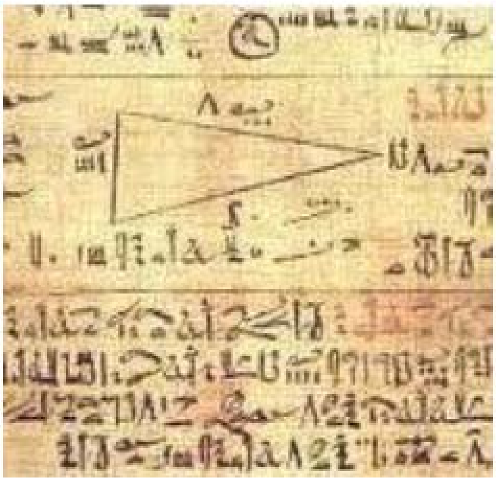
Matemáticas III	Elementos de Trigonometría
Unidad I	

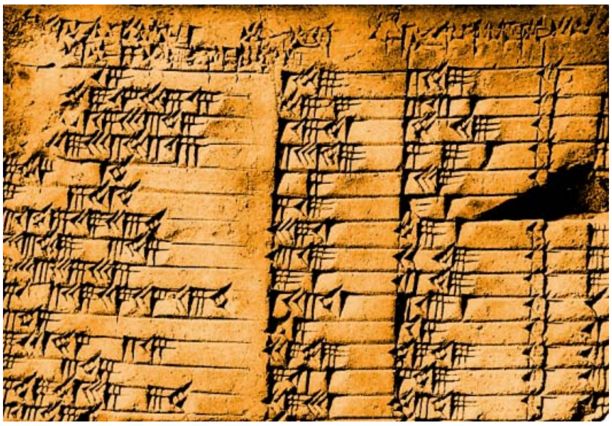
Esta actividad muestra una breve introducción a la trigonometría, se recomienda que los alumnos lo lean antes de iniciar la unidad para que vean las diferentes dificultades que se fueron superando hasta llegar a la forma como se trabaja hoy día en el nivel medio superior.

EGIPTO 2000-1800 a.C.



En el problema 56 del Papiro de Rhind o de Ahmes (en la figura se observa un detalle de este papiro) se encuentran por primera vez rudimentos de trigonometría y de teoría de triángulos semejantes. Del problema de mantener la pendiente de cada cara constante durante la construcción de una pirámide, surge lo que podríamos considerar como la primera razón trigonométrica. Los egipcios tenían en cuenta el cociente entre "el avance" y "la subida" para medir la pendiente, es decir, lo hacían por medio del cociente entre la variación horizontal y la vertical (la actual cotangente) a la que llamaban "seqt"

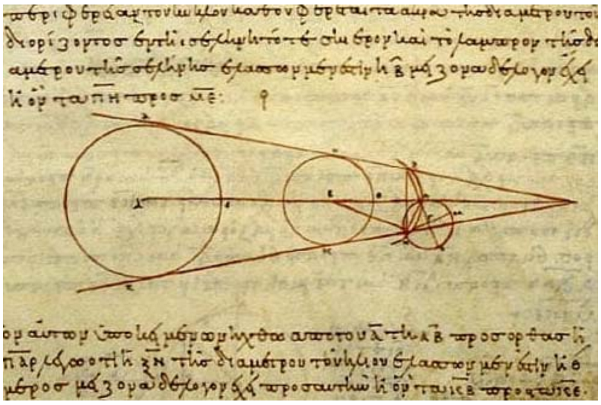
BABILONIA 1900-1600 a. C.



En la tablilla 322 de la colección Plimpton, conservada en la Universidad de Columbia, aparece otro "germen" de la trigonometría. Esta tablilla muestra una tabla con una serie de ternas pitagóricas formadas por números enteros (idearon un método para obtenerlas) y aparece también en la tabla la razón entre hipotenusa y cateto mayor (la actual secante) en una secuencia de grado en grado de 31º a 45º, Además los babilonios establecieron los grados, minutos y segundos para obtener la magnitud de los ángulos.

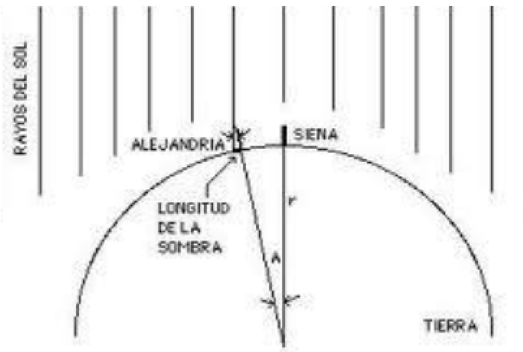
Aunque los resultados de los babilonios y los egipcios eran más bien prácticos, para resolver problemas de la vida diaria.

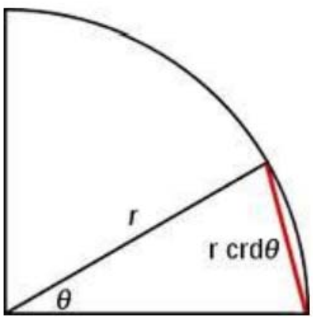
Grecia.



Aristarco logró descubrir que los **planetas** se encontraban orbitando alrededor del **Sol** y no de la Tierra como se pensó por muchísimos años. escribió un tratado (en torno al 260 a.C.) titulado Sobre los tamaños y distancias del Sol y la Luna en el que, por medio de la semejanza de triángulos logro hacer estimaciones sobre el **tamaño** de la **Tierra**, el tamaño de la **luna** y la **distancia** que hay hasta ella, y con respecto al tamaño y la distancia del sol, Descubrió también que las **estrellas** eran cuerpos similares al sol que se encontraban a distancias enormes. Dejó como legado el **modelo heliocéntrico**, que nos explica que el sol es el centro del universo y no la tierra.

Eratóstenes de Cirene. (276 a.C. -194 a.C.), que, en su tratado, Sobre la medida de la tierra, aproxima el tamaño de ésta utilizando una medición del ángulo entre dos ciudades, Assuan y Syena, situadas en el mismo meridiano, obteniendo el resultado de un cincuentavo de círculo completo, para después multiplicar por 50 la distancia entre estas dos ciudades y obtener así una aproximación bastante buena de la longitud de la circunferencia de la tierra, de unos 250.000 estadios, o lo que es lo mismo, unos 46.000 Km. En este trabajo se aprecia cómo se empiezan a relacionar ángulos (en la circunferencia) y distancias (longitud del arco).



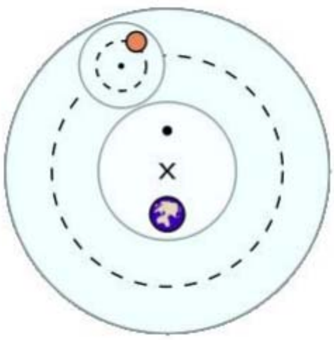


Hiparco de Nicea, considerado el padre de la trigonometría porque elabora la primera tabla trigonométrica de la que se tiene constancia. Hiparco de Nicea (ca. 180-ca. 125 a.C.) se ocupó de elaborar una tabla en la que aparecieran valores de arcos y sus cuerdas correspondientes, así como la razón entre éstos, para una serie completa de ángulos. La contribución que se le atribuye a Hiparco es la de organizar y ordenar los datos empíricos obtenidos por los babilonios. No sabemos con precisión cuando comenzó a usarse una división del círculo completo en 360º, pero parece ser que este hecho se debe principalmente a Hiparco.

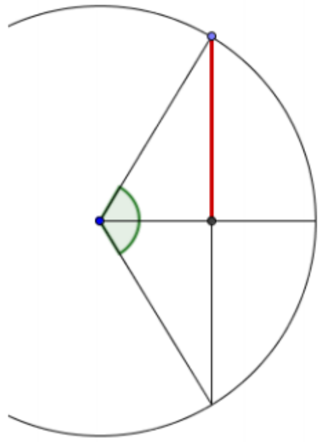
$$\frac{\operatorname{sen} ACF}{\operatorname{sen} FCB} \cdot \frac{\operatorname{sen} BAD}{\operatorname{sen} DAC} \cdot \frac{\operatorname{sen} CBE}{\operatorname{sen} EBA} = 1 .$$

Menelao de Alejandría. Nace en el 70 d. C. y muere en el 140 d. C. Su nombre ha quedado ligado al teorema de Geometría plana o esférica relativo a un triángulo cortado por una recta o un gran círculo, de los muchos libros de Menelao sólo ha sobrevivido Sphaerica. Se trata de triángulos esféricos y su aplicación a la astronomía. Él fue el primero en escribir la definición de un triángulo esférico que recoge la definición en el comienzo del libro I.

Ptolomeo. En su obra Sintaxis matemática (que fue llamada por los árabes Almagesto), escrita durante el segundo siglo de nuestra era, de la cual se conservan copias, Ptolomeo realiza un tratado astronómico, en el que calcula tablas de cuerdas, usadas para "leer" la posición de los astros. En este tratado Ptolomeo presenta un importante resultado, del cual se deducen como casos particulares fórmulas para el cálculo de cuerdas para la suma y diferencia de arcos, y de éstas las del arco doble y mitad. Con estas herramientas, Ptolomeo tuvo más fácil la elaboración de tablas de cuerdas con mayor exactitud, e incluyó en su Almagesto una para ángulos desde medio grado hasta 180º, de medio en medio grado.



LA TRIGONOMETRÍA HINDÚ.



Los Siddhãntas son unas obras escritas, que aparecieron hacia finales del siglo IV, que recogen conocimientos sobre astronomía. En ellos se puede observar una gran influencia de las teorías astronómicas griegas, La trigonometría de Ptolomeo se basaba en la relación entre las cuerdas y los correspondientes arcos o ángulos centrales que ellas subtienden, pero los hindúes estudiaron la razón entre la mitad de la cuerda (semicuerda) y la mitad del arco, y esta razón fue el antecesor de nuestro actual seno.

LA TRIGONOMETRÍA ÁRABE.

Un par de siglos después de Aryabatha, aparecen las primeras referencias sobre trigonometría en Arabia. Estas referencias en principio adoptaban el modelo de cuerdas griego, pero finalmente se decantaron por el modelo hindú, basando así su teoría sobre la función seno, y fue a través de los árabes como llegó a Europa la trigonometría del seno. Una de las obras destacables es la de Al-Battani (ca. 850-929), conocido en Europa como Albategnius, que en su libro Sobre el movimiento de las estrellas aplica la trigonometría directamente al triángulo rectángulo, obteniendo una fórmula que en la actualidad se leería como $b = a\frac{sen(90°-A)}{sen(A)}$ donde a y b son los catetos de un triángulo rectángulo y A el ángulo opuesto al lado a.

LA EUROPA MEDIEVAL.

El libro de Ibn Muʿādh al-Jayyānī del siglo XI, *El libro de los arcos desconocidos de una esfera* introdujo la ley general de los senos. La ley plana de los senos fue descrita más tarde en el siglo XIII por Nasīr al-Dīn al-Tūsī. En su *Sobre la figura del sector*, declaró la ley de los senos para triángulos planos y esféricos, y proporcionó las pruebas de esta ley.

Según Glen Van Brummelen, «La ley de los senos está en realidad basada en Regiomontanus, en sus soluciones de triángulos rectángulos en el Libro IV, y estas soluciones fueron a su vez las bases de sus soluciones de los triángulos generales.» Regiomontanus fue un matemático alemán del siglo XV.

Durante el siglo XII los europeos latinos superaron la barrera lingüística que les separaba de la cultura árabe, e incluso de la cultura griega. Comenzaron a hacerse en esta época una oleada de traducciones del árabe, hebreo y griego al latín.

De una de estas traducciones, hecha por Gerardo de Chester sobre el 1150, surge el término seno.

Europa no alcanzó un alto nivel en el campo de la trigonometría hasta que Regiomontano (1436-1476) escribió su obra De triangulis hacia el 1464 En el primer

libro de este tratado, encontramos una exposición de los conceptos fundamentales sobre magnitudes y razones, inspirada por Euclides, y a continuación vienen más de 50 proposiciones que tratan de la resolución de triángulos basándose en las propiedades de los triángulos rectángulos.

En esta época también contribuyó al desarrollo de la trigonometría Nicholas Copernicus o Copérnico (1473-1543) que fue un astrónomo que revolucionó la concepción del mundo, si bien es cierto que su obra estaba directamente influenciada por la obra de Regiomontano.

Se sabe que en 1539 Copérnico recibió como estudiante al joven matemático prusiano Georg Joachim Rheticus (1514-1576) que había estado en contacto con la matemática que se hacía en Nuremberg, por lo tanto con la trigonometría de Regiomontano, pero Rheticus fue más lejos, aunando las ideas de estos dos maestros escribió el tratado más completo que se había escrito hasta el momento sobre trigonometría, bajo una obra en dos volúmenes titulada Opus palatinum de triangulis.

PRELUDIO A LA MATEMÁTICA MODERNA.

François Viète (1540-1603), o en su forma latinizada Franciscus Vieta. La trigonometría de Viète se caracteriza por su enfoque analítico general. Realizó un trabajó similar al de Rheticus, realizando también tablas para las seis razones trigonométricas, en su obra Canon mathematicus (1579).

en 1635, Gilles Persone de Roberval realizo un bosquejo de la mitad de un arco de la curva “seno”, hecho con el que se descubre un nuevo aspecto de la trigonometría, encaminada ahora hacia un enfoque funcional, que culminará con Euler.

Pocos años más tarde, la trigonometría tomó un nuevo rumbo dado por los hermanos Jacques Bernoulli (1654-1705) y Jean Bernoulli (1667-1748), que redescubrieron los desarrollos de sen $n\theta$, cos $n\theta$, en función de sen θ y cos θ dados anteriormente por Viète y los generalizaron a valores racionales de n.

Un trabajo fundamental en este nuevo aspecto analítico de la trigonometría fue el de Roger Cotes (1682-1716). Cotes tuvo una muerte prematura y sólo se publicaron algunos trabajos incompletos, a título póstumo, en 1722 con el nombre de Harmonia mensurarum. En esta obra se reconocía el carácter periódico de las funciones trigonométricas, y aparecieron por primera vez impresas las representaciones de las funciones tangente y secante.

De Moivre siguió utilizando la trigonometría para experimentar con números complejos que resolvieran ecuaciones polinómicas o facilitaran descomponer polinomios sin raíces reales en factores cuadráticos, como ya hiciera Cotes.

En lo que respecta a la trigonometría, para Euler el seno de un ángulo era indistintamente un segmento, sino simplemente un número, la ordenada de un punto de la circunferencia unidad, o el número definido por una serie infinita. Euler convirtió la trigonometría en una potente herramienta del análisis.

Como último apunte de la aportación que Euler hizo a la trigonometría, cabe decir también que la notación que actualmente se utiliza para las funciones trigonométricas, sin, cos, tan, cot, sec, cosec se debe también a su obra Introductio en la cual utilizaba estas abreviaturas.

Documento Auxiliar Uno.

1. Triángulos rectángulos.

Un triángulo rectángulo, es un triángulo que tiene un ángulo ___________________

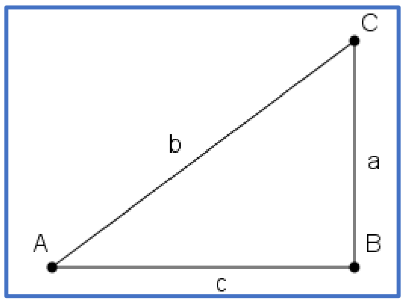
Los lados que forman el ángulo recto en un triángulo rectángulo son los _________

Y el tercer lado es la _____________.

De acuerdo con la siguiente figura de un triángulo rectángulo, enuncia el teorema de Pitágoras.

