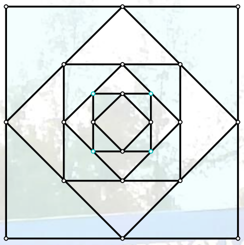
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

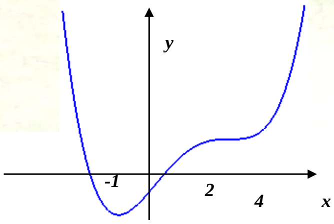
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

PLANTEL ORIENTE



GUÍA PARA EL EXAMEN EXTRAORDINARIO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

$$m'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{9}{x}+\frac{x}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-\frac{9}{x^2}+\frac{1}{9}\right).$$



Autores:
Francisco J. Hernández Velasco
Femando F. Hernández Velasco

Revisión Técnica:
María Elena Gómez Pérez

Agosto de 2009

Seminario de Matemáticas-Club de Matemáticas
Agosto de 2009

Primera edición agosto de 2009.

OTROS MATERIALES ELABORADOS POR EL SEMINARIO:

MATEMÁTICAS I.
Rosa María Bayona Celis, Carlos A. Jiménez Moreno, Sonia Jiménez Sánchez, María del Carmen Martínez Tapia, María del Carmen Olivera Martínez, Rafael Solís Pineda.
UNAM, CCH Oriente, agosto de 2006, segunda edición.

PAQUETE DIDÁCTICO PARA EL CURSO DE MATEMÁTICAS II.
Rosa María Bayona Celis, Alejandra G. Bravo Ortiz, Mario Emilio Domínguez y Baños, Sonia Jiménez Sánchez, María del Carmen Martínez Tapia, María del Carmen Olivera Martínez.
UNAM, CCH Oriente, enero de 2005.

TERCER SEMESTRE DE MATEMÁTICAS, ALGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA.
Rosa María Bayona Celis, Jesús García López, Carlos A. Jiménez Moreno, Sonia Jiménez Sánchez, María del Carmen Martínez Tapia, María del Carmen Olivera Martínez y Rafael Solís Pineda.
UNAM, CCH Oriente, julio de 2006.

PAQUETE DIDÁCTICO PARA EL CURSO DE MATEMÁTICAS IV.
Arturo Ávila Curiel, Fernando F. Hernández Velasco, Francisco J. Hernández Velasco, Carlos A. Jiménez Moreno, Víctor M. Pérez Torres, Rafael Solís Pineda.
UNAM, CCH Oriente, enero de 2005.

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II.
Alejandra G. Bravo Ortiz, Mario Emilio Domínguez y Baños, Fernando F. Hernández Velasco, Francisco J. Hernández Velasco, Víctor M. Pérez Torres.
UNAM, CCH Oriente, agosto de 2006.

GUÍA PARA EL EXAMEN EXTRAORDINARIO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II.
Alejandra G. Bravo Ortiz, Mario Emilio Domínguez y Baños, Fernando F. Hernández Velasco, Francisco J. Hernández Velasco, Víctor M. Pérez Torres.
UNAM, CCH Oriente, mayo de 2006.

MATEMÁTICAS III. ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA
Alejandra G. Bravo Ortiz, Fernando Fabián Hernández Velasco, Francisco Javier Hernández Velasco. UNAM, CCH Oriente Agosto de 1997.

GUÍA PARA EL EXAMEN EXTRAORDINARIO DE MATEMÁTICAS I.
Fernando Fabián Hernández Velasco, Francisco Javier Hernández Velasco. UNAM, CCH Oriente enero de 1997.

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
Francisco Javier Hernández Velasco. UNAM, CCH Oriente Agosto de 1998.

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I, CLASE A CLASE
Francisco Javier Hernández Velasco, Fernando Fabián Hernández Velasco.
UNAM, CCH Oriente octubre de 2003.

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II, CLASE A CLASE
Francisco Javier Hernández Velasco, Fernando Fabián Hernández Velasco.
UNAM, CCH Oriente enero de 2004.

GUÍA DE ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD I
Organizador Francisco Javier Hernández Velasco integrantes Fernando Fabián Hernández Velasco, Mario Emilio Domínguez y Baños, Carlos A. Jiménez Moreno. UNAM, CCH Oriente mayo de 2006.

GUÍA DE ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD II
Organizador Francisco Javier Hernández Velasco integrantes Fernando Fabián Hernández Velasco, Mario Emilio Domínguez y Baños, Carlos A. Jiménez Moreno. UNAM, CCH Oriente mayo de 2006.

ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD II
Fernando Fabián Hernández Velasco, Francisco Javier Hernández Velasco, UNAM, CCH Oriente enero de 2007

ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD I.
Fernando Fabián Hernández Velasco, María Elena Gómez Pérez, Francisco Javier Hernández Velasco, UNAM, CCH Oriente Octubre de 2008.

Impreso en el Plantel Oriente del Colegio de Ciencias y Humanidades, UNAM.
Departamento de Impresión a cargo del Señor Rosendo Vargas Torres.

INTRODUCCIÓN

La presente guía de Cálculo Diferencial e Integral I, contiene las cuatro unidades del programa incluyendo los propósitos de cada unidad, fue elaborada pensando en ti, en las dificultades y tropiezos con los que te has encontrado.

Al inicio de cada unidad se te da una breve explicación de cada tema, se exponen diferentes ejemplos, y se te proponen ejercicios muy parecidos a los reactivos del examen extraordinario, cuyas respuestas están al final de la guía.

Esta guía cuenta con una bibliografía y un software, a fin de que logres prepararte lo mejor posible para tu examen extraordinario.

Aunque la finalidad de la guía es ayudarte para que te prepares para tu examen extraordinario, creemos que también puede ser útil para los estudiantes que están iniciando este curso.

Antes de resolver los ejercicios es importante que te esfuerces en entender como se han resuelto los ejemplos, trata siempre de tener pluma o lápiz y papel para realizar los cálculos.

Resuelve todos los ejercicios por más sencillos u obvios que te parezcan, pues te servirán para adquirir habilidad en la resolución de ejercicios más complicados, y obtener un mejor dominio de los conocimientos del tema.

En el software se te presentan ocho exámenes parciales y un examen final, que te servirán para realizar una auto-evaluación previa a tu examen extraordinario.

Por último, cualquier sugerencia o duda con respecto a la guía o al software te lo agradeceremos y las recibiremos en el cubículo 21 del PEC I de las 13:00 a 15:00 hrs.

A t e n t a m e n t e

Francisco Javier Hernández Velasco (Coordinador)
María Elena Gómez Pérez (Revisora Técnica)
Fernando Fabián Hernández Velasco

Agosto de 2009

Índice general

UNIDAD 1

Procesos infinitos y la noción de límite

UNIDAD 2

LA DERIVADA: ESTUDIO DE LA VARIACIÓN Y EL CAMBIO

UNIDAD 3

DERIVADA DE FUNCIONES ALGEBRAICAS

UNIDAD 4

COMPORTAMIENTO GRÁFICO Y PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

UNIDAD 1

PROCESOS INFINITOS Y LA NOCIÓN DE LÍMITE

Propósitos. Explorar diversos problemas que involucren procesos infinitos a través de la manipulación tabular, gráfica y simbólica para propiciar un acercamiento al concepto de límite.

*En la **Unidad** siguiente, pretendemos que:*

- Resuelvas problemas de diversos contextos que involucran en su solución, procesos infinitos.
- Utilices las representaciones gráfica, tabular y algebraica de un proceso infinito para analizar su comportamiento en cuanto a: cómo cambia la variable, qué comportamiento sigue, cuáles son los valores siguientes, qué tan parecidos son y a la larga, cómo son éstos.

➢ PROCESOS INFINITOS.

Definición. *Proceso Infinito*, entenderemos por Proceso a toda acción que produzca un resultado, será infinito, si cada vez que tengamos una acción se puede realizar la acción siguiente.

Ejemplo 1. Considera el proceso siguiente en el cual se muestran las primeras cuatro acciones a las que le llamaremos *pasos*. Determina si es infinito o no.

$$\sqrt{5},\ \sqrt{5\sqrt{5}},\ \sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}},\ \sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}}}\ ,...$$

Solución. En el primer paso debemos calcular la raíz de cinco, es decir, $\sqrt{5}$ $\approx$ 2.236067977 (aproximación a 9 dígitos). En la segunda acción debemos calcular $\sqrt{5\sqrt{5}}$ cuyo valor a 9 dígitos es; 3.343701525, a cada nueva acción se le multiplica por cinco y se vuelve a extraer la raíz cuadrada, como se puede hacer la acción siguiente, este proceso es infinito[1].

Ejemplo 2. Evalúa la función $a(n)=n^2$ para sus primeros ocho valores, con n un número natural.

En forma de tabla podemos escribir los primeros ocho valores de la función a los que llamaremos términos de la función como:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$a(n)$	1	4	9	16	25	36	49	64

[1] Un conjunto es infinito, si se puede hacer corresponder una biyección entre el conjunto y un subconjunto propio de él. Nota de la redacción.

Sin embargo podemos dar números naturales mayores a 8 y continuar evaluando a la función descrita anteriormente, dado que este proceso (evaluar a la función) es infinito, podemos decir que el número n crece tanto como queramos.

Definición. Un número n *crece indefinidamente*, si cada vez que se da un número natural M, se tiene que: $n > M$. En este caso diremos que n tiende a infinito y lo denotamos por $n \to \infty$.

Observa que ∞ *no es un número*.

En la literatura matemática a las funciones que tienen como dominio a los números naturales se les expresa como a_n en lugar de $a(n)$, así en el ejemplo anterior tendríamos como primer término $a(1) = a_1 = 1$, como segundo término $a(2) = a_2 = 4$ y así sucesivamente.

Ejemplo 3. Considera a la función $a_n = \frac{n+1}{n}$, calcula los primeros once términos, observa su comportamiento y conjetura un valor cuando n crece indefinidamente.

Solución: El primer término es $a_1 = \frac{1+1}{1} = \frac{2}{1} = 2$, el segundo $a_2 = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$ resumiendo este proceso en una tabla se tiene para los primeros once términos.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a_n	2	1.5	1.33	1.25	1.2	1.167	1.143	1.125	1.11	1.1	1.09

Como nos damos cuenta, los términos de a_n decrecen conforme el valor de n crece, pero no decrecen arbitrariamente, ellos se van aproximando al número 1, podemos conjeturar que si $n \to \infty$ entonces a_n se aproxima a 1.

En Matemáticas cuando una expresión, en nuestro caso una función a_n, se aproxima a un número L (en el ejemplo al número 1), escribimos $a_n \to L$ (en el ejemplo $a_n \to 1$).

En general, decimos que una expresión a_n se aproxima a un número L, cuando n crece indefinidamente, si la distancia $|a_n - L|$ entre ellos es cada vez más pequeña y lo escribimos de la manera siguiente: $a_n \to L$ si $n \to \infty$, estas expresiones se sintetizan con la notación siguiente:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L \qquad (1)$$

Es muy útil saber el valor de $\lim_{n\to\infty} r^n$ cuando r es un número que está entre -1 y 1, en símbolos $-1<r<1$, con este propósito, realicemos el ejemplo siguiente.

Ejemplo 4. Calcula $\lim_{n\to\infty} r^n$ cuando $-1<r<1$.

Solución: Para fijar ideas tomemos un valor de r en el intervalo $(-1,1)$ por ejemplo $r=0.7$ y observemos los valores de r^n cuando n crece, iniciemos con $n=1$ $r^1=r=0.7$, después $n=2$, $r^2=(0.7)^2=0.49$ continuemos de esta manera y hagamos un resumen de estos resultados en una tabla, los valores de r^n para los primeros once enteros consecutivos son:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
r^n	0.7	0.49	0.343	0.2401	0.16807	0.117649	0.082	0.057	0.04	0.028	0.01977

Se puede observar que conforme n crece la función r^n decrece, pero el decrecimiento no es caótico, si no que se aproxima al número cero, en símbolos, expresamos este comportamiento como:

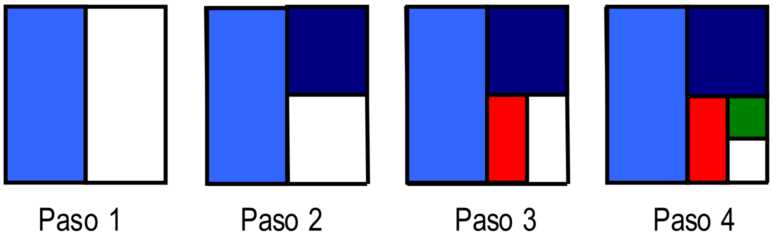
$$\lim_{n\to\infty} (0.7)^n = 0$$

Para cualquier otro número entre -1 y 1, la función se comporta de manera parecida, como ejercicio se te pide que tomes otros valores de r y realices las mismas operaciones, para que puedas concluir que:

$$\lim_{n\to\infty} r^n = 0 \quad \text{siempre y cuando } -1<r<1. \qquad (2)$$

Ejemplo 5. Un cuadrado de lado 1 se divide a la mitad y se pinta una de las dos partes, posteriormente, la mitad no pintada se divide a la mitad y una de estas mitades se vuelve a pintar (como se muestra en la figura). Si se repite este proceso indefinidamente:

¿Cuál es el área de la superficie que se pinta en cada paso? ¿Cuánto vale la suma de estas áreas en cada paso? ¿A qué número se aproxima tanto el área de la superficie en cada paso así como la suma de ellas?



Solución. En este problema se consideran dos cantidades, el área de la superficie sombreada y la suma de las áreas de las superficies pintadas en cada paso, a las que denotaremos por a_n y S_n respectivamente.

De esta manera se tendrá, para los primeros cuatro pasos;

Área a_n	Suma S_n
$a_1=\frac{1}{2}=0.5$	$S_1=\frac{1}{2}=0.5$
$a_2=\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^2=0.25$	$S_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=0.5+0.25=0.75$
$a_3=\frac{1}{8}=\left(\frac{1}{2}\right)^3=0.125$	$S_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=0.875$
$a_4=\frac{1}{16}=\left(\frac{1}{2}\right)^4=0.0625$	$S_4=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=0.9375$

Observa, tanto de la figura, como en la tabla que: el área a_n es cada vez más pequeña en un medio del área anterior, así el área $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ se aproxima al número cero (Por (2) ya que $-1<\frac{1}{2}<1$), en símbolos

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$$

Por otra parte (Observa la figura así como a los valores de la tabla) la suma de las áreas S_n es cada vez más grande en cada paso, S_n se aproxima al número uno, en símbolos

$$\lim_{n\to\infty} S_n=1$$

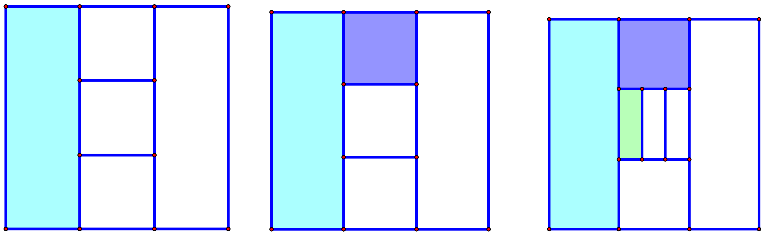
Pero la suma se puede escribir de la forma:

$$S_n=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

De esta manera tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=1$$

Ejemplo 6. Un cuadrado de lado 1 se divide en tres partes iguales y una de ellas se sombrea (paso 1). A una de las partes sobrantes se le divide en tres partes iguales y a una de ellas también se le sombrea (paso 2). Este proceso se repite indefinidamente. ¿Cuánta área de la superficie se pinta en cada paso? ¿Cuánto vale la suma de las áreas en cada paso? ¿A qué número se aproxima tanto el área en cada paso como la suma?



Paso 1 Paso 2 Paso 3

Solución:

Como en el ejercicio anterior, se consideran dos cantidades, el área de la superficie sombreada y la suma de las áreas de las superficies sombreadas en cada paso, a las que denotaremos por a_n y S_n respectivamente. Haremos una síntesis de sus valores en cada paso, resumiendo los resultados en la tabla siguiente (se muestran los primeros cuatro pasos):

Paso	Área a_n	Suma S_n
1	$a_1 = \frac{1}{3}$	$S_1 = \frac{1}{3} \approx 0.3333\bar{3}$
2	$a_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$	$S_2 = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \approx 0.4444\bar{4}$
3	$a_3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3$	$S_3 = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{13}{27} \approx 0.48148$
4	$a_4 = \left(\frac{1}{3}\right)^4$	$S_4 = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{40}{81} \approx 0.493827$

Nos damos cuenta que el área de la superficie sombreada en cada paso varia en un tercio del área anterior, por lo que a_n es cada vez más pequeña en un tercio conforme n crece, su término general es $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$, además $-1 < \frac{1}{3} < 1$ y por (2) se tiene

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$$

Por otra parte, el proceso en la figura nos indica que, se sombrea una parte igual a la que ya no se toma en cuenta, así, es claro que la suma de las áreas de las superficies debe ser la mitad del área del cuadrado. En símbolos:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n \right) = \frac{1}{2}$$

Ejemplo 7. Con base en los límites siguientes:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=1$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)=\frac{1}{2}$$

Conjetura el valor de los límites siguientes:

a) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$

b) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$

Solución: Podemos observar que el esquema es: el límite es igual a una razón con numerador uno y denominador un número menor en el denominador común, de esta forma se tiene:

a) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)=\frac{1}{3}$

b) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)=\frac{1}{4}$

Pero, ¿qué nos permite calcular estas sumas infinitas de esta forma? Para contestar a esta pregunta, primero, hagamos algunas observaciones y al mismo tiempo definamos los términos con los que estamos trabajando.

En el segundo ejemplo a_n tenía el valor de $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ a la expresión $\frac{1}{2}$ se le conoce con el nombre de razón (cociente de dos números naturales) y se denota comúnmente con la letra r, así $a_n=r^n$,

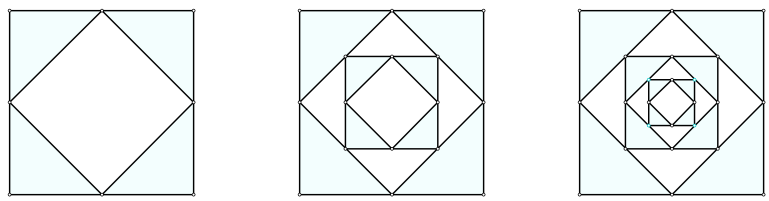
> **Definición**: En una sucesión geométrica (una sucesión es una función con dominio los números naturales), con primer término a y razón común r, el $n-$ *ésimo* término puede determinarse como:
>
> $$a_n = ar^{n-1}$$

De esta manera en nuestro segundo ejemplo $a=1$ y $r=\frac{1}{2}$, en el tercer ejemplo, también $a=1$, pero $r=\frac{1}{3}$

Hay varios ejemplos de sucesiones geométricas, aquí daremos sólo algunas.

Término general	*Primeros 5 términos*
$3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ o $\frac{3}{2^{n-1}}$	$3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}$
$\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ o $\left(\frac{2}{3}\right)^{n}$	$\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \frac{32}{243}$
$2\left(\frac{1}{10}\right)^{n}$	$\frac{2}{10}, \frac{2}{10^2} . \frac{2}{10^3}, \frac{2}{10^4}, \frac{2}{10^5}$
$-1^{\ n}$	-1, 1, -1, 1, -1

Ejemplo 8. Los puntos medios de los lados de un cuadrado de lado 1 se unen para formar un cuadrado nuevo. Este procedimiento se repite para cada nuevo cuadrado (como se muestra en la figura) Calcula la suma de las áreas de los triángulos sombreados.



Paso 1 Paso 2 Paso 3

Solución: Denotaremos por a_n el área de cada triángulo en cada paso, y por S_n el área total sombreada, hagamos un resumen mediante la tabla siguiente.

Paso	*Area de cada triangulo a_n*	*Área total sombreada S_n*
1	$\frac{1}{8}$	$4\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{2}+4\left(\frac{1}{32}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$
3	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{2}+4\left(\frac{1}{32}\right)+4\left(\frac{1}{128}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}$

Podemos observar que:

$$\frac{1}{8}=\left(\frac{1}{2}\right)^{3}, \quad \frac{1}{32}=\left(\frac{1}{2}\right)^{5}, \quad \frac{1}{128}=\left(\frac{1}{2}\right)^{7}, \ \cdots$$

La variable a_n, área de cada triángulo, es cada vez más pequeña, decrece en $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ en cada paso, así el área a_n se aproxima a cero (por (2)), en símbolos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Por otra parte la suma de las áreas S_n se hace cada vez más grande, para calcular su suma procedamos de la manera siguiente:

$$S_n = \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}$$ Multiplicamos por $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ a S_n

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 S_n = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}$$ Restamos

$$S_n - \left(\frac{1}{2}\right)^2 S_n = \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}$$

Como $$S_n - \left(\frac{1}{2}\right)^2 S_n = \frac{3}{4} S_n$$

Tenemos $$\frac{3}{4} S_n = \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}$$

En este caso $-1 < r = \frac{1}{2} < 1$, y por (2)

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} = 0$$

De esta manera, S_n se aproxima a $\frac{2}{3}$

El procedimiento llevado a cabo en este ejercicio (para obtener el valor del límite de S_n) es típico para las series geométricas y así poder obtener su suma en términos de n, antes de continuar daremos la definición de los símbolos que estamos manejando.

En los ejemplos que hemos ilustrado, se han realizado sumas de áreas en un proceso infinito, estas sumas, reciben el nombre de sumas parciales, y en general, cuando se tiene una sucesión a_n, se van formando las sumas parciales de ella, de la manera siguiente:

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$.$$

$$\vdots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Observa que las sumas parciales, forman a su vez una nueva sucesión, al límite de esta sucesión (en caso de existir), se le conoce con el nombre de serie. Esta observación nos permite hacer la definición siguiente:

Definición: La serie infinita

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

Se dice que tiene una suma S, si los términos de su sucesión de sumas parciales

$$S_1, S_2, S_3, \cdots, S_n, \cdots$$

Se acercan arbitrariamente a S conforme el valor de n crece indefinidamente.

Para la serie geométrica $a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$ consideremos su suma parcial S_n que en este caso es:

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n \qquad (3)$$

Multiplicando (3) por r

$$rS_n = \quad ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n + ar^{n+1} \qquad (4)$$

Restamos (3) de (4)

$$(1-r)S_n = a - ar^{n+1} = a(1-r^{n+1})$$

$$S_n = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r} \qquad \text{siempre que } r \neq 1$$

De esta manera

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r} = \frac{a}{1-r} \qquad (5)$$

Siempre y cuando la razón r sea tal que $|r| < 1$(por (2)).así hemos calculado la suma de una serie geométrica que enunciamos de la manera siguiente:

La suma de la serie geométrica $a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$ es

$$S = \frac{a}{1-r}$$

Siempre que $|r| < 1$, Si $|r| \geq 1$ la serie no tiene suma.

Observa que el valor de una serie, depende del valor de la razón común r.

Ejemplo 9. Encuentra la suma, si existe, de la serie geométrica

$$1+\frac{2}{5}+\frac{4}{25}+\frac{8}{125}+\cdots$$

Solución: La serie se puede escribir como:

$$1+\frac{2}{5}+\frac{4}{25}+\frac{8}{125}+\cdots=1+\frac{2}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^3+\cdots$$

La serie tiene razón común $r=\frac{2}{5}$ con $a=1$, así por (5)

$$1+\frac{2}{5}+\frac{4}{25}+\frac{8}{125}+\cdots=\frac{1}{1-\frac{2}{5}}=\frac{1}{\frac{3}{5}}=\frac{5}{3}$$

Ejemplificamos ahora, una serie que ha causado polémica en varios ámbitos.

Ejemplo 10. ¿La expresión 0.999999… es menor, igual o mayor, a 1?

Solución: Sabemos desde la primaria que $0.9=\frac{9}{10}$ y que $0.99=\frac{9}{10}+\frac{9}{100}=\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}$ así, podemos escribir

$$0.999...=\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}+\cdots$$

Por otra parte

$$\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}+\cdots=9\left[\left(\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{10}\right)^2+\left(\frac{1}{10}\right)^3+\cdots\right]$$

$$=9\left[\left(\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{10}\right)^2+\left(\frac{1}{10}\right)^3+\cdots\right]=9\left[\frac{1}{1-\frac{1}{10}}-1\right]=9\left(\frac{10}{9}-1\right)=10-9=1$$

(Observa que la suma no inicia en 1, así que en el resultado final se le resto)

1) $\frac{1}{9} = 0.1 + 0.01 + 0.001 + 0.0001 + \ldots$ representa un proceso

A) Periódico B) Discreto C) Aleatorio D) Infinito E) Finito

2) El valor del cuarto término de la sucesión $a_n = \frac{n^2+16}{4^n}$ es:

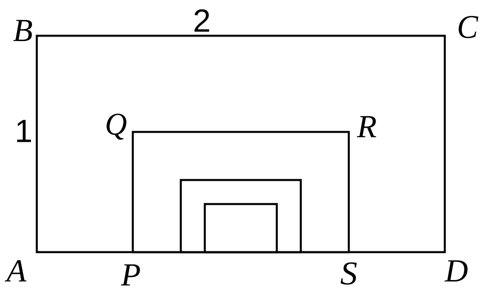
A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{1}{16}$ E) $\frac{1}{32}$

3) Considera la función $a_n = \frac{4-2n}{2(n+1)}$, cuyo dominio son los números naturales, entonces los primeros valores de la sucesión generada por a_n son:

A) $\frac{2}{3}, 1, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{2}, \ldots$ B) $\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{4}, -\frac{2}{5}, -\frac{1}{2}, \ldots$ C) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, 1, \ldots$

D) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$ E) $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}, \frac{10}{11}, \ldots$

4) Las dimensiones del rectángulo $ABCD$ son de 1 por 2. El rectángulo siguiente, $PQRS$, tiene dimensiones ½ x 1. De igual modo, cada rectángulo interior tiene la mitad de las dimensiones que el rectángulo precedente. Si esta sucesión de rectángulos continúa hasta el quinto rectángulo, ¿cuál es la suma de las áreas de todos los rectángulos?



