UNIDAD 1
SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES

PROPÓSITOS: Ampliar el concepto de Sistema de Ecuaciones y extender los procedimientos algebraicos de solución. Reafirmar el significado algebraico y gráfico de la solución de un sistema. Proporcionar una herramienta para el manejo del método analítico. Avanzar en la práctica de la operatividad algebraica.

INTRODUCCIÓN

En algunas ocasiones se tiene la necesidad de resolver simultáneamente varias ecuaciones lineales para hallar las soluciones comunes a todas ellas, esto no necesariamente en Matemáticas sino también en otras materias. Esto también resulta útil en geometría debido a que las ecuaciones lineales se interpretan como rectas o planos, por lo que resolver un sistema equivale a estudiar la posición relativa de estas figuras geométricas en el plano o en el espacio. Recordemos algunas cuestiones relacionadas con las ecuaciones, para luego pasar a la interpretación geométrica.

La ecuación $2x - 3 = 0$ se llama ecuación lineal con <u>una</u> incógnita. Sabemos que sólo tiene una solución, esto es, existe **un sólo valor de x** que hace verdadera a la ecuación. En nuestro caso $x = 3/2$ (ó también $x = 1.5$)

La ecuación $-3x + 2y = 7$ se llama ecuación lineal con <u>dos</u> incógnitas. Sus soluciones son pares ordenados de números (x, y). Tiene **infinitas soluciones** que se pueden obtener despejando una variable y dando valores cualesquiera a la otra. Por ejemplo si despejamos a **y**, obtenemos $y = 1.5x + 3.5$, (corrobóralo) con lo cual podemos ver que **algunas** de las parejas que vuelven verdadera a la ecuación, o soluciones son: (2, 10), (5, 14.5), (-1, 5.5), etc.

La ecuación $x - 2y + 5z = 1$ se llama ecuación lineal con <u>tres</u> incógnitas. Sus soluciones son ternas ordenadas de números (x, y, z). Tiene **infinitas soluciones** que se pueden obtener despejando una incógnita y dando valores cualesquiera a las otras dos. Algunas soluciones de la ecuación son: (-13, 3, 4), (1, -5, -2), (2, -2, -1), (1, 0, 0) etc.

En general, una **ecuación lineal con "n" incógnitas** es del tipo:

$$\mathbf{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots.. + a_{1n}x_n = c_1}$$

Decimos que una ecuación algebraica lineal es aquella en donde en cada término de la ecuación aparece únicamente una variable o incógnita elevada a la primera potencia.

Acuérdate que un **término** se define como toda expresión que consista de números, variables o el producto de números y variables; por ejemplo: 8x; 5ab; 12; $a_{11}x_1$; etc.

En una ecuación algebraica lineal con **incógnitas x_1, x_2, x_3,…, x_n**, los **coeficientes a_{11}, a_{12}, a_{13},…, a_{1n}** y el **término independiente c_1**, son **constantes reales**.
Veamos una actividad para aclarar lo anterior:

SECCIÓN 1. SITUACIONES QUE DAN LUGAR A SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

Mediante el estudio de esta sección pretendemos que aprendas a: reconocer cuándo un sistema de ecuaciones es lineal o no, y cuáles son sus incógnitas,

A continuación te presentamos dos ejemplos sencillos en donde se modelan situaciones que dan lugar a ecuaciones, en el primero una ecuación con tres incógnitas y en el segundo un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.

ACTIVIDAD 1.

El costo de dos tortas, ocho refrescos y seis bolsas de papitas es de 64 pesos ¿cuánto cuesta una torta?

Si consideramos que: **t** = costo de una torta, **r** = costo de un refresco, **p** = costo de una bolsa de papitas, una ecuación que representa al problema es:

$$2t + 8r + 6p = 64$$

La ecuación anterior tiene la forma $\mathbf{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1}$, en donde: $\mathbf{a_{11}, a_{12}, a_{13}}$, son respectivamente: 2, 8 y 6; y las incógnitas $\mathbf{x_1, x_2, x_3}$, respectivamente **t**, **r**, **p**; y $\mathbf{c_1}$ = 64. Por lo tanto la ecuación planteada es una ecuación algebraica lineal. Como recordarás, es lineal debido a que el exponente de las incógnitas es uno, además de que no se encuentran multiplicadas unas con otras.

Una posible solución de la ecuación son los valores: t = 10 pesos; r = 4 pesos; p = 2 pesos, ya que 2(10) + 8(4) + 6(2) = 64

Encuentra otras dos soluciones y comprueba que lo son:

t =   ; r =   ; p =   , ya que 2(   ) + 8(   ) + 6(   ) = 64
t =   ; r =   ; p =   , ya que 2(   ) + 8(   ) + 6(   ) = 64

Despeja a **t** en la ecuación y luego asigna los valores r = 2, p = 3 y calcula el valor de **t**. Escribe la nueva solución que encontraste: (,   ,   )

Calcula otros dos valores de t, r, p, que vuelvan verdadera a la ecuación.