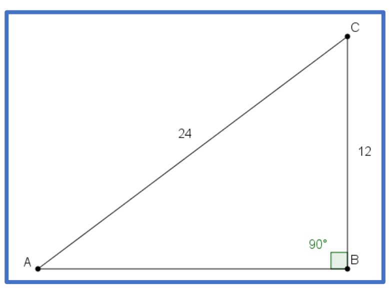
____

____

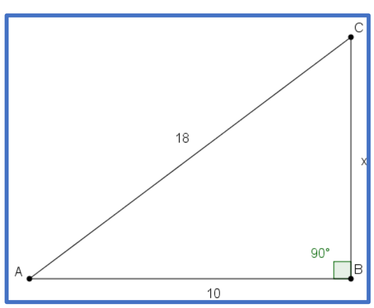


De acuerdo con la figura anterior, escribe cuáles son los ángulos complementarios.
____

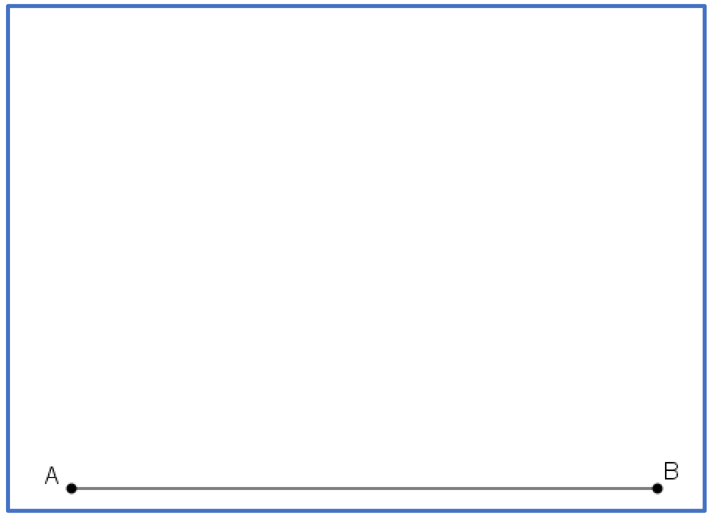
Encuentra el valor de x, considerando la siguiente figura.



Encuentra el valor de x, considerando la siguiente figura.

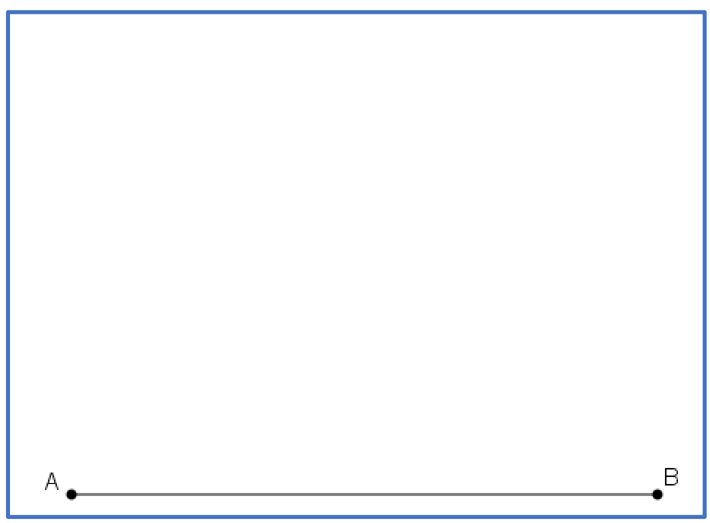


Tomando como base el segmento AB, traza un ángulo de 45º.



Tomando como base el segmento AB, traza un ángulo de 30º.

Traza una perpendicular al segmento AB, en el punto B.

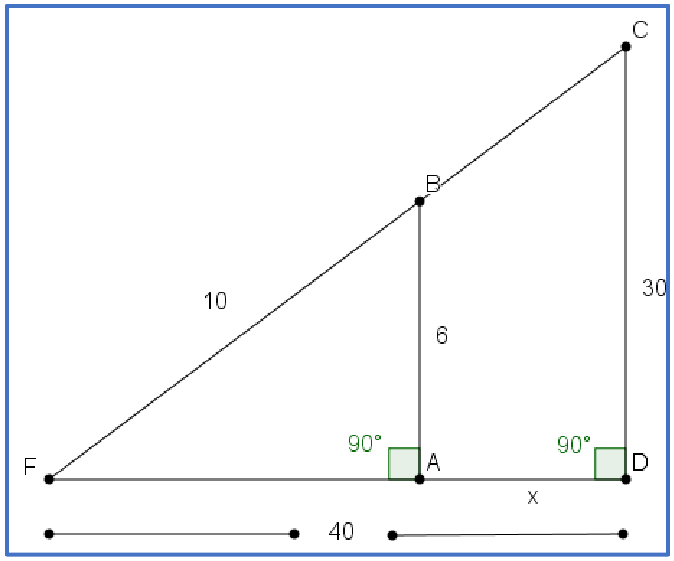


Escribe una condición para que dos triángulos sean semejantes.

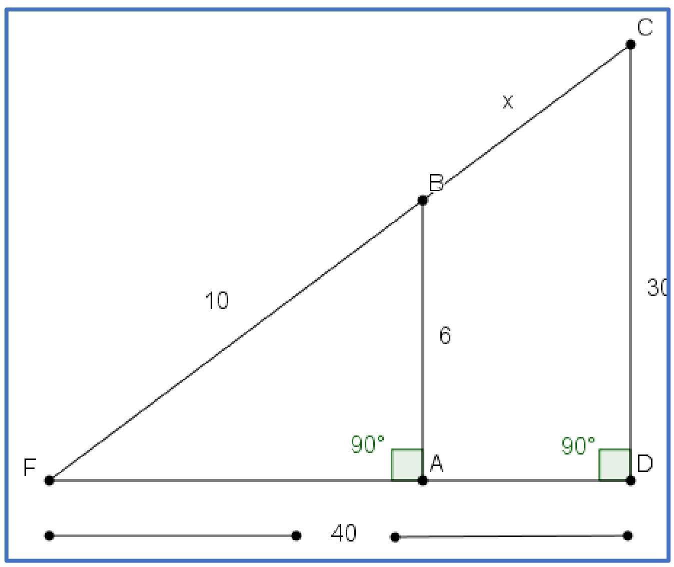
____

____

Encuentra el valor de x en la siguiente figura, sí AB ∥ CD.



Encuentra el valor de x en la siguiente figura, sí AB ∥ CD.



Encuentra el valor de x, en las siguientes proporciones.

$\frac{3}{4} = \frac{8}{x}$ x = ________

$\frac{9}{10} = \frac{12}{x-1}$ x = _______

Ejercicios.

Teorema de Pitágoras.

a. Si uno de los catetos mide 5 centímetros, y la hipotenusa mide 10 centímetros, ¿Qué longitud tiene el otro cateto?
b. Si el área de un cuadrado es de 81 centímetros cuadrados, ¿qué longitud tiene la diagonal del cuadrado?
c. Si el área de un rectángulo es de 300 centímetros cuadrados, y el perímetro es igual a 70 centímetros, ¿cuál es la longitud de la diagonal?
d. Traza el cuadrado del ejercicio b.
e. Traza el rectángulo del ejercicio c.

Semejanza.

f. Los catetos de un triángulo rectángulo miden 2**x** y **x** + 5, y la hipotenusa del triángulo mide 10 metros, los catetos de otro triángulo rectángulo miden 30 y 40 metros, y la hipotenusa mide **q** metros, si el cateto que mide 2x metros es el correspondiente al que mide 30 metros.
    i. Encuentra los valores de **x** y **q**.
    ii. Traza los dos triángulos.
g. Encuentra el valor de la incógnita en cada una de las siguientes desigualdades.
    I. $\frac{2x-3}{18} = \frac{12}{144}$
    II. $\frac{x-3}{10} = \frac{120}{6}$
    III. $\frac{40}{x} = \frac{5}{60}$
    IV. $\frac{x}{14} = \frac{10}{x-4}$

Matemáticas III	Elementos de Trigonometría
Unidad I	

Secuencia 1, Razones Trigonométricas.

Aprendizajes: El alumno.

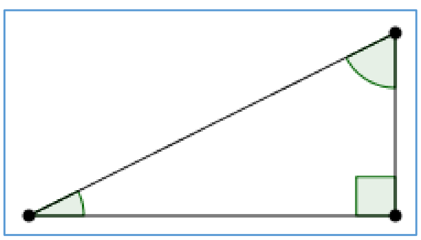
Comprende que el concepto de razón trigonométrica se deriva de las razones entre los lados de un triángulo rectángulo dos a dos.

APRENDIZAJES DE CONTENIDO CURRICULAR	
Conceptuales:	• Comprende la definición de las razones trigonométricas.
Procedimentales:	• Construye un triángulo rectángulo y recuerda la definición de las razones trigonométricas.
Actitudinales:	• Valora el procedimiento geométrico para obtener los valores de las razones trigonométricas por medio de triángulos rectángulos semejantes. • Valora el uso de la calculadora para obtener los valores de las razones trigonométricas para un ángulo agudo dado.

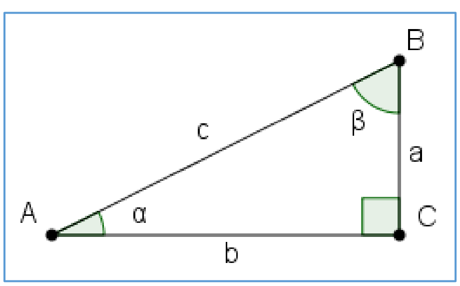
Inicio:

Actividad 1. Realiza las siguientes operaciones paso a paso.

1. Dibuja un triángulo rectángulo.



2. Asigna a los ángulos agudos los nombres de α y β.
3. Nombre el vértice que corresponde al ángulo α con la letra A y al cateto opuesto a dicho ángulo con la letra a.
4. Nombre el vértice que corresponde al ángulo β con la letra B y al cateto opuesto a dicho ángulo con la letra b.
5. El vértice que corresponde al ángulo recto nómbralo con la letra C, y a la hipotenusa con la letra c.

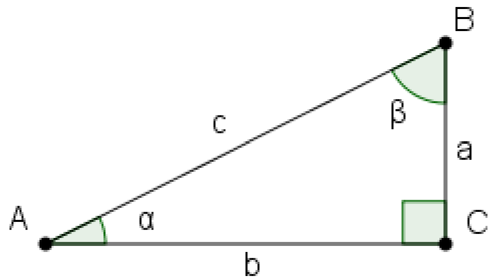


6. El cateto opuesto al ángulo α es __________
7. El cateto adyacente al ángulo α es ________
8. La hipotenusa es ______________________
9. Cómo la suma de las magnitudes de α y β es de ______ los ángulos se llaman __________________.

Al terminar se deben formar equipos de 2 o 3 alumnos para revisar sus resultados, en caso de duda deben preguntarle a su profesor.

Desarrollo.

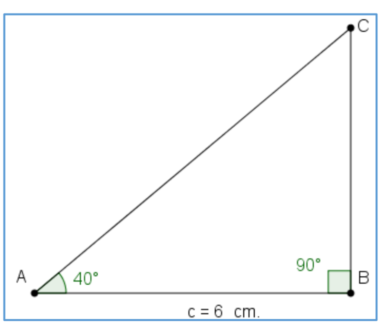
10. De acuerdo con la siguiente figura, escribe las definiciones correspondientes.



Sen α = ———	Cos α = ———	Tan α = ———
Cotan α = ———	Sec α = ———	Cotan α = ———

11. Traza un segmento $\overline{AB}$ de 6 centímetros de longitud.
12. En el extremo A traza un ángulo de 40º.
13. En el extremo B traza un ángulo de 90º.
14. Prolonga la perpendicular y el lado terminal del ángulo de 40º hasta que se corten en el punto C.

    La figura obtenida debe ser parecida a la siguiente.



15. La magnitud del ángulo <ACB es _______________
16. El cateto $\overline{BC}$ mide _________________
17. La hipotenusa $\overline{AC}$ mide ____________
18. Calcula hasta centésimos las siguientes razones trigonométricas considerando las magnitudes que obtuviste.

Sen 40º = ———	Cos 40º = ———	Tan 40º = ———

Cotan 40º = ———	Sec 40º = ———	Cotan 40º = ———

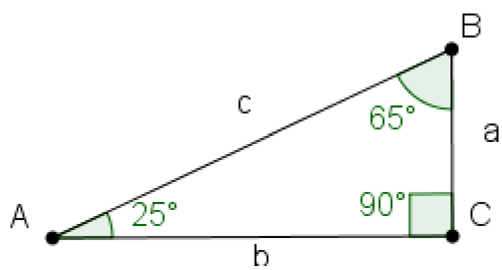
19. Utilizando la calculadora obtén el seno, coseno y tangente de 40º y compara los valores que obtuviste con los de la calculadora.

Sen 40º = ———	Cos 40º = ———	Tan 40º = ———

20. ¿Son iguales o diferentes? ___________________
21. En caso de ser diferentes, escribe la magnitud de las diferencias.

Sen 40º - Sen 40º = ___ Manual calculadora	Cos 40º - Sen 40º = ___ Manual calculadora	Tan 40º - Tan 40º = ___ Manual calculadora

22. ¿Se pueden obtener las razones trigonométricas cotangente, secante y cosecante, con la calculadora? _________________
23. Traza un triángulo rectángulo cuyos ángulos midan 25º - 65º - 90º.



24. La magnitud del cateto a es = _____________
25. La magnitud del cateto b es = _____________
26. La magnitud de la hipotenusa c es = _______
27. Con respecto al $< 25°$ el cateto adyacente es ___________ el cateto opuesto es ____________ y la hipotenusa es _____________.
28. Encuentra el valor de las siguientes razones trigonométricas aproximadas hasta centésimos.

Sen 25º = ———	Cos 25º = ———	Tan 25º = ———

29. Con respecto al $< 25°$ el cateto adyacente es ___________ el cateto opuesto es ____________ y la hipotenusa es _____________.

30. Encuentra el valor de las siguientes razones trigonométricas aproximadas hasta centésimos.

Sen 65º = ———	Cos 65º = ———	Tan 65º = ———

Cierre:

En plenaria con ayuda del profesor se revisan todos los resultados obtenidos en la secuencia, y se resuelven los siguientes ejercicios.

31. Si sen(α) = 0.6, ¿se pueden encontrar las demás razones trigonométricas?

Busquen dos números a y c, cuyo cociente sea $\frac{a}{c} = 0.6$, a = _____, c = _______.

Por la definición del seno, el número a representa la longitud del cateto _________ y c representa la longitud de la _____________, aplicando el teorema de Pitágoras la longitud del cateto ___________ es = ____________.

Dibuja un triángulo rectángulo cuyos lados tengan las longitudes obtenidas y marca el ángulo α en el lugar correcto, las demás razones trigonométricas son.

Sen α = ——— $= 0.6$	Cos α = ———	Tan α = ———
Cotan α = ———	Sec α = ———	Cotan α = ———

32. Traza un triángulo rectángulo cuyos ángulos midan 30º - 60º - 90º y encuentra el valor de las razones trigonométricas del ángulo de 60º.

Sen 60º = ———	Cos 60º = ———	Tan 60º = ———
Cotan 60º = ———	Sec 60º = ———	Cotan 60º = ———

Matemáticas III	Elementos de Trigonometría
Unidad I	

Razones Trigonométricas.

Aprendizaje: El alumno.

Comprende que el valor de las razones trigonométricas depende únicamente del valor del ángulo.

APRENDIZAJES DE CONTENIDO CURRICULAR	
Conceptuales:	• Comprende que el valor de una razón trigonométrica para un ángulo determinado es el mismo en triángulos rectángulos semejantes.
Procedimentales:	• Obtiene el valor de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente para diferentes ángulos agudos utilizando triángulos rectángulos semejantes. • Comprueba los valores obtenidos utilizando una calculadora científica.
Actitudinales:	• Valora el procedimiento geométrico para obtener los valores de las razones trigonométricas por medio de triángulos rectángulos semejantes. • Valora el uso de la calculadora para obtener los valores de las razones trigonométricas para un ángulo agudo dado.

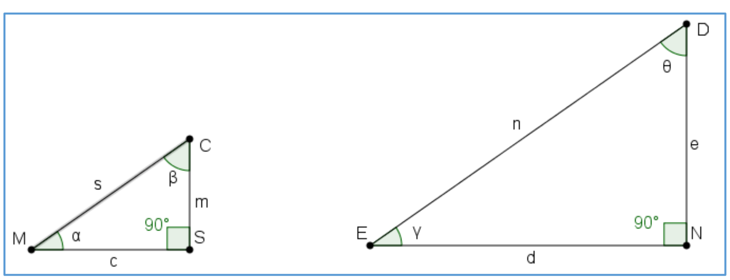
Inicio:

El grupo se divide en equipos de 3 o 4 alumnos.