A) 1/64 B) 1/25 C) 1/128 D) 1/512 E) 1/1024

5) El valor de la suma de la serie infinita $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$ es igual a:

A) 0 B) 10 C) 1 D) 20 E) 100

6) El resultado de la suma infinita $\frac{6}{10}+\frac{6}{10^2}+\frac{6}{10^3}+\frac{6}{10^4}+\ldots$ es:

A) $\frac{2}{3}$ B) 1 C) 0 D) $\frac{1}{3}$ E) 6

7) La suma 1 + 0.1 + 0.01 + 0.001 + . . . es igual a:

A) $\frac{11}{10}$ B) $\frac{10}{9}$ C) $\frac{11}{9}$ D) ∞ E) 2

8) Considera la sucesión siguiente:

$a_1 = 2$; $a_2 = 2\sqrt{2}$; $a_3 = 2\sqrt{2\sqrt{2}}$; $a_4 = 2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$; $a_5 = 2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}$;…

entonces el valor de $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ es:

A) 2 B) 1 C) 4 D) ∞ E) 5

Un segmento de longitud uno, se divide a la mitad y se pinta de azul la primera mitad, lo que resta se divide a la mitad y se pinta de azul la primera mitad y así sucesivamente. Completa la siguiente tabla para ayudarte a responder las preguntas 9, 10 y 11.

Número divisiones (n)	*Longitud de la parte pintada en esa división* (a_n)	*Longitud total del segmento pintado* (S_n)
1	$\frac{1}{2}$	
2		$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}=0.75$
3		
4		
5		
6 . . .		

9) La longitud del enésimo segmento pintado (a_n) es:

A) $\frac{1}{n}$ B) $\frac{1}{2^n}$ C) $\frac{1}{2n}$ D) $\frac{1}{n^2}$ E) $\frac{1}{2}$

10) La suma de los 4 primeros segmentos pintados (S_4) es:

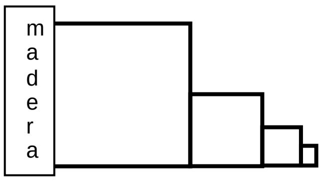
A) $S_4 = \frac{1}{4}$ B) $S_4 = \frac{3}{4}$ C) $S_4 = \frac{1}{2^4}$ D) $S_4 = \frac{15}{16}$ E) $S_4 = \frac{5}{16}$

11) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ es igual a:

A) 1 B) 0 C) ∞ D) no existe E) 2

Con la información del problema siguiente, responde las preguntas 12, 13, 14 y 15.

Se tiene un trozo de alambre y cortándolo se pretende formar cuadrados según la siguiente secuencia: el primero con un centímetro de lado pero como se apoyará en un trozo de madera, sólo se considerarán tres lados de alambre; el siguiente cuadrado con ½ cm de lado, pero como se colocará junto al anterior, sólo se considerarán nuevamente tres lados; el tercero tendrá como lado la mitad del anterior, es decir ¼ cm, igualmente pegado tal que sólo consideraríamos de nuevo tres lados y así sucesivamente, como se muestra en la figura.



Completa la tabla siguiente para ayudarte a responder las preguntas propuestas.

Cuadrado número: (n)	*Perímetro de cada cuadrado* (a_n)	*Perímetro total de los cuadrados* (S_n)
1	3	
2		$3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}=4.5$
3		
4		
5	$\frac{3}{2^4}=\frac{3}{16}=0.1875$	
6 . . .		

12) ¿Este es un proceso infinito?

A) No porque el perímetro total de los cuadrados, S_n, tiene un límite.

B) Sí porque el perímetro total de los cuadrados, S_n, es infinito.

C) Sí porque siempre es posible encontrar el siguiente valor del perímetro.

D) No porque el trozo del alambre no es infinito.

E) Si porque el trozo del alambre teóricamente tendría que ser infinito.

13) El perímetro del enésimo cuadrado (a_n) es:

A) $\frac{3}{2n-1}$ B) $\frac{3}{2^{n-1}}$ C) $\frac{3}{2(n-1)}$ D) $\frac{3}{2^n}$ E) $\frac{3}{2n}$

14) La suma de los perímetros de los tres primeros cuadrados (S_3) es:

A) $S_3 = \frac{3}{4}$ B) $S_3 = \frac{1}{4}$ C) $S_3 = \frac{3}{2^3}$ D) $S_3 = \frac{25}{16}$ E) $S_3 = \frac{21}{4}$

15) $\lim_{n\to\infty} S_n$ es igual a:

A) 1 B) 0 C) ∞ D) 7 E) no existe

16) Considera la sucesión $b_n = \frac{n-2}{n+2}$, el $\lim_{n\to\infty} b_n$ es:

A) 2 B) ∞ C) 1 D) no existe E) -1

UNIDAD 2
LA DERIVADA: ESTUDIO DE LA VARIACIÓN Y EL CAMBIO

Propósitos. Analizar la variación y la razón de cambio mediante problemas cuyos modelos sean funciones polinomiales de primer, segundo o tercer grado y obtener la derivada de dichas funciones con apoyo de la noción de límite.

Con esta Unidad pretendemos que alcances los aprendizajes siguientes:

- Expliques el significado de la pendiente de una función lineal en el contexto de un problema dado.
- Elabores una tabla, dibujes la gráfica y construyas una expresión algebraica asociadas al estudio de problemas cuyos modelos sean funciones polinomiales de primero, segundo o tercer grado.
- Identifiques que una función lineal tiene variación constante, en intervalos del mismo tamaño.
- Identifiques que en una función cuadrática, el cambio del cambio es constante en intervalos del mismo tamaño.
- Infieras que el n−ésimo cambio es constante para funciones polinomiales de grado n.
- Calcules la razón de cambio de una función polinomial, en un intervalo dado.
- Utilices procesos infinitos como un camino para obtener la razón de cambio instantánea de una función polinomial y la interpretes como un límite.
- Identifiques a la derivada de una función polinomial de primer, segundo y tercer grado en un punto, como el límite de las razones de cambio promedio.
- Calcules la derivada de funciones polinomiales usando: $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

ESTUDIO DE LA VARIACIÓN.

- SITUACIONES QUE SE MODELAN CON FUNCIONES POLINOMIALES DE 1°, 2° Y 3° GRADO.

En la vida cotidiana hay muchos fenómenos y objetos que contienen Matemáticas, si a las cosas que tenemos en la casa le pusiéramos una etiqueta que dijera “Contiene Matemáticas”, ¿a que objetos les pondríamos su etiqueta? Sin duda alguna a la computadora, a la televisión, al radio, al ipod, al celular, al automóvil,…, sin embargo no sólo los objetos contienen Matemáticas también algunos fenómenos, por ejemplo, cuando nuestra mamá hace un pastel, primero hace el pan y luego lo adorna, este pan al extraerlo del horno está muy caliente y poco a poco se va enfriando, este proceso de enfriamiento contiene Matemáticas, es el mismo fenómeno que le sucede al café cuando se enfría. Otros fenómenos que contienen Matemáticas son: la descripción de la circulación de la sangre, así como la descripción de la duración del día y la noche, digamos durante un mes, el crecimiento de la población, la velocidad en que viaja nuestro Planeta Tierra, la descripción del vuelo de un avión,… ¿puedes dar otros ejemplos?

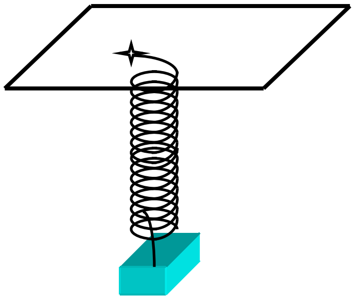
Una manera de estudiar y comprender estos fenómenos es a través del estudio de sus modelos, estos modelos pueden ser de tipo algebraico, gráfico, tabular u otro, los modelos algebraicos más usuales son las funciones (entre los ejemplos a los que nos hemos referido están los polinomios, trascendentes elementales, combinaciones entre ellas) y entre ellas, las funciones básicas son los polinomios, y entre ellos los polinomios de 1°, 2° o 3° grado, es por esta razón que en este apartado estudiaremos la modelación de fenómenos cuyo modelo sea un polinomio de 1°, 2° o 3° grado. Posteriormente, estudiaremos una de las partes esenciales de estas funciones, el estudio de su variación.

En los ejemplos que a continuación se presentaran y sólo en este apartado, consideraremos que el problema estará resuelto cuando se encuentre su modelo algebraico, el estudio de su variación y sus consecuencias se trataran en la segunda mitad (Razón de cambio, medición de la variación).

Polinomios de primer grado.

Ejemplo 1.

En un resorte de 15 centímetros de longitud se han suspendido varias pesas y medido su nueva longitud, obteniéndose la tabla que se muestra. Encuentra el modelo algebraico del problema.



Peso en kg. (p)	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Longitud del resorte (L)	*15*	*18*	*21*	*24*	*27*	*30*

Solución.

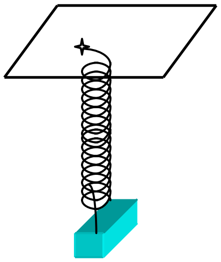
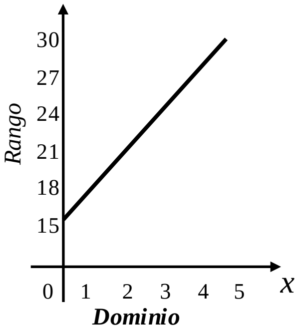
De lo expresado en el problema podemos escribir lo siguiente:

[Longitud] = [Longitud inicial] + [Longitud producida por la pesa]

Observa que por cada kilogramo la longitud aumenta en 3 cm, por lo que:

$$L(p) = 15 + 3p = 3p + 15$$

Reunamos los aspectos básicos que dieron origen a esta función lineal.

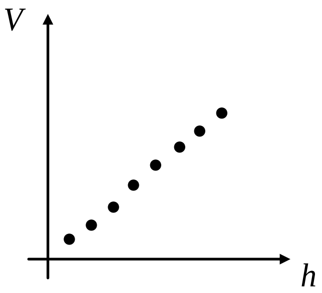
<table>
<tr><th>Fenómeno físico</th><th>Tabla de valores</th><th>Representación gráfica</th><th>Regla de correspondencia</th></tr>
<tr>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><th>Peso</th><th>Longitud</th></tr>
<tr><td>0</td><td>15</td></tr>
<tr><td>1</td><td>18</td></tr>
<tr><td>2</td><td>21</td></tr>
<tr><td>3</td><td>24</td></tr>
<tr><td>4</td><td>27</td></tr>
<tr><td>5</td><td>30</td></tr>
</table>
</td>
<td>
</td>
<td>$L(p)=15+3p$.</td>
</tr>
</table>

Ejemplo 2. Queremos fabricar un recipiente en forma de cilindro y nos interesa ponerle marcas para saber el volumen de líquido que puede contener. Supongamos que tenemos el recipiente con base circular y lo estamos llenando con un líquido, que el radio de la base es $r=5$ centímetros y la altura del recipiente es $H=12$ centímetros ¿cómo varía el volumen del líquido en función de su altura?

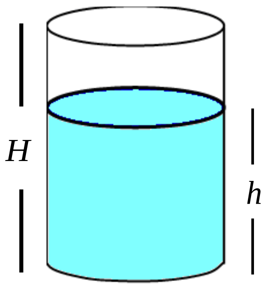
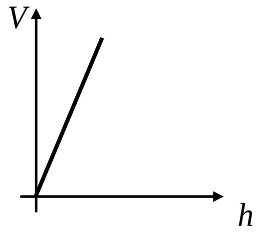
Solución. Como sabemos el volumen V de un cilindro se calcula mediante la expresión $V=\pi r^2 h$, nos dicen que $r=5$ y aproximando el valor de π por 3.14, se obtiene $V(h)=78.5h$, podemos calcular algunos valores, los cuales se resumen en la tabla siguiente.

h	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5
$V(h)$	0	39.25	78.5	117.75	157	196.25	235.5	274.75	314	353.25

Una gráfica discreta se puede trazar de la manera siguiente:



Nuevamente reunamos los aspectos básicos que dieron origen a esta función lineal.

<table>
<tr><th>Fenómeno físico</th><th>Tabla de valores</th><th>Representación gráfica</th><th>Regla de correspondencia</th></tr>
<tr><td>
</td><td><table>
<tr><th>h</th><th>$V(h)$</th></tr>
<tr><td>0.0</td><td>0.00</td></tr>
<tr><td>0.5</td><td>39.25</td></tr>
<tr><td>1.0</td><td>78.50</td></tr>
<tr><td>1.5</td><td>117.75</td></tr>
<tr><td>2.0</td><td>157.00</td></tr>
<tr><td>2.5</td><td>196.25</td></tr>
<tr><td>3.0</td><td>235.50</td></tr>
<tr><td>3.5</td><td>274.75</td></tr>
<tr><td>4.0</td><td>314.00</td></tr>
</table></td><td>
</td><td>$V(h) = 78.5h$</td></tr>
</table>

Ejemplo 3. La mamá de Víctor le acaba de servir una rica taza de café, como el café está muy caliente a 90 °C, para no aburrirse, mide la temperatura del café cada medio minuto durante los primeros tres minutos, la temperatura del café las resume en la tabla que a continuación se muestra.

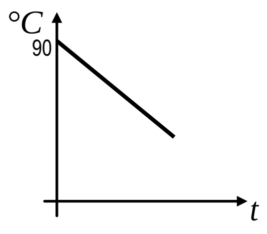
Tiempo t	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
Temperatura $°C$	90	89	88	87	86	85	84

Encuentra una relación entre el tiempo y la temperatura del café.

Solución. Como se puede apreciar la temperatura del café disminuye un grado por cada medio minuto que transcurre, así

$$C(t) = 90 - 2t = -2t + 90$$

Resumamos en un cuadro estos aspectos

<table>
<tr><th>Fenómeno físico</th><th>Tabla de valores</th><th>Representación gráfica</th><th>Regla de correspondencia</th></tr>
<tr><td></td><td><table>
<tr><th>t</th><th>$°C$</th></tr>
<tr><td>0.0</td><td>90</td></tr>
<tr><td>0.5</td><td>89</td></tr>
<tr><td>1.0</td><td>88</td></tr>
<tr><td>1.5</td><td>87</td></tr>
<tr><td>2.0</td><td>86</td></tr>
<tr><td>2.5</td><td>85</td></tr>
<tr><td>3.0</td><td>84</td></tr>
</table></td><td>
</td><td>$C(t) = 90 - 2t$</td></tr>
</table>

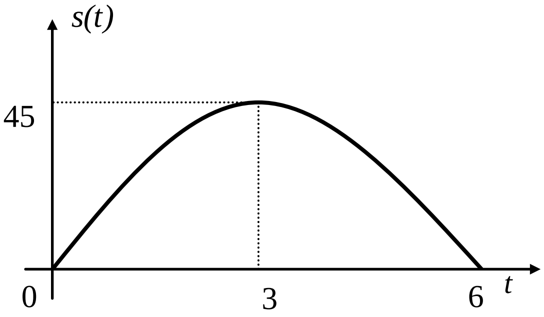
Polinomios de segundo grado.

Ejemplo 4. Se lanza una pelota verticalmente desde el suelo, con una velocidad inicial de 30 m/seg. Investiga su movimiento.

Solución. Por lo que has estudiado en física sabes que la trayectoria de la partícula está dada por:

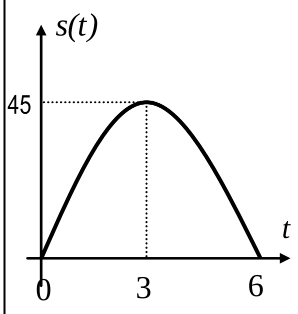
$$s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0$$

donde s_0 es la altura sobre el suelo en el tiempo t, g es la aceleración gravitatoria, considera $g \approx 10\frac{m}{seg^2}$, la función que describe a la trayectoria de la pelota es: $s(t) = 30t - 5t^2 = -5t^2 + 30t$. La función representa una parábola:



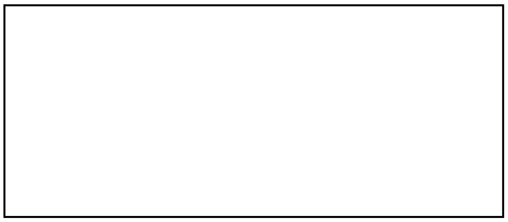
El punto más alto de la parábola es el vértice, si lo determinamos habremos encontrado para que valor de t la pelota alcanza su altura máxima. De tus cursos anteriores sabes que la función $s(t)$ representa una parábola y aprendiste a determinar su vértice.

No es difícil darse cuenta que el vértice es $V(3,45)$, lo que significa que al cabo de 3 seg. la pelota alcanza la altura máxima de 45 metros. Se puede calcular que la pelota esta en el aire durante 6 segundos.
Nuestro esquema del problema queda representado de la manera siguiente:

<table>
<tr><th>Fenómeno físico</th><th>Tabla de valores</th><th>Representación gráfica</th><th>Regla de correspondencia</th></tr>
<tr><td></td><td>
<table>
<tr><th>t</th><th>$s(t)$</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>25</td></tr>
<tr><td>2</td><td>40</td></tr>
<tr><td>3</td><td>45</td></tr>
<tr><td>4</td><td>40</td></tr>
<tr><td>5</td><td>25</td></tr>
<tr><td>6</td><td>0</td></tr>
</table>
</td><td>
</td><td>$s(t) = 30t - 5t^2$</td></tr>
</table>

Ejemplo 5. Muestra que si un rectángulo tiene base x, perímetro 100 (como se te muestra en la figura), entonces su área A está dada por la función

$$A(x) = x(50 - x) = -x^2 + 50x, \qquad 0 \le x \le 50$$



x

Solución. Como el largo tiene longitud x, empleamos $2x$ para la base y la parte de arriba del rectángulo que tiene la misma longitud, quedándonos $100 - 2x$, que emplearemos en dos lados de igual longitud que nos restan, es decir, cada uno de estos lados mide $50 - x$, así los lados del rectángulo miden x y $50 - x$, como el área es lado por lado el área A del rectángulo es

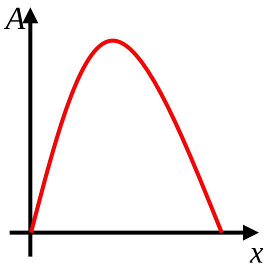
$$A(x) = x(50 - x) = -x^2 + 50x$$

Con lo cual el problema queda resuelto, en la tabla siguiente daremos algunos valores de los lados, sí como de su área

x	$50 - x$	$A(x)$
10	40	400
20	30	600
30	20	600
40	10	400

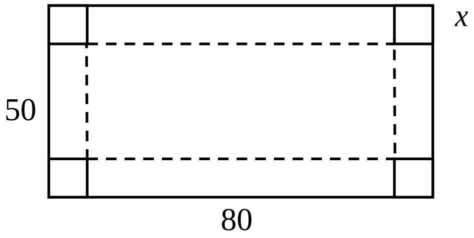
Aparentemente el área máxima se encuentra en $x = 20$ *y* $x = 30$, sin embargo, si $x = 25$, el área es 625 un poco mayor al área encontrada anteriormente, podemos concluir que una buena aproximación al área máxima es 625 cuando x es 25 y el largo también tiene el mismo valor.

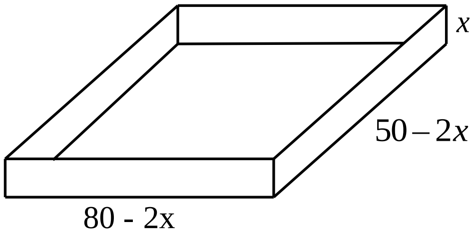
Nuestro esquema es el siguiente:

<table>
<tr><th>Fenómeno físico</th><th>Tabla de valores</th><th>Representación gráfica</th><th>Regla de correspondencia</th></tr>
<tr>
<td>
x</td>
<td>
<table>
<tr><th>x</th><th>$50 - x$</th><th>$A(x)$</th></tr>
<tr><td>10</td><td>40</td><td>400</td></tr>
<tr><td>20</td><td>30</td><td>600</td></tr>
<tr><td>30</td><td>20</td><td>600</td></tr>
<tr><td>40</td><td>10</td><td>400</td></tr>
</table>
</td>
<td>
</td>
<td>$A(x) = -x^2 + 50x$</td>
</tr>
</table>

Polinomios de tercer grado.

Ejemplo 6. El clásico problema de la caja. Con un cartón de 30 por 80 centímetros, se desea hacer una caja sin tapa, cortando cuadrados en las esquinas. Calcula el volumen de la caja.





Solución.

Como sabemos el volumen de la caja se calcula mediante la igualdad siguiente:

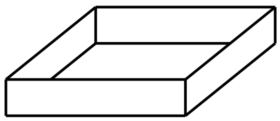
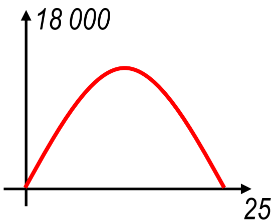
[Volumen] =[Largo][Ancho][Altura],

$$
\begin{aligned}
V(x) &= (80-2x)(50-2x)x \\
&= 4x^3 - 260x^2 + 4000x
\end{aligned}
$$

Podemos construir una tabla que nos muestre los valores del corte y su volumen.

Longitud del corte x	*Volumen* V
1	3744
2	6992
3	9768
8	17408
10	18000

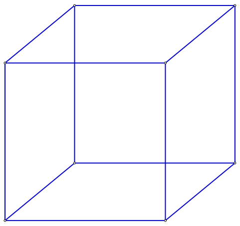
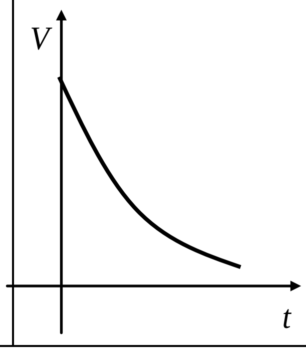
Los aspectos principales que dan lugar a esta función polinomial de tercer grado son los siguientes:

<table>
<tr><th>Fenómeno físico</th><th>Tabla</th><th>Representación gráfica</th><th>Regla de correspondencia</th></tr>
<tr>
<td></td>
<td><table><tr><th>x</th><th>V</th></tr><tr><td>1</td><td>3744</td></tr><tr><td>2</td><td>6992</td></tr><tr><td>3</td><td>9768</td></tr><tr><td>8</td><td>17408</td></tr><tr><td>10</td><td>18000</td></tr></table></td>
<td>
</td>
<td>$V(x) = (80-2x)(50-2x)x$
$= 4x^3 - 260x^2 + 4000x$</td>
</tr>
</table>

Ejemplo 7. Un bloque cúbico de hielo se funde de modo que su arista decrece 2 centímetros cada hora, ¿qué volumen de hielo queda después de cada hora, si el cubo de hielo originalmente tiene 20 centímetros?

Solución. El volumen inicial V_1 del bloque de hielo, está dado por $V_1(x) = 20^3 = 8000\, cm^3$, después de una hora la arista mide $18 = 20 - 2$, en la segunda hora $16 = 20 - 4 = 20 - 2(2)$, si t representa el tiempo en horas, entonces el volumen restante es $V(t) = (20 - 2t)^3 = -8t^3 + 240t^2 - 2460t + 8000$, se puede observar que $0 \le t \le 10$, la tabla siguiente, nos muestra algunos valores del volumen del bloque de hielo mientras el tiempo transcurre.

Tiempo t	0	1	2	3	4	5	6	7
Volumen V	8000	5832	4096	2744	1728	1000	512	216

<table>
<tr><th>Fenómeno físico</th><th>Tabla</th><th>Representación gráfica</th><th>Regla de correspondencia</th></tr>
<tr><td></td><td><table><tr><td>t</td><td>$V(t)$</td></tr><tr><td>0</td><td>8000</td></tr><tr><td>1</td><td>5832</td></tr><tr><td>2</td><td>4096</td></tr><tr><td>3</td><td>2744</td></tr><tr><td>4</td><td>1728</td></tr><tr><td>5</td><td>1000</td></tr><tr><td>6</td><td>512</td></tr><tr><td>7</td><td>216</td></tr></table></td><td>
</td><td>$V(t) = (20 - 2t)^3$</td></tr>
</table>

Resumen: Las funciones polinomiales que hemos tratado son de primer, segundo y tercer grado, representémoslas en el cuadro siguiente.

<table>
<tr><th>Fenómeno</th><th>Función</th><th>Grado</th><th>Forma general</th></tr>
<tr><td>Resorte</td><td>$L(p) = 3p + 15$</td><td rowspan="2">Primero</td><td rowspan="2">$f(x) = mx + b$</td></tr>
<tr><td>Café</td><td>$C(t) = -2t + 90$</td></tr>
<tr><td>Lanzamiento</td><td>$s(t) = -5t^2 + 30t$</td><td rowspan="2">Segundo</td><td rowspan="2">$f(x) = ax^2 + bx + c$</td></tr>
<tr><td>Rectángulo</td><td>$A(x) = -x^2 + 50x$</td></tr>
<tr><td>Caja</td><td>$V(x) = 4x^3 - 260x^2 + 4000x$</td><td rowspan="2">Tercero</td><td rowspan="2">$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$</td></tr>
<tr><td>Hielo</td><td>$V(t) = -8t^3 + 240t^2 - 2460t + 8000$</td></tr>
</table>

En general los polinomios son funciones del tipo

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

En donde las a_i son números reales y n es un número natural.

En la sección siguiente estudiaremos su variación en intervalos del mismo tamaño, este estudio también lo haremos en su aspecto numérico y gráfico, de una manera similar a como se trataron los ejemplos previos, tenemos la convicción que todo resultado matemático proviene de problemas prácticos y estos se pueden visualizar con la *regla de tres*, es decir, de manera *numérica, gráfica* y *algebraica*.

➢ COMPARACIÓN DE LA RAZÓN DE LOS CAMBIOS EN INTERVALOS DEL MISMO TAMAÑO.

Primeramente distinguimos entre *cambio* y *razón de cambio*. La expresión "razón de cambio" se refiere a la cantidad de cambio en relación por ejemplo a la cantidad de tiempo. Para fijar ideas, supongamos que un hombre puede tener un cambio en el número de veces que su corazón palpita, digamos de 75 a 90, decimos que hubo un cambio en el número de palpitaciones, y representará una razón de cambio si se toma en cuenta el tiempo que empleo en cambiar este número, si el tiempo es de 10 minutos diremos que su razón de cambio es de 15 palpitaciones por cada 10 minutos, si el cambio lo efectuó en 5 minutos, entonces diremos que su razón de cambio fue de 15 palpitaciones por cada 5 minutos (o de 3 por cada minuto), para cada periodo de tiempo, se tiene una razón de cambio.

