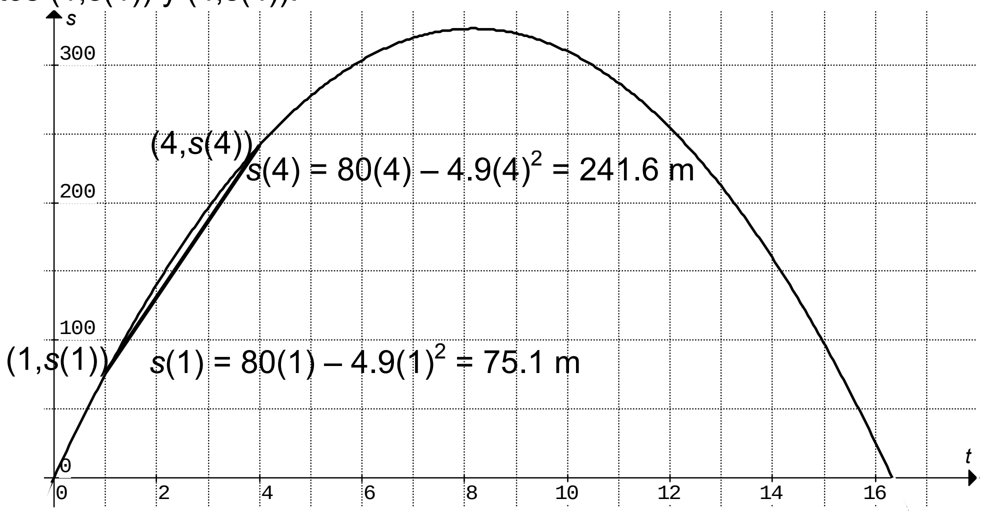
**Derivadas de funciones del tipo *f*(*x*) = *cx*ⁿ.**

Los límites que hemos calculado anteriormente, así como sus propiedades nos son muy útiles para comprender el significado de la derivada de una función, recordemos algunos ejemplos de la Unidad 2,

El estudio del lanzamiento de una pelota nos proporcionó la función $s(t)=80t-4.9t^2$ en donde *t* representa al tiempo en segundos, *s* la distancia recorrida en metros, como sabes la gráfica del desplazamiento es:




Recordarás que para calcular la velocidad instantánea en un punto, digamos en $t$ = 4, se procede primero a calcular la velocidad promedio, en un periodo de tiempo, por ejemplo en el intervalo de uno a cuatro segundos, posteriormente, en lugar de iniciar el periodo en un segundo, lo hacemos en dos, luego en tres, y así hasta acercarnos cada vez más a cuatro, de tal manera que los periodos de tiempo van disminuyendo, es decir, se van acercando a cero, pero siempre considerando el tiempo $t$ = 4, que es cuando queremos encontrar la velocidad instantánea. En la gráfica siguiente se muestra la velocidad promedio de 1 a 4 segundos, representada por la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos (1,$s$(1)) y (4,$s$(4)).




Como ya vimos la velocidad promedio se calcula como:

$$\text{velocidad promedio} = v_p = \frac{\text{cambio en la distancia}}{\text{cambio en el tiempo}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

En el intervalo de tiempo de 1 a 4, la velocidad promedio es:

$$v_p = \frac{s(4)-s(1)}{4-1} = \frac{241.6-75.1}{3} = \frac{166.5}{3} = 55.5\,\frac{\text{m}}{\text{seg}}$$

Ahora calculemos la velocidad promedio en un periodo de tiempo más cercano a 4 segundos, digamos de 3.5 a 4 segundos:

$$v_p = \frac{s(4) - s(3.5)}{4 - 3.5} = \frac{(80(4) - 4.9(4)^2) - (80(3.5) - 4.9(3.5)^2)}{0.5} = 43.25\,\frac{\text{m}}{\text{seg}}$$

Este proceso nos ayuda a calcular velocidades instantáneas en cualquier punto en donde queramos. También nos permite comprender que la velocidad instantánea en un punto es un límite de la velocidad promedio. Especifiquemos dicho proceso. Primero, calculamos la velocidad promedio

$$v_p = \frac{s(t) - s(4)}{t - 4}$$

Posteriormente, le damos valores a $t$, cada vez más cercanos a 4 y finalmente, obtenemos el valor de la velocidad instantánea en $t = 4$.

En otras palabras, este procedimiento nos permite calcular la velocidad instantánea cuando $t = 4$ mediante el límite siguiente:

$$v(t) = \lim_{t \to 4} \frac{s(t) - s(4)}{t - 4}$$

Este método de aproximaciones para calcular el límite suele ser laborioso, por lo que desarrollaremos otra estrategia.

Si sustituimos los valores respectivos y aplicamos las propiedades de los límites en $v(t) = \lim_{t \to 4} \frac{s(t) - s(4)}{t - 4}$, obtendremos

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 4} \frac{s(t) - s(4)}{t - 4} &= \lim_{t \to 4} \frac{(80t - 4.9t^2) - (80(4) - 4.9(4)^2)}{t - 4} \\ &= \lim_{t \to 4} \frac{80(t - 4) - 4.9(t^2 - 4^2)}{t - 4} \\ &= \lim_{t \to 4} \frac{80(t - 4)}{t - 4} - \frac{4.9(t^2 - 4^2)}{t - 4} \end{aligned}$$

Observa que cuando $t = 4$ el numerador y el denominador son iguales a cero, con lo que se obtiene una indeterminación.

Para evitarla, emplearemos el álgebra, sin olvidar que en el cálculo de límites está inmerso un proceso infinito de aproximaciones.

Con el fin de mostrarte de qué estamos hablando analiza la manera que se obtiene el siguiente límite: $\lim_{t \to 4} \frac{t^2 - 4^2}{t - 4}$

a) Con ayuda del producto notable: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, o bien realizando la división: $\frac{t^2 - 4^2}{t - 4} = t + 4$

b) Utilizando el resultado anterior tenemos:

$$\frac{s(t) - s(4)}{t - 4} = 80 - 4.9(t + 4)$$

c) Con base en las propiedades de los límites llegamos a:

$$v(4)=\lim_{t\to 4}\frac{s(t)-s(4)}{t-4}=\lim_{t\to 4}(80-4.9(t+4))=40.8\,\frac{\text{m}}{\text{seg}}$$

**Actividad 3.**
Verifica cada uno de los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4$ b) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$ c) $\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=-4$

d) $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}=8$ e) $\lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x+3}=-6$ f) $\lim_{x\to -4}\frac{x^2-16}{x+4}=-8$

Observa que en todos los casos anteriores tenemos en general el límite siguiente: $\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}$. Si $f(x)$ fuera otra función se aplicaría las mismas ideas.

Ahora, podemos hacer las siguientes abstracciones: primero, supongamos que la función $f(x) = x^2$, representa un tipo de movimiento de una partícula, en donde $x$ es el tiempo en segundos y $f$ su desplazamiento en metros. Después, los límites que hemos calculado en la pregunta anterior, nos pueden representar la velocidad instantánea $v$ de la partícula en puntos específicos. Así, la velocidad instantánea de la partícula a los dos segundos es de 4 m/seg, conforme al resultado del inciso a.