Cada alumno de manera individual debe contestar cada una de las siguientes preguntas.

1. Dos triángulos son semejantes, sí.
   a) Sus ángulos correspondientes son _______________.
   b) Sus lados correspondientes son _________________.

   Si los siguientes triángulos rectángulos son semejantes.



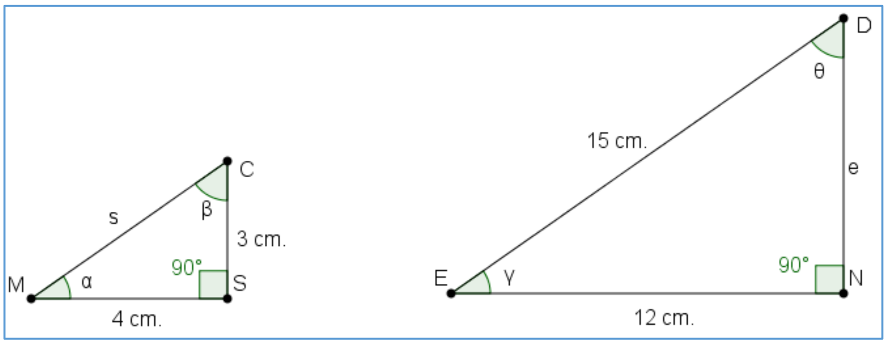
2. Si α es correspondiente con γ, entonces β es correspondiente con ____.
3. Si s es correspondiente con n, entonces m es correspondiente con ____ y c es correspondiente con ____.

Recordando que, si dos triángulos son semejantes, entonces sus lados correspondientes son proporcionales.

4. Por lo tanto.

$$\frac{s}{n} = \frac{m}{} = \frac{}{d}$$

5. Si los siguientes triángulos son semejantes, encuentra los valores pedidos.
6. La longitud de e es = ________.



7. La longitud de s es = ________.

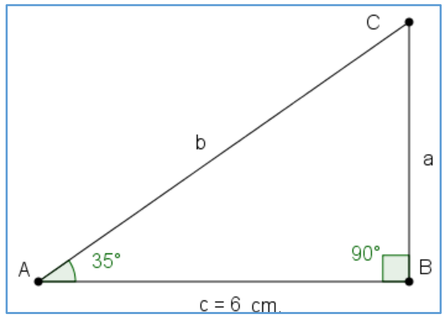
Cada equipo debe revisar los resultados obtenidos hasta el punto 7.

Desarrollo.

En cada equipo se realizan las siguientes operaciones de manera individual

8. Cada alumno selecciona un número entre 6 y 12 para que cada uno trace un segmento de $\overline{AB}$ centímetros de longitud, cada segmento debe ser de diferente longitud.
9. En el extremo A del segmento $\overline{AB}$, traza un ángulo de 35º.
10. En el extremo B traza una semirrecta perpendicular al lado $\overline{AB}$.
11. Si es necesario prolonga la semirrecta y el lado terminal del ángulo para que se corten en el punto C.

La figura que se muestra a continuación es cuando la longitud del cateto $\overline{AB}$ es de 6 centímetros.



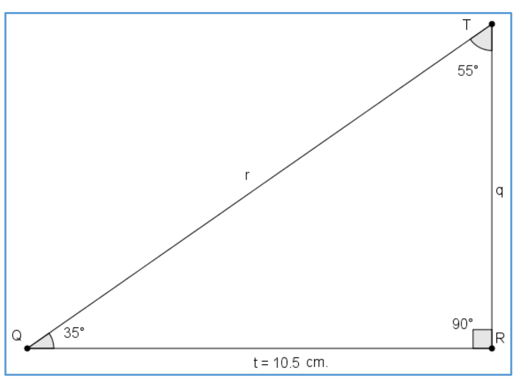
Mide las longitudes hasta centésimos.

12. La longitud del cateto $\overline{BC}$ es de ______ centímetros.
13. La longitud de la hipotenusa $\overline{AC}$ es de ________ centímetros.
14. El seno de 35º es, $sen\ 35° = \frac{cateto\ opuesto}{} = \frac{a}{b} = \frac{}{} =$ ______.
15. El coseno de 35º es, $cos\ 35° = \frac{}{hipotenusa} = \frac{c}{b} = \frac{}{} =$ ______.
16. La tangente de 35º es, $tan\ 35° = \frac{}{cateto\ opuesto} = \frac{a}{c} = \frac{}{} =$ ______.

Las siguientes operaciones las hacen cada uno de los alumnos.

17. Traza un segmento $\overline{QR}$ de longitud de 10.5 centímetros.
18. En el punto Q traza un ángulo de 35º.
19. En el punto R levanta una perpendicular al segmento $\overline{QR}$.
20. Si es necesario prolonga la perpendicular y el lado final del ángulo de 35º hasta que se corten en el punto T.

La figura obtenida debe ser parecida a la siguiente.



21. La longitud del cateto q es ____________.
22. La longitud de la hipotenusa r es _____________.

Calcula las siguientes razones trigonométricas aproximadas hasta centésimos.

23. $sen\ 35° = \frac{q}{r} = \frac{\quad}{\quad} =$ _______.

24. $cos\ 35° = \frac{t}{r} = \frac{10.5}{\quad} =$ _______.

25. $tan\ 35° = \frac{q}{t} = \frac{\quad}{10.5} =$ _______.

26. Escribe los valores obtenidos por cada uno de los alumnos en la siguiente tabla del paso 8 al paso 16, luego escriban en la última columna los valores obtenidos del paso 17 al paso 25 de uno de los alumnos para compararlos.

alumno	1	2	3	4	Valor del 17 al 25
Seno					
Coseno					
Tangente					

Cierre:

27. ¿Son semejantes los triángulos ∆ABC y ∆QRT? ___________.

28. Indica las razones por las que son semejantes _____________________

____

29. Indica cuál es el lado correspondiente al lado $\overline{AB}$ en el triángulo ∆QRT __

____

30. Indica cuál es el lado correspondiente al lado $\overline{BC}$ en el triángulo ∆QRT __

____

31. Indica cuál es el lado correspondiente al lado $\overline{CA}$ en el triángulo ∆QRT __

____

32. Como los triángulos son semejantes sus lados correspondientes son proporcionales y se pueden establecer las siguientes proporciones.

$$\frac{AB}{QR} = \frac{\qquad}{RT} = \frac{AC}{\qquad}$$

33. Si consideramos únicamente $\frac{AB}{QR} = \frac{BC}{RT}$ por la propiedad fundamental de las proporciones, el producto de medios es igual al producto de los extremos.

$$(\overline{AB})(\overline{RT}) = (\overline{BC})(\overline{QR})$$

34. Dividiendo la igualdad por $\overline{AB}$ tenemos.

$$(\overline{RT}) = \frac{(BC)(QR)}{(\overline{AB})}$$

35. Dividiendo la igualdad por $\overline{QR}$ se tiene.

$$\frac{(\overline{RT})}{(QR)} = \frac{(BC)}{(\overline{AB})}$$

36. En el triángulo ∆QRT la razón $\frac{(\overline{RT})}{(QR)}$ corresponde a la ____________ de 35º.

37. En el triángulo ∆ABC la razón $\frac{(\overline{BC})}{(AB)}$ corresponde a la ____________ de 35º.

38. Como los triángulos ∆QRT y ∆ABC son semejantes, la tan(35º) tiene el mismo valor en ambos triángulos, lo que nos indica que el valor de la tan(35º) no depende de las longitudes de los lados de los triángulos, sino únicamente de la magnitud del ángulo.

Razones de 30º, 45º y 60º

Secuencia Didáctica de Exploración y Consolidación:

Aprendizaje: Determina los valores de las razones trigonométricas para los ángulos de 30º, 45º, y 60º y emplea la calculadora para verificarlos.

II. APRENDIZAJES DE CONTENIDO CURRICULAR	
Conceptuales:	• Determina el seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante de 30º. • Determina el seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante de 60º. • Determina el seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante de 45º.
Procedimentales:	• Utiliza la semejanza de triángulos para obtener las razones trigonométricas de 30º, 45º y 60º.
Actitudinales:	• Respeta el trabajo y punto de vista de los compañeros. • Muestra tolerancia. • Participa en el trabajo. • Reflexiona sobre los resultados obtenidos.

Lee con cuidado y realiza las indicaciones de la secuencia, puedes consultar tus apuntes y en caso de alguna duda pregunta a tu profesor.

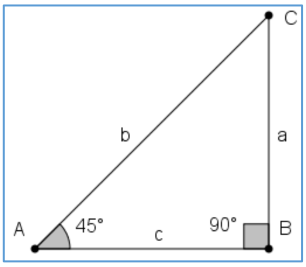
El grupo se divide en equipos de trabajo de 3 o 4 alumnos.

Inicio:

Obtención de las razones trigonométricas para los ángulos de 45º.

1. Cada alumno elige un número entre 4 a 8 cm, y traza el segmento $\overline{AB}$ con la longitud seleccionada, cada número seleccionado debe ser diferente.
2. En el punto **A** traza un ángulo de 45º con $\overline{AB}$ cómo lado inicial.
3. En el punto **B** Traza una perpendicular al segmento $\overline{AB}$.
4. Prolonga los dos segmentos trazados hasta que se corten en el punto C.
5. Nombra con "**a"** el lado opuesto al ángulo A, con "**b"** al lado opuesto al ángulo B y con "**c"** el lado opuesto al ángulo C.

6. Tu figura debe ser parecida a la siguiente ΔABC.

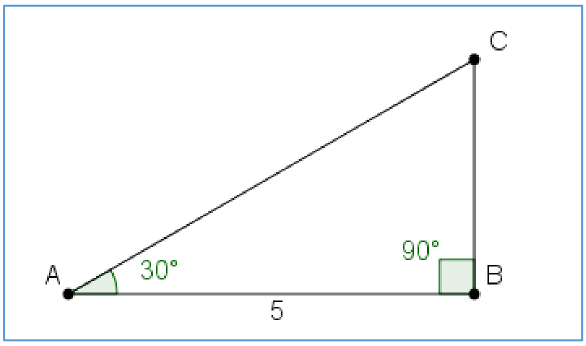


7. La longitud del cateto $\overline{AB}$ es, $\overline{AC}$ = ___________.
8. La longitud del cateto $\overline{BC}$ es, $\overline{BC}$ = ___________.
9. Con el teorema de Pitágoras, determina la longitud de la hipotenusa $\overline{AC}$ = _______.
10. La magnitud del ángulo <C = __________.
11. En el triángulo ΔABC, calcula y escribe el seno de 45º = ___________.
12. En el triángulo ΔABC, calcula y escribe el coseno de 45º = ___________.
13. En el triángulo ΔABC, calcula y escribe la tangente de 45º = ___________.
14. En el triángulo ΔABC, calcula y escribe la cotangente de 45º = ___________.
15. En el triángulo ΔABC, calcula y escribe la secante de 45º = ___________.
16. En el triángulo ΔABC, calcula y escribe la cosecante de 45º = ___________.

Desarrollo:

Para obtener el valor de las razones trigonométricas de los ángulos de 30º y 60º utilizaremos un triángulo equilátero.

17. Traza un segmento $\overline{AB}$ cuya longitud puede ser de 4 hasta 9 centímetros de largo, con incrementos de 1 centímetro.
18. En el extremo A traza un ángulo de 30º.
19. En el extremo B traza un ángulo de 90º.
20. Prolonga los segmentos hasta formar el triángulo, el punto donde se cortan los segmentos desígnalo por C, la figura obtenida debe ser parecida a la siguiente.



La magnitud del ángulo <C es, ____

21. La longitud del cateto $\overline{CB}$ es, _______
22. La longitud de la hipotenusa $\overline{AC}$ es, _______________
23. Con respecto al ángulo <A el cateto adyacente es, __________ y el cateto opuesto es, ____________.

24. De acuerdo con las longitudes de los lados del triángulo que trazaste.

Sen (30º) = ________.

Cos (30º) = ________.

Tan (30º) = ________.

Cotan (30º) = ______.

Sec (30º) = _______.

Csc (30º) = _______.

25. De acuerdo a las longitudes de los lados del triángulo que trazaste.

    Sen (60º) = ________.

    Cos (60º) = ________.

    Tan (60º) = ________.

    Cotan (60º) = ______.

    Sec (60º) = _______.

    Csc (60º) = _______.

Compara tus resultados con uno de tus compañeros, y hagan una tabla en sus cuadernos indicando cuáles son iguales y cuales son diferentes.

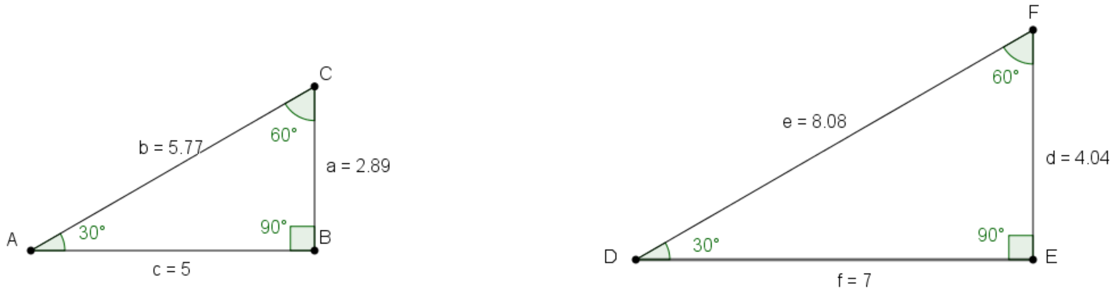
Cuando sean diferentes agreguen una columna más en la que anoten la diferencia.

Cierre:

En plenaria y con ayuda del profesor se revisan los procedimientos y respuestas obtenidas, y las siguientes preguntas se responden de manera grupal de manera que el profesor pueda resolver las dudas que se presenten.

A continuación, veremos la explicación del por qué los valores obtenidos son iguales, o muy aproximados.

26. La siguiente figura muestra dos de los triángulos que pudieron ser trazados en el punto anterior, con sus medidas aproximadas. Observa que los nombres de los vértices del segundo triángulo fueron cambiados.



Escribe el concepto de semejanza de triángulos. ___________________________

____

27. Escribe la razón por la cual los triángulos ∆ABC y ∆DEF son semejantes. _____
____

28. Como sabes si dos triángulos son semejantes, sus lados correspondientes son proporcionales, así que indica los lados proporcionales de los siguientes lados en el triángulo ∆ABC en el triángulo ∆DEF.

$\overline{AB} \leftarrow - - - \rightarrow$ __________

$\overline{CB} \leftarrow - - - \rightarrow$ __________

$\overline{AC} \leftarrow - - - \rightarrow$ __________

Entonces podemos establecer las siguientes proporciones.

$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{} = \frac{}{\overline{DF}}$

Tomando la primera parte de las proporciones.

$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$, de donde $(\overline{AB})(\overline{EF}) = (\overline{BC})(\overline{DE})$, y finalmente, $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$.

29. En el triángulo ∆ABC, la razón $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto}$ es la razón trigonométrica que corresponde a. ____

30. En el triángulo ∆DEF, la razón $\frac{\overline{DE}}{\overline{EF}} = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto}$ es la razón trigonométrica que corresponde a. ____

31. Como observas, cotangente (A) = cotangente (D). que nos indica que el valor de la cotangente del ángulo de 30º no depende de las longitudes de los lados del triángulo, únicamente depende de la magnitud del ángulo.

32. Si ahora consideramos la segunda parte de la razón $\frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$, prueba que se cumple la siguiente proporción, $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{DF}}$, donde en el triángulo ∆ABC la razón $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ corresponde al seno(30º) y en el triángulo ∆DEF la razón $\frac{\overline{EF}}{\overline{DF}}$ corresponde a ____
____.