En el problema del café la temperatura cambia, pero cuando hacemos referencia al tiempo que tarda en enfriarse, decimos que hay una razón de cambio de la temperatura respecto al tiempo, con los datos dados en el ejemplo, su razón de cambio es de un grado por cada medio minuto.

Debemos hacer énfasis en qué lo que nos interesa estudiar no es la *cantidad de cambio* sino *la razón de cambio*. Los fenómenos tratados anteriormente los representamos mediante una función f, y cuando esta era evaluada en un número a, la expresión $f(a)$ representa un número, por ejemplo en el lanzamiento de la pelota la función es $s(t) = -5t^2 + 30t$ y $s(1) = 25$ es un número.

Continuando con el ejemplo del lanzamiento de la pelota, supongamos que queremos saber el cambio en metros de la pelota entre 1 y 3 segundos, entonces la distancia recorrida por la pelota será de $s(3) - s(1) = 45 - 25 = 20$ metros, pero, si lo que queremos es saber su razón de cambio, entonces debemos considerar el tiempo empleado en recorrer esos 20 metros,

$$\textit{Razón de cambio} = \frac{s(3)-s(1)}{3-1} = \frac{45-25}{2} = \frac{20}{2} = 10\frac{m}{s}$$

La razón de cambio es de 10 metros por cada segundo entre 1 y 3 segundos.

En general si f modela algún fenómeno que ocurre entre dos números (o periodos de tiempo) a y b, la razón de cambio (también llamada razón de cambio promedio) se *define* como:

$$\textit{Razón de cambio} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Ahora, aprenderemos que significa la razón de cambio promedio, en las funciones polinomiales que hemos estudiado en los ejemplos anteriores y como se comportan estas razones promedio.

En los polinomios tratados anteriormente, calcularemos las razones de cambio promedio, con intervalos de la misma longitud, iniciaremos con una unidad de longitud y después con media unidad, así haremos algunas conjeturas y también algunas generalizaciones, iniciamos con los polinomios de primer grado.

Problema del resorte. (Una unidad de longitud)

Peso en kg. (p)	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Longitud del resorte (L)	*15*	*18*	*21*	*24*	*27*	*30*

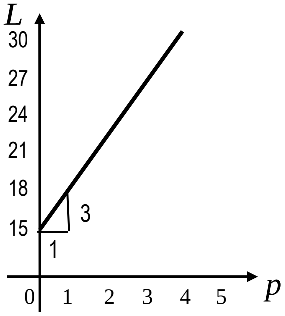
Razones de cambio (R) 3 3 3 3 3

Ejemplo, razón de cambio de 0 a 1

$$\text{R=razón de cambio} = \frac{L(b)-L(a)}{b-a}$$

$$R = \frac{L(1)-L(0)}{1-0} = \frac{18-15}{1} = 3\frac{cm}{kg}$$

Geométricamente estamos calculando la pendiente de la recta que modela al problema



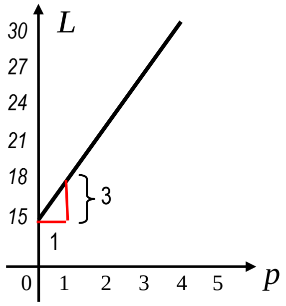
Nos percatamos de dos consecuencias, en la función $L(p) = 3p + 15$ el número 3 es la razón de cambio promedio (centímetros alongados por cada Kilogramo de peso) y a su vez es la pendiente de la recta tangente.

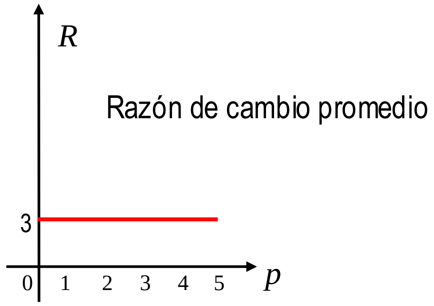
Media unidad de longitud.

Peso en kg. (p)	*0.0*	*0.5*	*1.0*	*1.5*	*2.0*	*2.5*
Longitud del resorte (L)	*15*	*16.5*	*18*	*19.5*	*21*	*22.5*

Razones de cambio 3 3 3 3 3

La razón de cambio promedio no cambia, en general en polinomios de primer grado este hecho siempre es cierto. Así tendremos, la función y su razón de cambio.

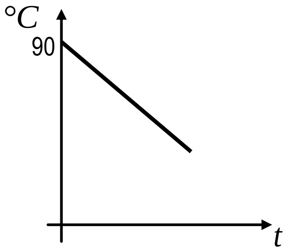




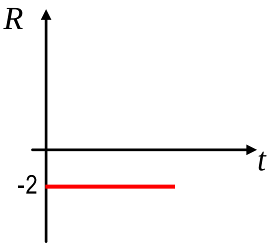
Ejercicio 1. Haz el mismo análisis para el problema del café.

Los resultados a los que debes de llegar son los siguientes

Razón de cambio $=\dfrac{C(1)-C(0.5)}{1-0.5}=\dfrac{88-89}{0.5}=-\dfrac{1}{0.5}=-2$ no varía, significa, razón de cambio (cambio de temperatura respecto al tiempo) y al igual que el ejercicio anterior, también es la pendiente de la recta,



Modelo gráfico



Razón de cambio

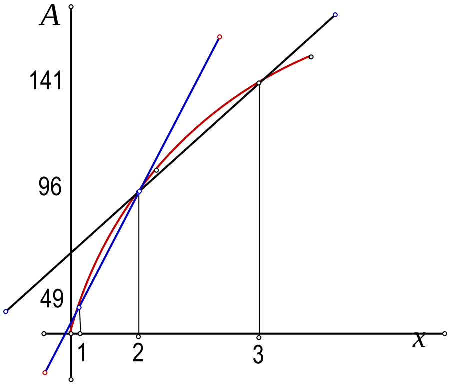
El problema del rectángulo. Como en el análisis preliminar, primero calcularemos la razón de cambio promedio con un intervalo de una unidad, y posteriormente lo haremos con intervalos de media unidad

En intervalos de una unidad, (Recuerda la función es $A(x)=-x^2+50x$)

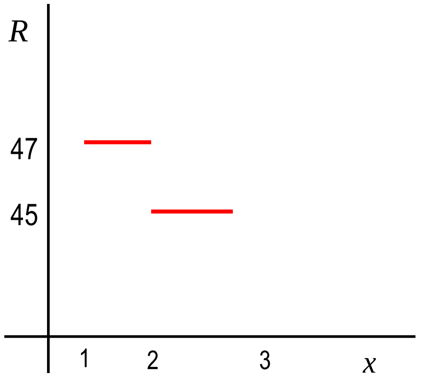
Base x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Área $A(x)$	49	96	141	184	225	264	301	336	369

Razones de cambio 47 45 43 41 39 37 35 33

Lo que calculamos geométricamente es lo siguiente: En la parábola que modela al problema del rectángulo, se esta uniendo los puntos (1,49) con (2,96), (2,96) con (3,141),... con rectas y a estas rectas se les está calculando su pendiente, como se ilustra a continuación:



Parte de la gráfica,



Razón de cambio en dos intervalos

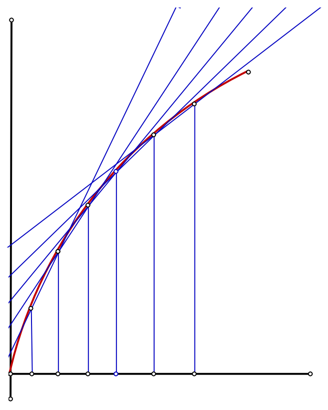
Ahora procedamos a realizar el mismo esquema para intervalos con media unidad de longitud.

Base x	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
Área $A(x)$	49	72.75	96	118.75	141	162.75	184	204.75	225

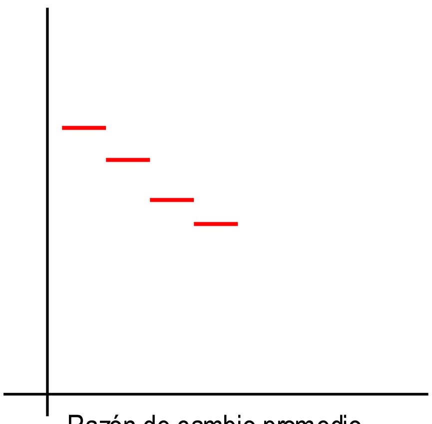
Razones de cambio 47.5 46.5 45.5 44.5 43.5 42.5 41.5 40.5

Nuevamente, estamos calculando las pendientes de las rectas que unen dos puntos consecutivos, sus pendientes se muestran a la derecha de la gráfica que modela al problema del rectángulo, como puedes darte cuenta, las pendientes son más pequeñas (en este caso) conforme es más pequeño el intervalo en el cual se calcula.

A pesar de que las razones de cambio no son las mismas como en el caso lineal, estas tienen una propiedad que veremos en el apartado siguiente, esta propiedad nos permitirá distinguir cuando tenemos un polinomio de primer, segundo o en general de cualquier grado. Baste por ahora, saber que estamos introduciendo las primeras aproximaciones.



Parte de la gráfica,



Razón de cambio promedio

Ejercicio 2. Haz el mismo análisis para el problema del lanzamiento de la pelota.

Debes de obtener en el intervalo [1,2] una razón de cambio de 15, en el intervalo [2,3] una razón de 20. Para intervalos de media unidad por ejemplo, en [1, 1.5] una razón de 17.5, en el intervalo [1.5, 2] una razón de 12.5.

El problema de la caja. Haremos el mismo estudio con el problema de la caja, tomaremos intervalos de una unidad de longitud y calcularemos su razón de cambio promedio, continuaremos para intervalos con una longitud de la mitad de la unidad. Se te muestran los valores para el volumen de la caja en la tabla siguiente:

Corte x	1	2	3	4	5	6	7	8
Volumen $V(x)$	3744	6992	9768	12096	14000	15504	16632	17408

Razones de cambio: 3248, 2776, 2328, 1904, 1504, 1128, 776

Como puedes observar la razón de cambio no es la misma en cada intervalo, al igual que con los polinomios de segundo grado, los polinomios de tercer grado tienen esta característica, pero estas razones de cambio, de alguna manera son más caóticas que las de segundo grado ya que en ellas, es fácil conjeturar un patrón, en las de tercero, no. Al igual que en los polinomios de segundo grado, estamos calculando las pendientes de las rectas que unen a dos puntos en la gráfica de la función (ve el ejercicio anterior).

Cuando calculamos las razones de cambio para intervalos más pequeños podemos percatarnos que continuamos en la misma situación, para intervalos de media unidad, se presenta la tabla siguiente con los datos involucrados.

Corte x	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5
Volumen $V(x)$	3744	5428.5	6992	8437.5	9768	10986.5	12096	13099.5

Razones de cambio: 3369, 3127, 2669, 2661, 2437, 2219, 2007

Aunque las razones de cambio parecen más caóticas no lo son, en el siguiente apartado veremos una bella relación.

Resumen: La razón de cambio promedio en polinomios de primer grado es la pendiente de la recta. Con respecto a las razones de cambio en polinomios de grado superior a uno, no lo es y por lo tanto se puede estudiar el significado de la razón de la razón (variación de la variación), por otra parte, en polinomios de segundo grado o superiores, la razón de cambio es la pendiente de la recta que une los puntos en donde se calcula dicha razón.

➢ CAMBIOS DE LOS CAMBIOS.

Hemos estudiado la razón de cambio promedio, a esta razón se le conoce también con el nombre de primer cambio, y como hemos hecho énfasis en los polinomios de segundo grado y mayores, este primer cambio no es constante, así podemos estudiar los cambios de los cambios, y su significado.

Para iniciar, volvamos al problema del rectángulo y su tabla con el primer cambio, ahora calculemos el segundo cambio, es decir, la razón de cambio de la razón de cambio:

Base x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Área $A(x)$	49	96	141	184	225	264	301	336	369

Primer cambio: 47, 45, 43, 41, 39, 37, 35, 33

Segundo cambio: -2, -2, -2, -2, -2, -2, -2

Hagamos lo mismo para intervalos más pequeños (mitad)

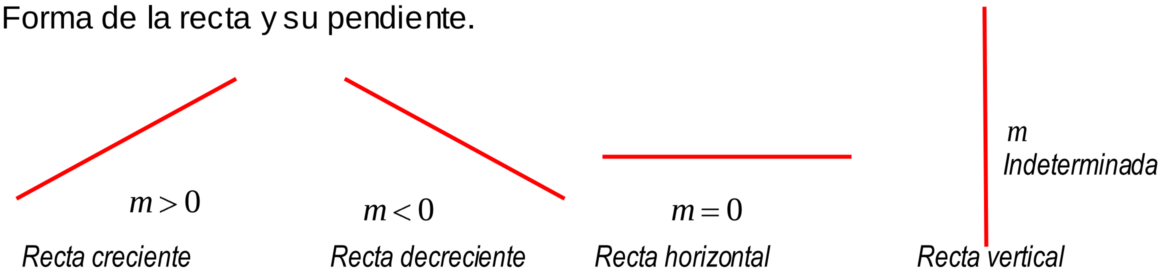
Base x	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
Área $A(x)$	49	72.75	96	118.75	141	162.75	184	204.75	225

Primer cambio: 47.5, 46.5, 45.5, 44.5, 43.5, 42.5, 41.5, 40.5

Segundo cambio: -2, -2, -2, -2, -2, -2, -2

En ambos casos el segundo cambio fue constante, y también si el intervalo tiene una longitud menor, el segundo cambio fue el mismo, podemos observar que conforme la variable x aumenta (en el primer caso hasta 9, en el segundo hasta 5) el área A aumenta (esto no siempre es cierto), pero lo hace cada vez más lento (de 49 a 96 hay 47 unidades, pero de 141 a 96 sólo hay 45) por eso su primer cambio aunque positivo cada vez disminuye, y su segundo cambio es negativo ya que su primer cambio es cada vez menor, es decir, decrece. Recuerda el signo de la pendiente de una recta y su posición geométrica están ligados de la manera siguiente:

Forma de la recta y su pendiente.



Recta creciente *Recta decreciente* *Recta horizontal* *Recta vertical*

Podemos hacer tres afirmaciones: (a) Los polinomios de segundo grado tienen su segundo cambio constante, (b) si el primer cambio decrece, su segundo cambio es negativo y (c) si el primer cambio es creciente su segundo cambio es positivo.

Para los polinomios de tercer grado procedamos del mismo modo, para fijar ideas, consideremos el problema de la caja y sus tablas que hemos tratado anteriormente, calculemos el segundo cambio. Como se puede observar este segundo cambio no es constante, así que procedamos a calcular su tercer cambio.

Corte x	1	2	3	4	5	6	7	8
Volumen $V(x)$	3744	6992	9768	12096	14000	15504	16632	17408

Primer cambio: 3248, 2776, 2328, 1904, 1504, 1128, 776

Segundo cambio: -472, -448, -424, -400, -376, -352

Tercer cambio: 24, 24, 24, 24, 24

El tercer cambio es constante y por supuesto podemos hacer la conjetura siguiente: En intervalos del mismo tamaño, los polinomios de tercer grado tienen su tercer cambio constante y en general. Un polinomio de grado n en intervalos del mismo tamaño tiene su $n-esimo$ cambio constante.

Continuemos con la misma función pero ahora con intervalos de la mitad de la unidad. (La tabla se muestra enseguida)

Corte x	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5
Volumen $V(x)$	3744	5428.5	6992	8437.5	9768	10986.5	12096	13099.5

Razones de cambio: 3369, 3127, 2891, 2661, 2437, 2219, 2007

Segundo cambio: -484, -472, -460, -448, -436, -424

Tercer cambio: 24, 24, 24, 24, 24

Podemos observar que el tercer cambio permanece constante sin importar que la longitud del intervalo haya cambiado.

Resumen. Los polinomios de primer grado tienen su primer cambio constante, este primer cambio es su razón de cambio y al mismo tiempo la pendiente de la recta, mientras qué, los polinomios de segundo grado tienen su segundo cambio constante y los polinomios de tercer grado hasta su tercer cambio son constantes, el cambio constante no se ve influenciado por el tamaño del intervalo, además si la función crece pero cada vez menos, su segunda razón de cambio será negativa y si crece cada vez más al crecimiento anterior su segunda razón de cambio será positiva.

RAZÓN DE CAMBIO, MEDICIÓN DE LA VARIACIÓN.

➢ LA PENDIENTE DE LA FUNCIÓN LINEAL COMO RAZÓN DE CAMBIO CONSTANTE EN EL CONTEXTO DEL PROBLEMA.

Hemos estudiado que en las funciones lineales, la pendiente de la recta es a su vez la razón de cambio, ¿qué significado tiene esta pendiente (razón de cambio)?

En el problema del café, la función era

$$C(t) = -2t + 90$$

En donde el número - 2 es la razón de cambio, esta razón de cambio nos indica la manera en que el café se enfría, en todos los problemas es importante escribir las unidades que se están manejando, en este caso nos indica que el café tiene una razón de cambio de

$$-2\frac{°C}{\min}$$

Esta expresión nos indica que el café se está enfriando dos grados por cada minuto que transcurre, al igual que en problema del tanque, la función es

$$V(h) = 78.5h$$

Por lo que su razón de cambio es $78.5\frac{cm^3}{cm}$ que nos indica que el volumen crece 78.5 centímetros cúbicos por cada centímetro que sube el nivel del agua.

Esta información nos apoya para resolver problemas del tipo siguiente:

Ejemplo 8. Si D es la demanda semanal de un producto lácteo en una tienda y éste se relaciona con su precio x pesos y centavos en forma lineal, ¿cuál será la razón de cambio si en una semana se vendieron 60 productos a un precio de \$1.40 y en otra semana se vendieron 40 a un precio de \$1.50?

Solución: De la función lineal nos proporcionan dos puntos (1.4, 60) y (1.5, 40), sabemos que la razón de cambio (pendiente) es:

$$m = \frac{60-40}{1.4-1.5} = \frac{20}{-0.1} = -200\frac{P}{Pesos}$$

Esta expresión nos indica que se dejan de vender 200 productos por cada peso de aumento en el precio.

Ejemplo 9. Un auto viaja según la fórmula $s(t)=80t+20$, en donde s esta dada en kilómetros y t en horas ¿qué significado tiene en el contexto del problema el número 80?

Solución: Sabemos que 80 es la pendiente de la recta tangente, pero por otro lado es la razón de cambio de la función y esta razón se calcula de la manera siguiente

$$m=\frac{s(b)-s(a)}{b-a}=\frac{distancia\ recorrida}{tiempo\ empleado}=velocidad\ \ promedio$$

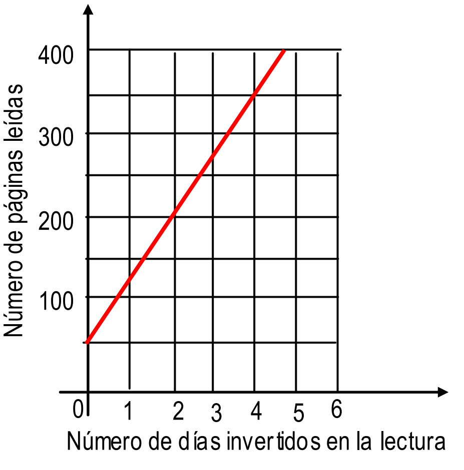
Como vimos en Física, la distancia recorrida por cada unidad de tiempo es la velocidad promedio, así el número 80, nos indica la velocidad en que viaja el auto.

Ejemplo 10. Encuentra la razón de cambio promedio de la gráfica siguiente.

Solución: Como la relación entre las páginas leídas y el número de días empleados en la lectura tiene una relación lineal, basta con calcular la pendiente de la recta, es decir, tomamos dos puntos y calculamos la pendiente, por ejemplo (0,50) y (2,200).

$$m=\frac{200-50}{2-0}=\frac{150}{2}=75\frac{Pa\acute{}g}{di\acute{}a}$$

En otras palabras la razón de páginas leídas por día es de 75.



Ejemplo 11. Una compañía utiliza la función $S(t)=-9000t+65000$ para determinar el valor de salvamento $S(t)$, de una fotocopiadora t años después de su compra.
Explica qué significado tiene el número -9000.

Solución: La función S, es una función lineal, por lo que el número -9000 es su pendiente y a la vez su razón de cambio, este nos indica que la fotocopiadora se deprecia 9000 pesos por cada año que transcurre.

➢ LA RAZÓN DE CAMBIO INSTANTÁNEA EN EL CONTEXTO DEL PROBLEMA.

Hemos estudiado a la razón de cambio para funciones polinomiales en intervalos de la misma longitud, ahora aprenderemos a calcular a la razón de cambio en un solo punto, a través del cálculo de la razón promedio en intervalos cada vez más pequeños y manteniendo un punto fijo, el punto en donde queremos saber la razón de cambio, esta razón de cambio recibe el nombre de razón de cambio instantánea y la obtendremos con ayuda de nuestros procesos infinitos, iniciaremos con el problema de la caída libre, ya que para funciones lineales la razón de cambio promedio y la razón de cambio instantánea coinciden.

Ejemplo 12. Caída libre. Un objeto se deja caer desde un edificio, después de t segundos la distancia s que recorre es de $s(t) = 4.9t^2$, calcula la razón de cambio instantánea a los dos segundos.

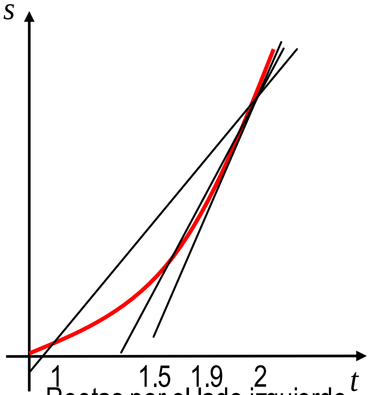
Solución: podemos hacer una tabla para calcular algunos valores de la distancia s recorrida, nos conviene que sea en tiempos cercanos a los dos segundos, resumamos los valores calculados en una tabla.

Tiempo t	1.5	1.9	1.99	2	2.1	2.01	2.001
Distancia s	11.025	17.689	19.40449	19.6	21.609	19.79649	19.6196

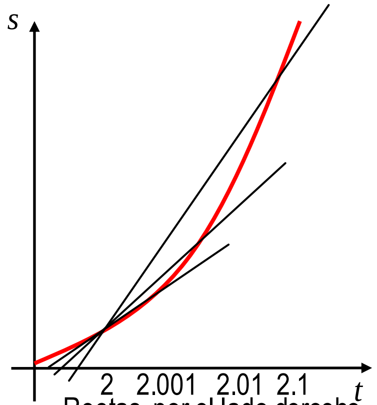
Ahora calculemos la razón de cambio en los siguientes intervalos

Intervalo (izquierda)	*Razón de cambio*	*Intervalo (derecha)*	*Razón de cambio*
[1.5,2]	17.15	[2,2.1]	20.09
[1.9, 2]	19.11	[2,2.01]	19.649
[1.99,2]	19.551	[2,2.001]	19.3
[1.999,2]	19.5951	[2,2.0001]	19.60049

Geométricamente estamos calculando la pendiente de la recta que une los puntos extremos del intervalo, estas rectas se aproxima a la recta que llamamos recta tangente a la curva en un punto, en este caso en el punto (2,19.6).



Rectas por el lado izquierdo



Rectas por el lado derecho

Cada vez que el intervalos tiene una longitud menor, la pendiente de las rectas se aproximan a un valor, en este caso observemos los valores que obtenemos por el lado izquierdo

17.15, 19.11, 19.551 y 19.5951

y, por el lado derecho

20.09, 19.649, 19.3 y 19.60049.

Como puedes darte cuenta, el valor al que nos acercamos es a $19.6\frac{m}{s}$ este número representa la razón de cambio instantánea en el que viaja el objeto a los dos segundos exactamente, es decir a 19.6 metros por cada segundo, por supuesto está razón de cambio, varía (en este caso) dependiendo del punto.

En general, cuando se tiene una función no lineal podemos (bajo ciertas condiciones) hacer siempre este proceso, es decir, un acercamiento por el lado derecho, por el lado izquierdo o ambos. Geométricamente, se están calculando las pendientes de las rectas que unen los puntos extremos del intervalo en cuestión, de esta forma nos aproximamos al valor de la pendiente de la recta que pasa sólo por este punto (localmente) y a esta recta se le conoce con el nombre de recta tangente, y tiene como significado la razón de cambio instantánea, en otras palabras la razón de cambio en un punto. Este concepto se estudiará en la sección siguiente.

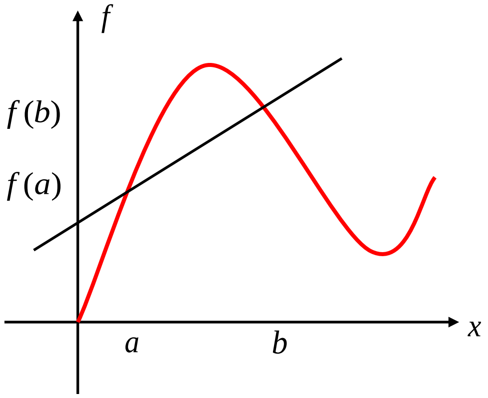
- CONCEPTO Y NOTACIÓN DE DERIVADA: $f'(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

La razón de cambio promedio no es una cantidad significativa en muchos fenómenos prácticos y científicos. Si una persona que va en un automóvil choca contra un árbol, lo que importa no es la velocidad promedio a la haya venido viajando desde su punto de partida. La velocidad que llevaba en el instante de la colisión es lo que determina si sobrevivirá o no al accidente. Aquí tenemos una velocidad instantánea o razón de cambio instantánea de la distancia con respecto al tiempo. Hay muchos acontecimientos que ocurren en un instante o que son instantáneos. Un destello luminoso es instantáneo o por lo menos aparece y se desvanece tan rápidamente, que decimos que brilla un solo instante.