En símbolos, la velocidad instantánea $v$ de la partícula en el tiempo $x = a$, la podemos escribir como el límite de la razón de cambio de la distancia con el tiempo, es decir:

$$v=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

**Actividad 4.**
Los límites que verificaste en la actividad 3, los podemos considerar, como ya lo dijimos, iguales a la velocidad instantánea $v$ cuando $x$ = 2, 3, –2, 4, –3 y –4 segundos. Completa la tabla siguiente de velocidades instantáneas para los tiempos indicados y con base en ella contesta las siguientes preguntas.

| $x$ | –3 | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | … | $a$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v$ | | | | | | | | | | |

a) Si una partícula se mueve según la fórmula $f(x)=x^2$, ¿cuál es su velocidad instantánea cuando $x$ = 6?____________________________
b) En general, ¿cuál es su velocidad instantánea cuando $x = a$? _________

**Actividad 5.**
Ahora, sabemos que si un objeto se mueve según la fórmula $f(x) = x^2$, su velocidad instantánea (que llamaremos la velocidad simplemente) al tiempo $x = a$ es $v = 2a$. Pero, ¿qué ocurre con respecto con la velocidad $v$ de un objeto que se mueva de otra manera? Para dar respuesta a esta interrogante, procedamos a estudiar la razón de cambio instantánea de cualquier función polinomial.

Iniciamos con la función $f(x)=x^2$, ahora continuemos con $f(x)=x^3$, posteriormente con $f(x)=x^4$, para que finalmente hagamos una generalización.

Supongamos que una partícula se mueve según la función $f(x)=x^3$, a partir del tiempo $x$ = 0.

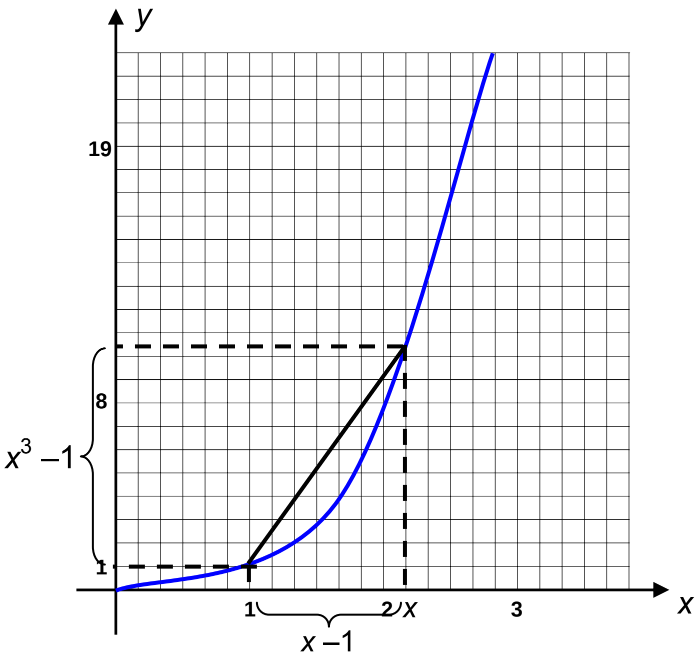
1. Calculemos su velocidad cuando $x$ = 1. Para hacerlo, primero calculemos a la velocidad promedio de la partícula de un tiempo arbitrario $x$ al tiempo $x=1$, como se muestra en la gráfica, ésta quedará expresada como:

$$v_p=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{x^3-1}{x-1}$$

Comprueba que al realizar la división se obtiene:

$$v_p=x^2+x+1$$

No debemos olvidar que $x\neq 1$, porque partimos de esa condición al no estar permitida la división por cero.
Con lo anterior hemos obtenido un resultado general que nos proporciona la velocidad promedio del tiempo $x$ al tiempo $x$ = 1.




Ahora calculemos la velocidad instantánea cuando $x$ = 1:

$$v(1)=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=1^2+1+1=3\frac{\text{m}}{\text{seg}}$$

Recuerda que en general: $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, en nuestro caso:

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$

2. Calculemos la velocidad de la partícula para el tiempo $x$ = 2.
Primero calcularemos la velocidad promedio de una manera más general, lo haremos del tiempo $x$ al tiempo $x$ = $a$, la velocidad promedio ($V_p$) queda expresada de la manera siguiente:

$$v_p=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

En nuestro caso (empleando la identidad (1))

$$v_p=\frac{x^3-a^3}{x-a}=\frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{x-a}=x^2+ax+a^2,\ (x\neq a)$$

y en particular cuando $a=2$

$$v_p=\frac{x^3-8}{x-2}=x^2+2x+4\text{, en donde } x\neq 2$$

Finalmente, para determinar la velocidad instantánea de la partícula exactamente a los dos segundos, calculamos el límite cuando x se acerca a 2.

$$v = \lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x^2 + 2x + 4) = 2^2 + 2(2) + 4 = 4 + 4 + 4 = 12 \frac{m}{seg}$$

3. Encuentra la velocidad instantánea para:
   a) $x = 4$ b) $x = 6$ c) $x = 8$

**Actividad 6.**

Consideremos en general a la función $f(x) = x^3$ y encuentra los límites siguientes.

1. Comprueba, paso a paso, que la pendiente de la recta tangente a la curva de la función $f(x)$ para el valor de $x$ que se muestra son los indicados:
   a) $x = 3$, $f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} = 27$ b) $x = -1$, $f'(-1) = \lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} = 3$
   c) $x = -2$, $f'(-2) = \lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2} = 12$ d) $x = -3$, $f'(-3) = \lim_{x \to -3} \frac{x^3 + 27}{x + 3} = 27$
2. Completa la tabla siguiente:

| $a$ | $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ |
|---|---|
| -1 | |
| -2 | |
| -3 | |
| -4 | |
| 1 | 3 |
| 2 | 12 |
| 3 | |
| 4 | |

3. Con el fin de encontrar un resultado general, ahora encuentra el límite siguiente:
$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
   Sugerencia: Utiliza la identidad (2).
4. Comprueba que el resultado general que obtuviste para los valores que tienes en la tabla y encuentra:
   a) $f'(-4)$ b) $f'(3.2)$ c) $f'(0)$ d) $f'(-5.7)$

Hemos encontrado la derivada para funciones lineales, cuadráticas y cúbicas del tipo $f(x) = x$, $f(x) = x^2$ y $f(x) = x^3$. Ahora encontremos el resultado para las de cuarto grado del mismo tipo, es decir, $f(x) = x^4$.

**Actividad 7.**

1. Calcula, paso a paso, la derivada de $f(x) = x^4$, para $x = 2$.

Primero substituye en la fórmula de la derivada $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ los valores específicos de $f(x)$ y el valor de $x$ para el que se desea calcular la derivada. Comprueba que se obtiene lo siguiente:

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-2}$$

Ahora realiza la división y comprueba que el resultado es:

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x^3+2x^2+4x+8)$$

Finalmente, calcula el límite indicado, con lo cual obtendrás que $f'(2)=32$

Una forma de determinar la división es mediante la diferencia de potencias cuartas, que a continuación se enuncia:

$$a^4-b^4=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$$

2. Calcula las siguientes derivadas utilizando la identidad (3).

   a) $f'(3)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^4-81}{x-3}$ b) $f'(4)=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^4-256}{x-4}$ c) $f'(-2)=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4-16}{x+2}$

3. Con base en los resultados anteriores, cuál será el resultado de la derivada considerada de manera general:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^4-a^4}{x-a}=$$

4. Calcula paso a paso la derivada de la función $f(x) = x^4$, para $x = a$.
   Primero sustituye en la fórmula de la derivada, luego realiza la división y finalmente encuentra el límite respectivo. Comprueba que el resultado que obtuviste es: $f'(a)=4a^3$

Hemos determinado algunas derivadas muy importantes en el estudio del cálculo. Estos resultados se pueden generalizar y eso es lo que nos proponemos realizar, con este fin, hagamos una síntesis de los resultados vistos anteriormente.