(,   ,   )
(,   ,   )

¿Cuántas soluciones tiene la ecuación 2t + 8r + 6p = 64?

ACTIVIDAD 2.

Hemos recabado más información sobre el precio de las tortas, refrescos y bolsas de papitas. La información es la siguiente: el costo de dos tortas, ocho refrescos y seis bolsas de papitas es de 64 pesos, además que una torta, cinco refrescos y cuatro bolsas de papitas cuestan 38 pesos, y, por otro lado, que tres tortas, tres refrescos y siete bolsas de papitas cuestan 56 pesos.

a) Escribe las ecuaciones que representan el problema.

b) Encontraste un sistema de la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1} \\ \mathbf{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2} \\ \mathbf{a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = c_3} \end{aligned}$$

c) Escribe los valores correspondientes de los coeficientes:

a_{11} = , a_{12} = , a_{13} =
a_{21} = , a_{22} = , a_{23} =
a_{31} = , a_{32} = , a_{33} =

Y los valores de los términos independientes:

c_1 = , c_2 = , c_3 =

d) ¿Por qué razón el sistema es lineal?

e) ¿De qué manera se comprueba si un conjunto de valores $x_1 = t$, $x_2 = r$ y $x_3 = p$, es una solución del sistema?

f) Comprueba que una solución del sistema es: $x_1 = 10$, $x_2 = 4$ y $x_3 = 2$, o lo que es lo mismo, (10, 4, 2).

g) ¿Habrá otros conjuntos de valores (x_1, x_2, x_3) que satisfagan las tres ecuaciones al mismo tiempo? **No es necesario que resuelvas el sistema**, más adelante lo haremos detenidamente, por el momento sólo intenta justificar tu respuesta aunque no estés seguro de ella.

Para discutir a fondo la solución de este problema recordemos algunos conceptos que viste en primer semestre.

EJERCICIO 1.

De los siguientes sistemas, determina cuáles son lineales:

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 7x - \frac{5}{4}y = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 5y = -4 \\ x + 2y = 3^2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2xy = 4 \\ 4x + 3y = 9 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - y + 4z = 2 \\ x^2 - 2y + z = 5 \\ x + y + z = 15 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x - 9y + 4z = 2^{1/2} \\ 2x + 4y + 3z = -11 \\ 5x - 3y + 7z = 0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} xyz = 1 \\ 2x - 3y = 2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ g) $\begin{cases} \sqrt{2}x - y + z + w = 7 \\ x + \frac{3}{5}y + 9z - 2w = 3 \\ 11x - 7y + 5z + 4w = -1 \\ -2x + 6y + 3z + 8w = 0 \end{cases}$

SECCIÓN 2. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2X2 Y 3X3:
a) Con solución única.
b) Con infinidad de soluciones.
c) Sin soluciones.

En esta sección trabajaremos para que recuerdes el método de reducción para resolver un sistema de ecuaciones 2x2, y comprendas la forma en que se extiende a un sistema 3x3.

SISTEMA DE ECUACIONES

El tema sistema de ecuaciones lineales fue abordado en tu curso de primer semestre, ahora trataremos de profundizar en él y avanzar hacia sistemas de ecuaciones más complicados, con mayor número de ecuaciones y con ecuaciones no lineales.

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ecuaciones que deben resolverse simultáneamente, es decir, conjuntos de ecuaciones de la forma:

$$\begin{gathered}
\mathbf{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = c_1} \\
\mathbf{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = c_2} \\
\bullet \\
\bullet \\
\bullet \\
\mathbf{a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = c_n}
\end{gathered}$$

Un sistema así expresado tiene **n** ecuaciones y **n** incógnitas, donde $\mathbf{a_{ij}}$ son números reales, llamados **coeficientes del sistema** (los subíndices **ij** representan el número de fila y el número de columna respectivamente); los valores $\mathbf{c_n}$ son números reales, llamados **términos independientes** del sistema; las incógnitas $\mathbf{x_j}$ son las **variables** del sistema, y la **solución del sistema** es un conjunto ordenado de números reales $(s_1, s_2, ..., s_n)$ tales que al sustituir las incógnitas $x_1, x_2,..., x_n$ por los valores $s_1, s_2,..., s_n$ las **n** ecuaciones del sistema se convierten en verdaderas. Al conjunto $(s_1, s_2,..., s_n)$ se le conoce también como **conjunto solución**.