El problema de definir y calcular la rapidez instantánea como la velocidad y la aceleración atrajeron a casi todos los matemáticos del siglo XVII. Descartes, Fermat, Isaac Barrow - profesor de Newton -, el amigo de éste, John Wallis, Huygens y multitud de otros estudiosos trabajaron sobre éste y otros problemas afines. Los hombres que al fin concibieron, formularon y aplicaron las ideas generales del cálculo, y que sus predecesores apenas habían entendido en parte, fueron: Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz. El hecho de que todos los grandes matemáticos del siglo atacaran el problema de la rapidez instantánea de cambio es en sí de interés. Ilustra cómo aún las más grandes inteligencias terminan por absorberse en los problemas de sus épocas. *(tomado del libro de Morris Kline).*

La razón de cambio instantánea como lo hemos mencionado anteriormente tiene una historia a veces difícil a veces gloriosa, las mentes más brillantes del siglo XVII la comprendieron y nace de las aplicaciones, de los problemas en que se estaba trabajando.

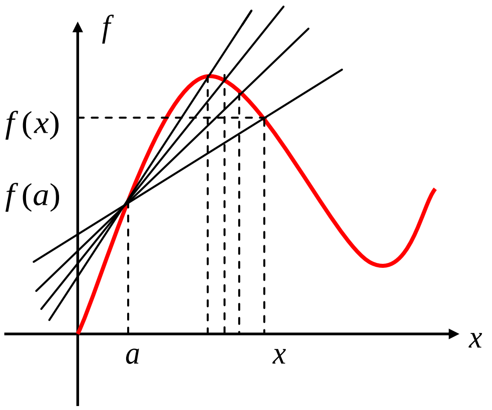
En funciones no lineales el cálculo de la razón de cambio promedio en un intervalo se realiza, como lo hemos efectuado anteriormente, a través del cálculo de la pendiente de la recta que une los puntos extremos del intervalo, como se muestra a continuación:



Los puntos por donde pasa la recta son $a, f(a)$ y $b.f(b)$ por lo que su pendiente es:

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Sin embargo, el estudio que hace el cálculo es sobre la razón de cambio en un punto (a la que se le llama razón de cambio instantánea), para fijar ideas, supongamos que queremos saber qué razón de cambio efectúo la función en el punto $x = a$, con este propósito se elige un punto x cualquiera (en el dibujo a la derecha) y se toman valores de x cada vez más cercanos a $x = a$, observemos la gráfica siguiente, en donde nos acercamos por el lado derecho.



Cuando esta razón de cambio (en un punto existe) recibe el nombre de razón de cambio instantánea de f en el punto $x = a$ en Cálculo se suele llamar derivada de la función en $x = a$ a este cambio. Se puede observar que la distancia $|x - a|$ cada vez es más pequeña y que lo mismo le sucede a la distancia $|f(x) - f(a)|$ cuando esto siempre se puede realizar, entonces estamos calculando un límite a un proceso infinito, este límite en caso de existir se le denota como $f'(a)$ y se define como:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

El cálculo de los límites involucrados se realizaran en la unidad tres de esta guía, en los ejemplo siguientes sólo se procederá a utilizar la notación. En otras palabras la derivada o razón de cambio instantánea es la razón de cambio en un punto de la función. Esta derivada en aplicaciones geométricas es la pendiente de la recta tangente y en problemas de movimiento es la velocidad de quien efectúa este movimiento.

Ejemplo 13. Se lanza una pelota hacia el aire con una velocidad de 40 m/seg, su altura (en metros) después de t segundos se expresa como $s(t) = -4.9t^2 + 40t$. Encuentra la velocidad instantánea cuando $t = 3$.

Solución. La velocidad instantánea se calculará mediante la expresión

$$v(3) = s'(3) = \lim_{t \to 3} \frac{s(t) - s(3)}{t - 3} = \lim_{t \to 3} \frac{-4.9t^2 + 40t - 75.9}{t - 3}$$

Ejemplo 14. La ecuación del movimiento $s(t) = 4t^3 + 6t + 2$ denota el desplazamiento (en metros) de una partícula que se mueve en línea recta. En dicha expresión t se mide en segundos. Encuentre la velocidad de la partícula en los instantes $t = 1, t = 2, t = 3.$

Solución. En estos casos tendremos:

$$v(1) = s'(1) = \lim_{t \to 1} \frac{s(t) - s(1)}{t - 1} = \lim_{t \to 1} \frac{4t^3 + 6t + 2 - 12}{t - 1}$$
$$v(2) = s'(2) = \lim_{t \to 2} \frac{s(t) - s(2)}{t - 2} = \lim_{t \to 2} \frac{4t^3 + 6t + 2 - 46}{t - 2}$$
$$v(3) = s'(3) = \lim_{t \to 3} \frac{s(t) - s(3)}{t - 3} = \lim_{t \to 3} \frac{4t^3 + 6t + 2 - 129}{t - 3}$$

Ejemplo 15. El combustible de un cohete se quema totalmente después de 30 seg. A los primeros t segundos el cohete alcanza una altura de $10t^3$ metros por encima de la tierra.

a) ¿Cuál es la velocidad promedio del cohete durante su vuelo de 30 seg.?
b) ¿A qué velocidad se mueve el cohete cuando esta volando exactamente a los 10 seg?

Solución: a) $v_m = \dfrac{s(30)-s(0)}{30-0} = \dfrac{10(30)^2}{30} = 300\dfrac{m}{s}$

b) $v(10) = s´(10) = \lim\limits_{t\to 10} \dfrac{s(t)-s(10)}{t-10}$

EJERCICIOS PROPUESTOS.

1) Si f es una función y $P(a, f(a))$ un punto en ella, $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ representa:

A) La razón de cambio promedio de entre los puntos $(a, f(a))$ y $(x, f(x))$

B) El cambio del cambio en $x = a$.

C) El cambio instantáneo de la recta normal en $P(a, f(a))$.

D) La razón de cambio instantánea de f en $x = a$.

E) El cambio promedio entre P y cualquier otro punto en f.

2) Si f es una función, la razón de cambio instantánea en el punto $P(a, f(a))$, se representa como:

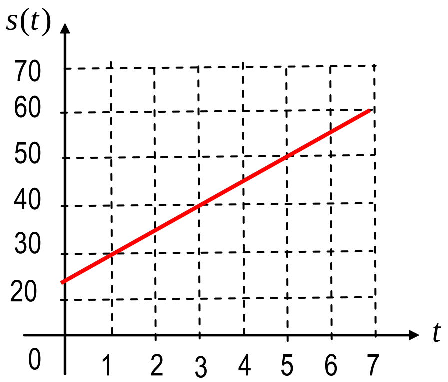
A) $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ B) $f'(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ C) $f'(a) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

D) $f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ E) $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

3) Si D es la demanda semanal de un producto lácteo en una tienda y éste se relaciona con su precio x pesos y centavos en forma lineal, ¿cuál será la razón de cambio si en una semana se vendieron 960 productos a un precio de un peso y en otra semana se vendieron 940 a un precio de $1.50?

A) 40 B) -40 C) $-\frac{1}{40}$ D) $\frac{1}{40}$ E) -20

4) La posición $s(t)$ de un auto que se mueve en línea recta está dada por la gráfica siguiente:



¿Cuál es la velocidad media en el intervalo de tiempo de 3 a 5 segundos?

A) ½ B) 2 C) 5/2 D) 5 E) 10

5) Un objeto se lanza desde el suelo hacia arriba con una velocidad inicial $v_0 = 49\,m/s$. Obtén la fórmula de la velocidad V (razón de cambio de la altura h con respecto al tiempo t) en función del tiempo t.

t	0	1	2	3
V	49	39.2	29.4	19.6

A) $V = 49+9.8t$ B) $V = 39.2t$ C) $V = 19.6t$
D) $V = -9.8t$ E) $V = 49-9.8t$

6) Si $A = x^2$ es el área de un cuadrado con respecto a x, longitud de uno de sus lados, entonces su razón de cambio promedio es:

A) $2x\Delta x$ B) $(\Delta x)^2$ C) $2x\Delta x + (\Delta x)^2$ D) $2x\Delta x + \Delta x$ E) $x\Delta x$

7) La velocidad de una partícula es $V(t) = 2t+30$, su razón de cambio a los t seg. es:

A) $2t+30$ B) $2t$ C) 30 D) 2 E) $32t$

8) De las tablas siguientes la que tiene segunda variación constante es:

A)

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	1	2	3	4	5	6	7

B)

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	2	4	6	8	10	12	14

C)

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-8	-1	0	1	8	27	64

D)

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	4	1	0	1	4	9	16

E)

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	3	3	3	3	3	3	3

9) Si un auto recorre una distancia $s(t)=t^2+30t$ en metros, en un tiempo t, entonces el cambio del cambio es una constante, que vale:

A) 30 B) 2 C) $30t^3$ D) t^2 E) $30t^2$

10) El volumen $V(r)=\frac{4}{3}\pi r^3$ de un globo esférico cambia con el radio. ¿Cuál es la razón de cambio del volumen respecto del radio cuando $r=2$ m?

A) $14\pi \quad m^3/m$ B) $16\pi \quad m^3/m$ C) $10\pi \quad m^3/m$ D) $20\pi \quad m^3/m$ E) $30\pi \quad m^3/m$

11) Si $f(x)=x^2+2x-1$, la derivada de $f(x)$ en $x=2$, se calcula, usando la definición de derivada, con la expresión:

A) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+2x-1}{x-2}$ B) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+2x-1}{x-1}$ C) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{x-2}$

D) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+2x-7}{x-2}$ E) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+2x-8}{x-1}$

12) Si $f(x)=3x^2-4x-2$, la derivada de $f(x)$ cuando $x=2$, se calcula, usando la definición de derivada, con la expresión:

A) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2-4x}{x-2}$ B) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2-4x-4}{x-2}$ C) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2-4x+4}{x-2}$

D) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2-4x-4}{x+2}$ E) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2-4x}{x+2}$

13) Si $f(x)=2x^2+3x+5$, la derivada de f cuando $x=1$, se calcula, usando la definición de derivada ($\underset{x\to a}{lím}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$), con la expresión:

A) $\underset{x\to 1}{lím}\frac{2x^2+3x-5}{x-1}$ B) $\underset{x\to 1}{lím}\frac{2x^2+3x-5}{x+1}$ C) $\underset{x\to 1}{lím}\frac{2x^2+3x-15}{x-1}$

D) $\underset{x\to 1}{lím}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}$ E) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x^2+3x-5}{x-1}$

14) Si $f(x)=x^2+2x-1$, la derivada de $f(x)$ cuando $x=2$, se calcula, usando la definición de derivada, con la expresión:

A) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-8}{x-1}$ B) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-1}{x-1}$ C) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{x-2}$

D) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-7}{x-2}$ E) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-1}{x-2}$

15) Si $f(x)=x^3+2x^2+1$, la derivada de $f(x)$ en x = –2, se calcula, usando la definición de derivada, con la expresión:

A) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3+2x^2}{x+2}$ B) $\lim_{x\to -2}\frac{x^3+2x^2}{x-2}$ C) $\lim_{x\to -2}\frac{x^3+2x^2-2}{x+2}$

D) $\lim_{x\to -2}\frac{x^3+2x^2}{x+2}$ E) $\lim_{x\to -2}\frac{x^3+2x^2-1}{x-2}$

16) Si $f(x)=\frac{1}{2}x^2+3x-5$, entonces al evaluar $\lim_{h\to o}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ se obtiene:

A) x^2+3 B) $2x^2-2$ C) 0 D) $\frac{1}{3}x^2+1$ E) $\frac{1}{3}x^2+3x$

UNIDAD 4
COMPORTAMIENTO GRÁFICO Y PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Propósitos: Analizar las relaciones existentes entre la gráfica de una función y sus derivadas para obtener información sobre el comportamiento de la función, utilizar dicha información para resolver problemas de optimización.

*En la **Unidad** siguiente, pretendemos que:*

- Determines gráfica y algebraicamente los intervalos en donde una función es creciente o decreciente.
- Bosquejes la gráfica de la derivada de una función dada la gráfica de la misma.
- Determines los puntos críticos de una función y los clasifica en máximos o mínimos.
- Grafiques una función analizando la información que proporciona su primera derivada.
- Analices el tipo de concavidad de la función a partir del signo de la segunda derivada.
- Grafiques una función analizando la información que proporcionan su primera y segunda derivada.
- Determines los puntos críticos de una función y los clasifica en máximos, mínimos o inflexiones usando el criterio de la segunda derivada.
- Resuelvas problemas que involucren máximos y mínimos de una función.

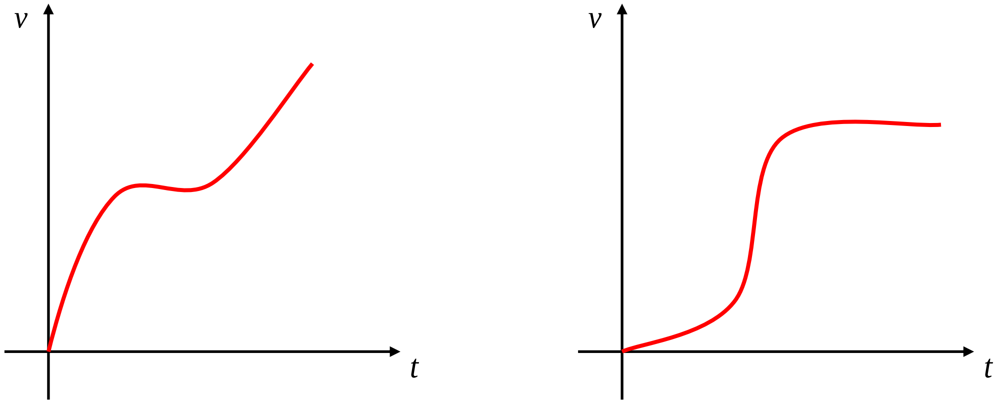
INTRODUCCIÓN:

En esta guía en la segunda parte “Comportamiento Gráfico De Una Función” daremos las definiciones o resultados (teoremas) y uno o dos ejemplos de cada uno de ellos. La parte primordial es el trazado de curvas y a eso nos avocaremos con más ejemplos y más trazado de gráficas tanto: dada la función trazar la gráfica, como dada la gráfica de la derivada, trazar la gráfica de la función y viceversa.

En la segunda sección, nos avocaremos a resolver problemas de optimización dando los pasos necesarios para poder resolverlos, usaremos todas las técnicas que hemos estudiado hasta el momento.

➢ SITUACIONES QUE PROPICIAN EL ANÁLISIS DE LAS RELACIONES ENTRE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN Y SU DERIVADA.

En varias ocasiones se lleva registro de la velocidad en que viaja un objeto y a partir de la gráfica de este registro, se pide que se dé una descripción de su trayectoria, por ejemplo, las gráficas siguientes, describen velocidades de dos objetos, en estas se puede preguntar cuál de los dos permaneció más tiempo quieto, o cuál de los dos inicio su viaje más rápido, entre otras preguntas que se pueden hacer.



El estudio de la gráfica de una función (o de la derivada de una función y viceversa) nos permite conocer su comportamiento de su trayectoria, si realizó un alto, si aceleró, si desaceleró o bien si la función no puede ser calculada a través de la derivada de la función, se puede hacer apreciaciones cualitativas sobre su trayectoria, además nos permite extrapolar o interpolar y conocer aproximadamente resultados que no son evidentes.

➢ COMPORTAMIENTO GRÁFICO DE UNA FUNCIÓN.

✓ *Puntos críticos.*

Sea f una función con dominio $[a,b]$, si f tiene un punto critico $c \; \varepsilon \; (a,b)$ si $f'(c)=0$ o bien $f'(c)$ no existe.

Ejemplo 1. Sea $f(x)=x^3-12x,$ calcula los puntos críticos de f en el intervalo $[-3,4]$

Solución: Calculemos la derivada de la función f e igualémosla a cero.

$$f'(x)=3x^2-12=3(x^2-4)=3(x-2)(x+2)=0$$

por lo tanto $x-2=0$ o $x+2=0$ las soluciones son $x=2$, $x=-2$, los cuales son los puntos críticos.

Ejemplo 2. Encuentra los puntos críticos de la función

$$f(x)=\sqrt{9-x^2}.$$

Solución: Derivamos a la función e igualamos a cero, resolvemos la ecuación resultante.

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{9-x^2}} = 0$$

En este caso, la única solución es $x = 0,$ pero la derivada de la función no existe para $x = 3$ y $x = -3$, por lo que los puntos críticos son: $x = -3, 0, 3.$

✓ *Crecimiento y decrecimiento de funciones.*

Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y derivable en el intervalo abierto (a,b).

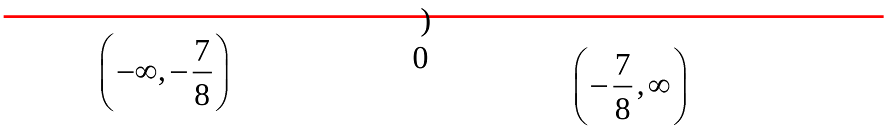
a) Si $f'(x) > 0$ para toda x en (a,b), entonces f es creciente en $[a,b]$.

b) Si $f'(x) < 0$ para toda x en (a,b), entonces f es decreciente en $[a,b]$.

Ejemplo 3. Sea $f(x) = -4x^2 - 7x + 5$. Encuentra los intervalos en donde f es creciente y decreciente.

Solución: Primero encontramos los puntos críticos, (derivamos e igualamos a cero, resolvemos la ecuación resultante).

$f'(x) = -8x - 7 = 0 \Rightarrow x = -\frac{7}{8}$ esta raíz, divide al dominio en dos intervalos, como se muestra en la figura.



a saber, $\left(-\infty, -\frac{7}{8}\right)$ y $\left(-\frac{7}{8}, \infty\right)$, elijamos un valor en el primer intervalo, digamos $x = -2$, entonces $f'(-2) = -8(-2) - 7 = 16 - 7 = 9 > 0$

concluimos que $f'(x) > 0$ en el intervalo $\left(-\infty, -\frac{7}{8}\right)$, es decir, f es creciente en dicho intervalo. En forma similar, $f'(x) < 0$ en el intervalo $\left(-\frac{7}{8}, \infty\right)$ y por lo tanto f es decreciente en dicho intervalo.

Ejemplo 4. Determina los intervalos en donde la función es creciente y los intervalos en donde es decreciente.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$$

Solución: La derivada de la función $f(x)=x^3-3x^2+2x+2$ es $f'(x)=3x^2-6x+2$ cuyos puntos críticos son $3x^2-6x+2=0 \Rightarrow x=1\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, los cuales dividen al dominio de la función en tres partes, nos apoyaremos de la tabla siguiente

Intervalo	*Signo de* $f´$	*Comportamiento de* f
$(-\infty,1-\sqrt{3}/3)$	*Positivo*	*Crece*
$(1-\sqrt{3}/3,1+\sqrt{3}/3)$	*Positivo*	*Crece*
$(1+\sqrt{3}/3,\ \infty)$	*Positivo*	*Crece*

Por lo tanto la función siempre es creciente.

Ejemplo 5. Determina los intervalos en donde la función es creciente y los intervalos en donde es decreciente.

$$f(x)=x^4-2x^2-1$$

Solución: La derivada de la función $f(x)=x^4-2x^2-1$ es $f´(x)=4x^3-4x$ cuyos puntos críticos son:

$$4x^3-4x=4x(x^2-1)=0 \Rightarrow x=-1,0 \ \ y \ \ 1,$$

hay tres puntos críticos que dividen al dominio en cuatro partes, a saber

Intervalo	*Signo de f´*	*Comportamiento de f*
(-∞,-1)	*Negativo*	*Decrece*
(-1,0)	*Positivo*	*Crece*
(0,1)	*Negativo*	*Decrece*
(1,∞)	*Positivo*	*Crece*

Concluimos que la función es creciente en (-1,0) y (1, ∞), decrece en (-∞,-1) y (0,1).

✓ *Concavidad.*

Sea f una función que admite una segunda derivada $f´´$, supongamos que c esta en el dominio de la función, entonces

a) Si $f´´(c)>0$, entonces f es cóncava hacia arriba
b) Si $f´´(c)<0$, entonces f es cóncava hacia abajo.

Ejemplo 6. Determina los intervalos en donde la función es cóncava hacia arriba y donde es cóncava hacia abajo de la siguiente función.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 45x\ .$$

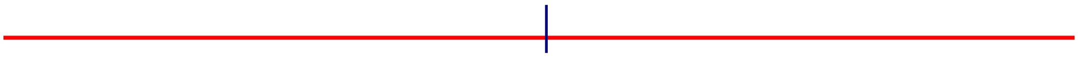
Solución: La primera derivada de f es

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 45$$

la segunda derivada

$$f''(x) = 6x - 6$$

su raíz de la segunda derivada es $x = 1$, este punto divide al dominio en dos intervalos, a saber, $(-\infty, 1)$ y $(1,\infty)$



$(-\infty,1)$ 1 $(1,\infty)$

para saber el signo de f'' en $(-\infty,1)$, basta tomar un número en dicho intervalo, como ya lo hemos hecho notar, en este caso tomemos el número cero, así $f''(0) = -6 < 0$, por lo tanto f es cóncava hacia abajo en ese intervalo, en forma similar, para saber el signo de f'' en el intervalo $(1,\infty)$, tomemos $x = 2$ y $f''(2) = 6 > 0$, por lo que f es cóncava hacia arriba. De esta manera f es cóncava hacia arriba en $(1,\infty)$ y es cóncava hacia abajo en $(-\infty,1)$.

Ejemplo 7. Determina los intervalos en donde la función es cóncava hacia arriba y donde es cóncava hacia abajo de la siguiente función.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

Solución: Las derivadas de la función son:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$f''(x) = 6x - 12$$

La raíz de la segunda derivada es $x = 2$, este valor divide a su dominio en dos partes, investiguemos el signo de la segunda derivada de la función en esos dos intervalos, la tabla siguiente nos ayudará para ese propósito.

Intervalo	*Signo de f''*	*Comportamiento de f*
$(-\infty, 2)$	*Negativo*	*Cóncava hacia abajo*
$(2, \infty)$	*Positivo*	*Cóncava hacia arriba*

Ejemplo 8. De aplicación (Louis Leithold)

Supongamos que se calcula que t horas después de comenzar a trabajar a las 7 AM. Un obrero que labora en el departamento de ensamblaje ha realizado una tarea determinada en

$$f(t) = -t^3 + 9t^2 + 21t \text{ , para } 0 \le t \le 5$$

Derivando a la función se tiene

$$f'(t) = -3t^2 + 18t + 21$$
$$f''(t) = -6t + 18 = 6(-t + 3)$$

Observemos que $f''(t) > 0$ si $0 < t < 3$ y $f''(t) < 0$ si $3 < t < 5$, entonces $f'(t)$ es creciente en $0 < t < 3$ y decreciente en $3 < t < 5$, como $f'(t)$ es la razón de cambio instantánea de f concluimos que en las primeras tres horas (de 7 a 10) el obrero realiza su labor en una razón creciente y en las dos horas restantes (de 10 a 12) la realiza en una razón decreciente, es decir en $3 < t < 5$ hay una reducción en el nivel de producción del obrero.

- ✓ ***Puntos de inflexión.***

Criterio del punto de inflexión

Sea f una función con doble derivada en un intervalo $[a,b]$, sea c en (a,b), supongamos que $f'(c) = 0$. Entonces, c es un punto de inflexión de f, si $f''(x) < 0$ en un lado de c y $f''(x) > 0$ del otro lado.

Ejemplo 9. Determina las coordenadas de los puntos de inflexión de la función siguiente:

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$$

Solución: Las derivadas de f son:

$$f'(x) = 4x^3 - 4x \text{ ,}$$
$$f''(x) = 12x^2 - 4 \text{ ,}$$

Las raíces de la segunda derivada son $x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ estos puntos dividen en tres intervalos al dominio de la función, apoyémonos en la tabla siguiente

Intervalo	*Signo de f''*	*Comportamiento de f*
$(-\infty, -1/\sqrt{3})$	*Positivo*	*Cóncava hacia arriba*
$(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$	*Negativo*	*Cóncava hacia abajo*
$(1/\sqrt{3}, \infty)$	*Positivo*	*Cóncava hacia arriba*

Los puntos en donde la segunda derivada es cero, son puntos de inflexión ya que hay un cambio de concavidad. Las coordenadas de los puntos de inflexión son:

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{22}{9}\right) \text{ y } \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{22}{9}\right)$$

Ejemplo 10. Determina las coordenadas de los puntos de inflexión de la función siguiente:

$$f(x)=2x+x^{2/3}$$

Solución: Las derivadas de f son:

$$f'(x)=2+\frac{2}{3}x^{-1/3},$$
$$f''(x)=-x^{-4/3},$$

como f'' no puede ser cero la función no tiene puntos de inflexión

- ✓ ***Máximos y mínimos, criterio de la 1° y 2° derivada***

Criterio de la primera derivada.

Sea f una función continua en un intervalo abierto (a,b) que contenga al número crítico c.

a) Si $f'(x)>0$ para toda x en (a,c) y $f'(x)<0$ para toda x en (c,b), entonces $f(c)$ es un valor máximo local de f.
b) Si $f'(x)<0$ para toda x en (a,c) y $f'(x)>0$ para toda x en (c,b), entonces $f(c)$ es un valor mínimo local de f.
c) Si $f'(x)$ tiene el mismo signo a ambos lados de c, entonces $f(c)$ no es un valor extremo de f.

Criterio de la segunda derivada.

Sea f una función con doble derivada en un intervalo $[a,b]$, sea c en (a,b), supongamos que $f'(c)=0$.
a) Si $f''(c)>0$, entonces f tiene un valor mínimo en $x=c$.
b) Si $f''(c)<0$, entonces f tiene un valor máximo en $x=c$.

Ejemplo 11. Encuentra los máximos y mínimos de la función f dada en $(0,\infty)$.

$$f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}$$

Solución: Primero encontremos los valores críticos, haciendo cero la derivada de la función

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x^3} = 0$$

$$2x^4 = 2 \Rightarrow x = -1, 1$$

no consideraremos a $x=-1$ ya que no es un elemento del dominio de la función, enseguida hagamos un análisis del comportamiento de f en cada uno de los intervalos, en que fue dividido el dominio.

Intervalo	*Signo de f'*	*Comportamiento de f*
(0,1)	*Negativo*	*Decrece*
(1,∞)	*Positivo*	*Crece*

Por el criterio de la primera derivada, en $x=1$, la función alcanza su valor mínimo absoluto, $f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$.