5. Completa la siguiente tabla con los límites que hemos encontrado y con base en ellos escribe los que falten.

| $f(x)$ | $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ |
|---|---|
| $x^2$ | |
| $x^3$ | |
| $x^4$ | |

| | |
|---|---|
| $x^5$ | |
| $x^6$ | |
| .<br>.<br>. | |
| $x^n$ | |

El cociente $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, nos representa en general una razón de cambio promedio, en particular cuando la función *f* nos describe el movimiento de una partícula (de un objeto, de un coche, etc.), a este cociente le llamamos velocidad promedio y a su límite (en caso de existir) cuando *x* se aproximaba al valor $x = a$, la velocidad instantánea de la partícula en ese tiempo. Este cociente puede ser interpretado según la función *f* de la que se trate, por ejemplo si *f* representa una función costo, el cociente nos representará un costo promedio y al límite en un punto, el costo marginal en ese punto. También, como recordarán, el límite es igual a la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el valor dado.

En Cálculo se estudia el cociente y su límite en un punto de manera general, sin especificar lo que representa la función *f*. Es hasta sus aplicaciones en donde se hace hincapié de lo que modela *f* y ahí es donde es conveniente darle una interpretación, tanto a *f* como al límite de su cociente.

Dicho cociente y su límite son fundamentales en el estudio del Cálculo que tienen un nombre propio, que definiremos enseguida:

**La razón instantánea de cambio de una función *f* en *x* = *a*, se define, en caso de existir, como el límite de las razones de cambio promedio de *f* en los intervalos [*x, a*] (o [*a*, *x*]) cuando *x* se aproxima al número *a* y se escribe como:**

$$\textbf{Razón de cambio instantáneo} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

**A la razón instantánea de cambio se le llama derivada de *f* en *x* = *a* y se escribe *f'*(*a*), así se tiene:**

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

**Las unidades de *f'* son unidades de *f* por cada unidad de *x*.**

Usando las funciones $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$, entre otras, hemos calculado los límites de sus razones de cambio instantáneas en el punto $x = a$, en otras palabras, hemos calculado la derivada de esas funciones en el punto $x = a$, así tenemos que:

- Si $f(x) = x^2$, entonces $f'(a) = 2a$
- Si $f(x) = x^3$, entonces $f'(a) = 3a^2$
- Si $f(x) = x^4$, entonces $f'(a) = 4a^3$
- En general, si $f(x) = x^n$, entonces $f'(a) = na^{n-1}$, para $n$ un número entero positivo.

Gracias a lo anterior, ahora es muy sencillo conocer la derivada de una función polinomial $f$ de la forma $f(x) = x^n$, en cualquier punto. Por ejemplo, si queremos la derivada de $f(x) = x^7$ en $x = 2$, simplemente se procede como sigue:

Si $f(x) = x^n$, entonces $f'(2) = 7(2)^6 = 7(64) = 448$

Desarrollemos varias ideas que nos servirán para establecer la derivada de diversas funciones, te pedimos sigas con mucho cuidado cada paso y los compruebes con lápiz y papel.

Sea $f$ una función derivable y $g$ la función que resulta de multiplicar a $f$ por una constante $c$, es decir: $g = cf$. Calculemos la derivada de $g$ en $x = a$, en términos de la derivada de $f$, es decir $g'(a) = (cf(a))'$.

Usaremos la definición de la derivada y algunas propiedades de los límites. Así pues,

$$\begin{aligned} g'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{cf(x)-cf(a)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} c\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = c\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \\ g'(a) &= cf'(a) \end{aligned}$$

Esta propiedad es una propiedad general que se emplea en todas las funciones derivables en particular a los polinomios. En lenguaje llano se puede establecer como: ***la derivada de una constante por una función es igual a la constante por la derivada de la función***, es decir:

$$\boldsymbol{(cf)' = cf'}$$

Así, para el monomio

$f(x) = cx^n$ se tiene que $f'(a) = nca^{n-1}$.

Con respecto a la notación, observemos que para cada valor de $a$ se tiene un valor para $f'$, es decir, $f'$ es nuevamente una función, por lo que podemos escribir la derivada en notación de funciones, de la manera siguiente:

**Si $f(x) = cx^n$, entonces $f'(x) = ncx^{n-1}$**

Ahora, calcular derivadas de monomios resulta muy sencillo, por ejemplo la derivada de $f(x) = -4x^5$, es $f'(x) = 5(-4)x^4 = -20x^4$.

**Actividad 8.**

Calcula la derivada de las funciones siguientes:

| | | |
|---|---|---|
| 1. $f(x) = 6x^8$ | 2. $f(x) = -12x^3$ | 3. $f(x) = 8x^5$ |
| 4. $f(x) = -4x^7$ | 5. $f(x) = -2x^3$ | 6. $f(x) = 8x^4$ |

7. $f(x) = 5x^6$ 8. $f(x) = \dfrac{3}{5}x^{10}$

**Reglas de derivación.**
**Derivada de una suma de funciones**.
Ya conocemos la derivada de diversas funciones, pero desconocemos la derivada de la suma de dos funciones. Para conocer la respuesta, primero veamos un ejemplo y luego, a partir de esa experiencia, generalicemos el resultado. Te pedimos que analices cada paso.

Considera las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$, encontremos la derivada de la suma de ellas con este fin, definamos a la función $h$ como:

$$h(x) = f(x) + g(x) = x^2 + x^3,$$

y calculemos a $h'$ cuando $x = a$. Mediante la definición, la derivada de $h$ en $x = a$, es:

$$\begin{aligned}
h'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{h(x)-h(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{(f(x)+g(x))-(f(a)+g(a))}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a}\frac{(x^2+x^3)-(a^2+a^3)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{(x^2-a^2)+(x^3-a^3)}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a}\left(\frac{x^2-a^2}{x-a}+\frac{x^3-a^3}{x-a}\right) \\
&= \lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}+\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a}(x+a) \;+\; \lim_{x\to a}(x^2+ax+a^2) \\
&= 2a+3a^2
\end{aligned}$$

Así pues, la derivada de la función $h(x) = f(x) + g(x) = x^2 + x^3$, en el punto donde $x = a$ es $h'(a) = 2a + 3a^2$.

**Actividad 9.**
Calcula las derivadas de las funciones siguientes, en el punto indicado usando la definición de la derivada, de manera similar a como lo hicimos anteriormente.