Un caso particular ocurre cuando tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, el cual siempre se podrá escribir de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \mathbf{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1} \\ \mathbf{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = c_2} \end{cases}$$

Recordemos la idea básica de dos de los cuatro métodos que ya conocemos para resolver este tipo de sistemas:

- **Método gráfico*:*** Se grafican las dos ecuaciones y se determina el punto de intersección, si es que existe, el cual representará la solución del sistema.
- **Método de reducción (eliminación)***:* Se prepararan las dos ecuaciones (multiplicando por los números convenientes) para que al sumarlas o restarlas, se cancele una de las incógnitas, quedando una ecuación de primer grado con una incógnita, la cual se resuelve encontrando el valor de una de las incógnitas. Se hace el proceso equivalente para determinar la otra incógnita.

- **Método de sustitución.** De una de las ecuaciones se despeja una de las incógnitas y se la sustituye en la otra ecuación, resultando una ecuación de primer grado con una incógnita, la cual se resuelve, encontrando el valor para una de las incógnitas, para luego encontrar la otra incógnita.

Veamos un ejemplo en el cual apliquemos método gráfico y dos métodos algebraicos, en un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

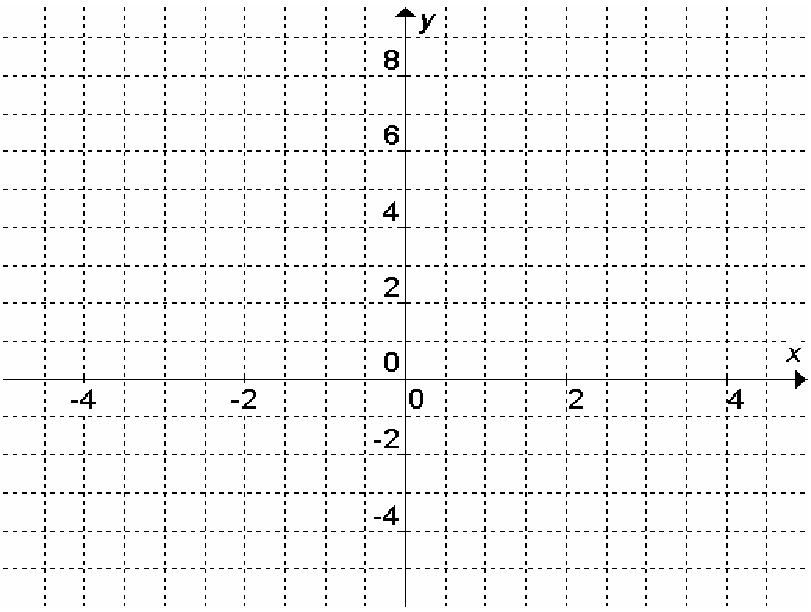
ACTIVIDAD 3.

Considera el sistema $\begin{cases} 2x + y = 3 \cdots\cdots\cdots (1) \\ 5x + 3y = 10 \cdots\cdots (2) \end{cases}$

Primero vamos a resolverlo por el método gráfico, para hacerlo, tabula y traza las gráficas correspondientes y encuentra la solución. Te sugerimos, despejar de cada ecuación la incógnita **y** antes de graficarla.

De la ecuación (1) obtienes que y = 3 – 2 x

Para la ecuación (2) obtienes que y =



x	y
-4	
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
4	

x	y
-4	
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
4	

Ahora, pasemos a resolverlo por el **método de reducción**. Para eliminar la incógnita **x**, multiplicamos la primera ecuación por 5 y la segunda por -2, obteniendo:

$$5(2x + y = 3) \quad \rightarrow \quad 10x + 5y = 15 \cdots\cdots (3)$$

$$-2(5x + 3y = 10) \quad \rightarrow \quad \cdots\cdots (4)$$

Al sumar las ecuaciones resultantes, (3) y (4), obtendrás el valor de **y**:

y =

De manera similar, para eliminar la incógnita **y**, la ecuación (1) se puede multiplicar por el número: ____ y la (2) por el número: _______. Haciendo lo anterior, obtienes las ecuaciones (3) y (4). Escríbelas.

(3)
(4)

Al sumarlas, o restarlas, según convenga, eliminas la incógnita **y**. Luego al resolver la ecuación resultante, llegaste a que: x = _____.