Ejemplo 12. Encuentra los puntos críticos y determina si son mínimos o máximos de la siguiente función $f(x+3) = x^2$.

Solución: Primero hagamos un cambio de variables, sea $u = x+3 \ \therefore x = u-3$ y la función dada se transforma en $f(u) = (u-3)^2$, derivemos con respecto a u,

$$f'(u) = 2(u-3)$$

igualando a cero la derivada de la función encontramos que $u=3$, es el único punto crítico, analicemos la naturaleza de este punto con la ayuda de la siguiente tabla

Intervalo	*Signo de f'*	*Comportamiento de f*
(-∞,3)	*Negativo*	*Decrece*
(3,∞)	*Positivo*	*Crece*

Por lo tanto hay un mínimo en $u=3$, este punto corresponde a $x=0$, así que en $x=0$, la función tiene un mínimo.

Ejemplo 13. Sea $f(x) = x^5 - 5x^3$. Usa el criterio de la segunda derivada para encontrar los máximos y mínimos locales de f. Encuentra los intervalos donde f es cóncava hacia arriba y hacia abajo, así como los puntos de inflexión,

Solución: Calculemos la primera derivada

$$f´(x)=5x^4-15x^2=5x^2(x^2-3)=0$$

los valores críticos, son $x=-\sqrt{3},0,\sqrt{3}$. El dominio de la función queda dividida en cuatro intervalos, hagamos nuestro cuadro típico

Intervalo	*Signo de $f´$*	*Comportamiento de f*
(-∞,-$\sqrt{3}$)	*Positivo*	*crece*
(-$\sqrt{3}$,0)	*Negativo*	*decrece*
(0, $\sqrt{3}$)	*Negativo*	*decrece*
($\sqrt{3}$, ∞)	*Positivo*	*crece*

Al calcular la segunda derivada obtenemos

$$f´´(x)=20x^3-30x=10x(2x^2-3)=0$$

los posibles puntos de inflexión son $x=-\sqrt{\frac{3}{2}},\,0,\,\sqrt{\frac{3}{2}}$ el dominio queda dividido en cuatro intervalos y, ahora procedamos a realizar una tabla para la segunda derivada

Intervalo	*signo de $f´´$*	*Comportamiento de f*
(-∞,-$\sqrt{3/2}$)	*Negativo*	*Cóncava hacia abajo*
(-$\sqrt{3/2}$,0)	*Positivo*	*Cóncava hacia arriba*
(0, $\sqrt{3/2}$)	*Negativo*	*Cóncava hacia abajo*
($\sqrt{3/2}$,∞)	*Positivo*	*Cóncava hacia arriba*

En $x=0$ no hay un extremo, pero con la información de la tabla se tiene un punto de inflexión. Calculemos las imágenes de estos puntos, valores máximos, mínimos y puntos de inflexión.

$$f(-\sqrt{3})=(-\sqrt{3})^5-5(-\sqrt{3})^3=-3\sqrt{3}(3-5)=6\sqrt{3}$$

$$f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^5-5\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^3=\frac{21}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$f(0)=0$$

$$f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^5-5\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^3=-\frac{21}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$f(\sqrt{3})=-6\sqrt{3}$$

Ejemplo 14. Sea $f(x)=x^3+3x^2+3x+2$. Usa el criterio de la segunda derivada para encontrar los máximos y mínimos locales de f. Encuentra los intervalos donde f es cóncava hacia arriba y hacia abajo, así como los puntos de inflexión, traza la gráfica de f.

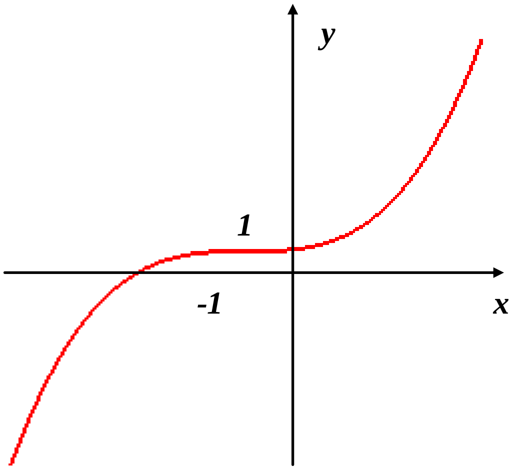
Solución: Las dos primeras derivadas son:

$$f'(x)=3x^2+6x+3 \qquad \text{y} \qquad f''(x)=6x+6$$

la función tiene un punto crítico en $x=-1$ y un posible punto de inflexión también en el mismo punto, la siguiente tabla nos ayudara a determinar su naturaleza

Intervalo	*signo de f'*	*Signo de f''*	*Comportamiento de f*
(-∞,-1)	*Positivo*	*Negativo*	*Crece, cóncava hacia abajo*
(-1,∞)	*Positivo*	*Positivo*	*Crece, cóncava hacia arriba*

La función no tiene ni máximo ni mínimo y sólo un punto de inflexión en $x=-1$, se muestra una forma de la gráfica de la función.



Ejemplo 15. Sea $y=3x^4-6x^2$. Usa el criterio de la segunda derivada para encontrar los máximos y mínimos locales de y. Encuentra los intervalos donde y es cóncava hacia arriba y hacia abajo, así como los puntos de inflexión, traza la gráfica de y.

Solución: La primera derivada es:

$$y'=12x^3-12x=12x(x^2-1),$$

Al encontrar sus raíces, estas nos proporciona tres puntos críticos, a saber, $x=-1$, $x=0$ y $x=1$, la tabla siguiente nos ayudará a conocer la naturaleza de la gráfica de la función con respecto a su crecimiento y decrecimiento.

Intervalo	*signo de f´*	*Comportamiento de f*
(-∞,-1)	*Negativo*	*Decrece*
(-1,0)	*Positivo*	*Crece*
(0,1)	*Negativo*	*Decrece*
(1,∞)	*Positivo*	*Crece*

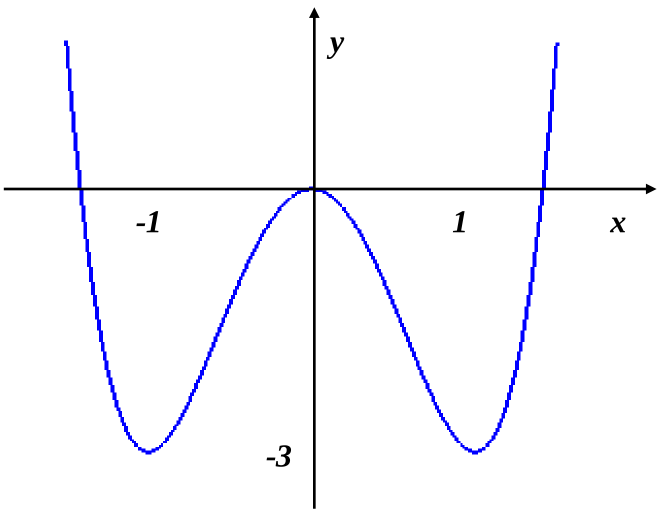
Concluimos que la gráfica de la función tiene dos puntos mínimos en $x=-1$ y en $x=1$ y un máximo en $x=0$. La segunda derivada es:

$$y''=36x^2-12,$$

esta segunda derivada es cero cuando $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ y $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$, la siguiente tabla nos ayudará a saber su comportamiento con respecto a su concavidad.

Intervalo	*signo de f´*	*Comportamiento de f*
$\left(-\infty,-1/\sqrt{3}\right)$	*Positivo*	*Cóncava hacia arriba*
$\left(-1/\sqrt{3},1/\sqrt{3}\right)$	*Negativo*	*Cóncava hacia abajo*
$\left(1/\sqrt{3},\infty\right)$	*Positivo*	*Cóncava hacia arriba*

La función tiene dos puntos de inflexión en $\left(-1/\sqrt{3},-5/3\right)$ y $\left(1/\sqrt{3},-5/3\right)$
Mostramos la forma de la gráfica de la función-



Ejemplo 16. Sea $y=x^4-4x^3+16x-6$. Usa el criterio de la segunda derivada para encontrar los máximos y mínimos locales de y. Encuentra los intervalos donde y es cóncava hacia arriba y hacia abajo, así como los puntos de inflexión, traza la gráfica de y.

Solución: Las derivadas de la función son:

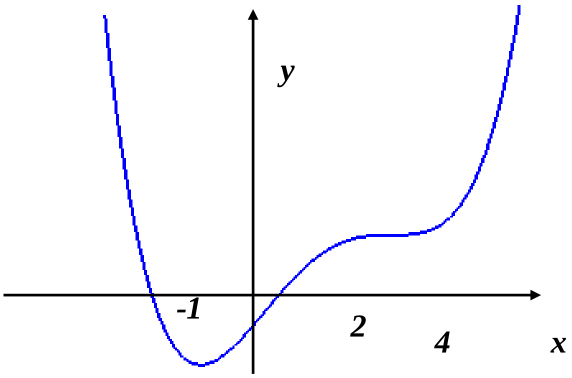
$$y' = 4x^3 - 12x^2 + 16 = 4(x+1)(x^2 - 4x + 4) = 4(x-4)^2(x+1)$$
$$y'' = 12x^2 - 24x = 12x(x-2)$$

los puntos críticos son $x = -1$ y $x = 4$, los puntos de inflexión $x = 0$ y $x = 2$, con ayuda de las tablas siguientes trazaremos la forma de la gráfica de la función

Intervalo	*Signo de f'*	*Comportamiento de f*
(-∞,-1)	*Negativa*	*Decrece*
(-1,4)	*Positiva*	*Crece*
(4,∞)	*Positiva*	*Crece*

Intervalo	*Signo de f''*	*Comportamiento de f*
(-∞,0)	*Positiva*	*Cóncava hacia arriba*
(0,2)	*Negativa*	*Cóncava hacia abajo*
(2,∞)	*Positiva*	*Cóncava hacia arriba*

A continuación se muestra la gráfica de la función.



✓ ***Gráfica de $f(x)$ a partir de las gráficas de $f'(x)$ y $f''(x)$, y viceversa***

Iniciaremos dando la función y la gráfica de su derivada para hacer conjeturas de las características que debe tener la gráfica de la derivada.

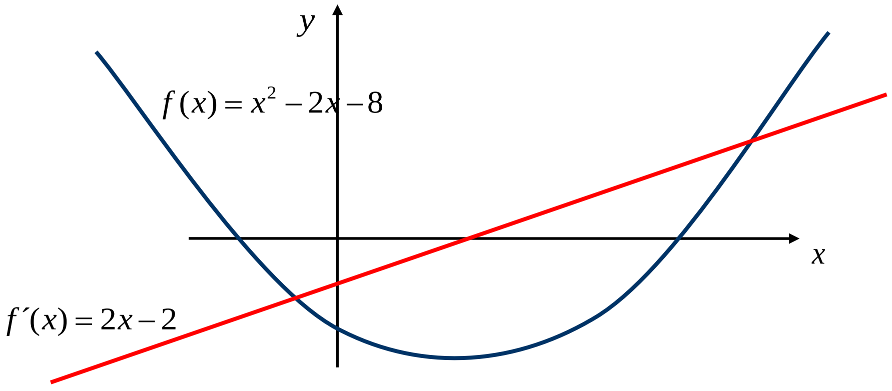
Dada la función f, trazaremos las gráficas de f y f', y haremos alguna conjeturas.

Ejemplo 17. Comenzaremos con la función.

$$f(x) = x^2 - 2x - 8$$

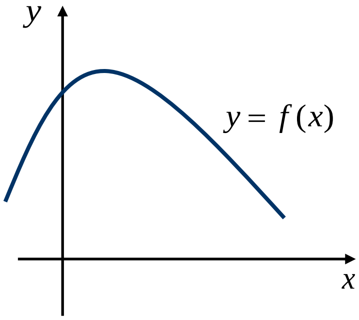
Solución.

Sabemos que la gráfica de la función f es una parábola, y la de su derivada una recta, dibujaremos una gráfica arriba de la otra, para iniciar el análisis.

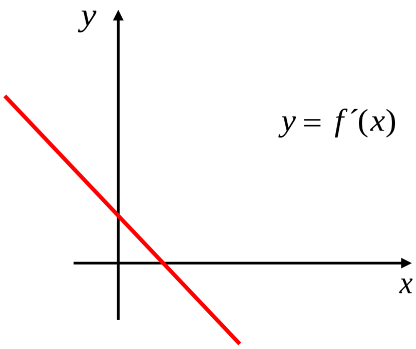


La función f crece en donde la derivada f' es positiva e inversamente, la derivada de la función f' es negativa cuando la función f es decreciente. Además en el punto crítico (que en este caso es un mínimo) la derivada f' de la función pasa por el eje x

Ejemplo 18. Dada la siguiente gráfica de f determina la gráfica de f'.



Solución: Podemos observar que antes del máximo la función es creciente así que la derivada de la función es positiva, en el punto máximo la derivada es cero y después de él, la función decrece así que la derivada debe ser negativa la gráfica de la función es del tipo siguiente:



➢ *Problemas de optimización.*

Es quizá la parte más importante de una teoría, es la aplicación que se hace de ella, el concepto de derivada, la hemos utilizado en la solución de varios tipos de problemas, entre ellos, razón de cambio, velocidad instantánea, y algunos más, en esta ocasión trataremos una aplicación más, ésta es la solución de problemas de optimización.

Ejemplo 19. Encuentra dos números positivos cuya suma sea 50 y cuyo producto sea lo más grande posible.

Solución: Denotemos por x a uno de los dos números, el otro número, por supuesto es $50-x$, luego entonces el producto está dado por

$$P(x)=x(50-x)=50x-x^2 .$$

En este caso, el dominio de la función P, se puede restringir al intervalo [0,50], como sabemos los polinomios son continuos y en un intervalo cerrado debe tener un máximo y un mínimo. Los números $x=0$, $x=50$ hacen que el producto sea cero, el cual claramente no es el máximo, para encontrar el valor máximo, derivemos la función e igualemos a cero.

$$P'(x)=50-2x=0 \Rightarrow x=25$$

al derivar nuevamente, encontramos que

$$P''(x)=-2<0$$

Entonces por el criterio de la segunda derivada, el valor crítico corresponde a un máximo, el valor máximo es

$$P(25)=25(50-25)=625 .$$

De esta manera los números pedidos son 25 y 25, cuya suma es 50 y el producto un máximo.

Ejemplo 20. Un pastizal de 20 000 m^2 sostiene a 20 vacas. Cada una tiene una producción diaria de 10 litros de leche. Al introducir una nueva vaca en el pastizal el rendimiento de cada vaca baja en un litro. ¿Cuál es el número de vacas que hay que poner para tener una producción máxima?

Solución: Estamos interesados en la producción de leche, esta está dada por

P = producción = 10(20) = 200 (sin vacas extras)
P = 9(21)=(10 -1)(20 +1) al introducir una vaca
P = (10 -2)(20 +2) al introducir dos vacas

En general si x representa al número de vacas que hemos de introducir, la producción P, se expresa de la siguiente manera

$$\begin{aligned} P(x) &= (10-x)(20+x) \\ &= 200-10x-x^2. \end{aligned}$$

Para obtener su máximo, derivamos e igualamos a cero

$P'(x) = -10-2x = 0 \Rightarrow x = -5$, ahora $P''(x) = -2 < 0$,

por lo tanto hay un máximo en $x=-5$, esto quiere decir que si queremos una producción máxima debemos quitar 5 vacas y no introducir alguna, veamos; si la producción de leche disminuye en un litro al introducir una vaca y aumenta un litro al retirar una vaca, entonces quedarían 15 vacas produciendo 15 litros, con esto la producción sería de 225 litros, sin embargo, si la producción de leche por vaca no aumenta al retirar una vaca, entonces para obtener la máxima producción de leche no debemos retirar ni introducir vaca alguna.

Ejemplo 21. Encuentre la recta tangente a la curva $y = 6x^2 - x^3$ que tenga pendiente máxima.

Solución: La fórmula para predecir pendientes de las rectas tangentes (a una curva), en este caso, esta dada por $m(x) = 12x - 3x^2$ (la derivada de la función) y nos piden optimizar $m(x)$ para ello procedamos de manera usual.

$$m'(x) = 12 - 6x$$

de aquí $m'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$, además $m''(x) = -6 < 0$. Por lo tanto en $x = 2$, m tiene un máximo, cuyo valor es $m(2) = 12$ y este se da en el punto $(2,16)$ de la función dada inicialmente.

Finalmente, encontramos la ecuación de la recta tangente, como pasa por (2, 16) y tiene pendiente $m = 12$, usemos la forma punto pendiente de la recta.

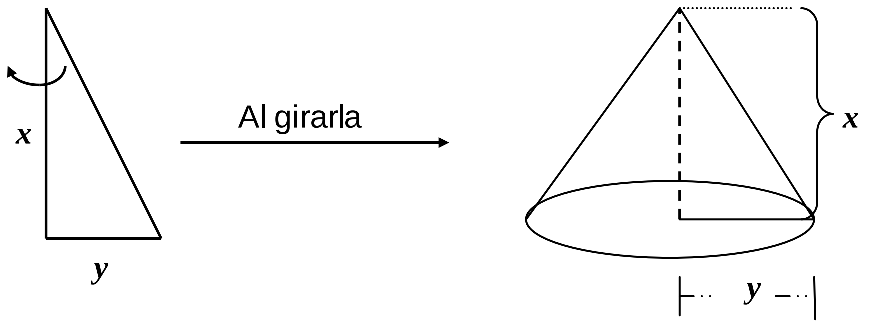
$$y - 16 = 12(x-2)$$

o

$$12x - y - 8 = 0.$$

Ejemplo 22. Un triángulo de hipotenusa dada gira alrededor de uno de sus catetos para generar un cono circular recto. Halla el cono de mayor volumen.

Solución: Observemos que se trata de un triángulo rectángulo, sean x y y las longitudes de sus catetos, el siguiente dibujo nos ayudará a resolver el problema



El volumen V del cono se puede expresar como $V = \pi x y^2$ pero tenemos dos variables. ¿De dónde podemos despejar alguna de ellas? Rápidamente notamos que nos falta un dato, la hipotenusa está dada, sea c el valor de ella (c constante) y usamos el teorema de Pitágoras

$x^2 + y^2 = c^2 \;\Rightarrow\; y^2 = c^2 - x^2$ (¿por qué preferimos despejar y^2 y no x?)

sustituimos en V, $V(x) = \pi x(c^2 - x^2) = \pi x c^2 - \pi x^3$

optimizamos de la manera usual $V'(x) = \pi c^2 - 3\pi x^2$

igualando a cero la primera derivada se tiene $x = \dfrac{c}{\sqrt{3}}$

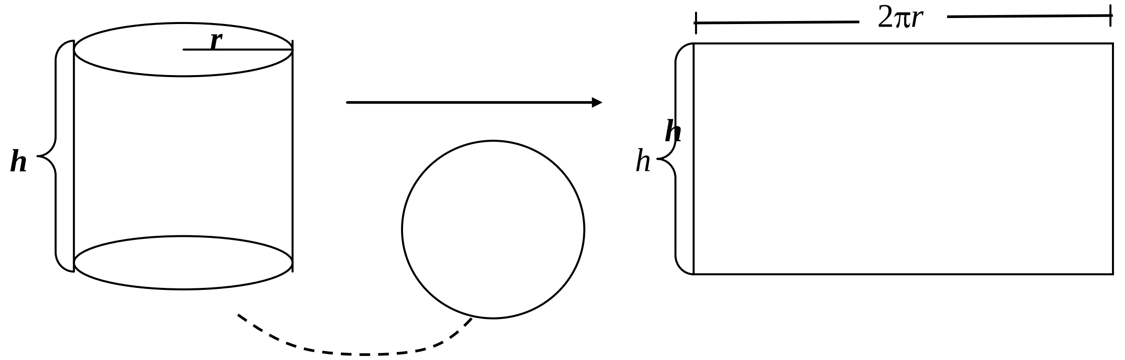
Calculemos la segunda derivada

$$V''(x) = -6\pi x$$

La segunda derivada en el valor crítico es negativa, por lo que hay un máximo en dicho punto.

Ejemplo 23. Un vaso cilíndrico de sección transversal circular ha de contener 200 cm**²** de material. ¿Qué dimensiones debe de tener para que contenga la mayor cantidad posible de líquido?

Solución: Sean r la longitud del radio de la base del cilindro y h la longitud de su altura, observemos que un cilindro está compuesto por un circulo (interior) y el cuerpo, que al extenderlo nos da un rectángulo (como se observa en la figura)



Las dimensiones del rectángulo son base $2\pi r$ y altura h, el área A del cilindro es, área del circulo + área del rectángulo, es decir,

$$A = \pi r^2 + 2\pi rh$$

Esta área debe de tener 200 cm**²**, luego $\pi r^2 + 2\pi rh = 200$ (1)

Nos piden las dimensiones para que el vaso contenga la mayor cantidad posible de líquido, en otras palabras, nos piden un volumen V máximo, queremos optimizar la expresión

$$V = \pi r^2 h$$

de (1) se obtiene $h = \dfrac{200 - \pi r^2}{2\pi r}$ sustituyendo este valor en la fórmula del volumen

$$V = \pi r^2 \left(\frac{200 - \pi r^2}{2\pi r} \right) = 100r - \frac{1}{2}\pi r^3.$$

La primera derivada de la función es

$$V'(r) = 100 - \frac{3}{2}\pi r^2 \text{ cuyo punto crítico es } r = 5\sqrt{\frac{8}{3\pi}}$$

la segunda derivada

$$V''(r) = -3\pi r < 0, \text{ para } r > 0,$$

como es el caso, por lo tanto la función tiene un máximo en el punto crítico, calculemos ahora las dimensiones que nos piden

$$h = \frac{200 - \pi\left(25\dfrac{8}{3\pi}\right)}{10\sqrt{\dfrac{8}{3\pi}}} = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{3\pi}}, \quad r = 5\sqrt{\frac{8}{3\pi}}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS.

Utilizando la función: $f(x)=x^3-3x+1$, *responde las preguntas 1 y 2.*

1) La función f tiene puntos críticos, en:

A) $x=0$ y $x=1$ B) $x=2$ y $x=-1$ C) $x=-2$ y $x=1$
D) $x=1$ y $x=-1$ E) $x=-1$ y $x=0$

2) El intervalo donde la función f es decreciente es:

A) $1, \infty$ B) $-1, 1$ C) $-1, 0$ D) $-\infty, -1$ E) $-\infty, 1$

3) La función $f(x)=x^5-5x-9$ tiene dos puntos críticos, en:

A) 2 y 0 B) 3 y – 1 C) –2 y 1 D) 1 y – 1 E) – 2 y 0

4) Considera la función $f(x)=4x^3+21x^2-90x+15$, los valores críticos de esta son:

A) $x_1=-5,\ x_2=\frac{3}{2}$ B) $x_1=-5,\ x_2=3$ C) $x_1=2,\ x_2=5$

D) $x_1=0,\ x_2=\frac{3}{2}$ E) $x_1=-\frac{5}{2},\ x_2=\frac{2}{3}$

5) Un intervalo donde la función $f(x)=x^3-3x+1$ es decreciente en:

A) $-1, \infty$ B) $-1, 1$ C) $-1, 0$ D) $-\infty, -1$ E) $-\infty, 1$

6) El intervalo donde la función $f(x)=-2x^2+x+6$ es creciente en:

A) $\left(\frac{1}{4},\infty\right)$ B) $\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$ C) $\left(-\frac{3}{2},2\right)$ D) $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)$ E) $\left(-\infty,\frac{1}{4}\right)$

7) El punto máximo de la curva cuya ecuación está dada por $y=-6x^2+12x-3$ es:

A) (3, -1) B) (1, 3) C) (-1, 4) D) (-1, -3) E) (1, -3)

8) La función $f(x)=x^4-4x^3$ tiene un mínimo en:

A) $x=0$ B) $x=2$ C) $x=3$ D) $x=4$ E) $x=5$

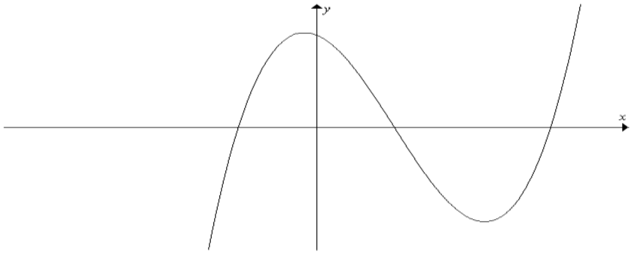
9) Los intervalos en donde la gráfica de la función $y = \frac{1}{30}x^6 - \frac{5}{6}x^4 + \frac{9}{2}x^2$ es cóncava hacia abajo son:

A) (-3, -1); (-1, 1) B) (-3, -1); (1, 3) C) (-1, 1); (3,∞)
D) (-∞, -3); (3,∞) E) (-∞, -3); (-1, 1)

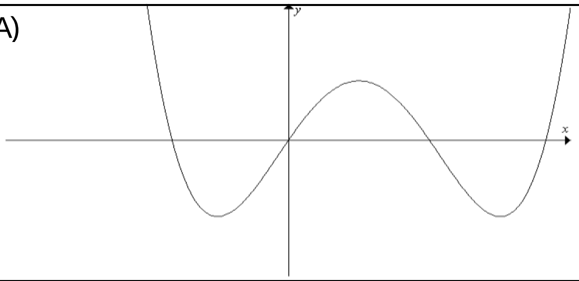
10) El intervalo donde la función $f(x) = x^3 - 3x^2$ es cóncava hacia abajo es:

A) $(-\infty, 0)$ B) $(0, 2)$ C) $(-\infty, 1)$ D) $(2, \infty)$ E) $(1, \infty)$

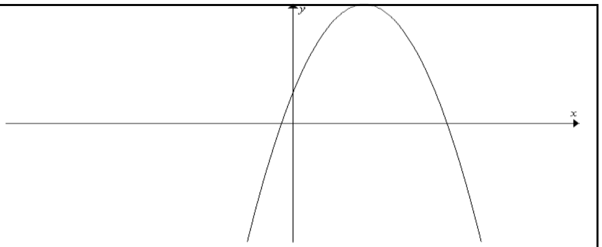
11) La gráfica de la derecha representa la función f, de las gráficas siguientes, elige la gráfica que representa $f'(x)$.