1. $f(x) = 5x^2 + 2x$, en $x = -1$ 2. $f(x) = 3x^2 + 5x + 2$, $x = 2$
3. $f(x) = x^3 + 2x^2$, en $x = 1$ 4. $f(x) = 2x^3 - 5x + 4$, $x = 1$

Con base en las respuestas de la actividad anterior, ¿cuál es tu conjetura respecto a la derivada de la suma de funciones?

¿$h'(x) = (f(x) + g(x))' =$ __________________________ ?

Ahora, encontremos el resultado general, con lo cual podrás ver si tu conjetura es correcta.

Sean $f$ y $g$ dos funciones derivables en $x = a$. Calculemos la derivada de su suma para $x = a$, es decir, si definimos $h = f + g$, entonces calculemos $h'(a)$.

Iniciemos utilizando la definición de la derivada de $h$ en $x = a$. Revisa cuidadosamente cada paso.

$$
\begin{aligned}
h'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{h(x)-h(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{(f(x)+g(x))-(f(a)+g(a))}{x-a}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{(f(x)-f(a))+(g(x)-g(a))}{x-a}\\
&= \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right]\\
&= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\\
&= f'(a)+g'(a)
\end{aligned}
$$

¡En efecto!, tenías razón, **la *derivada de una suma de funciones es la suma de la derivada de las funciones***. Usando la notación funcional se tiene:

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$$

La propiedad anterior tiene una consecuencia inmediata, la cual se refiere a la derivada de la resta de dos funciones, iniciemos con la suma de dos funciones en donde la segunda función está multiplicada por una constante *c* cualquiera.

**Derivada de la resta de dos funciones.**
Sean *f* y *g* dos funciones derivables en *x* y *c* una constante, entonces

$$(f(x)+cg(x))' = f'(x)+(cg(x))'$$

Lo anterior es cierto porque, como ya vimos, la derivada de la suma es la suma de las derivadas. Ahora, como la derivada de una constante por una función es la constante por la derivada de la función, obtenemos:

$$f'(x)+(cg(x))' = f'(x)+cg'(x)$$

Resumiendo:

$$(f(x)+cg(x))' = f'(x)+cg'(x)$$

En particular si *c* = -1, obtendremos:

$$(f(x)-g(x))' = f'(x)-g'(x)$$

Cabe aclarar que en Matemáticas, se habla indistintamente de suma o resta diciendo suma algebraica que ya involucra a las dos operaciones anteriores y posteriormente, sólo se dice la suma (aunque se esté restando).

Apliquemos los resultados obtenidos al siguiente problema.

**EJEMPLO**
Se lanza una pelota verticalmente desde el suelo, con una velocidad inicial de 30 m/seg. ¿Cuál es la velocidad a los dos segundos?

De la física sabes que la trayectoria de la pelota está dada por la función:

$$f(x) = -4.9x^2 + v_0x + f_0,$$

En esta fórmula *f* representa la altura que alcanza la pelota sobre el suelo, *x* es el tiempo transcurrido, $v_0$ es la velocidad con la que se lanza la pelota y $f_0$ es la altura inicial de la pelota. En este caso la velocidad inicial es de 30 m/seg y la distancia inicial es de 0 metros, ya que se lanza desde el suelo. Sustituyendo estos datos en la función, se tiene:

$$f(x) = -4.9x^2 + 30x$$

En nuestro caso, la velocidad es la derivada de la función $f(x)$, la cual se determina como sigue:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-4.9x^2 + 30x)' \\ &= (-4.9x^2)' + (30x)' \\ &= -4.9(x^2)' + 30(x)' \\ &= -4.9(2x) + 30(1) \\ f'(x) &= -9.8x + 30 \end{aligned}$$

Así pues, la velocidad cuando $x = 2$ es $f'(2) = -9.8(2) + 30 = 10.4$m/seg.

En la primera unidad trabajamos resolviendo problemas haciendo explícito los procesos infinitos involucrados. Ahora, hemos sintetizado dichos procesos por medio de la derivada.

**Actividad 10.**

Determina la derivada de las siguientes funciones.

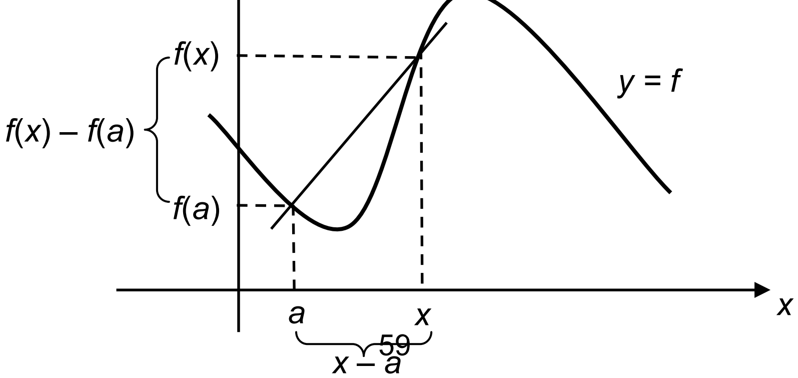
1. $f(x) = 5x^2 + 4x - 3$
2. $f(x) = -6x^4 + 5x^3 - 7x$
3. $f(x) = 6x^8 - 3x^6 + 7x^3$
4. $f(x) = 3x^5 + 8x^2 - 7x + 2$
5. $f(x) = -2x^7 + 3x^3 - 5x + 3$

**Notación:**

Es conveniente, antes de continuar con la deducción y aplicación de las reglas de derivación, que estudiemos las principales notaciones que existen sobre ella.

Recordemos que en el problema del lanzamiento de una pelota teníamos la función $s(t) = 80t - 4.9t^2$ y que la velocidad promedio en dos tiempos diferentes (su razón de cambio promedio) fue representada con la pendiente de la recta determinada por esos dos puntos. Abstrayendo esta idea, como queremos estudiar la razón de cambio instantánea de una función $f$ cualquiera, representaremos su gráfica y escogeremos dos puntos (uno fijo para estudiar la razón de cambio instantáneo en él) los que uniremos con una recta y mostraremos las diferentes notaciones que hay sobre su razón de cambio.

Considera la gráfica de la función *f,* que a continuación se ilustra:



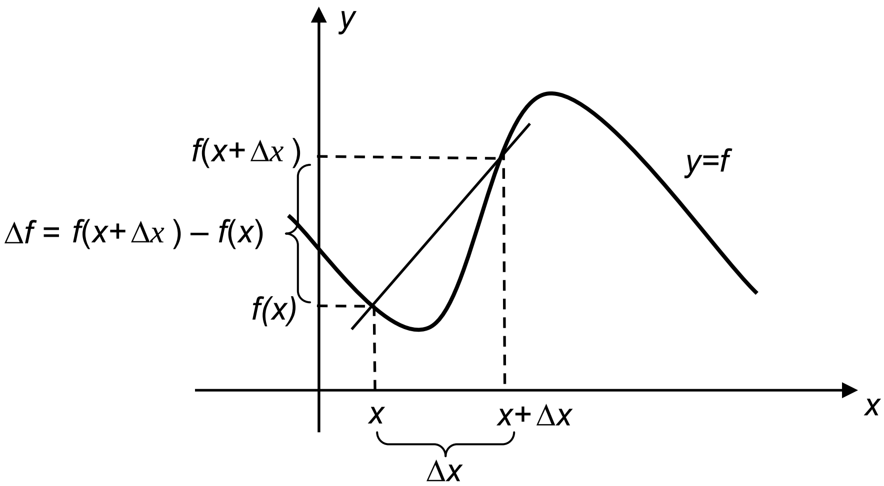
Estudiamos la razón de cambio promedio en el intervalo [*a, x*] (también puede ser en el intervalo [*x, a*], el cual no esta ilustrado), esta razón está dada por:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Posteriormente, calculamos la derivada en $x = a$, tomando el límite del cociente cuando *x* se aproxima al número *a*. En algunos libros cuando inician el cálculo de la derivada en el punto *x,* a la diferencia *x – a* le llaman incremento de *x*, simbolizado por $\Delta x$ , y a la diferencia *f*(*x*) – *f*(*a*) incremento de *f*, simbolizado por $\Delta f$ . Así, nuestra razón de cambio promedio se denota como