33. Utilizando los triángulos semejantes mostrados, ahora muestra que el seno y el coseno para el ángulo de 60º son iguales al ser calculados en los dos triángulos.

34. Cada alumno hace una tabla con los valores de las razones trigonométricas para los ángulos de 30, 45º y 60, luego compara los valores obtenidos con los que se obtienen al usar una calculadora.

razón	Manual	calculadora	Diferencia Manual - calculadora
Seno			

Coseno			
Tangente			
Cotangente			
Secante			
cosecante			

35. Se comparan los resultados de todo el grupo, y se hacen las conclusiones.
36. El profesor muestra una hoja de trabajo de GeoGebra para obtener las razones trigonométricas en diferentes triángulos que sean semejantes.

Tarea complementaria de la práctica.

Investiga la forma de obtener las razones trigonométricas de 45º, usando un cuadrado cuyos lados miden 10 cm.

Investiga la forma de obtener las razones trigonométricas de 30º y 60º utilizando un triángulo equilátero cuyos lados midan 10 cm, cada lado.

Compara tus resultados con los que se obtuvieron en la práctica para los ángulos de 30º, 45º y 60º, en una tabla escribe los que se obtuvieron en la práctica, los que se obtienen en esta actividad y los que nos da una calculadora, indicando si son iguales o muy aproximados.

Solución de triángulos rectángulos (introducción)

Secuencia Didáctica de Exploración:

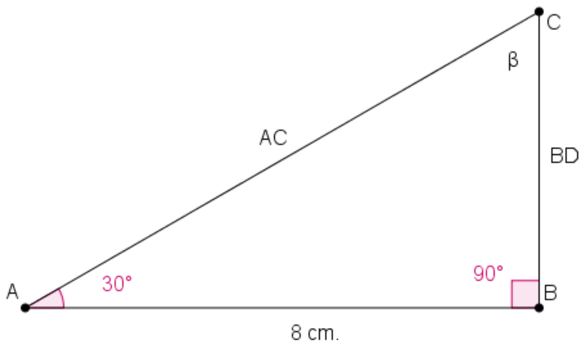
Aprendizaje: Resuelve problemas que involucran triángulos rectángulos.

II. APRENDIZAJES DE CONTENIDO CURRICULAR	
Conceptuales:	• Comprende las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.
Procedimentales:	• Resuelve triángulos rectángulos utilizando las razones trigonométricas.
Actitudinales:	• Respeta el trabajo y punto de vista de los compañeros. • Muestra tolerancia. • Participa en el trabajo. • Reflexiona sobre los resultados obtenidos.

Inicio:

Lee y analiza los siguientes problemas debido a que después tienes que resolver problemas parecidos

1. Encontrar los elementos que faltan en el siguiente triángulo rectángulo.



1.a. Para encontrar el ángulo β, recordamos que la suma de los ángulos agudos de todo triángulo es de 90º.

30º + β = 90º.
Despejando β, se tiene.
β = 90º - 30º = 60º. β = 60º.

1.b. Para encontrar la longitud del segmento AC, tenemos que utilizar una razón trigonométrica en la que intervengan dos datos conocidos y el segmento AC. En este caso la razón coseno.

$cos(30°) = \frac{8}{AC}$, despejando AC, $ACcos(30°) = 8$, $AC = \frac{8}{\cos(30°)}$.

Sustituyendo en el despeje cos (30°) = 0.866, tenemos, $AC = \frac{8}{0.866}$.

Haciendo las operaciones indicadas, AC = 9.237 cm.

La longitud del segmento AC = 9.237 cm.

1.c. Para encontrar la longitud del segmento BD, utilizamos la razón trigonométrica tangente.

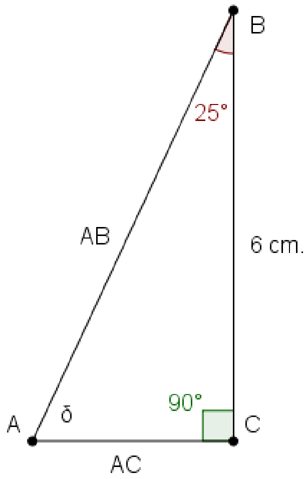
$\tan(30°) = \frac{BD}{8}$, de donde, $BD = 8\tan(30°)$.

Como $\tan(30°) = 0.557$ sustituyendo este valor en el despeje.

Haciendo las operaciones indicadas, BD = 8 (0.557) = 4.616.

La longitud del segmento BD es de, BD = 4.616 cm.

2. Encontrar los elementos que faltan en el siguiente triángulo rectángulo.



2.a. Para encontrar la longitud del cateto AC, usamos la razón trigonométrica tangente.

$\tan(25°) = \frac{AC}{6}$, de donde $AC = 6\tan(25°)$.

Sustituyendo tan (25°) = 0.466 en el despeje, se tiene que $AC = 6\ (0.466)$

Realizando la operación se tiene AC = 6(0.466) = 2.796.

La longitud del segmento AC = 2.796 cm.

2.b. Para encontrar la longitud de la hipotenusa AB usamos la razón trigonométrica coseno.

$\cos(25°) = \frac{6}{AB}$, despejando AB tenemos $AB = \frac{6}{\cos(25°)}$.

Como cos(25°) = 0.906, Sustituyendo el valor en el despeje.

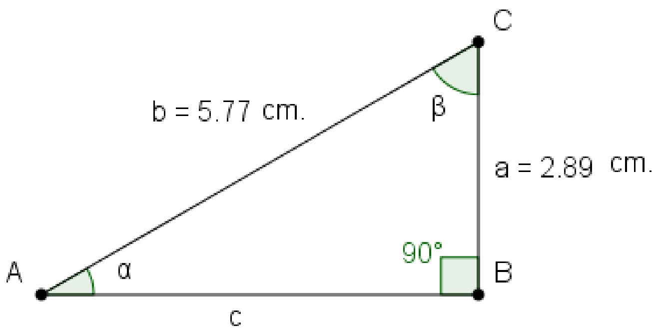
Haciendo la operación $AB = \frac{6}{0.906}$.

La longitud del segmento AB = 6.622 cm.

2.c. El valor del ángulo δ, se obtiene de, 25° + δ = 90°.

De donde δ = 65°.

3. Encontrar los elementos que faltan en el siguiente triángulo rectángulo.



3.a. Para encontrar la longitud del cateto c, podemos emplear el teorema de Pitágoras, $c^2 + a^2 = b^2$.

Con b = 5.77 y a = 2.89.

Sustituyendo estos valores en la ecuación, $c^2 + (2.89)^2 = (5.77)^2$.

Despejando c^2 tenemos, $c^2 = (5.77)^2 - (2.89)^2$.

Haciendo las operaciones indicadas, $c^2 = 33.292 – 8.352$.

De donde $c^2 = 24.94$, haciendo la raíz cuadrada, c = 4.993 centímetros.

Para encontrar el ángulo α, utilizamos la razón trigonométrica tangente.

Tan(α) = $\frac{2.89}{4.993} = 0.578$

Como vamos a usar la calculadora, primero presionamos la tecla SHIFT.

Después la tecla tan, y en la pantalla aparece, $\tan^{-1}($

Ahora escribimos el valor de 0.578 y cerramos el paréntesis, $\tan^{-1}(0.578)$

Al presionar la tecla =, la pantalla muestra, 30.027

Para ver el ángulo en grados se presiona la tecla °’ ’ ’.

La pantalla nos muestra que el ángulo α mide 30º 1'.

El ángulo β se encuentra utilizando que la suma de los ángulos agudos de todo triángulo rectángulo es 90º.

α + β = 90º

Como α = 30º 1', sustituyendo en la ecuación tenemos, 30º 1' + β = 90º

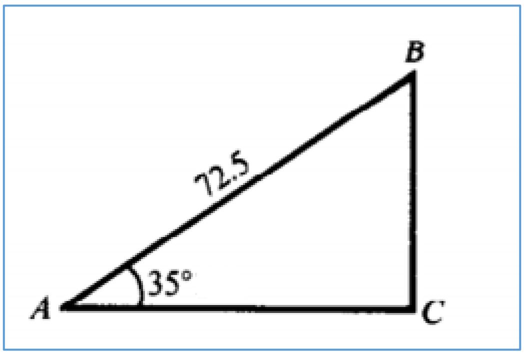
De donde β = 90º - 30º 1', y el valor de β es, β = 59º 59'.

Desarrollo:

Ahora cada alumno resuelve los siguientes problemas utilizando lo aprendido en los problemas anteriores.

Encuentra los elementos que faltan en cada uno de los siguientes triángulos rectángulos.

4.



Para determinar la longitud del cateto $\overline{BC}$, Utiliza la razón trigonométrica cos (35º).

cos (35º) = $\frac{\quad}{72.5}$.

El valor de cos (35º) = _______.

Sustituyendo el valor en la igualdad se tiene, __________ = $\frac{\quad}{72.5}$, y despejando $\overline{BC}$ = __________________, de manera que el valor de $\overline{BC}$ = _____________.

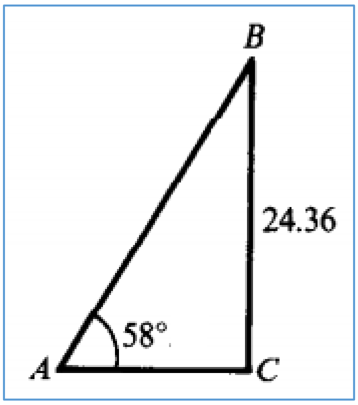
El valor del ángulo <CBA = ________.

Para determinar la longitud del cateto $\overline{AC}$, Utiliza la razón trigonométrica

cos (35º) = $\frac{\quad}{72.5}$.

Como cos (35º 10') = _____________, sustituyendo el valor en la igualdad se tiene, ___________ = $\frac{\quad}{72.5}$, y despejando $\overline{AC}$ = ______________, de manera que la longitud de $\overline{AC}$ = _____________.

5.



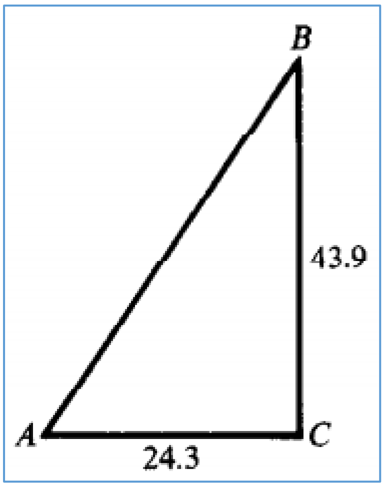
Para determinar la longitud del cateto $\overline{AC}$ usamos la razón trigonométrica tan (58º) = $\frac{24.36}{}$, como el valor de tan (58º) = 1.60, sustituyendo en la ecuación tenemos _________ = $\frac{24.36}{}$, despejando y haciendo la operación indicada la longitud de $\overline{AC}$ = ________.

Para determinar la longitud de la hipotenusa $\overline{AB}$
Se puede utilizar la razón trigonométrica sen (58º) = $\frac{24.36}{}$.

Sustituyendo el valor de sen (58º) = 0.848, en la ecuación, 0.848 = $\frac{24.36}{}$ el valor de la hipotenusa es $\overline{AB}$ = ___________.

La magnitud del ángulo <CBA se encuentra utilizando la siguiente igualdad <CBA + 58º = 90º, así que <CBA = ________

6.



Primero encontramos el ángulo <CAB, utilizando la razón trigonométrica de tan (<CAB) = $\frac{43.9}{24.3}$ = ____.

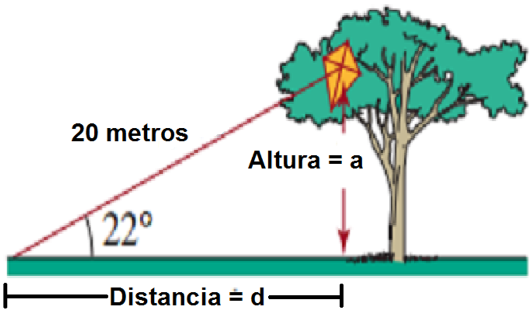
Una vez calculado el valor, usamos la calculadora para encontrar la magnitud del ángulo, para lo cual realizamos el siguiente procedimiento.

- Presionamos la tecla shift
- Presionamos la tecla tan
- En la pantalla aparece, $\tan^{-1}$(
- Ahora escribimos el valor del cociente, cerramos el paréntesis y presionamos la tecla =.
- Para ver el valor del ángulo en grados presionamos la tecla °' ' '.

La magnitud del <CAB es = _______.

Utilizando el teorema de Pitágoras la longitud de la hipotenusa $\overline{AB}$ = ________.

7. Un papalote queda atorado en las ramas superiores de un árbol. Si el cordón de 20 metros forma un ángulo de 22º con el suelo, la altura aproximada del árbol, calculando la altura del papalote sobre el piso es.



Como puedes observar podemos formar un triángulo rectángulo, de manera que.

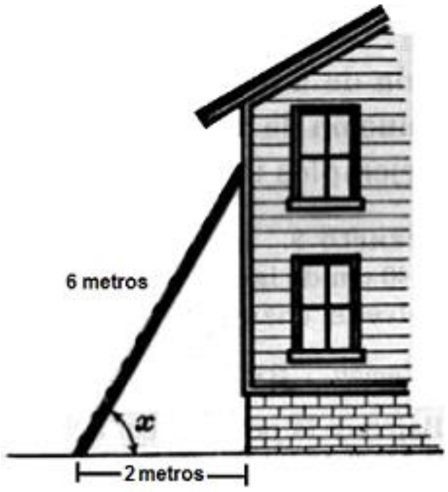
La hipotenusa es = __________

El cateto opuesto es = ________

El cateto adyacente es = ______

Para encontrar la altura del papalote sobre el suelo usamos la identidad trigonométrica ______________, sustituyendo datos en la ecuación, $sen(30°) = \frac{}{20}$, como sen(30º) = _____, al sustituir este valor y despejar _____, y después de hacer la operación indicada el valor de la altura es a = _______.

8. Una escalera de 6 metros esta recargada sobre una casa, si la base de la escalera esta a 2 metros de la casa, ¿el ángulo x que forma la escalera con el piso es?



La razón trigonométrica que usaremos es.

_________ $= \frac{2}{6} =$ ____, para encontrar el ángulo realiza el siguiente procedimiento.

- Presiona la tecla Shift
- Presiona la tecla ______
- Escribe el valor del cociente ________
- El valor en la pantalla es ___________
- Al presionar la tecla °' '' el valor del ángulo en grados es _______

Cierre:

En plenaria con ayuda del profesor se revisan los resultados y se aclaran las dudas.

Matemáticas III	Elementos de Trigonometría
Unidad I	

Solución de triángulos rectángulos (parte 1)

Secuencia Didáctica de Exploración:

Aprendizaje: Resuelve problemas que involucran triángulos rectángulos.

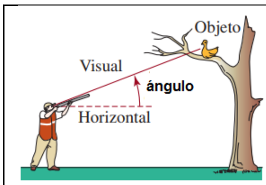
II. APRENDIZAJES DE CONTENIDO CURRICULAR	
Conceptuales:	• Comprende los conceptos de ángulos de elevación y ángulos de depresión.
Procedimentales:	• Resuelve problemas de aplicación con ángulos de elevación y ángulos de depresión.
Actitudinales:	• Respeta el trabajo y punto de vista de los compañeros. • Muestra tolerancia. • Participa en el trabajo. • Reflexiona sobre los resultados obtenidos.

Inicio:

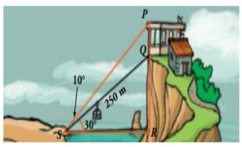
Después de leer lo siguiente contesta las siguientes preguntas.

Al resolver algunos problemas de aplicación algunas veces hay que considerar alguno de los siguientes ángulos, el que se forma de la línea visual del observador que es horizontal hacia arriba localizando el objeto o punto de referencia, a dicho ángulo le llamamos ángulo de elevación, el otro ángulo que consideramos es el que se forma de la línea visual hacia abajo para localizar el objeto o punto de referencia, a este ángulo lo designamos como ángulo de depresión.