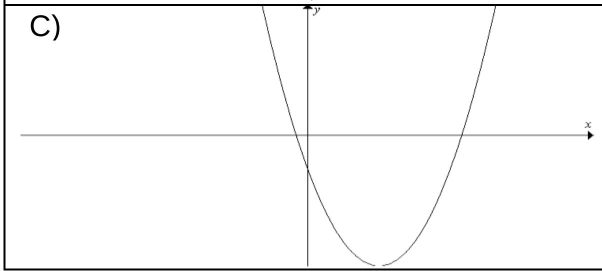
A)



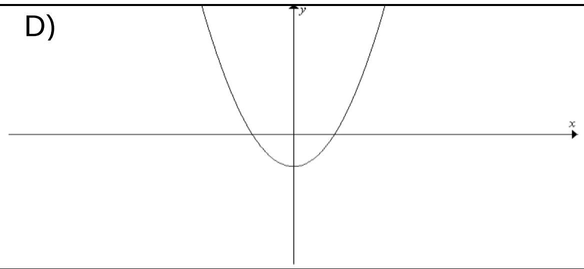
B)



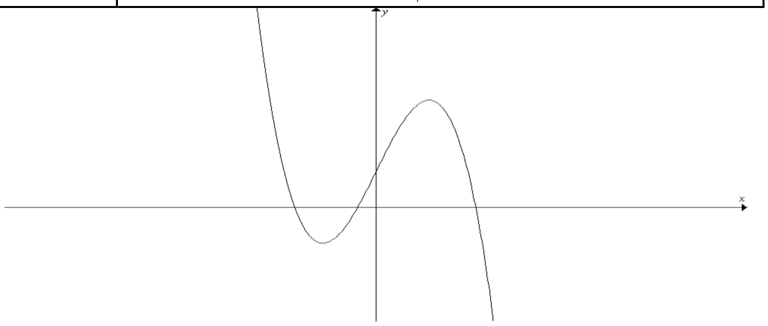
C)



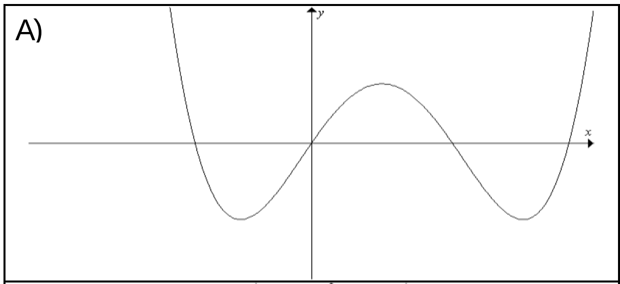
D)



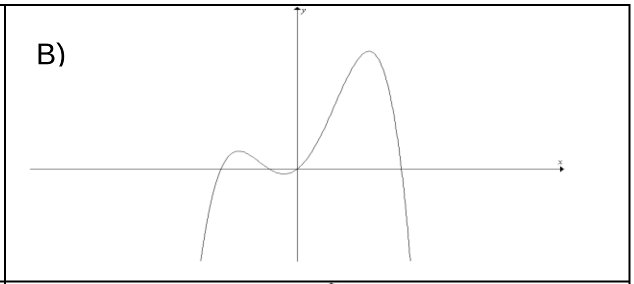
12) La gráfica de la derecha representa la función f, de las gráficas siguientes, elige la gráfica que representa $f'(x)$



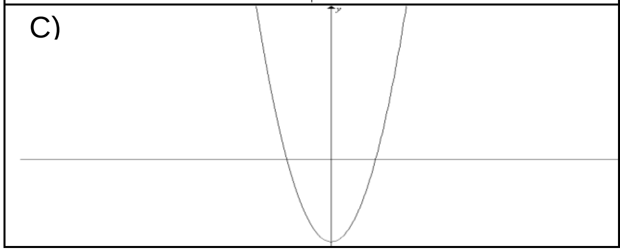
A)



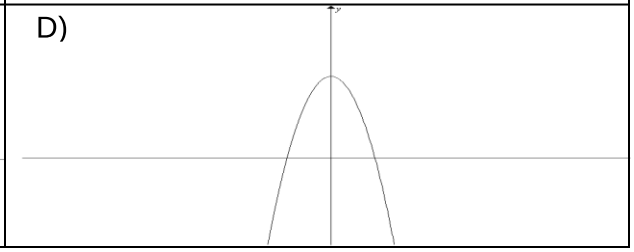
B)



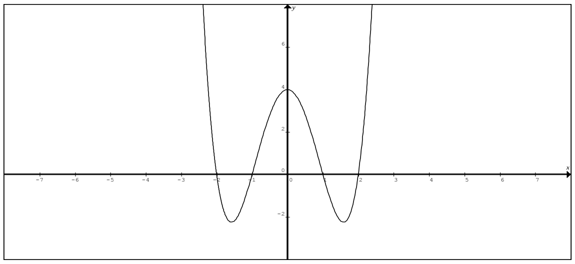
C)



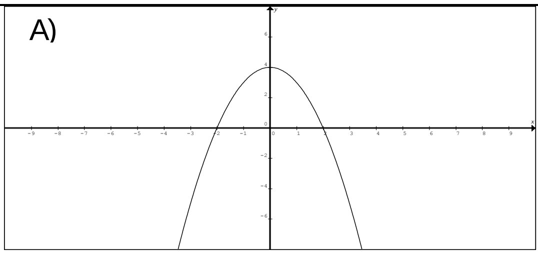
D)



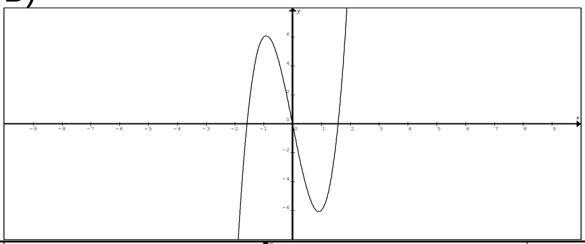
13) La gráfica de la derecha representa la función f. De las gráficas siguientes, elige la gráfica que representa $f'(x)$.



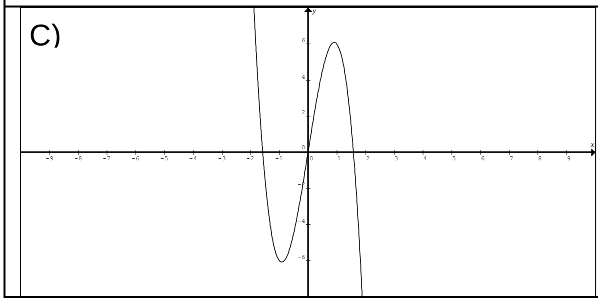
A)



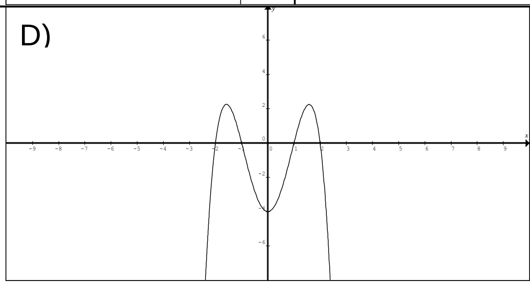
B)



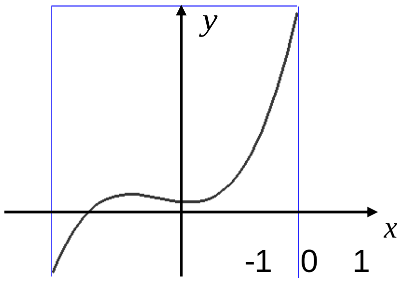
C)



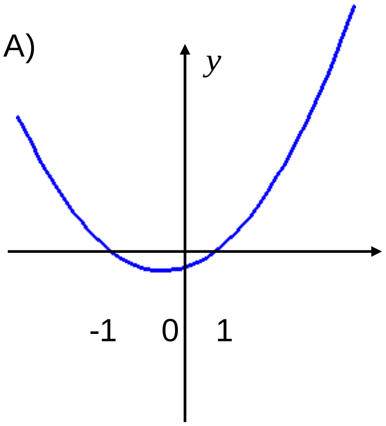
D)



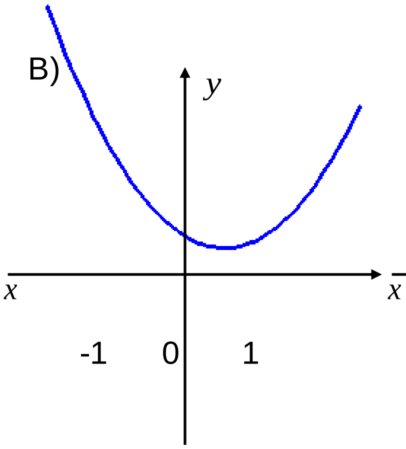
14) En el lado derecho se te muestra la gráfica de una función f, elige de las siguientes gráficas a la gráfica de su derivada



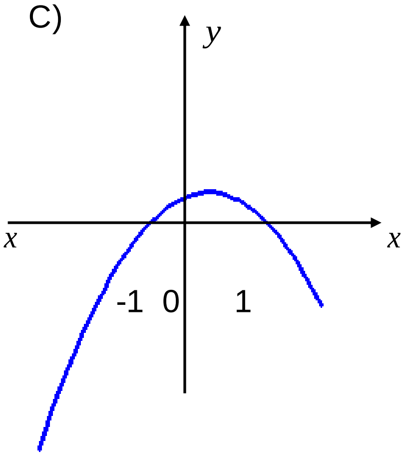
A)



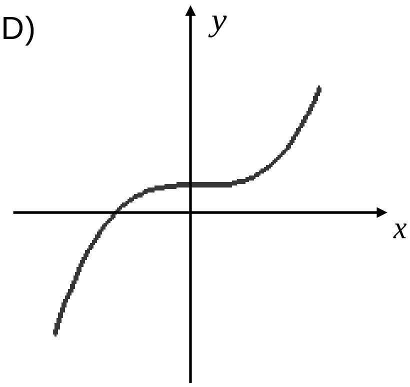
B)



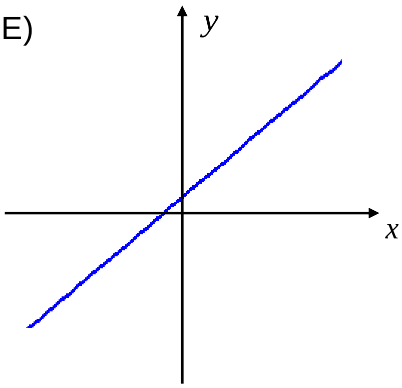
C)



D)



E)



15) La derivada f' de una función f dos veces derivable en todo número real, satisface que:

i) $f'(x) < 0$ para $x < 2$.

ii) $f'(x) > 0$ para $2 < x < 5$.

iii) $f'(x) < 0$ para $x > 5$, luego f cumple que:

A) tiene un máximo local en $x = 2$ B) tiene un mínimo local en $x = 5$

C) tiene un máximo local en $x = 5$

D) la gráfica de f se abre hacia arriba en [3, 8]

E) la gráfica de f se abre hacia abajo en [0, 4]

16) Hallar dos números cuya suma sea 20 y de forma que el producto P de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo:

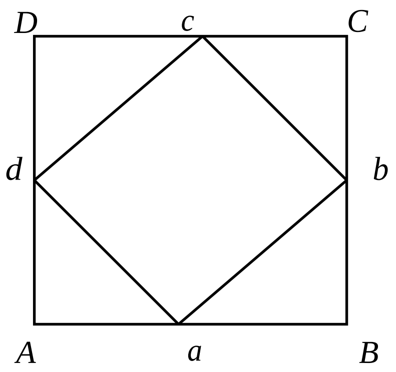
A) 50, 30 B) $\frac{40}{3}, \frac{20}{3}$ C) 5, 3 D) $\frac{40}{5}, \frac{20}{5}$ E) 4, 2

17) Un granjero tiene 1200 m de cerca y desea cercar un campo rectangular que limita con un río recto. No necesita cercar a lo largo del río. ¿Cuáles son las dimensiones del campo que tiene el área más grande?
Si las dimensiones del campo rectangular son: $x =$ base y $y =$ altura.

A) $x = 300\,m$, $y = 300\,m$ B) $x = 300\,m$, $y = 600\,m$ C) $x = 600\,m$, $y = 600\,m$
D) $x = 600\,m$, $y = 300\,m$ E) $x = 400\,m$, $y = 400\,m$

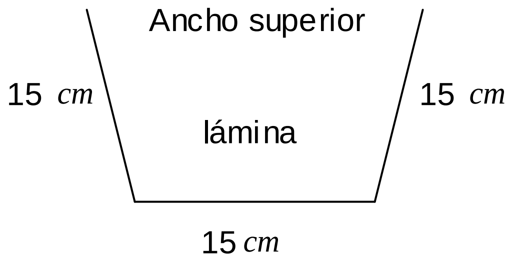
18) Sea el cuadrado $ABCD$ (observa la figura). Si el lado AB mide 10 dm y las longitudes Aa, Bb, Cc, Dd son iguales y el área del cuadrilátero $abcd$ es mínimo, entonces la longitud Aa es igual a:

A) 10 dm B) 5 dm C) 6 dm D) 3.5 dm E) 8 dm



19) Se construye una canaleta de sección trapezoidal soldando tres fajas de latón de 15 cm de ancho cada una. Se coloca la del centro horizontal y las otras inclinadas simétricamente a los lados. Si el área de la sección ha de ser la máxima posible. ¿Cuál será el ancho superior de la canaleta?

A) 15 cm B) 45 cm C) 30 cm D) 50 cm E) 27.5 cm



20) Determina el área del rectángulo más grande que se pueda inscribir en un triángulo rectángulo con catetos cuyas longitudes son de 3 cm y 4 cm, respectivamente, si dos de los lados del rectángulo se encuentran a lo largo de los catetos:

A) 12 cm^2 B) 6 cm^2 C) 8 cm^2 D) 3 cm^2 E) 10 cm^2

21) El área máxima de un rectángulo inscrito en un círculo de radio 2 cm es:

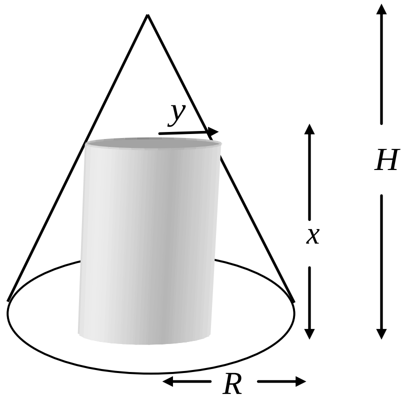
A) 8 cm^2 B) $\sqrt{2}$ cm^2 C) 2 $\sqrt{2}$ cm^2 D) 2 cm^2 E) 4 cm^2

22) El volumen máximo del cilindro circular recto que puede inscribirse en un cono de radio en la base de 6 cm. y altura de 12 cm., de tal forma que los ejes del cilindro y del cono coincidan es de:

A) $36\pi cm^3$ B) $72\pi cm^3$ C) $64\pi cm^3$ D) $6\pi cm^3$ E) $18\pi cm^3$

Para el problema siguiente responde las preguntas 8, 9 y 10.

Problema: Encuentra la altura del cilindro de volumen máximo que puede inscribirse en un cono circular recto dado.



23) El volumen (V) del cilindro en función de su altura (x), es:

A) $V(x) = \pi x^2 (H - x)$ B) $V(x) = \pi \dfrac{(H-x)}{H}$ C) $V(x) = \pi \left(\dfrac{R(H-x)}{H} \right)^2$

D) $V(x) = \pi x \dfrac{(H-x)}{H}$ E) $V(x) = \pi x \left(\dfrac{R(H-x)}{H} \right)^2$

24) La derivada del volumen (V) del cilindro de la pregunta anterior respecto de la altura x del cilindro es:

A) $V'(x) = \pi \left(R - \dfrac{R}{H} x \right)$ B) $V'(x) = \pi \left(R - \dfrac{R}{H} x \right) \left(R - \dfrac{3R}{H} x \right)$

C) $V'(x) = \pi\, x\left(R - \dfrac{R}{H}\, x \right)$ D) $V'(x) = \pi\left(R\, \dfrac{3R}{H}\, x \right)$

E) $V'(x) = \left(R - \dfrac{R}{H}\, x \right)\left(R - \dfrac{3}{H}\, x \right)$

25) La altura del cilindro de volumen máximo que puede inscribirse en un cono circular recto dado es:

A) altura = $\dfrac{1}{2}H$ B) altura = $\dfrac{3}{4}H$ C) altura = $\dfrac{5}{7}H$

D) altura = $\dfrac{2}{5}H$ E) altura = $\dfrac{1}{3}H$

RESPUESTAS

UNIDAD 1. PROCESOS INFINITOS Y LA NOCIÓN DE LÍMITE

TEMA. PROCESOS INFINITOS

1) D 2) C 3) B 4) C 5) C 6) A 7) B 8) C 9) B 10) D
11) A 12) C 13) B 14) E 15) D 16) C

UNIDAD 2. LA DERIVADA: ESTUDIO DE LA VARIACIÓN Y EL CAMBIO

1) D 2) A 3) B 4) D 5) E 6) C 7) D 8) D 9) B 10) B

11) 12) B 13) A 14) C 15) D 16) A

UNIDAD 3. DERIVADA DE FUNCIONES ALGEBRAICAS

1) D 2) C 3) B 4) C 5) E 6) E 7) A 8) B 9) B 10) A
11) A 12) A 13)B 14) C 15) D 16) D 17) D 18) 19) E 20) A
21) B 22) A 23) A 24) D 25) E 26) 27) D 28) B 29) D

1) A 2) E 3) A 4) B 5) A 6) A 7) B 8) E 9) C 10) A
11) E 12) C 13) D 14) B 15) E 16) A 17) A 18) C 19) E 20) C
21) C 22) E 23) D 24) B 25) C 26) D 27) C

UNIDAD 4. COMPORTAMIENTO GRÁFICO Y PROBLEMAS DE APLICACIÓN

TEMA. COMPORTAMIENTO GRÁFICO DE UNA FUNCIÓN

1) D 2) B 3) D 4) A 5) D 6) E 7) E 8) B 9) C 10) B
11) C 12) D 13) B 14) A 15) C 16) B

TEMA. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

16) B 17) D 18) B 19) C 20) D 21) A 22) C 23) E 24) B 25) E

BIBLIOGRAFÍA

1. Edwards y Penney, *Cálculo con Geometría Analítica* (4° Edición)
   Prentice Hall Hispanoamericana.

2. Elliott Mendelson, *Introducción al Cálculo*
   McGraw - Hill

3. Alejandra G. Bravo, et al, *Cálculo Diferencial e Integral II* (Guía para el examen extraordinario), Departamento de Impresiones del Plantel del Oriente del CCH.

4. Allan B. Cruse - Milliane Granberg, *Lectures on fresman calculus*
   Addison - Wesley Publishing Company.

5. Álvaro Pinzón, *Cálculo II, Integral,* (Edición revisada)
   Harla, SA de CV, Harper & Row Latinoamericana

   \- *Cálculo I, diferencial.*
   Harla, SA de CV, Harper & Row Latinoamericana

6. James Stewart et - al, *Calculus, early transcendentals*, (3ª edición)
   Brooks/Cole Publishing Company

7. Louis Leithold, *El Cálculo con Geometría Analítica,* (4ª Edición)
   Harla, SA de CV, Harper & Row Latinoamericana

8. Earl W. Swokowski, *Cálculo con Geometría Analítica*
   Wadsworth Internacional Iberoamérica.

9. Morris Kline, *Matemáticas para los estudiantes de humanidades.*
   Fondo de Cultura Económica, México.

10. Edwin J Purcell - Dale Verberg, *Cálculo con Geometría Analítica,* (6ª Edición)
    Prentice Hall Hispanoamericana, SA.

11. Larson - Hostetler, *Cálculo y Geometría Analítica,* (2ª Edición)
    McGraw - Hill.

12. Tom M. Apostol, *Calculus,* (Volumen 1, 2ª Edición)-
    Editorial Reverté, SA.

13. James Stewart, *Cálculo conceptos y contextos*
    International Thomson Editores.

UNIDAD 3
DERIVADA DE FUNCIONES ALGEBRAICAS

Propósitos: Continuar el estudio del concepto de derivada a través del manejo de su representación algebraica buscando que el alumno reconozca a las reglas de derivadas como un camino más eficaz de obtener la derivada de una función.

En la Unidad siguiente, pretendemos que:

- Obtengas la derivada de una función polinomial de 1°, 2do ó 3er grado usando la definición

$$f'(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

- Identifiques el patrón de comportamiento de las derivadas obtenidas con el límite del cociente.
- Calcules la derivada de funciones algebraicas usando las reglas de derivación.
- Reconozcas la jerarquía de las operaciones involucradas en la regla de correspondencia de una función para aplicar correctamente las reglas de derivación.
- Identifiques las relaciones existentes entre la gráfica de una función y la gráfica de su derivada.
- Obtengas la ecuación de la recta tangente en un punto de la gráfica de una función.
- Obtengas la velocidad instantánea como la derivada de la función posición y la aceleración como la derivada de la velocidad.
- Des significado a la derivada de una función en el contexto de un problema.

INTRODUCCIÓN.

Significado Intuitivo Del Concepto De Límite.

En esta sección iniciaremos nuestro estudio de las derivadas algebraicas a través de su definición que se dio en la unidad 2, para poder calcular estas derivadas requerimos un repaso del cálculo de límites de funciones algebraicas así como de su álgebra que requieren.

La idea del método del límite es fundamental en el cálculo y es una idea relativamente simple, pero no es una idea aislada y equivale a lo siguiente. Para determinar el valor exacto de una cierta magnitud determinamos primero, no la magnitud en sí, sino una aproximación de ella. Sin embargo, no hacemos una única aproximación sino una serie de ellas, cada una de las cuales es más precisa que la anterior (un proceso infinito). Del examen de esta serie de aproximaciones determinamos unívocamente el valor exacto de la magnitud. Por este método, que es en esencia profundamente dialéctico, obtenemos una constante fija como resultado de un proceso o movimiento.

Ejemplo 1. En el problema de la pelota en la unidad 2, se quiere calcular la velocidad instantánea a los 3 segundos, en este ejemplo debemos calcular el límite siguiente:

$$v(3) = s'(3) = \lim_{t\to 3} \frac{s(t)-s(3)}{t-3} = \lim_{t\to 3} \frac{-4.9t^2+40t-75.9}{t-3}$$

En este caso la función es $f(t) = \dfrac{-4.9t^2+40t-75.9}{t-3}$ observa que la función no esta definida para $t=3$ (¿por qué?), es por está razón que nos debemos aproximar a 3 y así conjeturar su límite, los valores de $f(t)$ cuando t se aproxima por la izquierda al número 3, se resumen en la tabla siguiente.

t	2.5	2.9	2.99	2.999	2.9999	2.99999
$f(t)$	13.05	11.09	10.649	10.6049	10.60049	10.600049

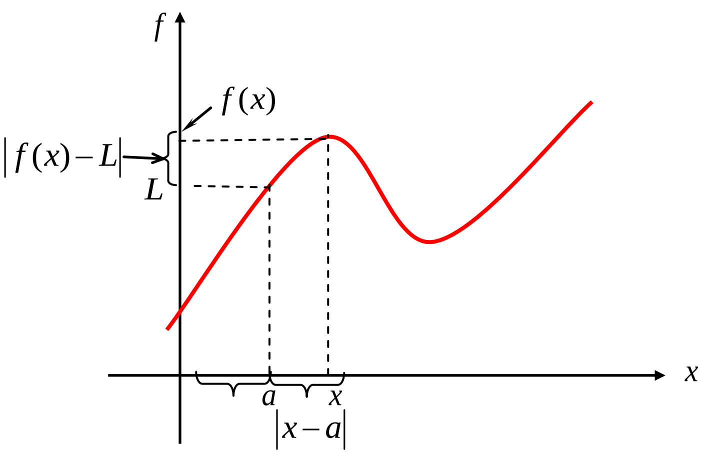
En este caso decimos que:

$$v(3) = s'(3) = \lim_{t\to 3} \frac{s(t)-s(3)}{t-3} = \lim_{t\to 3} \frac{-4.9t^2+40t-75.9}{t-3} = 10.6\frac{m}{s}$$

Definición intuitiva de límite.

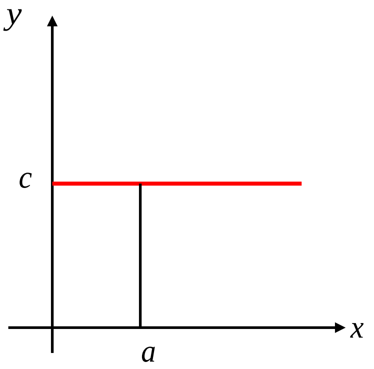
Cuando escribimos $\lim_{x\to a} f(x) = L$ se lee "el límite de $f(x)$, cuando x tiende al número a, es igual a L" y significa que $f(x)$ puede acercarse arbitrariamente a L (si la distancia $|f(x)-L|$ es tan pequeña, como queramos) siempre que x se elija lo suficientemente cercano al número a pero no igual al número a (si $|x-a|$ es pequeña también).

Ilustraremos el proceso límite con el esquema siguiente:

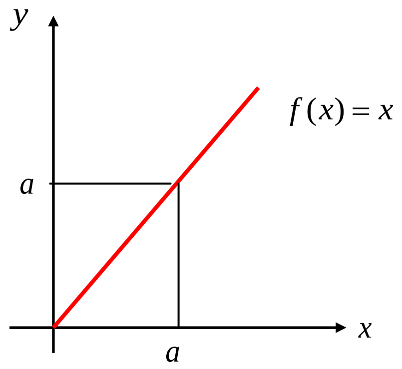


Aunque no es complicado tomar valores cada vez más cercanos al número en donde queremos calcular el límite, el método de aproximaciones es largo, por esa razón se buscan técnicas las cuales faciliten este cálculo, pero, sin dejar de pensar que el cálculo de límites es una aproximación de un proceso infinito
.

Con este fin iniciaremos calculando los límites más sencillos, no es difícil ver que $\lim_{x \to a} c = c$ y $\lim_{x \to a} x = a$ ya que la distancia de sus imágenes es tan pequeña como se desee siempre y cuando la distancia $|x-a|$ también lo sea, como se ilustra a continuación.