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

la cual es conocida como el cociente de incrementos. Para tener una visualización, observa la gráfica siguiente:




La derivada la podemos escribir como el límite, cuando $\Delta x$ tiende a cero, del cociente de incrementos, lo que origina que la derivada se pueda también simbolizar como:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{df}{dx}$$

Otros autores denotan al incremento en *x* por *h*, y el procedimiento anterior lo tratan de la misma forma, en que se ha expuesto aquí, cambiando $\Delta x$ por *h* quedando:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Finalmente, también se puede denotar a la derivada de *f* como $D_x f$.

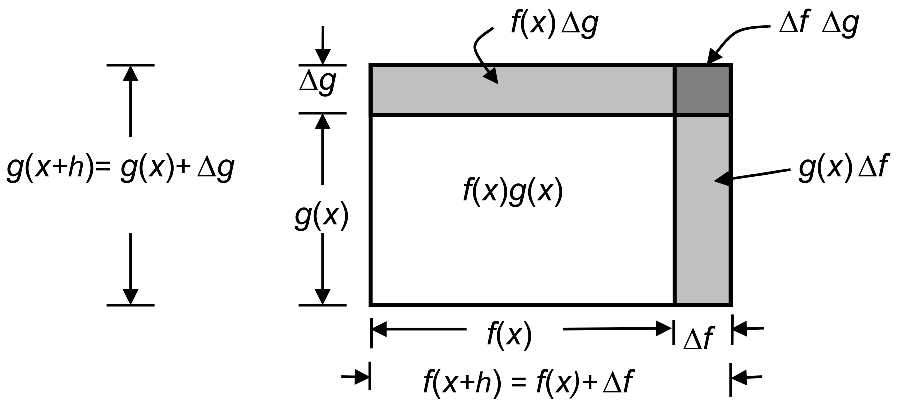
Resumiendo, la derivada de la función *f* con respecto a *x*, se puede escribir de cualquiera de las tres formas siguientes:

$$\frac{df}{dx},\ D_x f \ \text{ o } \ f'(x)$$

**Regla del producto**.
Si deseamos encontrar la derivada de una función polinomial bastará con aplicarle las fórmulas que tenemos, pero si queremos derivar a otro tipo de funciones no podríamos hacerlo por el momento. Por esa razón vamos a extender nuestros conocimientos sobre la derivada a otros tipos de funciones. En particular, trataremos funciones que surgen del producto, del cociente o de la raíz cuadrada de polinomios, las cuales son llamadas funciones algebraicas.

**Actividad 11.**
1. Calcula la derivada de las funciones
   a) $g(x) = x^2$ b) $h(x) = x^4$ c) $g(x) = 3x^2$ d) $h(x) = x^5$
2. Calcula la derivada del producto de $g(x) = x^2$ por y $h(x) = x^4$, es decir de $f(x)g(x) = x^2x^4 = x^6$.
3. Calcula la derivada del producto de $g(x) = 3x^2$ con $h(x) = x^5$ .
4. ¿Con base en lo anterior, será cierto que $(g(x)h(x))' = g'(x)h'(x)$? Si no son iguales tienes alguna idea de cuál será el resultado de $(f(x)g(x))'$.

En la siguiente gráfica te mostramos una representación de las funciones $f(x)$ y $g(x)$, de los incrementos $\Delta f$ y $\Delta g$ , así como de los productos: $f(x)g(x)$, $\Delta f\ \Delta g$ , $g(x)\Delta f$ y $f(x)\Delta g$ .




Observa que la derivada del producto $f(x)g(x)$ la podemos escribir como sigue:

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(f(x)g(x))}{\Delta x}$$

Y que el incremento del producto es:

$$\Delta(f(x)g(x)) = f(x)\Delta g + g(x)\Delta f + \Delta f\ \Delta g$$

Por lo que, aplicando las propiedades de los límites:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)\Delta g + g(x)\Delta f + \Delta f\Delta g}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x)\Delta g}{\Delta x} + \frac{g(x)\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta f\Delta g}{\Delta x}\right)\end{aligned}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{f(x)\Delta g}{\Delta x}\right) + \left(\lim_{\Delta x \to 0}\frac{g(x)\Delta f}{\Delta x}\right) + \left(\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta f \Delta g}{\Delta x}\right)$$

Al último término lo multiplicamos por 1, escrito como $\frac{\Delta x}{\Delta x}$ y lo reacomodamos:

$$= f(x)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta g}{\Delta x} + g(x)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}\frac{\Delta g}{\Delta x}\Delta x$$

$$= f(x)g'(x) + g(x)f'(x) + \left(f'(x)g'(x)\lim_{\Delta x \to 0}\Delta x\right)$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

El resultado anterior lo podemos escribir en lenguaje llano como sigue:
**La derivada del producto de dos funciones es igual a la derivada de la primera función por la segunda, más la derivada de la segunda por la primera.**

5. Comprueba que si $g(x) = x^3 - 5x$ y $h(x) = 2x^4 + 3x + 2$, entonces:
   $f(x) = (x^3 - 5x)(2x^4 + 3x + 2)$ y $f'(x) = 14x^6 - 50x^4 + 12x^3 + 6x^2 - 30x - 10$.
6. Deriva las siguientes funciones:
   a) $f(x) = (-3x^4 + 5x^3 + 4x + 2)(2x^6 + 4x - 4)$ b) $f(x) = x^3(x^2 + 3x)$
   c) $f(x) = (x^4 - 3x)^2$ d) $f(x) = (2x^4 - 3x^3 - 1)^2$ e) $f(x) = (-3x^2 + 2x)^2$
7. Con respecto a las derivadas de los incisos c), d) y e) del problema anterior,
   a) ¿Observas algún patrón en su derivada? ______
   b) En caso afirmativo di cuál es. ________________________________
   ________________________________________________
   c) Si $g$ es una función derivable en $x$ y $f(x) = (g(x))^2$, entonces ¿qué puedes decir de la derivada de $f$, en términos de $g$ y de $g'$?, en símbolos:
   Si $f = g^2$, entonces $f' =$¿______________?