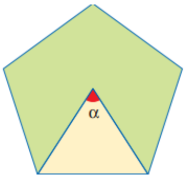
1. ¿Qué ilustración muestra un ángulo de elevación?



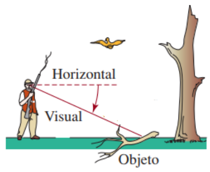
a.



b.

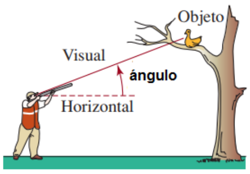
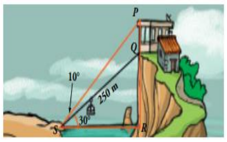
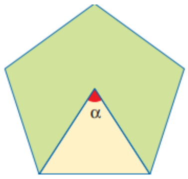
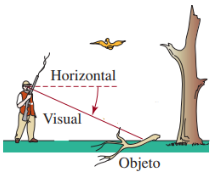


c.

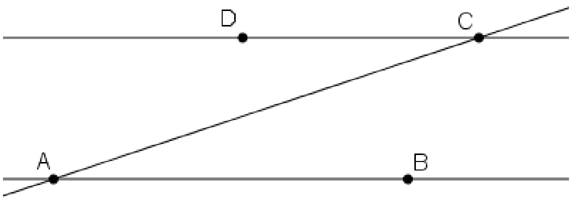


d.

2. ¿qué ilustración muestra en ángulo de depresión?

 a.	 b.	 c.	 d.

3. En la siguiente figura tenemos dos rectas cortadas por una transversal, marca los ángulos alterno – internos.



Respuesta: ________________

____

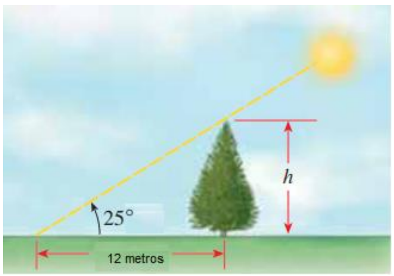
4. En la figura anterior, los ángulos alternos – interno que marcaste son.

a. Iguales	b. complementarios	c. suplementarios	d. diferentes

Ahora lee con cuidado cada uno de los siguientes problemas y completa las respuestas, aquí aplicaremos los conceptos de ángulos de elevación y ángulos de depresión.

Desarrollo.

5. Una secoya proyecta una sombra de 12 metros de largo. Encuentre la altura del árbol si el ángulo de elevación del Sol es 25°



En la figura que representa el problema, con respecto al ángulo de 25°, el cateto adyacente es ______________

El cateto opuesto es _________________

¿qué ángulo forma el segmento que va de donde termina la sombra de la secoya hasta la punta de esta con respecto al piso? ___________________

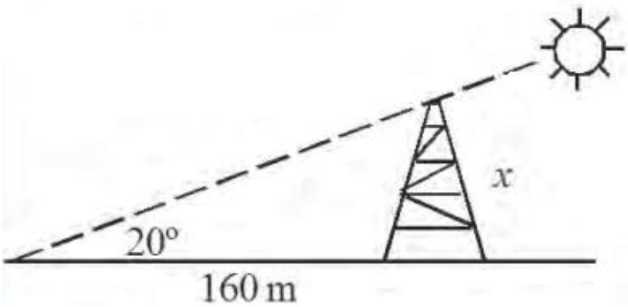
¿cuál de los catetos es la incógnita? ______________

¿Qué razón trigonométrica se usa para resolver este problema? ______________________________, escribe la razón trigonométrica que indicaste para resolver el problema. ________________________________

Despeja la incógnita de la igualdad que escribiste. ____________________

Sustituye el valor de la razón trigonométrica en tu despeje, realiza las operaciones indicadas, el valor de la altura del árbol es. _______________

6. Una torre de alta tensión proyecta una sombra de 160 metros de largo, cuando el ángulo de elevación del sol mide 20°. ¿Cuál es la altura de la torre?



En la figura traza el segmento que represente la altura de la torre.

Marca con las letras A, B y C los siguientes puntos, A el final de la sombra, B el pie de la altura de la torre y con C el punto final del segmento que representa la altura de la torre.

¿Qué segmento representa la incógnita del problema? ______________

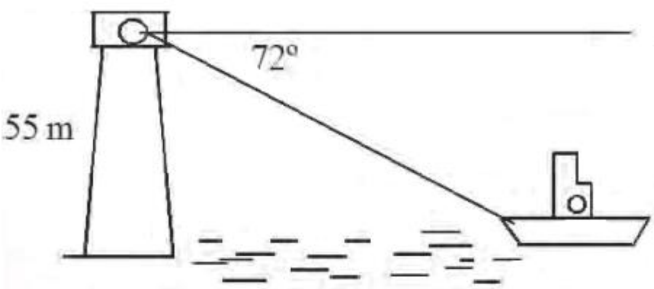
¿Escribe la razón trigonométrica que se utiliza para encontrar la incógnita del problema? _______________________________________

Despeja la incógnita de la razón que escribiste. ____________________

Encuentra el valor de la razón que escribiste y realiza las operaciones indicadas para encontrar el valor de la incógnita. ___________________

La altura de la torre es ____

7. Un faro tiene una altura de 55 metros de altura. El ángulo de depresión desde la cima del faro hasta un barco en el mar es de 72°. ¿Qué tan lejos de la base del faro se encuentra el barco?



Traza en la figura el segmento que representa la distancia del barco a la base de la torre.

Coloca las siguientes letras en los puntos indicados, A al inicio del segmento que representa la distancia de la base del faro al barco, B en donde termina el segmento que representa la distancia entre el barco y la base del barco, el punto C en la cima del faro.

Escribe la magnitud del ángulo <CBA = ___________, escribe el segmento que representa la distancia buscada ____________________

Escribe la razón trigonométrica que se utiliza para encontrar la distancia buscada de acuerdo con los datos ______________________________

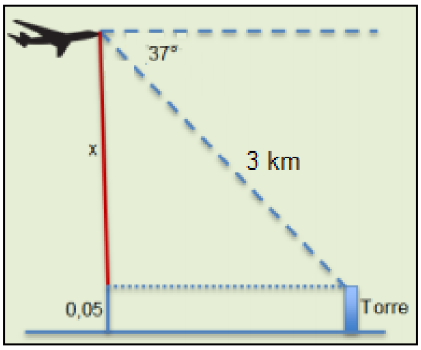
Despeja la incógnita de la igualdad escrita ________________________

Sustituye el valor de la razón trigonométrica en el despeja y realiza las operaciones indicadas, el valor de la incógnita es ___________________

La distancia del faro al barco es _________________________________

8. El piloto de un avión en vuelo observa la torre de control del aeropuerto a 3 km de distancia desde el avión con un ángulo de depresión de 37° . Si la torre de control tiene una altura de 50 m, calcule la altitud aproximada a la que vuela el avión en ese momento.

Se transforman los 50 metros a su equivalente en kilómetros.



50 m = $50\, m \frac{1\, km}{1000\, m} = 0.05\, km$

En el dibujo se muestran los datos del problema, de acuerdo con la misma escribe la razón trigonométrica que se utiliza para encontrar la altura de lo alto de la torre al avión _________, ahora despeja la incógnita ________________

Sustituye el valor de la razón usada en el despeje y realiza las operaciones indicadas, el valor encontrado es _______________________________

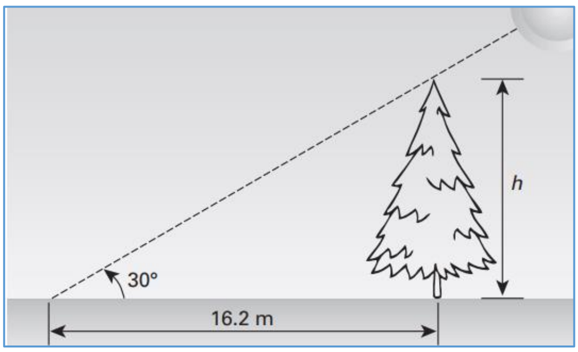
Para encontrar la altura aproximada suma al valor encontrado la altura de la torre y el resultado es ____________________________________

La altura aproximada del avión al suelo es ________________________

Cierre:

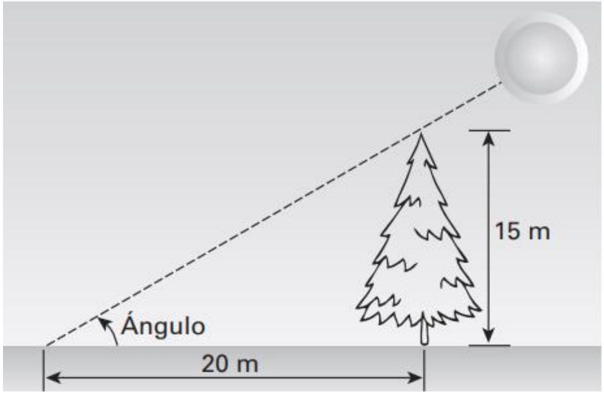
Resuelve los siguientes problemas y al finalizar en plenaria serán revisados todos los resultados y se aclararán las dudas que surjan con ayuda del profesor.

9. Un pino grande proyecta una sombra de 162 metros de largo. Determina la altura del árbol, sí el ángulo de inclinación del sol en ese momento es de 30º.



La altura h del pino es _______

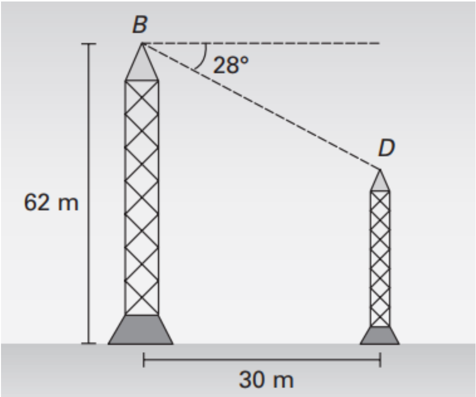
10. Un árbol de 15 metros de altura proyecta una sombra de 20 metros de largo,



¿cuál es el ángulo que forma el sol con el horizonte?

Ángulo = ___________

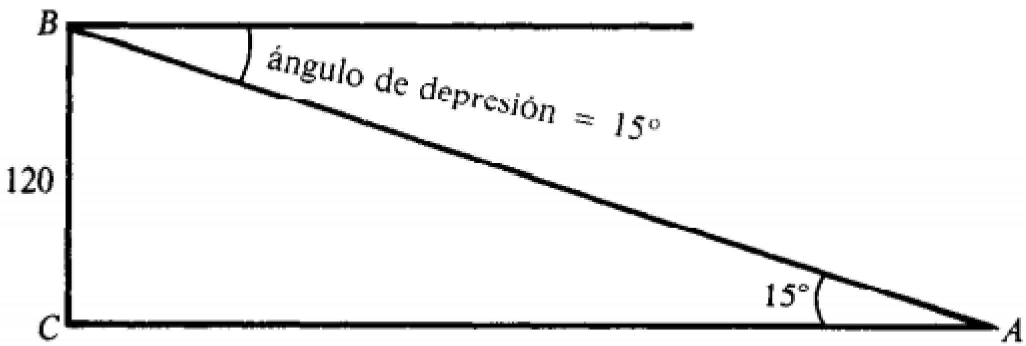
11. Desde la punta B de una torre, el ángulo de depresión a la punta D de otra



torre, que esta a 30 metros de la primera es de 28º. Si la torre más alta mide 62 metros, ¿cuál es la altura de la torre menor?

Altura de la torre menor __________

12. De lo alto de un faro, de 120 metros sobre el nivel del mar, el ángulo de



depresión de un bote es de 15º ¿a que distancia de la base del faro está el bote?

La distancia del bote a la base del faro es __________

Solución de triángulos rectángulos (parte 2)

Secuencia Didáctica de Exploración:

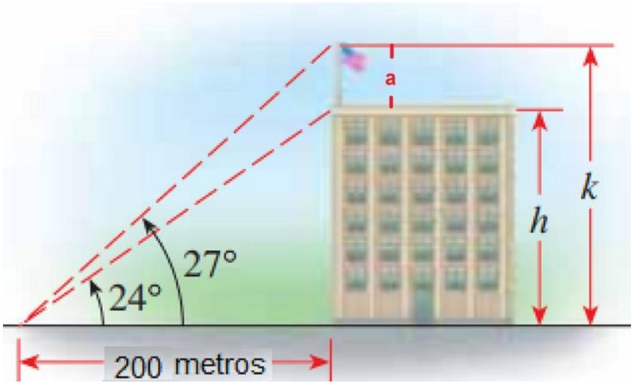
Aprendizaje: Resuelve problemas que involucran triángulos rectángulos.

II. APRENDIZAJES DE CONTENIDO CURRICULAR	
Conceptuales:	• Aplica en la resolución de problemas los conceptos de distancias inaccesibles y cálculo de áreas.
Procedimentales:	• Resuelve problemas de aplicación con ángulos de elevación y ángulos de depresión.
Actitudinales:	• Respeta el trabajo y punto de vista de los compañeros. • Muestra tolerancia. • Participa en el trabajo. • Reflexiona sobre los resultados obtenidos.

Inicio:

El grupo se divide en equipos de 4 o 5 alumnos, cada uno lee y resuelve los siguientes dos problemas, después discuten sus resultados, en caso de dudas deben preguntar a su profesor.

1. Desde un punto en el suelo a 200 metros de la base de un edificio, un observador encuentra que el ángulo de elevación a lo alto del edificio es 24° y que el ángulo de elevación a lo alto de una astabandera que está en el edificio es de 27°. Encuentre la altura del edificio y la longitud de la astabandera.
   La figura muestra los datos y los nombres asignados a la altura del edificio (h) y la altura desde el piso hasta lo alto de la astabandera (k), y la altura del astabandera (a)



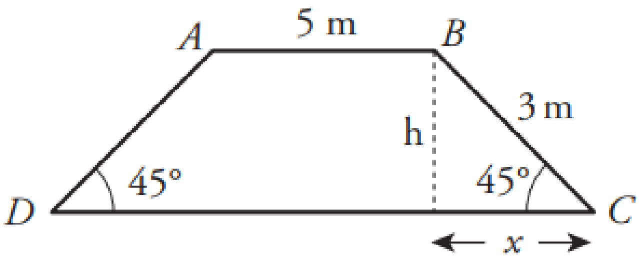
   Asigna la letra A al punto a 200 metros del edificio, la letra B al punto donde empieza el edificio, C al punto donde empieza la astabandera, y el punto D hasta el punto más alto del astabandera.

   Para encontrar la altura del edificio utilizamos el ∆ABC, así que escribe la razón trigonométrica para encontrar el valor de h, ____________________

   Despeja la h de la igualdad anterior ________________________________

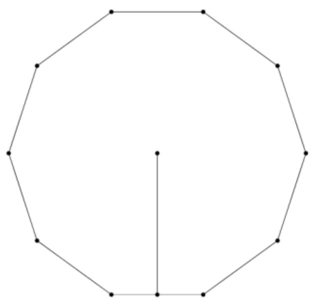
El valor de tan (24º) = ___________
Escribe el valor de la razón trigonométrica en el despeje y realiza las operaciones indicadas, el valor de h es ______________________________
La altura del edificio es ______________________
Usaremos el triángulo ∆ABD para encontrar la altura desde el piso hasta la punta del astabandera, o sea que k = h + ____.
Escribe la razón trigonométrica para encontrar la longitud del segmento BD, que corresponde a (k) ____________________
Despeja la incógnita k de la igualdad escrita _________________________
El valor de tan (27º) = ___________
Sustituye el valor de la razón trigonométrica en la ecuación y realiza las operaciones indicadas, el valor de k es _______________________
La altura de la astabandera es, a = k – h = _______.

2. En un trapecio isósceles de bases *AB* y *DC,* sí la longitud de los lados *es AB* = 5m y *BC* = 3 m, y los ángulos que forma la base mayor con los lados oblicuos, miden 45°. Halla su área.