Recordemos el **método de sustitución**, de la ecuación (1) despejamos "y" obteniéndose: $y = 3 - 2x \cdots\cdots (3)$

Sustituimos la ecuación (3) en la ecuación (2) y al resolver, obtienes **x**:

$$5x + 3y = 10$$
$$5x + 3(3 - 2x) = 10$$
$$x =$$

Ahora al sustituir, el valor encontrado de x en (3), obtienes **y**:

$$y = 3 - 2x$$
$$y =$$

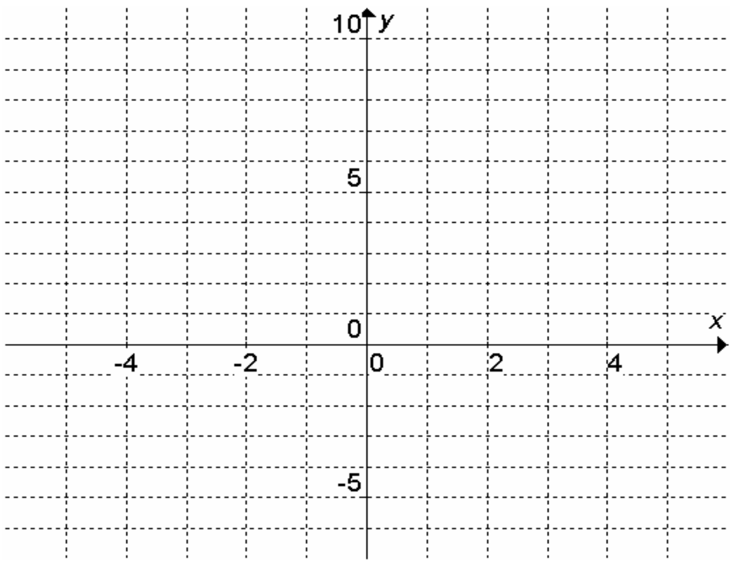
Has determinado la solución del sistema por dos métodos algebraicos, la cual puedes representar como la pareja ordenada: (,). Te recomendamos que siempre que encuentres la solución de un sistema la compruebes en el sistema respectivo original.

ACTIVIDAD 4.

Considera el siguiente sistema $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \cdots\cdots (1) \\ 6x + 4y = 8 \cdots\cdots (2) \end{cases}$

Grafica el sistema y encuentra la solución. Para lo cual despeja la incógnita **y** de cada una de las ecuaciones, haces la tabulación, graficas y determinas el punto solución del sistema:

De (1) y =   De (2) y =



x	y
-4	
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
4	

x	y
-4	
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
4	

Escribe el resultado que encontraste: ___________________________________
____

Pasemos al método algebraico; primeramente usando el **método de reducción**, para eliminar la incógnita **x**, la ecuación (1) la multiplicamos por: _____ y le sumamos la segunda, con lo cual obtenemos:

$$\_\_\_\_(3x + 2y = 4) \quad \rightarrow \quad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\cdots\cdots(3)$$

$$6x + 4y = 8\cdots\cdots(2)$$

obteniéndose: **0 = 0**

Desde la tabulación te diste cuenta que las dos ecuaciones no son independientes, sino que son totalmente dependientes, es decir, a partir de una se obtiene la otra.

El resultado obtenido, verifica lo que encontraste por el método gráfico. Gráficamente una recta queda sobre la otra, o bien, ambas gráficas no son distintas, por lo que todas las soluciones de una de ellas serán las soluciones de la otra y por lo tanto del sistema. Así pues, bastará con despejar la incógnita **y** de una de las ecuaciones, por ejemplo de la (1), obteniendo y = (4 – 3x)/2, para luego asignarle valores a **x** y obtener los de **y**.

Claro que lo anterior significa que el sistema tiene infinidad de soluciones, algunas de las cuales son: (0, 2), (4/3,0), (1, 1/2), (2/3, 1). Compruébalas y obtén otras cuatro.

Si se resuelve por el método de sustitución, de la ecuación (1) se tiene que:

$$y = \frac{4 - 3x}{2}\cdots\cdots\cdots(3)$$

Al sustituir (3) en (2) se llega a que: $6x + 4\left(\frac{4-3x}{2}\right) = 8$, de donde:

$$12x + 4(4 – 3x) = 16$$
$$12x + 16 - 12x = 16$$
$$\mathbf{16 = 16}$$

Llegamos a una situación equivalente a la que encontramos cuando se trabajó el método de reducción.

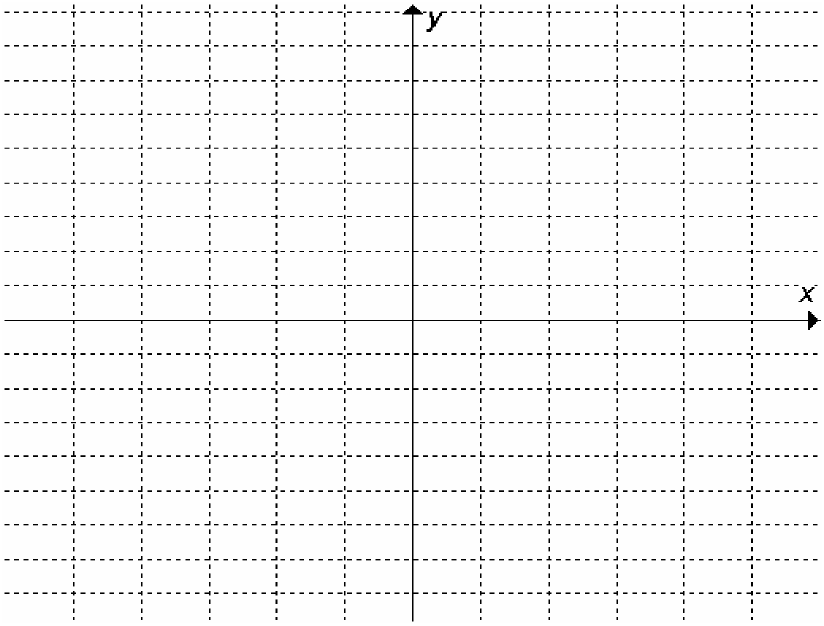
ACTIVIDAD 5.