**Derivada de funciones del tipo $(f(x))^n$ con $f(x)$ un polinomio.**

La regla de la derivada del producto de dos funciones, no fue sencilla de obtener, hasta grandes matemáticos como Leibniz tuvieron una idea incorrecta sobre ella. Sin embargo es de gran utilidad para la obtención de otras reglas. Por ejemplo podemos obtener la regla de derivación de funciones del tipo $(f(x))^n$, para una función $f$ cualquiera, aunque por el momento sólo lo haremos cuando $f$ sea un polinomio.

Supongamos que $f$ es una función derivable en $x$ y definamos a la función $y$ como el cuadrado de $f$, esto es $y = f^2$. Con ayuda de la regla del producto, encontremos la derivada de $y$, en términos de $f$ y su derivada $f'$.

Como $y = f^2$, con base en la regla del producto tendremos:

$$y' = (f^2)' = (f f)' = f f' + f f' = 2f f'$$

O bien

$$(f^2)' = 2f f'$$

Gracias a este resultado, derivar polinomios elevados al cuadrado ahora, resulta sencillo.

**Actividad 12.**

Comprueba lo siguiente:

1. Si $y = (4x^3 + 5x - 3)^2$, entonces $y' = 2(4x^3 + 5x - 3)(12x^2 + 5)$
2. Si $y = (-5x^4 + 2x^2 + 3x)^2$, entonces $y' = 2(-5x^4 + 2x^2 + 3x)(-20x^3 + 4x + 3)$

Lo bonito de este método es que se puede generalizar. Así, te invitamos a que analices lo siguiente y completes los pasos.

3. Si $f$ es una función cualquiera derivable en $x$ y $y = f^3$, calcula $y'$ en términos de $f$ y $f'$.
   a) Escribe a la función como un producto, con el fin de poder aplicarle la regla del producto, así pues: $y = f^3 = (f^2)(f)$. Ya escrita de esta manera, aplícale la regla del producto.
   b) Habiendo hecho lo anterior, utiliza la regla: $(f^2)' = 2f\,f'$. ¿Qué resultado obtuviste?
4. Con base en lo anterior, comprueba que si $y = (3x^4 + 5x^3 - 6x^2 + 6x)^3$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = 3(3x^4 + 5x^3 - 6x^2 + 6x)^2(12x^3 + 15x^2 - 12x + 6)$$
$$= 9x^2(3x^3 + 5x^2 - 6x + 6)^2(4x^3 + 5x^2 - 4x + 2)$$

Como habrás sospechado, existe una regla para derivar potencias de funciones, para poder deducirla encuentra la derivada de las funciones siguientes:

a) $y = f^4$ b) $y = f^5$ c) $y = f^6$

5. Con base en los resultados que se han obtenido completa la tabla siguiente:

| Función $y$ | Derivada de $y$ |
|---|---|
| $f^2$ | |
| $f^3$ | |
| $f^4$ | |
| $f^5$ | |
| $f^6$ | |
| .<br>.<br>. | |
| $f^n$ | |

En donde $n$ es un entero positivo.

La regla para derivar potencias de funciones que haz deducido, es verdadera para todo entero positivo. Otro aspecto importante de dicha regla es que sigue siendo válida cuando $n$ es un *número real*. Abundemos sobre esto.

Dedujiste que

$$(f^n)' = nf^{n-1}f'$$

cuando $n$ es un entero positivo.

Vamos a dar un ejemplo mediante el cual se puede observar que lo anterior sigue siendo cierto cuando $n$ es un número real, por ejemplo si $n = 1/2$, claro que en ese caso el dominio de la función no puede tener números negativos. ¿Por qué?

6. Calcula la derivada de $y=\sqrt{f}$ .
   a) Con el fin de poder aplicar las reglas que conocemos, vamos a elevar al cuadrado ambos miembros de la igualdad y a simplificar el resultado:
   $$(y)^2=(\sqrt{f})^2=f$$
   b) Ahora, deriva, tal y como te lo indicamos:
   $$((y)^2)'=f'$$
   c) Comprueba que puedes llegar al resultado siguiente después de despejar a *y'*:
   $$y'=\frac{f'}{2y}=\frac{f'}{2\sqrt{f}}$$

**Resumiendo, has obtenido la regla de la derivada de la raíz cuadrada de una función, esto es:**

$$\textbf{Si } y=\sqrt{f}\textbf{, entonces } y'=\frac{f'}{2\sqrt{f}}$$

7. Utilizando el resultado anterior, comprueba que si $y=\sqrt{1-x^2}$ , entonces $y'=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Tenemos una buena variedad de reglas de derivación, nos faltan varias reglas, aunque sólo trataremos una más.

**Derivada del cociente de dos funciones.**

La regla para derivar el producto de dos funciones, nos fue muy útil para encontrar la regla para derivar potencias y la regla de la raíz, también nos ayudará a encontrar la regla de la derivada del cociente de dos funciones.

Sean *f* y *g* dos funciones derivables en *x* y $y=\frac{f}{g}$. Queremos encontrar *y'*.

Conocemos la derivada de un producto de funciones, por lo que podemos emplear esa regla si transformamos el cociente anterior a un producto de dos funciones, lo cual es sencillo ya que

$$y=\frac{f}{g}\Rightarrow f=yg$$

Ahora, aplicamos la regla del producto a la función *f* y obtenemos:

$$f'=y'g+g'y$$

Despejando a *y'* así obtenemos:

$$y'=\frac{f'-g'y}{g}$$

Ahora, sustituimos el valor de *y* en la última expresión:

$$y' = \frac{f' - g'y}{g} = \frac{f' - g'\left(\frac{f}{g}\right)}{g} = \frac{\frac{f'g - g'f}{g}}{g} = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

Hemos encontrado la regla para derivar el cociente de dos funciones que enunciaremos a continuación:

(**Regla del cociente**) Sean *f* y *g* dos funciones derivables y *g*(*x*) ≠ 0, entonces

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

O bien

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)\frac{df(x)}{dx} - f(x)\frac{dg(x)}{dx}}{g^2(x)}$$

A continuación te mostramos dos ejemplos en el que se aplica la regla anterior y otras que ya vimos. Revísalos cuidadosamente.

Encuentra $D_x y$ si $y = \frac{2x^2 - 1}{3x + 5}$

Para hacerlo, observa que en este caso $f(x) = 2x^2 - 1$ y $g(x) = 3x + 5$, sus respectivas derivadas son; $f'(x) = 4x$ y $g'(x) = 3$. Aplicando la regla del cociente, se tiene

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \frac{(3x+5)(4x) - (2x^2-1)(3)}{(3x+5)^2}$$

$$= \frac{12x^2 + 20x - 6x^2 + 3}{(3x+5)^2} = \frac{6x^2 + 20x + 3}{(3x+5)^2}$$

Podemos encontrar en problemas de aplicación funciones que son el resultado de varias de las operaciones que hemos estudiado, por ejemplo:

Deriva la función siguiente: $f(x) = \left(\frac{x^2 - 9}{4x + 5}\right)^4$

Por la forma en que esta escrita la función, primero, debemos derivar a la potencia y después el cociente,

$$f'(x) = 4\left(\frac{x^2-9}{4x+5}\right)^3 \frac{(4x+5)(2x) - (x^2-9)(4)}{(4x+5)^2}$$

$$= 4\left(\frac{x^2-9}{4x+5}\right)^3 \frac{4x^2 + 10x + 36}{(4x+5)^2} = .$$

$$= \frac{8(x^2-9)^3(2x^2+5x+18)}{(4x+5)^5}$$

**Actividad 13.**

Deriva las siguientes funciones:

1. $f(x)=\dfrac{2x+4}{5x-4}$ 2. $f(x)=\dfrac{x^2-4x+1}{5x-3}$ 3. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

4. $f(x)=\dfrac{1-\dfrac{1}{x^2}}{x^2-2}$ 5. $f(x)=\left(\dfrac{x}{2x^4+5}\right)^6$ 6. $f(x)=\dfrac{(2x+5)^4x^2}{x+6}$

7. $f(x)=\dfrac{(2x+3)^3(x-2)}{5x+1}$ 8. $f(x)=\dfrac{x^2+9x-1}{x^2+2x+4}$ 9. $f(x)=\dfrac{x^{0.26}-2.01x}{1-x^{0.21}}$

**Problemas de aplicación.**
**Recordatorio:**
**La derivada *f'* de una función *f* en el punto *x* = *a* es igual a**

- **La pendiente de la gráfica de la función en *x* = *a*.**
- **La pendiente de la recta tangente a la gráfica en *x* = *a*.**

La pendiente de la recta tangente, nos ayuda a saber la forma de la gráfica de la función con sólo conocer su regla de correspondencia, esto lo trataremos en la siguiente unidad, por el momento determinaremos la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto o bien encontraremos una fórmula general de pendientes de la gráfica de una función.

**Actividad 14.**

1. Encuentra la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$ en el punto (1, –2).
   a) Para hacerlo, primero verifica que ese punto está en la gráfica de la función. Esto se comprueba verificando que $f(1) = -2$. Hazlo.
   b) Habiendo comprobado que el punto está en la gráfica, determina la derivada de la función y luego evalúala en $x = 1$. Realiza lo anterior y comprueba que la pendiente de la recta tangente es:
   $$m = f'(1) = 0$$
   ¿Qué significado tiene que la pendiente de la recta tangente valga cero?
   c) Como tenemos la pendiente $m = 0$ y un punto de la recta tangente $(1,-2)$, sustituimos en la ecuación de la recta de la forma punto pendiente:
   $$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$
   en la cual el punto es $(x_1,y_1)$ y la pendiente $m$. Substitúyelos por los valores que tenemos y comprueba que la ecuación de la recta tangente quedará, después de simplificar: $y = -2$.
2. Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$ en el punto (1,1).
   a) Como ya vimos, primero verifica que el punto (1,1) está en la gráfica de la función, es decir que $f(1) = 1$.
   b) Si el punto está en la gráfica, determina la derivada de la función, evalúala en $x = 1$ y comprueba que:

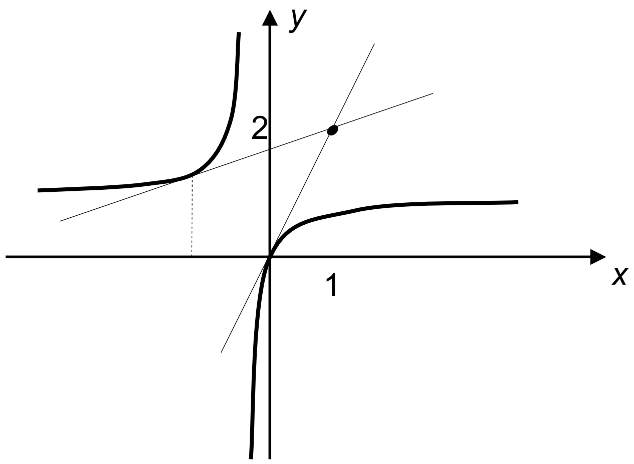
$$f'(x)=\frac{2}{(x+1)^2} \text{ y } m=f'(1)=\frac{1}{2}$$

c) Substituye, simplifica y comprueba que la ecuación de la recta tangente en el punto (1,1) es:

$$x - 2y + 1 = 0$$

3. ¿Encuentra las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de la función $f(x)=\frac{x}{x+1}$ que pasan por el punto (1,2)?

   a) ¿El punto (1,2) está en la gráfica de la función? ¡NO! Para entender mejor qué nos piden hemos trazado la gráfica, mediante la cual nos damos cuenta que son dos las rectas que pasan por el punto (1,2) y que son tangentes a la gráfica de la función. Pero, ¿cómo determinamos sus pendientes? Una manera para determinar la pendiente de una recta es con ayuda de dos puntos que están en ella. Tenemos como dato un punto que está en cada una de esas rectas y sabemos que pasan por los puntos de tangencia de las rectas con la gráfica. Así, nuestro problema se reduce a determinar los puntos de tangencia.




   b) Para determinar los puntos de tangencia, primero comprueba que la derivada de la función queda como sigue:

$$m(x)=f'(x)=\frac{(x+1)-x}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}$$

   Observa que ahora hemos obtenido una fórmula que nos proporciona la pendiente de la recta tangente para los valores que le demos a *x*. Si conociéremos el valor de *x*, en donde la recta es tangente a la gráfica, determinaríamos las pendientes con la fórmula anterior. Como desconocemos tales valores de *x* debemos determinarlos.

   ¿Qué información tenemos hasta el momento para poder determinar los valores de *x* para los cuales *m*(*x*) nos proporciona las pendientes de las rectas tangentes que pasan por el punto dado?

   Un punto, el (1,2), por el que pasan ambas rectas tangentes; la función nos proporciona la forma que deben tener todos los puntos de la gráfica, pues si su abscisa es x su ordenada es $\frac{x}{x+1}$ por lo que todos los puntos de la gráfica tienen la forma $\left(x,\frac{x}{x+1}\right)$, en particular los puntos de tangencia; y la fórmula de las pendientes, *m*(*x*).

Vamos a utilizar los dos puntos: (1,2) = $(x_1, y_1)$, $\left(x, \frac{x}{x+1}\right) = (x_2, y_2)$ y la fórmula de la pendiente de una recta que pasa por dos puntos, además de un poco de álgebra, para escribir:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{x}{x+1} - 2}{x-1} = \frac{x - 2(x+1)}{(x+1)(x-1)} = -\frac{x+2}{(x+1)(x-1)}$$

Y ahora, como ya conocemos la fórmula de las pendientes, tendremos:

$$m = -\frac{x+2}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

Esta ecuación la debemos resolver. Te pedimos revises cada paso que te presentamos realizándolos en tu cuaderno:

$$-\frac{x+2}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow -\frac{x+2}{x-1} = \frac{1}{x+1}$$

$$(x+2)(x+1) = -(x-1)$$

$$x^2 + 4x + 1 = 0$$

Cuyas soluciones son:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}$$

Así pues, existen dos soluciones, por lo que concluimos que hay dos rectas tangentes que pasan por el punto (1,2), cuyas pendientes son:

$$m = \frac{1}{(-1+\sqrt{3})^2} \text{ y } m = \frac{1}{(-1-\sqrt{3})^2}$$

4. Encuentra las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de la función $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ que sean paralelas a la recta $x - 2y = 2$.

   a) Como las rectas tangentes deben ser paralelas a la recta $x - 2y = 2$, su pendiente debe ser la misma que la de ella. Comprueba que su pendiente es igual a 1/2.