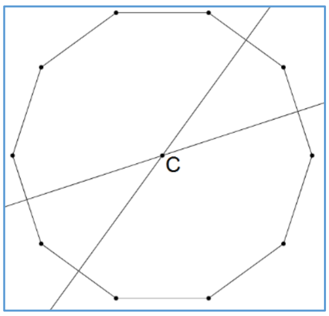


Asigna la letra E al punto donde el segmento h corta la base mayor.
Escribe la razón trigonométrica para encontrar el valor de h en el ∆ECB _____________.
El valor de sen (45º) = _______.
Sustituye el valor del seno en la igualdad, y despeja la incógnita h = ____________________.
Realiza las operaciones indicadas, el valor de h = ____________________, escribe la fórmula para encontrar el área del trapecio __________________, sustituye los valores en la fórmula, realiza las operaciones indicadas.
El valor del área es ________.

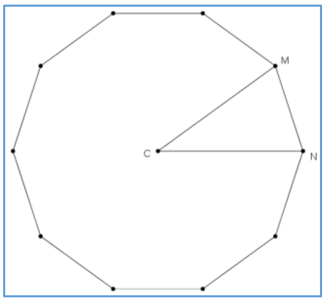
3. Calcular el área y la apotema de un decágono regular si sus lados miden 20 centímetros.



primero se determina el centro del polígono, para lo cual se deben trazar las mediatrices de dos lados del polígono.



El punto donde se cortan las dos mediatrices corresponde al dentro del polígono, y lo designaremos con la letra C.



Una vez determinado el centro, trazamos desde dicho punto los segmentos a los extremos de uno de los lados del polígono, a los cuales designaremos con las letras M y N.

Como los dos lados del triángulo trazados son radios de la circunferencia donde esta inscrito el polígono, el triángulo tiene dos lados iguales es un triángulo ___________________.

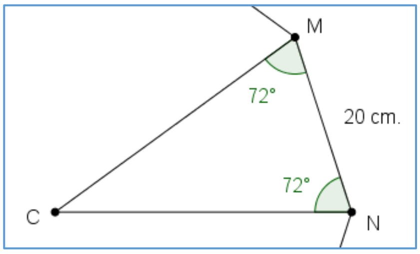
Para determinar la magnitud de los ángulos de la base, primero determinamos la magnitud de cada uno de los ángulos internos del polígono con la fórmula.

S = $(n-2)180°$, con n = 10, sustituyendo en la fórmula, S = $(10-2)180°$

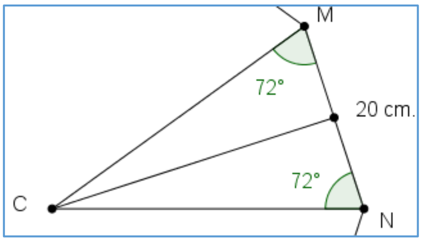
Después de hacer operaciones la suma S = 1440º, dividiendo entre 10 que es el número de ángulos internos tenemos que cada ángulo mide, 144º.

Como cada radio trazado a uno de los vértices, es bisectriz del ángulo correspondiente, cada ángulo formado mide 72º.

Si llevamos esta información al triángulo formado tenemos.



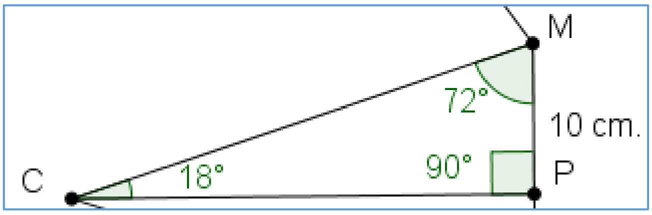
Si trazamos la bisectriz al tercer ángulo tenemos la siguiente figura.



Se tiene que la bisectriz además tiene las siguientes propiedades, debido a que los triángulos formados son congruentes.

Es mediatriz del lado MN, es la mediana del triángulo ∆NCM, es la altura del triángulo ∆NCM con respecto al lado MN.

Así que si nos fijamos en uno de los dos triángulos formados tenemos el siguiente triángulo.



Usando la razón trigonométrica de $tan(72°) = \frac{\overline{CP}}{10}$, como el valor de tan (72º) = 3.077.

Sustituyendo el valor en la ecuación y despejando $\overline{CP}$, tenemos $\overline{CP}$ = 10(3.077) = 30.77.

La longitud la apotema del polígono es de 30.77 cm.

El área del ΔCPM es igual a, A = $\frac{base\ x\ altura}{2}$, base = 10 cm y altura = 30.77 cm.

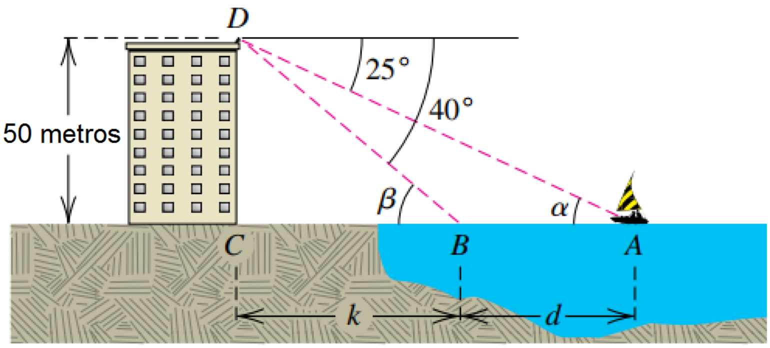
Sustituyendo valores y haciendo las operaciones indicadas se tiene que.

A = $\frac{10\ x\ 30.77}{2} = 153.85$, como el triángulo ΔCMN, esta formado por dos triángulos congruentes, su área es A = 2(153.85) = 307.7 cm^2.

4. Y como el decágono esta formado por 10 triángulos congruentes al ΔCMN, su área es $A_{\Delta CMN}$ = 10(307.7) = 3077 cm^2.

Desarrollo:
Cada alumno debe leer y resolver cada uno de los siguientes problemas.

5. Desde lo alto de una torre situado frente a un océano, una persona ve un barco que navega directamente hacia la torre. Si el observador está a 50 metros sobre el nivel del mar y si el ángulo de depresión del bote cambia de 25° a 40° durante el tiempo que dura la observación, encontrar la distancia que recorre el bote.



Como el nivel del piso es paralelo a la línea que parte del punto D, el ángulo β mide 40º, y el ángulo α mide 25º.

En el ΔBCD, para encontrar la longitud del segmento $\overline{CB}$ usamos la razón trigonométrica.

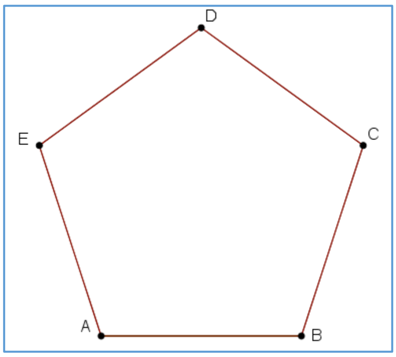
____________________.

Si despejamos $\overline{CB}$ de la razón tenemos, $\overline{CB} = \frac{50}{}$, como tan (45º) = 1, sustituyendo este valor en despeje, el valor de $\overline{CB}$ = ______.

En el ΔACD, la razón trigonométrica para encontrar la longitud del cateto $\overline{AC}$ es ____________, como tan (25º) = 0.466, sustituyendo valores en la razón trigonométrica y despejando AC, su longitud es AC = _______.

Así que la distancia recorrida BA por el barco es = ___________.

6. Calcula el área y la apotema de un pentágono regular de perímetro 100 cm.



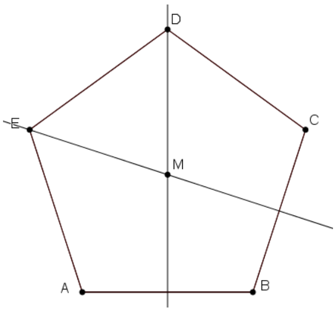
Para localizar el centro de la circunferencia donde esta inscrito el pentágono regular debes trazar dos mediatrices.

Traza la mediatriz al lado AB

Traza la mediatriz al lado BC

Al punto de intersección de las dos mediatrices asígnele la letra M.

La figura que se obtiene es parecida a la siguiente.

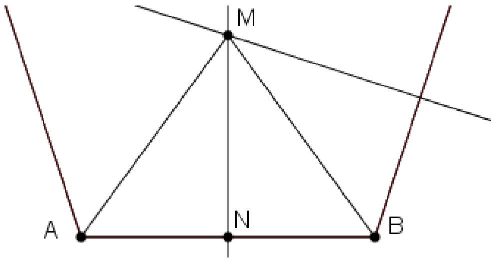


Traza los siguientes segmentos.

$\overline{AM}$

$\overline{BM}$

Designa con la letra N el punto de intersección de la mediatriz al lado AB, con el lado AB, Para tener el siguiente triángulo isósceles.



La magnitud del ángulo<BNM = ________

La longitud del segmento $\overline{NB}$ = _________

La razón trigonométrica para obtener la longitud del segmento $\overline{NM}$, en el ∆NMB es.

Así que la longitud del apotema es ______

El área del triángulo ∆NMB = _____

El área del triángulo ∆ABM = _____

El área del pentágono es = ______

Cierre:

Con ayuda del profesor en plenaria se revisan los procedimientos y resultados.

Identidades trigonométricas.

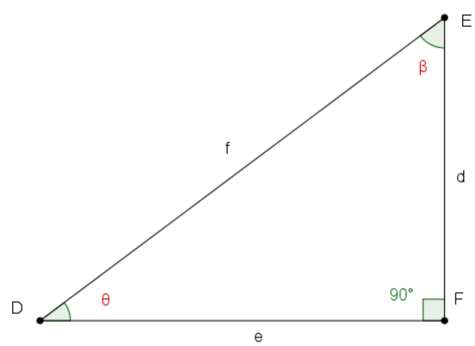
Secuencia Didáctica de Exploración:

Aprendizaje: Comprende la deducción de algunas identidades trigonométricas.

II. APRENDIZAJES DE CONTENIDO CURRICULAR	
Conceptuales:	• Identifica las identidades fundamentales, reciprocas y Pitagóricas.
Procedimentales:	• Aprende el procedimiento para deducir las identidades fundamentales, reciprocas y Pitagóricas.
Actitudinales:	• Respeta el trabajo y punto de vista de los compañeros. • Muestra tolerancia. • Participa en el trabajo. • Reflexiona sobre los resultados obtenidos.

Inicio:

Cada uno de los alumnos responde las preguntas de acuerdo con la figura del siguiente triángulo rectángulo.



Con respecto al ángulo ϴ del triángulo rectángulo, indica el:
Cateto opuesto ______________
Cateto adyacente ____________

Ahora con respecto al ángulo β indica el:
Cateto opuesto ______________
Cateto adyacente ____________
Ahora con respecto al ángulo ϴ, completa las siguientes definiciones.

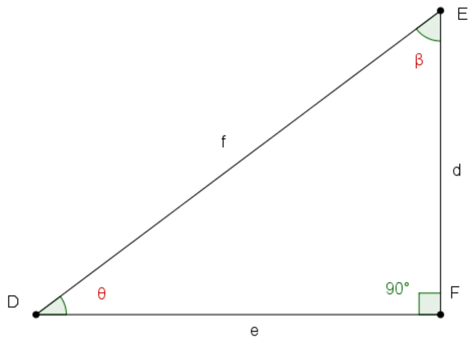
$sen\ \theta = \frac{d}{f}$	$cos\ \theta = \frac{}{}$	$tan\ \theta = \frac{}{}$
$cotan\ \theta = \frac{}{}$	$sec\ \theta = \frac{f}{e}$	$csc\ \theta = \frac{}{}$

Ahora con respecto al ángulo β, completa las siguientes definiciones.

$sen\ \theta = \frac{}{}$	$cos\ \theta = \frac{d}{f}$	$tan\ \theta = \frac{}{}$

$cotan\ \theta = \frac{}{}$	$sec\ \theta = \frac{}{}$	$csc\ \theta = \frac{f}{e}$

Con respecto al siguiente triángulo rectángulo, en cada uno de los ejercicios aplica el Teorema de Pitágoras para encontrar la incógnita indicada.



Escribe el Teorema de Pitágoras con respecto al ∆DFE. ____________________

Si f = 15 cm., d = 12 cm., la longitud del segmento e, _____ __________________.

Si d = 13 cm., y e = 10 cm., la longitud de la hipotenusa f es, __________________.

Si d = 2e, y f = 20 cm., la longitud de los segmentos d y f es, d = ___________, f = _____________

Efectúa en cada caso la división de fracciones indicada.

Si $a = \frac{3}{4}$, y $b = \frac{5}{2}$, el cociente $\frac{a}{b}$ = __________, el cociente $\frac{b}{a}$ = __________

Si $a = \frac{6}{5}$, y $b = \frac{3}{7}$, el cociente $\frac{a}{b}$ = __________, el cociente $\frac{b}{a}$ = __________

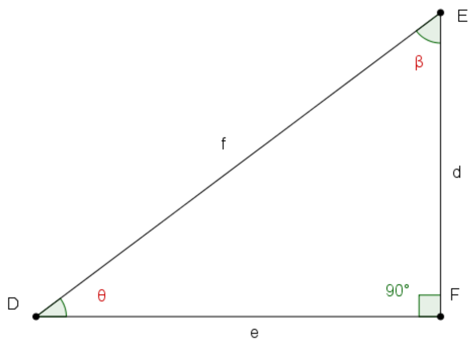
Si $a = \frac{1}{3}$, y $b = \frac{7}{2}$, el cociente $\frac{a}{b}$ = __________, el cociente $\frac{b}{a}$ = __________

Una vez que los alumnos han terminado, se revisan los resultados en el pizarrón con la participación de todos los alumnos y el profesor.

En caso de haber un error, no se corrige la respuesta incorrecta, a un lado se escribe la respuesta correcta.

Desarrollo:

Para obtener las Identidades Trigonométricas fundamentales, cada alumno debe leer con cuidado y seguir las instrucciones dadas.



Con respecto al ángulo ϴ, el seno del ángulo es.

$sen(\theta) = \frac{}{}$.

El coseno del ángulo ϴ es.

$cos(\theta) = \frac{}{}$.

Ahora sustituye la definición de ambas razones en el siguiente cociente.

$\frac{sen(\theta)}{cos(\theta)} = \frac{\frac{}{}}{\frac{}{}}$, ahora realiza la división de fracciones indicada, simplifica el resultado y escribe a continuación el resultado. $\frac{sen(\theta)}{cos(\theta)} = \frac{}{}$, ¿a qué identidad trigonométrica es igual la fracción simplificada?

$\frac{sen(\theta)}{cos(\theta)} =$

Ahora sustituye la la definición de ambas razones en el siguiente cociente.

$\frac{cos(\theta)}{sen(\theta)} = \frac{\frac{-}{-}}{\frac{-}{-}}$, como en el ejemplo anterior realiza la operación indicada y simplifica el resultado, $\frac{cos(\theta)}{sen(\theta)} = -$, ¿a qué identidad trigonométrica es igual la fracción simplificada?

Para obtener las Identidades Trigonométricas reciprocas, cada alumno debe leer con cuidado y seguir las instrucciones dadas. Considerando el triángulo rectángulo ΔDFE, escribe las definiciones de las siguientes razones trigonométricas.

$tan(\theta) = —$	$sec(\theta) = —$
$cot(\theta) = —$	$csc(\theta) = —$

Ahora sustituye las definiciones de las expresiones, en el siguiente producto.
$tan(\theta)\ cot(\theta) = \left(-\right)\left(-\right)$.

Realiza la multiplicación de fracciones indicada, simplifica y escribe a continuación el resultado, $tan(\theta)\ cot(\theta) =$ ___________.

Escribe nuevamente la igualdad que se obtiene.
____.

En la igualdad anterior despeja la razón $tan(\theta)$, y ahora escribe el resultado.
____.

Ahora sustituye las definiciones de las expresiones, en el siguiente producto.
$sen(\theta)\ csc(\theta) = \left(-\right)\left(-\right)$.

Realiza la multiplicación de fracciones indicada, simplifica y escribe a continuación el resultado, $sen(\theta)\ csc(\theta) =$ ___________.

Escribe nuevamente la igualdad que se obtiene.
____.

En la igualdad anterior despeja la razón $sen(\theta)$, y ahora escribe el resultado.
____.