Considera el sistema $\begin{cases} 6x - 3y = 5\cdots\cdots\ (1) \\ 2x - y = 4\ \cdots\cdots\ (2) \end{cases}$

Nuevamente, inicia resolviendo el sistema por el método gráfico, para lo cual, despeja la incógnita **y** de cada ecuación, tabula, traza las gráficas y determina la solución.

De la ecuación (1) y = 　　　　　　De la ecuación (2) y =

Tabula y grafica.



Escribe el resultado que encontraste:________________________________

Por el **método de reducción**, para eliminar la incógnita **x**, a la ecuación (2) la multiplicamos por ____ y le sumamos la ecuación (1), quedándonos como resultado:

$$6x - 3y = 5$$
$$-3(2x - y = 4)$$
$$\mathbf{0 = -7}$$

Podemos afirmar que el sistema, formado por las dos ecuaciones, no es compatible, o es inconsistente, debido a que al tratar de resolverlas conjuntamente nos lleva a un absurdo.

Por el **método de sustitución**, primero despejamos de la ecuación (2) la incógnita **y**, obteniendo la ecuación (3), luego la sustituimos en la ecuación (1), y resolvemos la ecuación resultante:

$$y = 2x - 4 \cdots\cdots\cdots(3)$$
$$6x - 3(2x - 4) = 5$$
$$6x - 6x + 12 = 5$$
$$\mathbf{12 = 5}$$

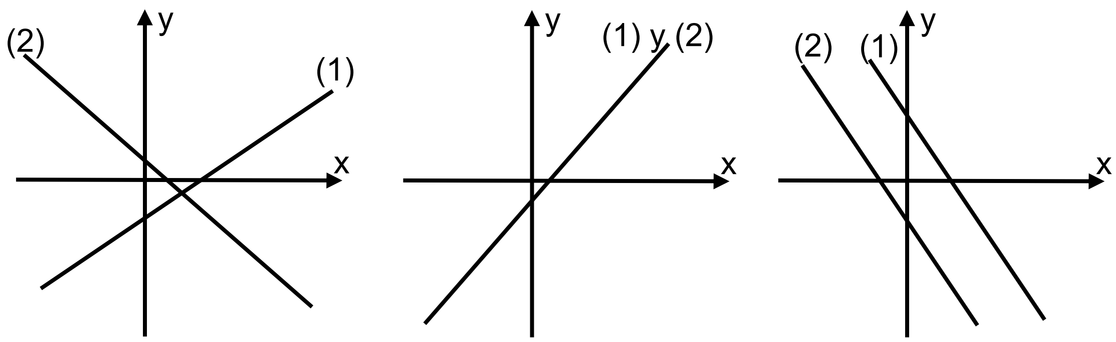
Hemos comprobado, tanto de manera gráfica como por el método de reducción y el de sustitución que el sistema no tiene solución.

Con las tres últimas actividades se aprecian los **tres casos posibles cuando resolvemos un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables**, **o sistema 2x2:**

I. **El sistema tiene solución única.** Las ecuaciones son consistentes o compatibles y linealmente independientes. Su representación gráfica queda representada por dos rectas que se intersecan y su solución es el punto de intersección.

II. **El sistema tiene infinidad de soluciones.** En este caso también las ecuaciones son consistentes o compatibles, pero son linealmente dependientes. En su representación gráfica una recta queda sobre la otra, por lo que su solución está representada por todos los puntos de la recta.
III. **El sistema no tiene solución.** Las ecuaciones son inconsistentes o incompatibles. Su representación gráfica muestra dos rectas paralelas, por lo que no tiene solución el sistema.

Gráficamente tenemos:



Caso I **Caso II** **Caso III**

Cuando dos ecuaciones lineales con dos variables son consistentes e independientes (Caso I), la solución que se obtiene gráficamente puede ser sólo una aproximación, pues la lectura de los números en la grafica normalmente tiene imprecisiones de medición. **Para obtener las soluciones exactas e sistemas de ecuaciones lineales, hay que usar métodos algebraicos.** Algunos de estos métodos ya los conoces desde primer semestre.