   b) Las rectas tangentes a la gráfica de la función son paralelas a la recta $x - 2y = 2$ y tienen pendiente 1/2 la fórmula de las pendientes tangentes es (compruébalo):

$$m(x) = f'(x) = \frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{1}{2}$$

   Así pues:

$$\frac{2}{(x+1)^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow (x+1)^2 = 4$$

$$x^2 + 2x + 1 = 4 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1) = 0$$

   Por lo tanto las soluciones de la ecuación son: $x$ = –3 y $x$ = 1. ¿Estas soluciones qué significado tienen, para qué me sirven esos valores obtenidos para $x$?

   c) Conocíamos el valor de la pendiente de las rectas tangentes, pero no los puntos de tangencia. Al igualar la fórmula de las pendientes de las rectas tangentes $m(x)$ con la pendiente conocida y resolver la ecuación resultante, determinamos los valores de $x$ para los cuales la recta tangente tiene pendiente 1/2. Así pues, después de encontrar los puntos de tangencia: $(-3,f(-3))$ y $(1,f(1))$, comprueba que las ecuaciones de las rectas tangentes que tienen pendiente 1/2 son:

$$x - 2y + 7 = 0 \ \text{ y } \ x - 2y - 1 = 0.$$

**Cálculo de Velocidades.**

Recordemos que si $s(t)$ es la posición de un móvil en el tiempo $t$, entonces $v(t) = s'(t)$ es la velocidad del objeto en el tiempo $t$. Escribimos este hecho como:

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = s'(t)$$

Observemos que: *las unidades de la derivada de una función son las unidades de la variable dependiente divididas entre las unidades de la variable independiente.*

**Actividad 15.**

1. Un objeto se mueve a lo largo del eje coordenado de modo que su posición $s$ satisface $s(t) = 2t^2 - 12t + 8$, donde $s$ se mide en centímetros y $t$ en segundos con $t \geq 0$.
   a) Determina la velocidad del objeto cuando $t = 1$ seg y cuando $t = 6$ seg.
   b) ¿Para que valor de $t$ la velocidad es igual a cero? y ¿cuándo es positiva?

Para resolver los incisos del problema es necesario encontrar la velocidad instantánea en el tiempo $t$, esto es $v(t) = \frac{ds}{dt} = 4t - 12$ y luego determinar $v(1)$ y $v(6)$, para determinar que las velocidades instantáneas son –8 y 12 cm/seg.

La velocidad es cero cuando $4t - 12 = 0$, equivalentemente cuando $t = 3$. Y positiva cuando $4t - 12 > 0$, es decir cuando $t > 3$.

2. Se arroja una pelota hacia arriba desde lo alto de un edificio de 49 metros de altura con una velocidad inicial de 24.5 metros por segundo.
   a) ¿Cuándo alcanza la altura máxima?
   b) ¿Cuál es la altura máxima?
   c) ¿Cuándo llega al piso?
   d) ¿Con qué velocidad llega al piso?

Para resolver la primera pregunta conviene encontrar la ecuación de movimiento de la pelota. Comprueba que $s(t) = -4.9t + 24.5t + 49$ es el modelo correspondiente a dicho movimiento, en donde $s(t)$ es la altura que alcanza la pelota al tiempo $t$.

Si derivas la ecuación de movimiento de la pelota, podrás encontrar su velocidad. Su altura máxima ocurrirá cuando la velocidad valga cero, por lo que si igualas a cero la derivada establecerás una ecuación de la que podrás despejar el tiempo $t$ para el cual ocurre lo anterior. Si sustituyes ese valor del tiempo en la función $s$, obtendrás la altura máxima.

Para saber cuándo llega al piso, se necesita conocer para qué valor de *t, s* toca al suelo, substituirlo en la ecuación de *s* y encontrar el valor respectivo de *t*, ese valor al substituirlo en la fórmula de la velocidad nos proporcionará la velocidad con la que llega al piso. ¿Está claro?

Si lo haces bien, llegarás a los siguientes resultados: la altura máxima la alcanza la pelota a los 2.5 seg y es de 79.625 m; toca el piso aproximadamente a los $\frac{5+\sqrt{65}}{2}$ seg con una velocidad de aproximadamente –39.494 m/seg, en donde el signo menos nos indica que la pelota esta bajando.

**Ejercicios.**

1. Encuentra la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función dada por $y = 3x^2 - 6x + 1$ en el punto (1, –2).
2. Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ en el punto $\left(1, \frac{1}{2}\right)$
3. Halla todos los puntos de la gráfica de la función $y = \frac{x^3}{3} + x^2 - x$ donde la tangente tenga pendiente 1.
4. Encuentra todos los puntos de la gráfica de la función $y = x^3 - x^2$ donde la tangente sea horizontal.
5. Hay dos tangentes a la gráfica de la función $f(x) = 4x - x^2$ que pasan por el punto (2,5). Encuentra las ecuaciones de ambas.
6. Una viajera del espacio se mueve de izquierda a derecha a lo largo de la gráfica de la función $y = x^2$. Cuando apague sus máquinas, se alejará a lo largo de la línea tangente en el punto donde esté es ese momento. ¿En qué punto debe apagar las máquinas para alcanzar el punto (4,15)?
7. Si se lanza una pelota verticalmente hacia arriba con una velocidad de 25 m/s, entonces su altura después de *t* segundos es $s(t) = 25t - 4.9t^2$.
   a) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota?
   b) ¿Cuál es la velocidad de la pelota cuando está a 29.4 metros arriba del piso en su camino hacia arriba?
   c) ¿Cuál es la velocidad de la pelota cuando está a 29.4 metros arriba del piso en su camino hacia abajo?
8. Un objeto arrojado verticalmente hacia arriba desde el nivel del piso con una velocidad de 29.4 m/seg tiene una altura aproximada de $s(t) = 29.4t - 4.9t^2$ al termino de *t* segundos.
   a) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza?
   b) ¿Con qué velocidad se mueve y en qué dirección al término de 1 segundo?
   c) ¿Qué tiempo tarda en regresar a su posición original?
9. Se arroja un objeto verticalmente hacia abajo desde lo alto de un acantilado, con un velocidad de $v_0$ metros por segundo, la ecuación de su movimiento de caída es $s(t) = v_0t - 4.9t^2$ metros en *t* segundos. Si cae al océano en 3 segundos con una velocidad de 42 metros por cada segundo, ¿cuál es la altura del acantilado?

10. Un jugador golpea una bola de billar, haciéndola moverse en línea recta. Si $s$ centímetros es la distancia de la bola desde su posición inicial a los $x$ segundos, entonces $s(t) = 100t^2 + 100t$. Si la bola da en una banda que se encuentra a 39 centímetros de su posición inicial, ¿a qué velocidad pega en la banda?

11. Dos partículas, A y B se desplazan a la derecha sobre una recta horizontal. Parten de un punto O, $s$ metros en la distancia dirigida de la partícula desde O a los $x$ segundos y las ecuaciones de movimiento son:

    $s_A(t) = 4t^2 + 5t$ para la partícula A

    $s_B(t) = 7t^2 + 3t$ para la partícula B

    Si $t = 0$ al principio, ¿para qué valores de $t$ la velocidad de la partícula A excederá la velocidad de la partícula B?