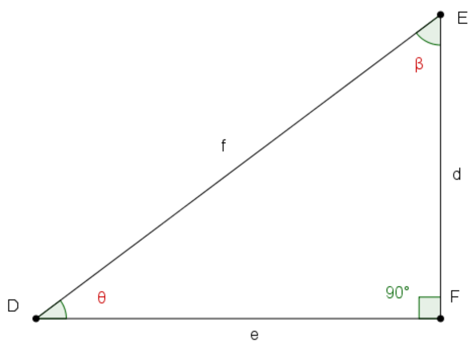
Ahora sustituye las definiciones de las expresiones, en el siguiente producto.
$cos(\theta)\ sec(\theta) = \left(-\right)\left(-\right)$.

Realiza la multiplicación de fracciones indicada, simplifica y escribe a continuación el resultado, $cos(\theta)\ sec(\theta) =$ ___________.

Escribe nuevamente la igualdad que se obtiene.
____.

En la igualdad anterior despeja la razón $cos(\theta)$, y ahora escribe el resultado. ______________________________________.

Para obtener las Identidades Trigonométricas pitagóricas, cada alumno debe leer con cuidado y seguir las instrucciones dadas.
De acuerdo con el ∆DFE.



Sí $sen(\theta) = \frac{d}{f}$, al elevar al cuadrado ambos miembros de la ecuación, tenemos.
$\left(sen(\theta)\right)^2 = \left(\frac{d}{f}\right)^2$, realiza la operación de la derecha y escribe el resultado en la siguiente expresión.
$\left(sen(\theta)\right)^2 = \frac{}{}$.
Sí $cos(\theta) = \frac{e}{f}$, al elevar al cuadrado ambos miembros de la ecuación, tenemos, $\left(cos(\theta)\right)^2 = \left(\frac{e}{f}\right)^2$, realiza la operación de la derecha y escribe el resultado en la siguiente expresión, $\left(cos(\theta)\right)^2 = \frac{}{}$.
Ahora sustituye el valor de cada identidad en la siguiente y realiza la suma de fracciones y simplifica el resultado.
$\left(sen(\theta)\right)^2 + \left(cos(\theta)\right)^2 = \frac{}{} + \frac{}{}$.
Escribe la igualdad obtenida.
____
Nuevamente de acuerdo con el triángulo ∆DFE.
$tan(\theta) = \frac{d}{e}$, así que $\left(tan(\theta)\right)^2 = \left(\frac{d}{e}\right)^2$, realiza la operación indicada y escribe el resultado, $\left(tan(\theta)\right)^2 = \frac{}{}$.

Sí $sec(\theta) = \frac{f}{e}$, al elevar al cuadrado se obtiene, $\left(sec(\theta)\right)^2 = \left(\frac{f}{e}\right)^2$, realiza la multiplicación de fracciones y escribe el resultado.
$(sec(\theta))^2 = \frac{}{}$.
Sustituye el valor de $tan^2(\Theta)$ en la siguiente expresión.
$1 + tan^2(\Theta) = 1 + \frac{}{}$, realiza la suma de fracciones, y escribe el resultado a continuación.
$1 + tan^2(\Theta) = \frac{}{}$, la suma que aparece en el numerador de acuerdo al teorema de Pitágoras en el triángulo ∆DFE, es igual a _____, sustituyendo el valor en la fracción se obtiene.
$1 + tan^2(\Theta) = \frac{}{}$, compara la fracción de la derecha con el valor de $(sec(\theta))^2$
Cómo son las expresiones entre sí __________________________, en caso de ser iguales escribe la expresión que resulta.
____

Cierre:

Cada alumno usando un método parecido para obtener la igualdad, $1 + \tan^2(\Theta) = \sec^2(\Theta)$, probará que $\cot^2(\Theta) = \csc^2(\Theta)$.
Luego en equipos de 3 o 4 alumnos comparan sus resultados, así como los demás resultados del inicio y el desarrollo de la práctica.
Luego con ayuda del profesor corregirán los errores que hayan ocurrido en la práctica.

Triángulos Oblicuángulos.

Secuencia Didáctica de Exploración (introducción):

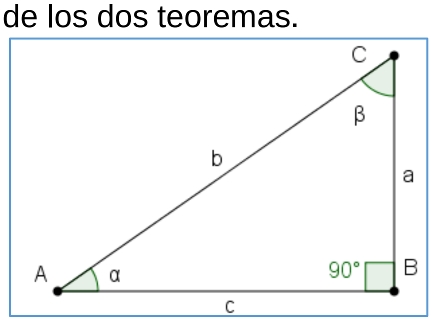
Aprendizaje: Comprende el proceso de deducción de las leyes de senos y cosenos.

II. APRENDIZAJES DE CONTENIDO CURRICULAR	
Conceptuales:	• Aplica la ley de los senos para resolver triángulos oblicuángulos. • Aplica la ley de los cosenos para resolver triángulos oblicuángulos.
Procedimentales:	• Aprende los procedimientos para deducir las leyes de los senos y cosenos. • Aprendo procedimientos para la solución de triángulos oblicuángulos.
Actitudinales:	• Respeta el trabajo y punto de vista de los compañeros. • Muestra tolerancia. • Participa en el trabajo. • Reflexiona sobre los resultados obtenidos.

Cuando tenemos triángulos que no son triángulos rectángulos, no podemos emplear las razones trigonométricas para resolverlos, así que tenemos que aprender nuevos procedimientos que nos permitan resolverlos.

Inicio:

Daremos un repaso de algunos conceptos vistos antes de pasar a la demostración de los dos teoremas.



De acuerdo con la siguiente figura contesta las preguntas.

La suma de los ángulos internos del triángulo es de ______________.

La suma de los ángulos α y β es __________

Por lo cual se llaman ____________

El cateto opuesta al ángulo β es __________

El cateto adyacente al ángulo β es __________.

Y la hipotenusa es __________.

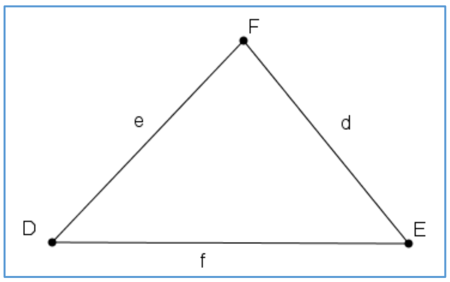
La razón trigonométrica de sen (β) = ——————.

La razón trigonométrica de cos (β) = ——————.

Escribe el teorema de Pitágoras de acuerdo con el triángulo rectángulo trazado.

____

De acuerdo con la siguiente figura realiza lo que se piden y contesta las preguntas.



Traza la altura correspondiente al vértice F.

Asigna la letra M al punto de intersección de la altura trazada con el segmento f.

El triángulo ∆EMF es un triángulo __________.

El triángulo ∆DMF es un triángulo __________.

El seno del ángulo <MDF es = ——————

El seno del ángulo <MEF es = ——————

Traza la altura correspondiente al vértice D, y asigna la letra S al punto de intersección a la altura trazada con el lado d.

El triángulo ∆EDS es un triángulo __________.

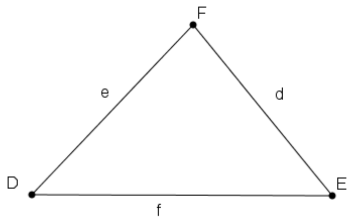
El triángulo ∆FSD es un triángulo __________.

El seno del ángulo <SED es = ——————

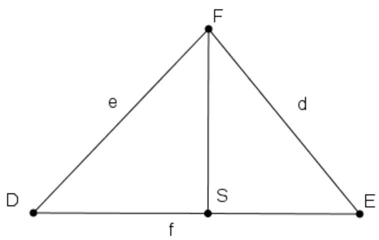
El seno del ángulo <SFD es = ——————

Desarrollo:

Ley de los senos: Lee con cuidado la demostración de la ley de los senos



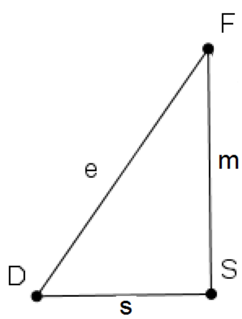
Trazaremos en el ∆DFE la altura correspondiente al lado f



La altura trazada que corresponde al segmento SF lo designaremos dicho segmento con la letra m.

Al hacerlo se forman los triángulos, ∆DSF y ∆ESF.
¿Qué tipo de triángulos son? _________________

En el triángulo ∆DSF, al segmento DS lo designaremos con la letra s, y se muestra a continuación.

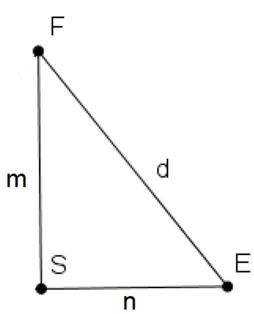


El seno del ángulo D es igual a.

$$sen < D = \frac{m}{s}$$

De donde m = $s\ (sen < D)$. . .. (1)

En el triángulo ∆ESF, al segmento SE lo designaremos con la letra n, y se muestra a continuación.



El seno del ángulo E es igual a.

$$sen < E = \frac{m}{d}$$

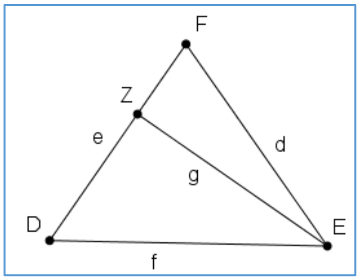
De donde m = $d\ (sen < E)$ . . .. (2)

De las igualdades (1) y (2) tenemos.

$$s\ (sen < D) = d\ (sen < E)$$

Dividiendo la igualdad por sd, se obtiene.

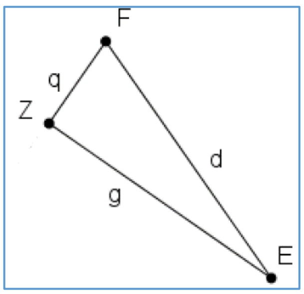
$$\frac{sen{<}D}{d} = \frac{sen{<}E}{s} \; . \; . \; .. \; (3)$$



Ahora trazamos la altura al lado DF = g, a la altura le asignaremos la letra c, el punto de intersección de la altura c, con el lado e lo designaremos con la letra Z.

Se forman los triángulos ΔFZE y ΔDZE. ¿Qué tipo de triángulos son? ________

En el triángulo ΔFZE, designamos al segmento ZF con la letra q.



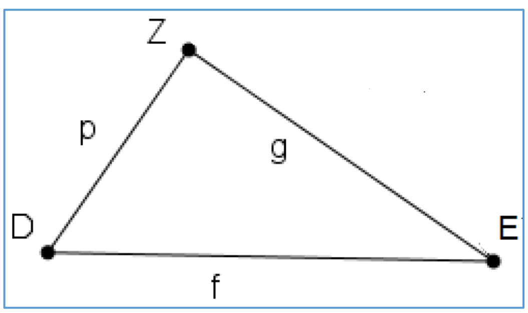
El seno del <F es igual a.

$$sen(<F) = \frac{g}{d}$$

De dónde.

$$g = d(sen(<F)) \; . \; . \; .. \; (4)$$

En el triángulo ΔDZE, designamos al segmento DZ con la letra p.



El seno del <D es igual a.

$$sen(<D) = \frac{g}{f}$$

De dónde.

$$g = f(sen(<D)) \; . \; . \; .. \; (5)$$

De las igualdades (4) y (5) tenemos.

$$d(sen(<F)) = f(sen(<D))$$

Dividiendo la igualdad por df, se tiene.

$$\frac{sen{<}D}{d} = \frac{sen{<}F}{f} \; . \; . \; .. \; (6)$$

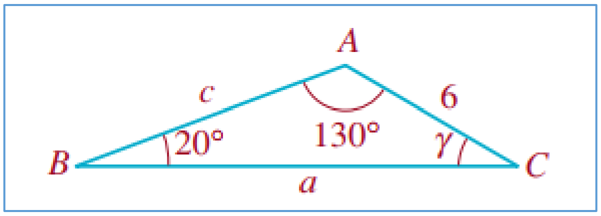
De las igualdades (3) y (6) tenemos.

$$\frac{sen{<}D}{d} = \frac{sen{<}E}{s} = \frac{sen{<}F}{f} \text{ ley de los senos.}$$

Cierre:

A continuación, se resolverán dos problemas utilizando la ley de los senos, luego tienes que resolver dos problemas más que luego serán revisados en plenaria con ayuda del profesor.

Ejemplo 1. Calcular las partes restantes del triángulo de la siguiente figura.



Como la suma de los ángulos internos de todo triángulo es 180º.

20º + 130º + γ = 180º.

De donde 150º + γ = 180º.

Así que, γ = 180º - 150º, la magnitud del ángulo γ = 30º.

Para la resolución de algunos triángulos usando la ley de los senos, se utiliza la siguiente igualdad.

Sí α + β = 180º, entonces, sen (α) = sen (180º - α) = sen (β), con 90º < α < 180º

La cual puedes comprobar con tu calculadora, sean α = 110º, y β = 70º, entonces 110º + 70º = 180º, y 70º = 180º - 110º, por lo que.

Sen (110º) = sen (180º - 110º) = sen (70º) = 0.939.

Ahora aplicando la ley de los senos al triángulo dado.

$$\frac{sen(20°)}{6} = \frac{sen(130°)}{a} = \frac{sen(30°)}{c}$$

Y como sen (130º) = sen (50º), podemos escribir.

$$\frac{sen(20°)}{6} = \frac{sen(50°)}{a} = \frac{sen(30°)}{c}$$

Considerando, $\frac{sen(20°)}{6} = \frac{sen(50°)}{a}$, $a = \frac{6xsen(50°)}{sen(20°)} = \frac{6x(0.766)}{(0.342)} = 13.438.$

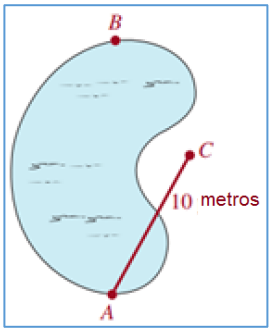
La longitud del lado a = 13.438

Ahora considerando, $\frac{sen(20°)}{6} = \frac{sen(30°)}{c}$, $c = \frac{6xsen(30°)}{sen(20°)} = \frac{6x(0.5)}{(0.342)} = 8.771.$

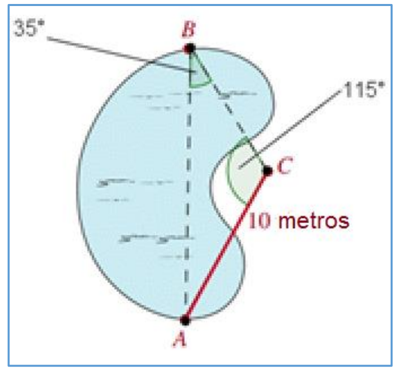
La longitud del lado c = 8.771.

Ejemplo 2. Longitud de una alberca Una cuerda de 10 metros que hay para medir la longitud entre dos puntos, *A* y *B*, en los extremos opuestos de una alberca en forma de riñón, no es lo bastante larga. Se encuentra un tercer punto *C* tal que la distancia de *A* a *C* es de 10 metros. Y se determina que el ángulo *ACB* es de 115°, y que el ángulo *ABC* es de 35°, como se muestra en la figura.

Calcule la distancia de *A* a *B*.



En la siguiente figura se colocan las magnitudes indicadas en el problema.



Como 115º = 180º - 65º

Sen (115º) = sen (65º)

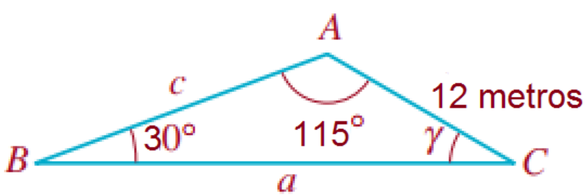
Aplicando la ley de los senos tenemos.

$$\frac{sen(65°)}{AB} = \frac{sen(35°)}{10}$$

Despejando AC cuya longitud queremos determinar, tenemos.