¿Qué haremos si en lugar de tener un sistema 2x2 tenemos uno 3x3?, por ejemplo:

$$\begin{cases} x-2y+3z=4\cdots\cdots(1) \\ 2x+y-4z=3\cdots\cdots(2) \\ -3x+4y-z=-2\cdots\cdots(3) \end{cases}$$

Podemos seguir las mismas ideas del método de eliminación. Se prepararan las tres ecuaciones (multiplicando por los números convenientes) para que al sumarlas o restarlas, se cancele una de las incógnitas, quedando un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, al cual le aplicamos el mismo método, como ya lo hemos hecho, y lo resolvemos. Luego regresamos a cualquiera de las tres ecuaciones originales y sustituimos los valores de las incógnitas encontradas para determinar el valor de la tercera incógnita.

La ecuación (1) la multiplicamos por -2 y la sumamos con la ecuación (2):

$$\left.\begin{array}{r} -2(x-2y+3z=4) \;\rightarrow\; -2x+4y-6z=-8 \\ 2x+y-4z=3 \;\rightarrow\; 2x+y-4z=3 \end{array}\right\} 5y-10z=-5\cdots\cdots(4)$$

La ecuación (1) la multiplicamos por 3 y le sumamos la ecuación (3):

$$\left.\begin{array}{r} 3(x-2y+3z=4) \;\rightarrow\; 3x-6y+9z=12 \\ -3x+4y-z=-2 \;\rightarrow\; -3x+4y-z=-2 \end{array}\right\} -2y+8z=10\cdots\cdots(5)$$

La ecuación (4) la multiplicamos por 2, a la (5) por 5 y las sumamos:

$$\left.\begin{array}{l} 2(5y-10z=-5)\ \rightarrow\ 10y-20z=-10 \\ 5(-2y+8z=10)\ \rightarrow\ -10y+40z=50 \end{array}\right\} 20z=40\cdots\cdots(6)$$

En la ecuación (6) se determina z = ____, se sustituye en (5) y se determina que y = ______. Por último éstos dos valores se sustituyen en cualquiera de las ecuaciones (1), (2) o (3) y se determina que x = _____. De manera que la solución del sistema es (, ,).

¿Será única la solución? _____ Con respecto al número de soluciones, ¿éste sistema se denomina? _____________________

EJERCICIO 2.

Traza la grafica de los siguientes sistemas de ecuaciones y clasifícalos como: I) Consistentes y linealmente independientes; II) Consistentes y linealmente dependientes; III) Inconsistentes. Si el sistema es consistente y linealmente independiente, determina su solución, tanto por el método gráfico como por el de eliminación o sustitución.

1) $\begin{cases} x-y=8 \\ 2x+y=1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y=8+2x \\ 6x+3y=0 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x+y=6 \\ 8x=6y+9 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 9x-3y=7 \\ y=3x-\dfrac{5}{2} \end{cases}$ 5) $\begin{cases} y=2x-4 \\ 6x-3y-12=0 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ 5x-4y=8 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 4x-2y-7=0 \\ x=\dfrac{1}{2}y+5 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 3x-y=1 \\ 6x+5y=2 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} 2x-3y=-2 \\ 4x-3y=-2 \end{cases}$

SECCIÓN 3. SISTEMAS DE ECUACIONES EQUIVALENTES.

a) Concepto.

b) Forma triangular.

En esta sección trabajaremos para que reafirmes el concepto de sistemas equivalentes y entiendas que en los métodos algebraicos de resolución de un sistema de ecuaciones, se recurre a transformarlos a sistemas equivalentes de mayor simplicidad, hasta llegar a alguno que contiene una ecuación con una sola incógnita. Con ello, reafirmaras la estrategia matemática de convertir una situación desconocida o difícil, a otra conocida o más simple.

SISTEMAS DE ECUACIONES 3x3.

Un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas siempre se puede escribir de la forma: $\begin{cases} \mathbf{a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=c_1} \\ \mathbf{a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=c_2} \\ \mathbf{a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=c_3} \end{cases}$

Tomemos como ejemplo al problema que resolvimos al final de la sección anterior: $\begin{cases} x-2y+3z=4\cdots\cdots(1) \\ 2x+y-4z=3\cdots\cdots(2) \\ -3x+4y-z=-2\cdots\cdots(3) \end{cases}$

El proceso de solución que vimos al final de la sección anterior lo podemos resumir como sigue: utilizando el hecho de que **dos sistemas de ecuaciones son equivalentes si tienen el mismo conjunto de soluciones**. Así, el sistema original lo iremos transformando a sistemas equivalentes para determinar su solución:

Partimos del sistema original el cual transformamos a dos sistemas equivalentes:

Sistema original

$$\begin{cases} x-2y+3z=4\cdots(1) \\ 2x+y-4z=3\cdots(2) \\ -3x+4y-z=-2\cdots(3) \end{cases}$$

Sistema equivalente

$$\begin{cases} x-2y+3z=4\cdots(1) \\ 5y-10z=-5\cdots(4) \\ -2y+8z=10\cdots(5) \end{cases}$$

Sistema equivalente

$$\begin{cases} x-2y+3z=4\cdots(1) \\ 5y-10z=-5\cdots(4) \\ 20z=40\cdots(6) \end{cases}$$

El último sistema equivalente esta en **forma triangular**, como bien puedes observar. Habiendo llegado a él, se puede resolver la ecuación (6) y encontrar **z**, luego sustituir la solución en la (4) y encontrar **y**, para finalmente sustituir en la (1) y encontrar **x**.

ACTIVIDAD 6.

Siguiendo las mismas ideas pasemos a resolver el problema de las tortas, refrescos y bolsas de papas:

$$\begin{cases} 2x_1+8x_2+6x_3=64\cdots\cdots(1) \\ 1x_1+5x_2+4x_3=38\cdots\cdots(2) \\ 3x_1+3x_2+7x_3=56\cdots\cdots(3) \end{cases}$$

La ecuación (2) la multiplicas por ___ y se la sumas a la ecuación (1), con lo cual eliminaras la incógnita x_1 y obtendrás la ecuación (4). A continuación multiplicas la ecuación (2) por ___ y se la sumas a la ecuación (3), para eliminar también la incógnita x_1 y obtener la ecuación (5). Completa lo que haga falta:

$$\left.\begin{array}{r} 2x_1+8x_2+6x_3=64\cdots(1) \\ \_\_(1x_1+5x_2+4x_3=38) \end{array}\right\} \_\_x_2+\_\_x_3=\_\_\cdots(4)$$

$$\left.\begin{array}{r} \_\_(1x_1+5x_2+4x_3=38) \\ 3x_1+3x_2+7x_3=56\cdots(3) \end{array}\right\} \_\_x_2+\_\_x_3=\_\_\cdots(5)$$

Si a la ecuación (4) la multiplicas por ___ y le sumas la ecuación (5), obtendrás:

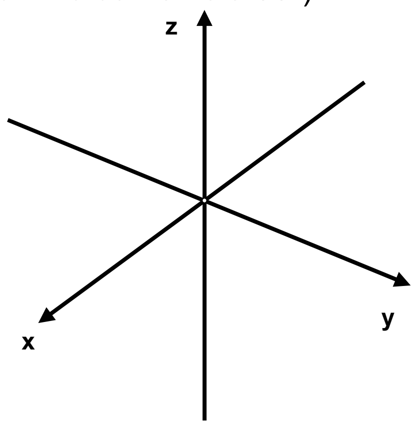
$$7x_3=14\cdots(6)$$

Escribe el sistema equivalente en su **forma triangular** y determina el costo de cada artículo.

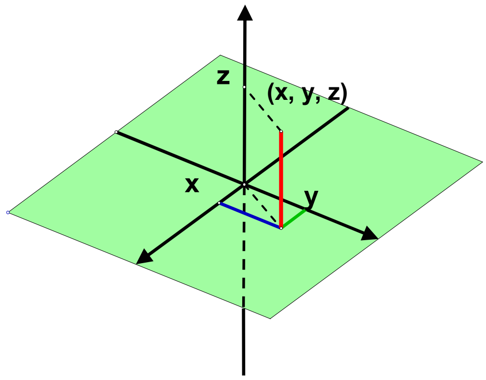
UBICACIÓN ESPACIAL DE UN SISTEMA 3x3

Como hemos visto, los sistemas de ecuaciones lineales 2x2 se expresan gráficamente como **rectas** que pueden estar en tres casos. De igual manera las ecuaciones lineales de tres incógnitas se expresan en un sistema tridimensional como un plano infinito no curvado. Por supuesto que no podemos dibujar un plano infinito, por lo que **sólo dibujaremos una parte de los planos**

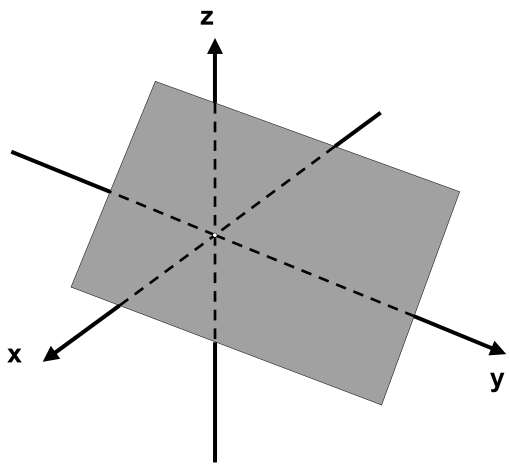
Una ecuación lineal de tres incógnitas representa un plano que puede ser ubicado en un sistema de tres dimensiones con **ejes ortogonales** (ejes que están mutuamente a 90º):