$\lim_{x \to a} c = c$



$\lim_{x \to a} x = a$

El cálculo de límites para otras funciones también es sencillo, siempre que recordemos las propiedades de los límites que a continuación se enlistan.

Propiedades de los límites.
Los límites tienen varias propiedades muy importantes, algunas de ellas son:

- El límite de una suma es la suma de los límites

$$\lim_{x \to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) \qquad (1)$$

- El límite de un producto es el producto de los límites

$$\lim_{x \to a}(f(x)g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \quad \lim_{x \to a} g(x) \qquad (2)$$

- El límite de un cociente es el cociente de los límites

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}, \qquad \lim_{x \to a} g(x) \neq 0, \qquad (3)$$

Estas propiedades no te las justificaremos porque para ello hace falta contar con la definición formal del límite de una función. Lo que sí podemos hacer es tomar estos límites como base para encontrar otras propiedades a partir de ellas.

Ejemplo 2. El límite de una constante por una función es la constante por el límite de la función.

$$\lim_{x\to a} c\, g(x) = c \lim_{x\to a} g(x) \qquad (4)$$

Solución. Esta propiedad se justifica a partir de (2) y de que $\lim_{x\to a} c = c$:

$$\lim_{x\to a} c\, g(x) = \left(\lim_{x\to a} c\right)\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = c \lim_{x\to a} g(x)$$

El resultado anterior, nos permite “extraer” del límite a una constante, como se muestra a continuación:

$$\lim_{x\to a}(7x) = \left(\lim_{x\to a} 7\right)\left(\lim_{x\to a} x\right) = 7 \lim_{x\to a} x = 7a$$

Utilizando las propiedades (1) y (4), podemos hacer lo siguiente:

$$\begin{aligned} lím_{x\to a}(f(x) + cg(x)) &= lím_{x\to a} f(x) + lím_{x\to a} cg(x) \\ &= lím_{x\to a} f(x) + c\, lím_{x\to a} g(x) \end{aligned}$$

Si $c = -1$, se tiene que: $lím_{x\to a}(f(x) - g(x)) = lím_{x\to a} f(x) - lím_{x\to a} g(x)$, es decir:

- El límite de una diferencia es la diferencia de los límites

$$lím_{x\to a}(f(x) - g(x)) = lím_{x\to a} f(x) - lím_{x\to a} g(x)$$

Ejemplo 3. Con base en los límites que hemos calculado y las propiedades de los límites, conjetura el valor de:

a) $\lim_{x\to a} x^3$ b) $\lim_{x\to a} x^4$ c) $lím_{x\to a} x^5$ d) $lím_{x\to a} x^{12}$

Solución. sabemos que $\lim_{x\to a} x = a$ y con la regla del producto, podemos conjeturar que: $\lim_{x\to a} x^3 = \left(\lim_{x\to a} x\right)\left(\lim_{x\to a} x\right)\left(\lim_{x\to a} x\right) = (a)(a)(a) = a^3$

De manera similar $\lim_{x\to a} x^4 = a^4$, $lím_{x\to a} x^5 = a^5$ y $lím_{x\to a} x^{12} = a^{12}$

Ejemplo 4. Si n representa a un número entero positivo, conjetura a qué será igual el $\lim_{x\to a} x^n$.

Solución. Del ejemplo anterior, podemos deducir (y se puede probar por inducción) que $\lim_{x \to a} x^n = a^n$

Ejemplo 5. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim_{x \to 3}(2x^2 + 3x + 1)$, b) $\lim_{x \to 0} \frac{x+2}{x^2 - 1}$.

Solución. En el primer caso tenemos

a) $\lim_{x \to 3}(2x^2 + 3x + 1) = 2(3)^2 + 3(3) + 1 = 18 + 9 + 1 = 28$.

En el segundo caso

b) $\lim_{x \to 0} \frac{x+2}{x^2 - 1}$.**=** $\frac{0+2}{0^2 - 1} = \frac{2}{-1} = -1$ (¿qué propiedades se usaron?)

Sin embargo límites de esta naturaleza son muy pocos los que se encuentran, es más común encontrar límites a los que les llamamos *límites indeterminados*, como el del cálculo de la velocidad en $t = 3$, que hemos realizado previamente, y usar el método de aproximaciones sucesivas tanto del lado derecho como del lado izquierdo, es un trabajo muy laborioso, sin tomar en cuenta que conlleva a problemas teoricos que no abordademos en esta guía, afortunadamente los límites con los que trabajaremos requieren muy poca de álgebra para poder calcularlos.

➢ DERIVADAS DE FUNCIONES DEL TIPO $f(x) = cx^n$.

Iniciaremos con las derivadas de las funciones $f(x) = c$, (en donde c es una constante) $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$ y posteriormente conjeturaremos el caso general.

Recordemos la definición de derivada, a saber,

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Con base en ella, calculemos $f'(a)$ para la función $f(x) = c$, en este caso $f(a) = c$, por lo que

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{c - c}{x - a} = \lim_{x \to a} 0 = 0$$

La derivada de una constante es cero

De la misma forma, para la función $f(x)=x$, se tiene $f(a)=a$, así

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{x-a}=\lim_{x\to a}1=1$$

La derivada de la función identidad es 1.

Para calcular la derivada de la función $f(x)=x^2$ emplearemos la identidad algebraica muy conocida, a saber: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, en este caso $f(a)=a^2$

y, su derivada es

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x+a)}{x-a}=\lim_{x\to a}(x+a)=2a$$

De manera análoga, la derivada de la función $f(x)=x^3$ se calcula de la misma forma, se tiene $f(a)=a^3$ y haciendo uso de la identidad algebraica $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, se tiene

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{x-a}=\lim_{x\to a}(x^2+ax+a^2)=3a^2$$

Hagamos un resumen, de las derivadas que hemos calculado.

Función $f(x)$	Derivada $f'(a)$
c	0
x	1
x^2	$2a$
x^3	$3a^2$

Podemos conjeturar (se puede probar por inducción) que la derivada de la función $f(x)=x^n$, en donde n es un entero positivo, es

$$f'(a)=na^{n-1}$$

Para encontrar la derivada de la función $f(x)=cx^n$ en donde c es una constante, se procede la manera siguiente:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{cx^n-ca^n}{x-a}=c\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=cna^{n-1}$$

(¿Qué propiedades empleamos?)

➢ REGLAS DE DERIVACIÓN.

✓ Constante por una función.

Esta regla resulta de las propiedades de los límites, consideremos que una función es derivable en el punto $x = a$, entonces

$$(cf(a))' = \lim_{x \to a} \frac{cf(x) - cf(a)}{x - a} = c \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = cf'(a)$$

A esta propiedad también se le dice que la derivada "saca" constantes.

Ejemplo 6. Calcula la derivada de la función $f(x) = 8x^3$.

Solución. Por las propiedades vistas $f'(x) = 3(8)x^2 = 24x^2$

✓ Suma

Si f y g son diferenciables en el punto $x = a$, entonces

$$(f(a) + g(a))' = \lim_{x \to a} \frac{(f(x) + g(x)) - (g(x) + g(a))}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{(f(x) - f(a)) + (g(x) - g(a))}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

$$= f'(a) + g'(a)$$

La derivada de una suma es la suma de las derivadas, también se dice que la derivada abre sumas.

Ejemplo 7. Deriva las funciones

a) $f(x) = 6x^3 - 5x^2 + x + 9$

b) $f(t) = 4t^6 - 3t^4 + 12$

Solución. a) $f'(x) = 18x^2 - 10x + 1$

b) $f'(t) = 24t^5 - 12t^3$

Sean f y g dos funciones derivables en x y c una constante, entonces

$$(f(x) + cg(x))' = f'(x) + (cg(x))'$$

Lo anterior es cierto porque, como ya vimos, la derivada de la suma es la suma de las derivadas. Ahora, como la derivada de una constante por una función es la constante por la derivada de la función, obtenemos:

$$f'(x)+(cg(x))' = f'(x)+cg'(x)$$

Resumiendo:

$$(f(x)+cg(x))' = f'(x)+cg'(x)$$

En particular si $c=-1$, obtendremos:

$$(f(x)-g(x))' = f'(x)-g'(x)$$

Cabe aclarar que en Matemáticas, se habla indistintamente de suma o resta diciendo suma algebraica que ya involucra a las dos operaciones anteriores y posteriormente, sólo se dice la suma (aunque se esté restando).

Apliquemos los resultados obtenidos al problema siguiente.

Ejemplo 8.

Se lanza una pelota verticalmente desde el suelo, con una velocidad inicial de 30 m/seg. ¿Cuál es la velocidad a los dos segundos?

De la física sabes que la trayectoria de la pelota está dada por la función:

$$f(x) = -4.9x^2 + v_0 x + f_0 \,,$$

En esta fórmula f representa la altura que alcanza la pelota sobre el suelo, x es el tiempo transcurrido, v_0 es la velocidad inicial con la que se lanza la pelota y f_0 es la altura inicial de la pelota. En este caso la velocidad inicial v_0 es de 30 m/seg y la distancia inicial es de 0 metros, ya que se lanza desde el suelo. Sustituyendo estos datos en la función, se tiene:

$$f(x) = -4.9x^2 + 30x$$

En nuestro caso, la velocidad es la derivada de la función f, la cual se determina como sigue:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-4.9x^2+30x)' \\ &= (-4.9x^2)' + (30x)' \\ &= -4.9(x^2)' + 30(x)' \\ &= -4.9(2x)+30(1) \\ f'(x) &= -9.8x+30. \end{aligned}$$

Así pues, la velocidad cuando $x=2$ es $f´(2)=-9.8(2)+30=10.4 m/seg$.

En la primera unidad trabajamos resolviendo problemas haciendo explícito los procesos infinitos involucrados. Ahora, hemos sintetizado dichos procesos por medio de la derivada.

✓ Producto

Si f y g son diferenciables en el punto $x=a$, entonces

$$\begin{aligned}
(f(a)g(a))´ &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(x)+f(a)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{(f(x)-f(a))g(x)+f(a)(g(x)-g(a))}{x-a}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(x)+f(a)\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\\
&= f´(a)g(a)+g´(a)f(a)
\end{aligned}$$

Concluimos que la derivada de un producto es

$$(f(a)g(a))´= f´(a)g(a)+g´(a)f(a)$$

Esta regla suele decirse la derivada de un producto es la derivada de la primera función por la segunda más la derivada de la segunda por la primera función.

Posiblemente este resultado sea uno de los más importantes de la derivada de una función (y también el que hace que se utilice más álgebra).

Ejemplo 9. Calcula la derivada de las funciones siguientes.

a) $f(x)=x^2(3x^5+5x^2+3)$

b) $f(x)=(-2x^4+5x+2)(x^3+3x^2-4x+2)$

Solución. a) sabemos que la derivada de la función x^2 es $2x$ y que derivada de la función $3x^5+5x^2+3$ es $15x^4+10x$, ahora empleando la regla para el producto de dos funciones se tiene que la derivada de la función es:

$$f´(x)=2x(3x^5+5x^2+3)+x^2(15x^4+10x)$$

b) de la misma manera que el inciso a)

$$f'(x) = (-8x^3+5)(x^3+3x^2-4x+2)+(-2x^4+5x+2)(3x^2+6x-4)$$

✓ Cociente.

Sean f y g dos funciones derivables en x y $y=\dfrac{f}{g}$. Queremos encontrar y'. Conocemos la derivada de un producto de funciones, por lo que podemos emplear esa regla si transformamos el cociente anterior a un producto de dos funciones, lo cual es sencillo ya que

$$y=\frac{f}{g} \Rightarrow f = yg$$

Ahora, aplicamos la regla del producto a la función f así obtenemos:

$$f' = y'g + g'y$$

Despejando a y' así obtenemos:

$$y' = \frac{f' - g'y}{g}, \qquad g \neq 0$$

De esta manera, sustituimos el valor de y en la última expresión:

$$y' = \frac{f'-g'y}{g} = \frac{f'-g'\left(\frac{f}{g}\right)}{g} = \frac{\frac{f'g-g'f}{g}}{g} = \frac{f'g-g'f}{g^2}$$

Hemos encontrado la regla para derivar el cociente de dos funciones que enunciaremos a continuación:

Sean f y g dos funciones derivables y $g(x) \neq 0$, entonces

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Ejemplo 10. Encuentra la derivada de la siguiente función $y=\dfrac{2x^2-1}{3x+5}$

Solución. Para hacerlo, observa que en este caso $f(x)=2x^2-1$ y $g(x)=3x+5$, sus respectivas derivadas son; $f'(x)=4x$ y $g'(x)=3$. Aplicando la regla del cociente, se tiene

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \frac{(3x+5)(4x)-(2x^2-1)(3)}{(3x+5)^2}$$

$$=\frac{12x^2+20x-6x^2+3}{(3x+5)^2}=\frac{6x^2+20x+3}{(3x+5)^2}$$

Ejemplo 11. Deriva la función $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$

Solución. Aplicando la fórmula encontrada se tiene

$$f'(x)=\frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$$

✓ De la cadena con funciones del tipo $f(x)^n$ con $f(x)$ un polinomio

La regla del producto nos permite generalizar otras reglas para derivar, por ejemplo, la regla de las potencias para funciones, iniciaremos con la derivada de la función $h(x)=(f(x))^2$ en donde suponemos que la función f es derivable. Podemos escribir la función que esta elevada al cuadrado $(f(x))^2=f(x)f(x)$ como el producto de dos funciones y después aplicar la regla del producto.

$$h(x)=(f(x))^2=(f(x)f(x))'=f'(x)f(x)+f(x)f'(x)=2f(x)f'(x)$$

O bien

$$((f(x))^2)'=2f(x)f'(x)$$

Gracias a este resultado, derivar polinomios elevados al cuadrado ahora, resulta sencillo.

Ejemplo 12. Si $f(x)=(4x^3+5x-3)^2$,

entonces $f'(x)=2(4x^3+5x-3)(12x^2+5)$.

Ejemplo 13. Si $f(x)=(-5x^4+2x^2+3x)^2$, entonces

$$f'(x)=2(-5x^2+2x^2+3x)(-20x^3+4x+3).$$

Ahora consideremos $h(x)=(f(x))^3$, queremos calcular su derivada, primero lo escribimos como $h(x)=(f(x))^2 f(x)$ el producto de dos funciones y posteriormente calculamos la derivada de ella.

$$\begin{aligned}h'(x)&=((f(x))^2)'f(x)+f'(x)(f(x))^2\\&=2f'(x)f(x)f(x)+(f(x))^2f(x)\end{aligned}$$

$$= 2(f(x))^2 f'(x) + (f(x))^2 f(x)$$
$$= 3(f(x))^2 f'(x)$$

Es de esperarse que si $h(x) = (f(x))^4$ entonces $h'(x) = 4(f(x))^3 f'(x)$

Y en general, tenemos para un número entero n el siguiente resultado

$$(f(x)^n)' = n(f(x))^{n-1} f'(x)$$

Ejemplo 14. Deriva la función $f(x) = (3x^4 + 5x^2 - 4x + 2)^8$

Solución. Aplicamos la regla encontrada y obtenemos

$$f'(x) = 8(3x^4 + 5x^2 - 4x + 2)^7 (12x^3 + 10x - 4)$$

Las funciones se pueden combinar, así se puede tener el siguiente

Ejemplo 15. Deriva la función siguiente: $f(x) = \left(\frac{x^2 - 9}{4x + 5}\right)^4$

Solución. Por la forma en que esta escrita la función, primero, debemos derivar a la potencia y después el cociente,

$$f'(x) = 4\left(\frac{x^2 - 9}{4x + 5}\right)^3 \frac{(4x+5)(2x) - (x^2 - 9)(4)}{(4x+5)^2}$$
$$= 4\left(\frac{x^2 - 9}{4x + 5}\right)^3 \frac{4x^2 + 10x + 36}{(4x+5)^2} = .$$
$$= \frac{8(x^2 - 9)^3 (2x^2 + 5x + 18)}{(4x+5)^5}$$

✓ De la raíz.

Calcula la derivada de $y = \sqrt{f}$.

Con el fin de poder aplicar la regla del producto elevemos al cuadrado ambos miembros de la igualdad y simplifiquemos el resultado:

$$(y)^2 = (\sqrt{f})^2 = f$$

Ahora, derivamos a la función y utilizando la regla de las potencias:

$$((y)^2)' = f'$$
$$2y'(x)y(x) = f'(x)$$
$$y' = \frac{f'}{2y} = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$$

De esta manera obtenemos la regla de la derivada de la raíz cuadrada de una función, esto es:

$$\text{Si } y=\sqrt{f}\text{ , entonces } y'=\frac{f'}{2\sqrt{f}}$$

Ejemplo 16. Calcula la derivada de la función siguiente: $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.
Solución. Utilizando la regla de la raíz obtenemos

$$f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ejemplo 17. Deriva la función $y=\sqrt{100x^2+16}$.

Solución. Utilizando la regla de la raíz cuadrada

$$y'=\frac{100x^2+16\ '}{2\sqrt{100x^2+16}}=\frac{200x}{2\sqrt{100x^2+16}}=\frac{100x}{\sqrt{100x^2+16}}$$

Estas reglas se pueden combinar y obtener la derivada de una gran variedad de funciones algebraicas.

Ejemplo 18. Encuentra la derivada de las siguientes funciones

1 $j(x)=\dfrac{x^2+5}{x-2}$ 2. $j(x)=\sqrt{5x^3+2x^2+3}$ 3. $m(x)=\left(\dfrac{9}{x}+\dfrac{x}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$ 4. $k(x)=\dfrac{x^2+2x-1}{\sqrt{x}+1}$

Solución. Aplicamos las reglas de derivación que hemos encontrado.

1. $j'(x)=\dfrac{(x-2)(2x)-(x^2+5)(1)}{(x-2)^2}=\dfrac{x^2-4x-5}{(x-2)^2}=\dfrac{(x-5)(x+1)}{(x-2)^2}.$

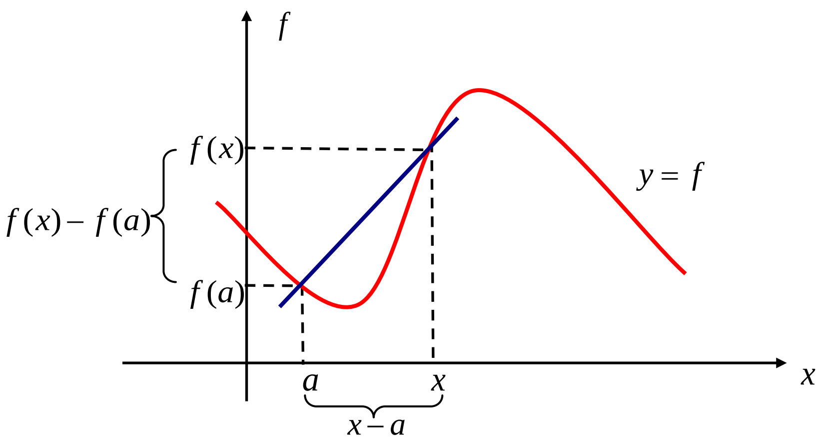
2. $j'(x)=\dfrac{15x^2+4x}{2\sqrt{5x^3+2x^2+3}}$ 3. $m'(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{9}{x}+\dfrac{x}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-\dfrac{9}{x^2}+\dfrac{1}{9}\right).$

4. $k'(x)=\dfrac{\sqrt{x}+1 \quad 2x+2 \ -\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right) \ x^2+2x-1}{\sqrt{x}+1 \ ^2}=\dfrac{2\sqrt{x}-x^2+1}{2\sqrt{x}\ \ \sqrt{x}+1 \ ^2}$

➢ Notación.

Es conveniente, que estudiemos las principales notaciones que existen sobre la derivada de una función.

Recordemos que en el problema del cohete teníamos la función $s(t) = 30t - 4.9t^2$ y que la velocidad promedio en dos tiempos diferentes (su razón de cambio promedio) fue representada con la pendiente de la recta determinada por esos dos puntos. Abstrayendo esta idea, como queremos estudiar la razón de cambio instantánea de una función f cualquiera, representaremos su gráfica y escogeremos dos puntos (uno fijo para estudiar la razón de cambio instantáneo en él, y el otro móvil, como se hizo en la segunda unidad) los que uniremos con una recta y mostraremos las diferentes notaciones que hay sobre su razón de cambio. Considera la gráfica de la función f, que a continuación se ilustra:



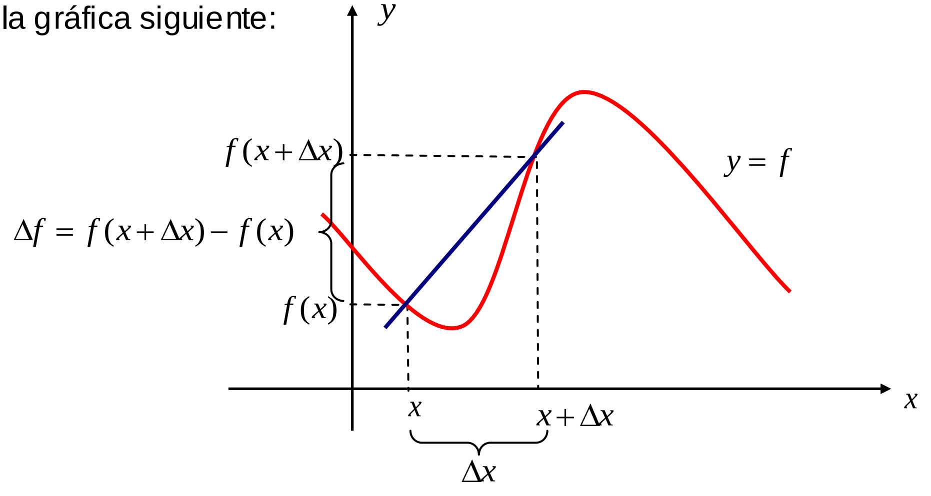
Estudiamos la razón de cambio promedio en el intervalo $[a, x]$ (también puede ser en el intervalo $[x, a]$, el cual no esta ilustrado), esta razón está dada por:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Posteriormente, calculamos la derivada en $x = a$, tomando el límite del cociente cuando x se aproxima al número a. En algunos libros cuando inician el cálculo de la derivada en el punto x, a la diferencia $x - a$ le llaman incremento de x, y lo simbolizan mediante Δx, y a la diferencia $f(x) - f(a)$ incremento de f, simbolizado por Δf. Así, nuestra razón de cambio promedio se denota como:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

la cual es conocida como el cociente de incrementos. Para tener una visualización, observa la gráfica siguiente:



La derivada la podemos escribir como el límite, cuando Δx tiende a cero, del cociente de incrementos, lo que nos permite simbolizar a la derivada de la función f como:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{df}{dx}$$

Otros autores denotan al incremento de x con h, y el procedimiento anterior lo tratan de la misma forma, en que se ha expuesto aquí, cambiando Δx por h quedando la definición de la derivada como:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Finalmente, también se puede denotar a la derivada de f como $D_x f$.

Resumiendo, la derivada de la función f con respecto a x, se puede escribir de cualquiera de las tres formas siguientes:

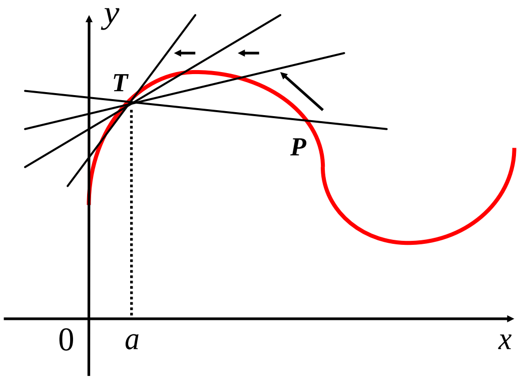
$$\frac{df}{dx}, \; D_x f \;\text{ o }\; f'(x)$$

- Problemas de aplicación.
  - ✓ Cálculo de tangentes.

Si una curva C es la gráfica de la función $y = f(x)$ y queremos determinar la tangente a C en el punto $T(a, f(a))$, entonces consideramos un punto cercano $P(x, f(x))$, donde $x \neq a$, y calculamos la pendiente de la recta secante PT :

$$M_{PT} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad (1)$$

Posteriormente, aproximamos el punto P al punto T a lo largo de la curva C, haciendo que x se aproxime hacia el número a. Si M_{PT} se aproxima a un número m, entonces definimos la recta tangente como la recta que pasa por T con pendiente m. (Esto equivale a decir que la recta tangente es la posición límite de la recta secante PT cuando P tiende a T). (Vea la figura).



Definición. Si $T(a, f(a))$ es un punto de la gráfica de una función f, entonces la *recta tangente* a la gráfica de f en T es la recta que pasa por T y tiene pendiente $m(a)$ dada por $m(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ siempre que el límite exista.

Ejemplo 19. Encuentra la pendiente de $f(x) = -2x^2 + 3$ en el punto $T(2,5)$.

Solución. Primero, debemos cerciorarnos que el punto este en la gráfica de la función, lo cual se puede verificar fácilmente. Una vez que lo hemos hecho, calcular la pendiente es sencillo lo hacemos de la manera siguiente. Usando la definición de $m(a)$ para $a = 2$, obtenemos

$$m(2) = f'(2) = -4(2) = -8$$

Por lo tanto, la pendiente de f en $T(2,5)$ es $m = -8$.

Ejemplo 20. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la parábola $f(x) = x^2 - 2x$, en el punto $(1,-1)$.

Solución. Primero verificamos que el punto este sobre la gráfica de la función, evaluando el valor de la abscisa en la función y verificando que los valores coinciden, una vez realizado esto calculamos la derivada de la función $f'(x) = 2x - 2$, por lo tanto la pendiente de la recta tangente en el punto $(1,-1)$ es

$m(1) = f'(1) = 2(1) - 2 = 0$, usamos la ecuación de la recta en su forma punto pendiente,

$y + 1 = 0(x - 1) = 0$ por lo tanto la ecuación de la recta es $y = -1$

Ejemplo 21. Encuentre las coordenadas del segundo punto donde la tangente cruza a la curva $f(x) = x^3$ en el punto $(-1, -1)$.