$AB = \frac{10xsen(65°)}{sen(35°)} = \frac{10x0.906}{0.573} = 15.81$, La distancia de AB = 15.81 metros

Ejercicio 1. Calcular las partes restantes del triángulo de la siguiente figura.



La suma de los ángulos internos de todo triángulo es _______________

Indica la suma de los ángulos del triángulo dado.

30º + __________+ γ = ________, de donde γ = 180º - __________.

El valor de γ = ________.

Para el ángulo de 115º, sen (115º) = sen (______º) y aplicando la ley de los senos.

$$\frac{sen(65°)}{} = \frac{sen(\quad °)}{} = \frac{sen(30°)}{12}$$

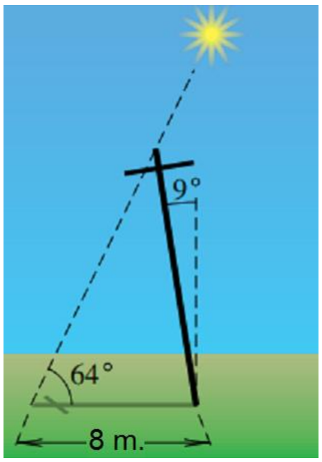
Considerando la igualdad, $\frac{sen(65°)}{a} = \frac{sen(30°)}{12}$, al despejar la incógnita a, se obtiene a = ________________

Como sen (65º) = _________, y sen (30º) = _____________, al sustituir en el despeje y hacer las operaciones indicadas el valor de a = ______________

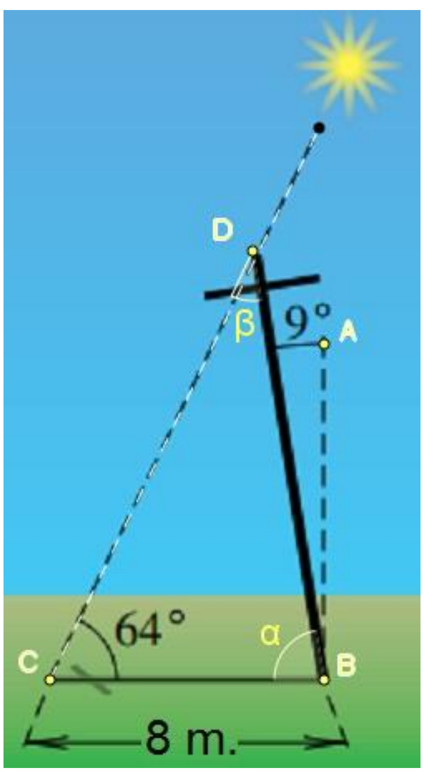
Considerando la igualdad, $\frac{sen(35°)}{c} = \frac{sen(30°)}{12}$, al despejar la incógnita c, se obtiene c = ________________

Como sen (35º) = _________, y sen (30º) = _____________, al sustituir en el despeje y hacer las operaciones indicadas el valor de c = ______________.

Ejercicio 2. Cuando el ángulo de elevación del sol es 64°, un poste de teléfono que está inclinado a un ángulo de 9° con respecto a la vertical proyecta una sombra de 8 metros de largo en un terreno nivelado. Calcule la longitud del poste.



Vamos a colocar algunos puntos con sus respectivos nombres para facilitar la solución del problema, para obtener la siguiente figura.



La magnitud del ángulo <ABC = _____º

Así que α + 9º = ________, al despejar el ángulo α tenemos que, α = _______.

Como la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es de ______º.

Se tiene que 64º + _____ + _____ = ______.

Como α = _____, al sustituir en la ecuación queda.

64º + _____ + _____ = 180º.

De manera que despejando β y haciendo las operaciones indicadas, β = _____.

Aplicando la ley de los senos en el ∆CBD.

$$\frac{\_\_\_\_\_\_}{sen(64°)} = \frac{8}{sen(\beta)}$$

Despejando DB, sustituyendo el valor de sen(β) y haciendo las operaciones indicadas, la longitud de DB que corresponde a la longitud del poste es ______

Triángulos Oblicuángulos.

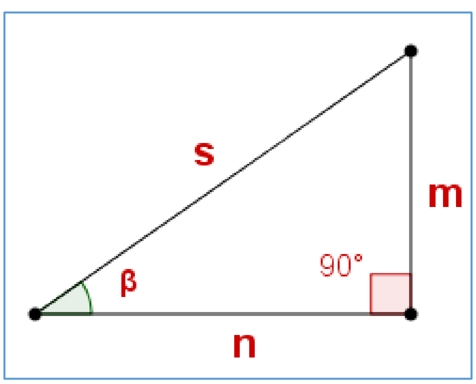
Secuencia Didáctica de Exploración (continuación).

Aprendizaje: Comprende el proceso de deducción de las leyes de senos y cosenos.

II. APRENDIZAJES DE CONTENIDO CURRICULAR	
Conceptuales:	• Aplica la ley de los senos para resolver triángulos oblicuángulos. • Aplica la ley de los cosenos para resolver triángulos oblicuángulos.
Procedimentales:	• Aprende los procedimientos para deducir las leyes de los senos y cosenos. • Aprende procedimientos para la solución de triángulos oblicuángulos.
Actitudinales:	• Respeta el trabajo y punto de vista de los compañeros. • Muestra tolerancia. • Participa en el trabajo. • Reflexiona sobre los resultados obtenidos.

Cuando tenemos triángulos que no son triángulos rectángulos, no podemos emplear las razones trigonométricas para resolverlos, así que tenemos que aprender nuevos procedimientos que nos permitan resolverlos.

Inicio:



De acuerdo con la siguientes figuras contesta las siguientes preguntas.

Escribe el teorema de Pitágoras.

______________________________________.

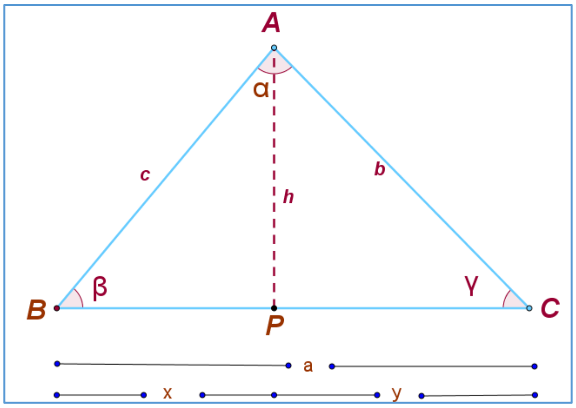
Despeja m^2. _________________________

Despeja n^2. _________________________

El coseno de β es igual a.

Cos(β) = ——————.

Matemáticas III Unidad I	**Elementos de Trigonometría**



De acuerdo con triángulo de la izquierda el teorema de Pitágoras es.

____

De acuerdo con el teorema de la derecha el teorema de Pitágoras es.

____

De acuerdo con el triángulo de la izquierda el cos(β) = ————————.

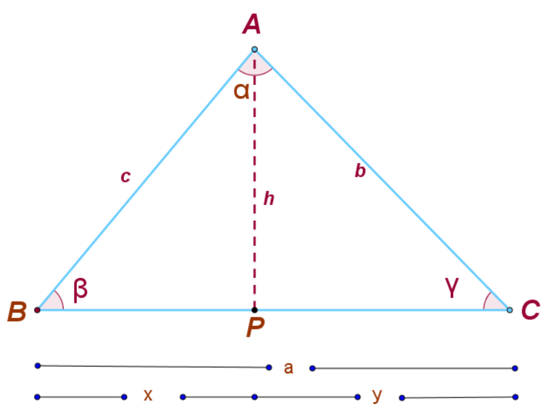
De acuerdo con la figura a = x + _________, si despejamos y se obtiene y = _____

El desarrollo de las siguientes expresiones es.

$(a - x)^2$ = ___________________.

$(a - y)^2$ = ___________________.

Desarrollo:



Ahora veamos la deducción de la ley de los cosenos.

Se tiene que.

$$a = x + y$$

de donde

$$y = c - x$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo de la izquierda.

$$x^2 + h^2 = c^2 \dots (1)$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo de la derecha.

$$(a - x)^2 + h^2 = b^2 \dots (2)$$

Despejando h^2 de (1) y (2).

$$h^2 = c^2 - x^2 \dots (3)$$

$$h^2 = b^2 - (a - x)^2 \dots (4)$$

Igualando los despejes en (3) y (4).

$$c^2 - x^2 = b^2 - (a - x)^2 \dots (5)$$

Desarrollando el binomio y simplificando.

$$c^2 - x^2 = b^2 - a^2 + 2ax - x^2$$

$c^2 = b^2 – a^2 + 2ax – x^2 + x^2$

$c^2 = b^2 – a^2 + 2ax$ … (6)

En el triángulo de la derecha.

$\cos(\gamma) = \frac{y}{b} = \frac{a-x}{b}$

Despejando x.

$b^* \cos(\gamma) = a – x \quad ➔ \quad x = a – b^* \cos(\gamma)$

Sustituyendo el valor de x en (6).

$c^2 = b^2 – a^2 + 2a\ (a – b^* \cos(\gamma)$

$c^2 = b^2 – a^2 + 2a^2 – 2ab^* \cos(\gamma)$

$c^2 = b^2 + a^2 – 2ab^* \cos(\gamma))$ … (6)

La expresión (6) es la ley de los cosenos.

Y con respecto al triángulo dado, las tres expresiones de la ley del cosenos son.

$c^2 = b^2 + a^2 – 2ab^* \cos(\gamma)$

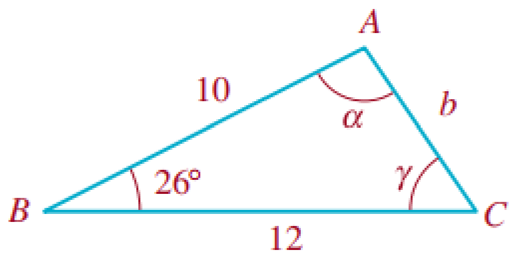
$a^2 = b^2 + c^2 – 2bc^* \cos(\alpha)$

$b^2 = a^2 + c^2 – 2ac^* \cos(\beta)$

Cierre:

A continuación, mostraremos dos ejemplos, luego debes resolver los dos ejercicios, al final en plenaria con ayuda del profesor se revisa el procedimiento y los resultados.

Ejemplo 1. Encuentra las partes restantes del siguiente triángulo.



Aplicando la ley de los cosenos al lado b.

$b^2 = a^2 + c^2 – 2ac^* \cos(\beta)$

con a = 12, c = 10 y β = 26º.

$b^2 = 12^2 + 10^2 – 2(12)\ (10) \cos\ (26º)$

Haciendo operaciones.

$b^2 = 144 + 100 – 2(12)\ (10)\ (0.898)$

$b^2 = 244 – 240(0.898) = 244 – 215.52 = 28.48$

Sacando raíz cuadrada en ambos miembros.

$b = \sqrt{28.48} = 5.33$, el valor de b = 5.33

Aplicando la ley de los senos para encontrar el ángulo γ.

Se tiene, c = 10, a = 12, b = 5.33

$c^2 = b^2 + a^2 – 2ab * \cos(\gamma)$

$10^2 = 5.33^2 + 12^2 – 2(12)(5.33) * \cos(\gamma)$

$100 = 28.48 + 144 – 127.92 * \cos(\gamma)$

$100 = 172.48 – 127.92 * \cos(\gamma)$

$127.92 * \cos(\gamma) + 100 = 172.48 \Rightarrow 127.92 * \cos(\gamma) = 172.48 – 100$

$127.92 * \cos(\gamma) = 72.48 \Rightarrow \cos(\gamma) = \frac{72.48}{127.92} = 0.566$

Para encontrar γ realiza el siguiente procedimiento en la calculadora.

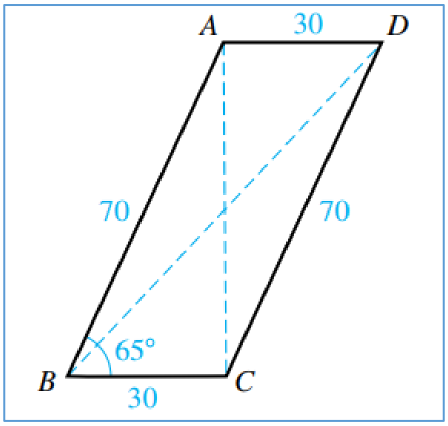
- Presiona la tecla Shift
- Luego presiona la tecla cos
- En la pantalla se despliega, $\cos^{-1}($
- Escribe el número 0.566
- Cierra el paréntesis derecho y presiona la tecla =
- El resultado es, 55.52823806, para tener el resultado en grados presiona la tecla °’ ‘’
- En la pantalla vemos, 55º 31’
- La magnitud del ángulo γ = 55º 31’

La aproximación en los minutos de la magnitud de γ depende de la cantidad de decimales que se tomen en los resultados.

Como la suma de los ángulos internos de todo triángulo es de 180º, el valor de α, lo obtenemos de, α + β + γ = 180º, con γ = 55º 31’ y β = 26º.

Sustituyendo valores, α + (26º) + (55º 31’) = 180º, después de hacer las operaciones indicadas α = 98º 29’

Ejemplo 2. Un paralelogramo tiene lados de longitudes de 30 centímetros y 70 centímetros y un ángulo de 65°. Calcule la longitud de la diagonal AC al centímetro más cercano



La siguiente figura ilustra el problema.

En el ΔBCA, se tiene.

a = 30, c = 70 y <β = 65º.

La ley del coseno dice,

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac^* \cos(\beta)$$

sustituyendo valores.

$$b^2 = (30)^2 + (70)^2 - 2\,(30)\,(70)\cos(65º)$$

Haciendo las operaciones indicadas.

$$b^2 = (30)^2 + (70)^2 - 2\,(30)\,(70)\cos(65º) = 900 + 4900 - 4200\,(0.422)$$

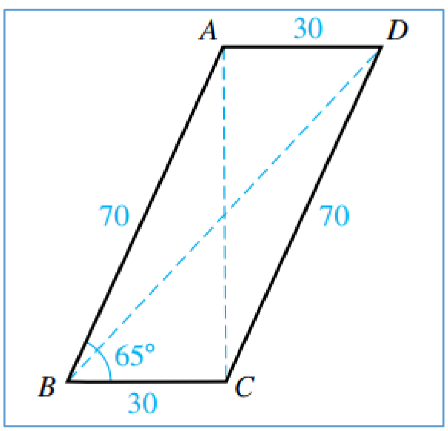
$$= 5800 - 1772.4 = 4027.6, \text{ así que, } b^2 = 4027.6$$

Sacando raíz cuadrada en ambos miembros de la igualdad.

b = 63 centímetros

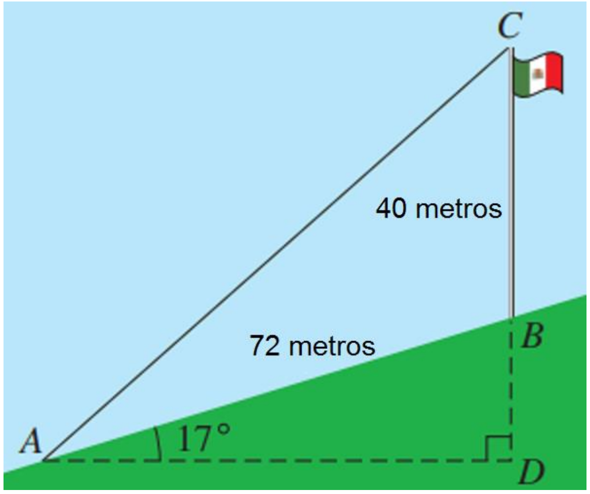
Ejercicios.

a) Calcula la diagonal BD al centímetro más cercano en el paralelogramo del ejemplo 2.



BD = ___________

b) Un poste vertical de 40 metros de alto se encuentra sobre una ladera que forma un ángulo de 17° con la horizontal. Calcule la longitud mínima de cable que llegará de lo alto del poste a un punto situado a 72 metros colina abajo desde la base del poste.



Como <DAB y <DBA son __________

<DAB + <DBA = ____________

De donde.

<DBA = ____________

Aplicando la ley de los cosenos para el ΔABC.

AC = ______________