Solución. Primero, calculemos la ecuación de la recta tangente, con este propósito calculemos la pendiente general en cualquier punto

$f'(x) = 3x^2$, en particular en el punto $(-1, -1)$, la pendiente es $m(-1) = 3(-1)^2 = 3$,

usamos la ecuación punto pendiente para obtener la ecuación de la recta

$$y + 1 = 3(x + 1) \quad \text{o} \quad y = 3x + 2,$$

para encontrar las coordenadas del punto de intersección igualamos las funciones de la curva con la recta y obtenemos

$$x^3 = 3x + 2$$

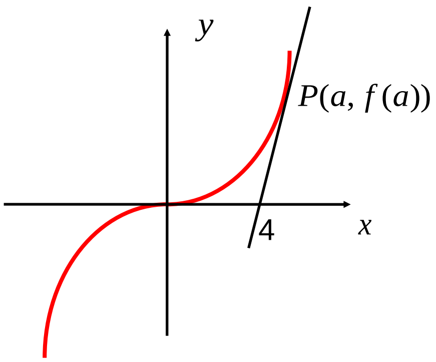
Para encontrar sus raíces, resolvemos la ecuación resultante.

$$x^3 - 3x - 2 = (x - 2)(x^2 + 2x + 1) = (x - 2)(x + 1)^2 = 0,$$

el segundo factor ya lo hemos calculado, así la única solución es $x = 2$, y la ordenada es $y = 2^3 = 8$, por lo que el punto de intersección es $(2, 8)$.

Ejemplo 22. Encuentre el punto P en la gráfica de $f(x) = x^3$ tal que la intersección de la recta tangente en P corte al eje de las abscisas en 4.

Solución. Supongamos que P tiene coordenadas (a, a^3) y que la recta tangente en P es como la que se muestra en la figura



Primero determinemos la pendiente de la recta tangente $m(x)=3x^2$, de esta manera la ecuación de la recta tangente que pasa por los puntos (a,a^3) y $(4,0)$ es

$$a^3-0=3a^2(a-4)$$

simplificando la ecuación, se tiene

$$a^3=3a^3-12a^2 \Rightarrow 2a^3-12a^2=2a^2(a-6)=0$$

Por lo cual $a=0$ o $a=6$.

El punto solicitado es $P(6,216)$.

✓ Cálculo de velocidades.

SI un móvil se desplaza por una recta, hablamos de *movimiento rectilíneo* y se puede usar una recta horizontal (o vertical) con un origen designado como recta de movimiento. El movimiento hacia la derecha se considera en *dirección positiva* y hacia la izquierda *negativa*.

La función s que da la posición (respecto del origen) del móvil como función del tiempo t se llama *función de posición*. Si sobre un cierto lapso de tiempo Δt, el objeto cambia su posición una cantidad

$$\Delta s=s(t+\Delta t)-s(t) \qquad \text{Cambio en distancia}$$

entonces la velocidad promedio en este período es

$$\text{velocidad promedio} = \frac{desplazamiento}{tiempo}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$$

Supongamos ahora que calculamos las velocidades promedio sobre intervalos $[t,t+\Delta t]$ más y más cortos. En otras palabras, hagamos que Δt tienda a 0, de esta manera obtenemos la velocidad instantánea del objeto, como lo hicimos notar en la unidad 2.

Ejemplo 23. Desde lo alto de un edificio de 125 m se deja caer una pelota y está se desplaza verticalmente hacia el suelo. Después de t segundos la pelota habrá caído una distancia de $s(t)=4.9t^2$ metros.

a) ¿Cuánto tiempo le toma a la pelota tocar el suelo?
b) ¿Cuál es la velocidad promedio de la pelota durante el tiempo que cae?
c) ¿Cuál es la velocidad de la pelota exactamente a los 2 segundos?

Solución. (a) Como el edificio mide 125 m, la pelota tocará el suelo en el instante t cuando $s(t)=125$, es decir,

$$4.9t^2=125,$$

resolviendo la ecuación se tiene

$$t=\sqrt{\frac{125}{4.9}}\approx 5.05$$

La pelota tarda aproximadamente 5 segundos para tocar el suelo.
(b) Luego, la

$$\text{velocidad promedio }\approx\ \frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{125}{5}=25\frac{m}{s}$$

Por lo tanto, la velocidad promedio durante el tiempo que cae es aproximadamente a 25 m/seg.

c) Su velocidad instantánea a los dos segundos es:

$$v(2)=s'(2)=9.8(2)=19.6\frac{m}{s}$$

Ejemplo 24. La ecuación del movimiento $s(t)=4t^3+6t+2$ denota el desplazamiento (en metros) de una partícula que se mueve en línea recta. En dicha expresión, t se mide en segundos. Encuentre la velocidad de la partícula en los instantes $t=1$, $t=2$ y $t=3$.

Solución. Sabemos que la velocidad instantánea se encuentra derivando la función, primero derivemos a la función

$$v(t)=s'(t)=12t^2+6$$

Basta ahora con evaluar a la velocidad en los tiempos pedidos.

$$v(1)=12(1)^2+6=18\frac{m}{s},\quad v(2)=12(2)^2+6=54\frac{m}{s}\ \text{ y }\ v(3)=12(3)^2+6=114\frac{m}{s}$$

Ejemplo 25. Una partícula se desplaza a lo largo de una recta horizontal de acuerdo con la ecuación.

$$s(t)=2t^3-4t^2+2t-1$$

Determina en que tiempo la velocidad instantánea es cero.

Solución. La derivada de la función (velocidad) es

$$s'(t)=6t^2-8t+2=2(3t-1)(t-1)$$

La velocidad es cero cuando $t=1$ y $t=\frac{1}{3}$.

EJERCICIOS PROPUESTOS.

1) Sea $h(x)=\frac{x^3}{6}-\frac{1}{2x^2}$ entonces la expresión correcta para $h''(x)$ es:

A) $x-\frac{1}{4}$ B) $2x+\frac{1}{4}$ C) $6x-12x^4$ D) $x-\frac{3}{x^4}$ E) $\frac{x}{6}+\frac{3}{x^4}$

2) El resultado de $\frac{d}{dx}\left(\frac{3x^4}{2}-\frac{2x^3}{3}+8\right)$ es:

A) $12x^3-6x^2+8$ B) $3x^3-2x^2$ C) $6x^3-2x^2$
D) $6x^4-2x^3+8$ E) $6x^3-2x^2+8$

3) El resultado de $\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{x^4}-\frac{2}{x^3}+8x\right)$ es:

A) $\frac{3}{x^3}-\frac{2}{x^2}+8$ B) $\frac{6}{x^4}-\frac{12}{x^5}+8$ C) $\frac{12}{x^3}-\frac{6}{x^2}+8$
D) $\frac{6}{x^4}+\frac{12}{x^5}+8x$ E) $-\frac{12}{x^3}+\frac{6}{x^2}+8$

4) La derivada de la función $f(x)=\frac{2x}{3}-\frac{2}{x}+5\sqrt{x}+\pi$ es:

A) $\frac{2}{3}-\frac{2}{x^2}+5\sqrt{x}$ B) $\frac{2}{3}-\frac{2}{x^2}+\frac{5}{2\sqrt{x}}+\pi$ C) $\frac{2}{3}+\frac{2}{x^2}+\frac{5}{2\sqrt{x}}$
D) $\frac{2}{3}+\frac{2}{x^2}+\frac{5}{2\sqrt{x}}+\pi$ E) $\frac{2}{9}-\frac{2}{x^2}+\frac{5}{2\sqrt{x}}$

5) La derivada de $f(x)=(ax+b)(cx+d)$, en donde a, b, c y d son constantes es:
A) ac B) bd C) $2acx$ D) $2acx+bc$ E) $2acx+bc+ad$

6) Si $y=\sqrt{5x-2x^3}$, entonces su derivada es:

A) $y' = \sqrt{5-6x^2}$ B) $y' = \frac{1}{2\sqrt{5-6x^2}}$ C) $y' = \frac{6x^2}{\sqrt{5x-2x^3}}$

D) $y' = \frac{5-6x^2}{\sqrt{5x-2x^3}}$ E) $y' = \frac{5-6x^2}{2\sqrt{5x-2x^3}}$

7) El resultado de $\frac{d}{dx}\sqrt{6x-5}$ es:

A) $\frac{3}{\sqrt{6x-5}}$ B) $\frac{6}{\sqrt{6x-5}}$ C) $\frac{1}{2\sqrt{6x-5}}$ D) $\frac{3}{2\sqrt{6x-5}}$ E) $18\sqrt{6x-5}$

8) La derivada de la función $y = \sqrt{-5x^3+2x^2-3}$ es:

A) $y' = \sqrt{-15x^2+4x}$

B) $y' = \frac{-15x^2+4x}{2\sqrt{-5x^3+2x^2-3}}$

C) $y' = -15x^2+4x\ \sqrt{-15x^3+2x^2-3}$

D) $y' = -15x^2 + 4x - 3$

E) $y' = \frac{-15x^2+4x+3}{2\sqrt{-5x^3+2x^2-3}}$

9) Al simplificar la derivada de la función $f(x) = \sqrt{6x^2-4x+8}$, se obtiene:

A) $f'(x) = \sqrt{12x-4}$ B) $f'(x) = \frac{2(3x-1)}{\sqrt{6x^2-4x+8}}$ C) $\frac{2(3x-1)}{\sqrt{12x-4}}$

D) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{6x^2-4x+8}}$ E) $f'(x) = \frac{6x-2}{2\sqrt{6x^2-4x+8}}$

10) La derivada de la función $y = 2x^2\sqrt{x+5}$ es:

A) $y' = \frac{10x^2+40x}{2\sqrt{x+5}}$ B) $y' = \frac{4x}{\sqrt{x+5}}$ C) $y' = \frac{5x^2+5}{\sqrt{x+5}}$

D) $y' = \frac{\sqrt{x+5}}{4x}$ E) $y' = 4x\sqrt{x+5}$

11) Si $f(x) = x^2\sqrt{x^2+1}$, entonces su derivada es igual a:

A) $f'(x) = \frac{3x^3+2x}{\sqrt{x^2+1}}$ B) $f'(x) = 2x + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$ C) $f'(x) = 2x - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$

D) $f'(x) = 2x\sqrt{x^2+1} + x^2\sqrt{x^2+1}\,(2x)$ E) $f'(x) = \frac{x^2}{2\sqrt{x^2+1}}$

12) Si $f(x) = 4\sqrt{x}(2x^2-3)$, entonces su derivada es igual a:

A) $f'(x) = 16x\sqrt{x} + \frac{4x^2-6}{\sqrt{x}}$ B) $f'(x) = \frac{2x^2-3}{2\sqrt{x}}$ C) $f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{x}}$

D) $f'(x) = \frac{4x}{2\sqrt{x}} + 16x\sqrt{x}$ E) $f'(x) = (2x^2-3)\sqrt{x} + 4x$

13) Si $f(x)=\sqrt{x-1}(x^2-1)$, entonces $f'(x)$ es igual a:

A) $2x\sqrt{x-1}$ B) $\dfrac{x^2-1}{2\sqrt{x-1}}+2x\sqrt{x-1}$ C) $\dfrac{2x}{\sqrt{x-1}}$

D) $\dfrac{2x}{2\sqrt{x-1}}+\ x^2-1\ \ \sqrt{x-1}$ E) $(x^2-1)\sqrt{x-1}+2x$

14) Si $f(x)=2\sqrt{x^3}\ \ x^4-6$, entonces $f'(x)$ es igual a:

A) $12x^3\sqrt{x^3}$ B) $2x^4\sqrt{x^3}-6\sqrt{x}$ C) $3\sqrt{x}(x^4-6)+8x^3\sqrt{x^3}$

D) $2\sqrt{x^3}(x^4-6)+8x\sqrt{x^3}$ E) $\dfrac{2}{\sqrt{x^3}}(x^4-6)+8x^3\sqrt{x^3}$

15) Si $f(x)=\dfrac{x}{x+5}$, su derivada es igual a:

A) $f'(x)=\dfrac{1}{1}=1$ B) $f'(x)=\dfrac{x(1)-(x+5)(1)}{(x+5)^2}$ C) $f'(x)=1-\dfrac{5}{(x+5)^2}$

D) $f'(x)=\dfrac{5}{(x+5)^2}$ E) $f'(x)=\dfrac{2x+5}{(x+5)^2}$

16) Si $y=\dfrac{x-2}{4-x}$, su derivada es igual a:

A) $y'=\dfrac{-2}{4-x}$ B) $y'=\dfrac{2x-2}{4-x}$ C) $y'=\dfrac{-2x-2}{(4-x)^2}$

D) $y'=\dfrac{2}{(4-x)^2}$ E) $y'=\dfrac{-2}{(4-x)^2}$

17) El resultado de $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{4x-3}{4x+3}\right)$ es:

A) 0 B) 1 C) $\dfrac{24x}{4x+3\ \ ^2}$ D) $\dfrac{24}{4x+3\ \ ^2}$ E) $\dfrac{24}{4x+3}$

18) Si $y=\dfrac{x^2-2x}{x-3}$, su derivada y' es igual a:

A) $\dfrac{x^2-6x+6}{x-3}$ B) $\dfrac{x^2-2x}{(x-3)^2}$ C) $\dfrac{3x^2-10x-6}{(x-3)^2}$ D) $\dfrac{2x-2}{x-3}$ E) $\dfrac{x^2-6x+6}{(x-3)^2}$

19) Si $f(x)=\dfrac{3x^2-5x+2}{2-x}$ entonces

A) $f'(x)=\dfrac{-x}{-1}$ B) $f'(x)=\dfrac{3x^2-2x+8}{(2-x)^2}$ C) $f'(x)=\dfrac{-9x^2+17x-12}{(2-x)^2}$

D) $f'(x)=\dfrac{6x-5}{-1}$ E) $f'(x)=\dfrac{-3x^2+12x-8}{(2-x)^2}$

20) Si $y=\dfrac{5x^2-2x}{x+3}$, entonces:

A) $y'=\dfrac{5x^2+30x-6}{(x+3)^2}$ B) $y'=\dfrac{5x^2+30x-6}{x+3}$ C) $y'=\dfrac{5x^2+26x-6}{(x+3)^2}$

D) $y'=\dfrac{-5x^2-26x+6}{(x+3)^2}$ E) $y'=\dfrac{5x^2+30x-6}{x+3}$

21) Derivando y simplificado la función $y=\dfrac{1-x^3}{1+x^4}$ resulta:

A) $y'=\dfrac{-3}{4x}$ B) $y'=\dfrac{x^4-4x-3}{(1+x^4)^2}\,x^2$ C) $y'=\dfrac{-x^4+4x-3}{(1+x^4)^2}\,x^2$

D) $y'=\dfrac{-7x^4+4x-3}{(1+x^4)^2}\,x^2$ E) $y'=\dfrac{x^6-4x^3-3x^2}{1+x^4}$

22) La derivada de la función $y=\dfrac{\sqrt{x-3}}{2x}$ es:

A) $y'=\dfrac{-x+6}{4x^2\sqrt{x-3}}$ B) $y'=\dfrac{-1}{2\sqrt{-5x^3+2x^2-3}}$ C) $y'=\dfrac{2x^2+8}{\sqrt{2x}}$

D) $y'=\dfrac{-x+7}{\sqrt{(2x)^3}}$ E) $y'=\dfrac{-2x+7}{2(2x)^{3/2}}$

23) La derivada de $y=(x^2-3x)^5$ es:

A) $y'=(2x-3)^5$ B) $y'=(5x^2-15x)^4$ C) $y'=5(2x-3)(x^2-3x)^4$

D) $y'=5(x^2-3x)^4$ E) $y'=(2x-3)(5x^2-15x)^4$

24) El resultado de $\frac{d}{dx}\left(3x^2-1\right)^3$ es:

A) $3x\left(3x^2-1\right)^2$ B) $9x\left(3x^2-1\right)^2$ C) $18x\left(3x^2-1\right)$

D) $3x\left(3x^2+1\right)^2$ E) $18x\left(3x^2-1\right)^2$

25) Derivando y simplificando la función $y=(5x^2-2x+4)^{12}$, resulta:

A) $12(5x^2-2x+4)^{11}$ B) $12(5x^2-2x+4)^{11}(10x)$

C) $12(5x^2-2x+4)^{11}(10x+4)$ D) $(5x^2-2x+4)^{11}(5x-1)$

E) $24(5x-1)(5x^2-2x+4)^{11}$

26) Si $y=\frac{1}{(5-2x^4)^3}$, entonces y' es igual a:

A) $\frac{3}{(5-2x^4)^4}$ B) $\frac{8x^3}{3(5-2x^4)^4}$ C) $\frac{24x^3}{(5-2x^4)^4}$ D) $\frac{1}{3(5-8x^3)^2}$ E) $\frac{24x^3}{(5-2x^4)^3}$

27) Si $y=\frac{1}{(5-2x^4)^5}$, entonces su derivada es igual a:

A) $y'=\frac{-40x^3}{(5-2x^4)^6}$ B) $y'=\frac{5}{(5-8x^3)^4}$ C) $y'=\frac{8x^3}{3(5-2x^4)^4}$ D) $y'=\frac{40x^3}{(5-2x^4)^6}$

E) $y'=\frac{5}{(5-2x^4)^6}$

28) Si $y=\sqrt[3]{\left(2x^3+6x-3\right)^2}$ se tiene entonces que:

A) $y'=\sqrt[3]{\left(6x^2+6\right)^2}$ B) $y'=\frac{4\left(x^2+1\right)}{\sqrt[3]{2x^3+6x-3}}$ C) $y'=\frac{2}{3}\sqrt[3]{2x^3+6x-3}$

D) $y'=2(2x^2+2)\sqrt[3]{2x^3+6x-3}$ E) $y'=\frac{2x^2+2}{3\sqrt[3]{(2x^3+6x-3)^2}}$

29) El resultado de $\frac{d}{dx}\left(3x+1\right)\left(2x-1\right)^8$ es:

A) $24\left(2x-1\right)^7$ B) $\left(3x+8\right)\left(2x-1\right)^7$ C) $\left(45x+31\right)\left(2x-1\right)^7$

D) $\left(54x+13\right)\left(2x-1\right)^7$ E) $48x\left(2x-1\right)^7$

TEMA. PROBLEMAS DE APLICACIÓN

1) La pendiente de la recta tangente a la curva $y=\frac{1}{x^2}$ en el punto $T\left(-2,\frac{1}{4}\right)$ es:

A) $\frac{1}{4}$ B) - $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{8}$ D) - $\frac{1}{8}$ E) 0

2) La pendiente m de la recta tangente a la curva cuya expresión es $f(x)=-5x^3+2x^2$ en $x=2$ es:

A) $m=-32$ B) $m=0$ C) $m=50$ D) $m=-68$ E) $m=-52$

3) La pendiente de la recta tangente a la hipérbola $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ en el punto $T\left(-5,\frac{9}{4}\right)$ es:

A) - $\frac{5}{4}$ B) $\frac{5}{4}$ C) $\frac{9}{4}$ D) 1 E) - $\frac{81}{200}$

4) La ecuación de la recta tangente a $f(x)=5x-x^2$ en el punto $T(3,6)$ es:

A) $y=x+3$ B) $y=9-x$ C) $y=-3x+15$
D) $y=2x$ E) $y=5x-9$

5) La ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)=x^3+3x^2-5x+2,$ en el punto en donde $x=3$ es:

A) $y=40x-79$ B) $y-1=(3x^2+6x-5)(x-3)$ C) $y-1=40(x-3)$

D) $y=79x-40$ E) $y-23=40(x-1)$

6) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la ecuación $y=-4x^5+5x^3$ en el punto de abscisa $x=1$ es:

A) $5x+y-6=0$ B) $x-5y+6=0$ C) $x+5y+6=0$
D) $5x+y+6=0$ E) $-5x+y-6=0$

7) La ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)=x+\frac{4}{x}$ en $T(2,4)$ es:

A) $y=x+4$ B) $y=4$ C) $y=x-2$ D) $x=2$ E) $y=2x+4$

8) La ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)=2x+\frac{1}{x}$ cuando $x=-1$, es:

A) $y=-x+1$ B) $y=x-3$ C) $y=-x-2$ D) $y=x+2$ E) $y=x-2$

9) La ecuación de la recta tangente a la curva cuya expresión es $f(x)=\dfrac{4x-7}{2x^2+5}$ en $x=0$ es:

A) $y+\dfrac{7}{5}x=4$ B) $y-\dfrac{7}{5}=\dfrac{4}{5}x$ C) $y+\dfrac{7}{5}=\dfrac{4}{5}x$ D) $4y-\dfrac{7}{5}=x$ E) $y-\dfrac{7}{5}=-4x$

10) Las abscisas de los puntos de la función $f(x)=x^3-2x^2-2x+5$ cuya pendiente de la recta tangente es 2, son:

A) 2 y – 2/3 B) 0 y 1 C) 6 y – 1 D) 1 y – 3/2 E) 2 y – 3

11) Las abscisas de los puntos de la función $f(x)=x^3+2x^2-3x+7$ cuya pendiente de la recta tangente es –3, son:

A) 3 y –4 B) 0 y 1 C) 2 y – 1 D) 1 y –3/4 E) 0 y – 4/3

13) ¿Cuáles son las abscisas en donde la recta tangente es horizontal a la gráfica de la función dada por $f(x)=x^3+\dfrac{3}{2}x^2-18x+5$?

A) –3 y –4 B) 0 y 1 C) 2 y – 1 D) –3 y 2 E) 0 y –1.

14) Las abscisas de los puntos de la función: $f(x)=\dfrac{2}{3}x^3+x^2-4x$ en los que la recta tangente es horizontal, son:

A) $x=-1$ y $x=2$ B) $x=1$ y $x=-2$ C) $x=-1$ y $x=1$

D) $x=1$ y $x=2$ E) $x=-2$ y $x=2$

Con el problema siguiente, contesta las preguntas 15 y 16.

Se lanza una pelota hacia arriba con una velocidad de 49 m/seg, su altura después de t segundos se expresa como: **s(t) = 49t – 4.9t²**.

15) La velocidad y aceleración de la pelota cuando $t=4$ son:

A) $v=0$ m/s
$a=-9.8$ m/s^2

B) $v=-4.9$ m/s
$a=-9.8$ m/s^2

C) $v=-9.8$ m/s
$a=-9.8$ m/s^2

D) $v=9.8$ m/s
$a=-4.9$ m/s^2

E) $v=9.8$ m/s
$a=-9.8$ m/s^2

16) El momento en que la pelota alcanza su altura máxima, es cuando:

A) $t = 5$ B) $t = 4.9$ C) $t = 2$ D) $t = 10$ E) $t = 9.8$

Con el problema siguiente, contesta las preguntas 17 y 18.

Un globo aerostático sube verticalmente; a las ***t*** horas su distancia ***s*** de la Tierra, ***s*** medida en kilómetros, está dada por la fórmula: ***s(t) = 9t – 3t²***.

17) La velocidad y la aceleración del globo cuando ha transcurrido exactamente una hora son:

A) $v = 3 \ km/h$, $a = -6 \ km/h^2$

B) $v = -6 \ km/h$, $a = -3 \ km/h^2$

C) $v = 3 \ km/h$, $a = 6 \ km/h^2$

D) $v = 6 \ km/h$, $a = -6 \ km/h^2$

E) $v = -3 \ km/h$, $a = 3 \ km/h^2$

18) ¿En qué momento es cero la velocidad del globo?

A) $t = 2$ B) $t = 2.5$ C) $t = \frac{3}{2}$ D) $t = 3$ E) $t = \frac{1}{2}$

Con el problema siguiente, contesta las preguntas 19 y 20.

En un juego de béisbol uno de los jugadores lanza una pelota a otro jugador con una velocidad inicial de 80 m/seg. Si consideramos que la altura a la que se lanza la pelota es cero, la función que describe la trayectoria de la pelota es:

$$s(t) = 80t - 4.9t^2$$

19) La velocidad y la aceleración de la pelota cuando ha transcurrido t segundos son:

A) $v = 80 + 9.8t$, $a = 80 m/seg^2$

B) $v = 80 - 9.8t$, $a = 9.8 m/seg^2$

C) $v = 9.8 m/seg$, $a = -9.8 m/seg^2$

D) $v = 80t - 9.8t$, $a = -9.8 m/seg^2$

E) $v = 80 - 9.8t$, $a = -9.8 m/seg^2$

20) ¿A partir de qué momento la pelota empieza a bajar?

A) $t = 6.347$ B) $t = 2.523$ C) $t = 8.163$ D) $t = 3.127$ E) $t = -2.421$

21) La altura de una pelota está dada por la función $h(t)=20t-5t^2+8$ m. La máxima altura que alcanza la pelota es:

A) 15 m B) 8 m C) 28 m D) 68 m E) 105 m

22) En el problema anterior, la velocidad de la pelota al tiempo $t=2$ seg es:
A) 15 m/s B) 8 m/s C) 10 m/s D) 20 m/s E) 0 m/s

Con el problema siguiente, contesta las preguntas 23 y 24.
La expresión algebraica de un objeto que sube verticalmente es de $s(t)=20+120t-5t^2$ metros.

23) La velocidad instantánea en el tiempo $t=2$ es:

A) 100 m/s B) 120 m/s C) 95 m/s D) 110 m/s E) 90 m/s

24) La altura máxima que alcanza el objeto es:

A) 1000 m/s B) 950 m/s C) 830 m/s D) 740 m/s E) 590 m/s

Con el problema siguiente, contesta las preguntas 25 y 26.
Se lanza una pelota hacia arriba, su altura después de t segundos se expresa como:

$$\boldsymbol{s(t) = 49t - 4.9t^2}.$$

25) La velocidad y aceleración de la pelota exactamente a los dos segundos de vuelo son:

A) $v=0$ m/s $a=-9.8$ m/s^2
B) $v=-4.9$ m/s $a=-9.8$ m/s^2
C) $v=29.4$ m/s $a=-9.8$ m/s^2
D) $v=-29.4$ m/s $a=-4.9$ m/s^2
E) $v=9.8$ m/s $a=-4.9$ m/s^2

26) El momento en que la pelota alcanza su altura máxima, es cuando:

A) $t=4.9$ B) $t=9.8$ C) $t=2$ D) $t=5$ E) $t=10$

27) Desde lo alto de un edificio (125 m) se deja caer una piedra y ésta se desplaza verticalmente hacia el suelo. Después de t seg la piedra habrá caído una distancia de $5t^2$ m. ¿A qué velocidad se mueve la piedra cuando choca con el suelo?

A) 0 m/seg B) 10 m/seg C) 50 m/seg D) 20 m/seg E) 40 m/seg