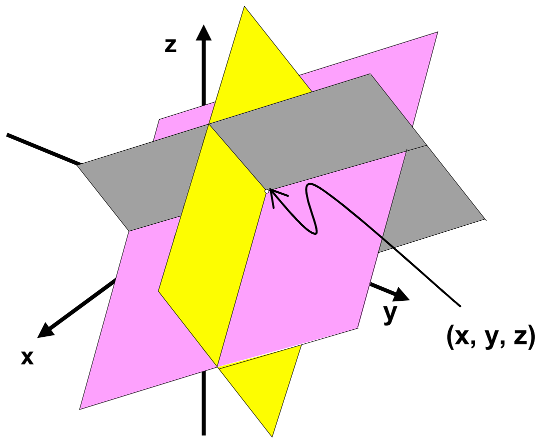
Ejes en tres dimensiones



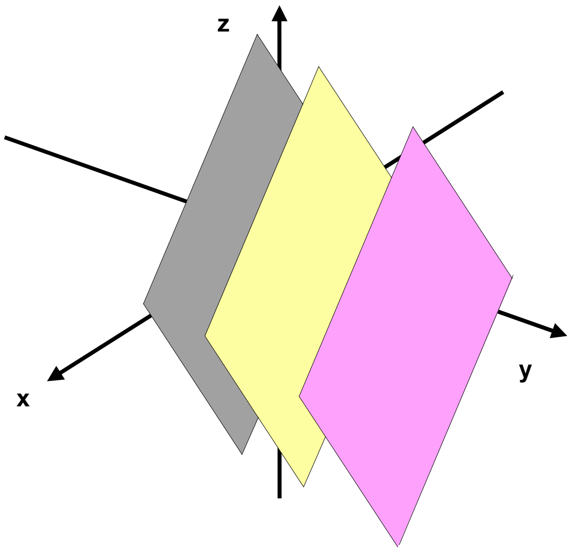
Ubicación de un punto en el espacio; coordenadas (x, y z)



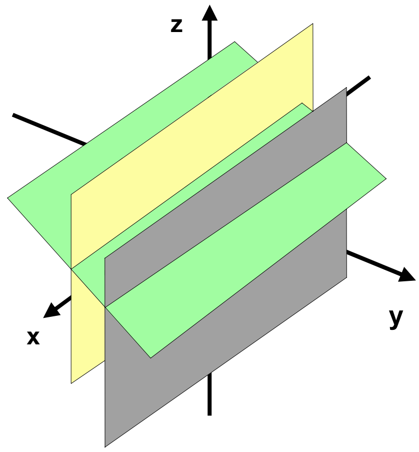
Ubicación de una ecuación lineal 3x3



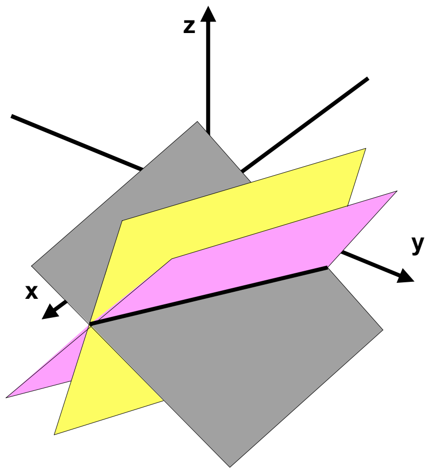
Sistema 3x3 con <u>solución única</u> en el punto (x, y, z)



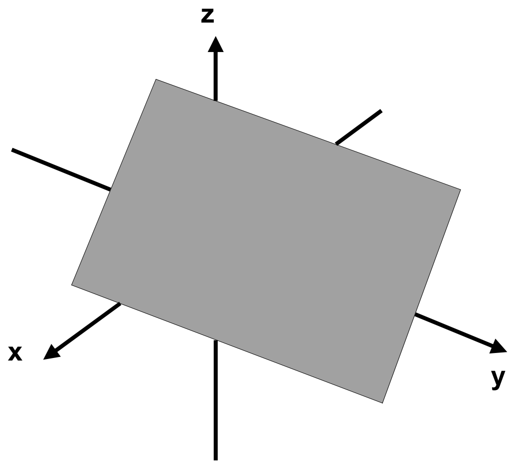
Sistema 3x3 con planos paralelos. Sin solución.



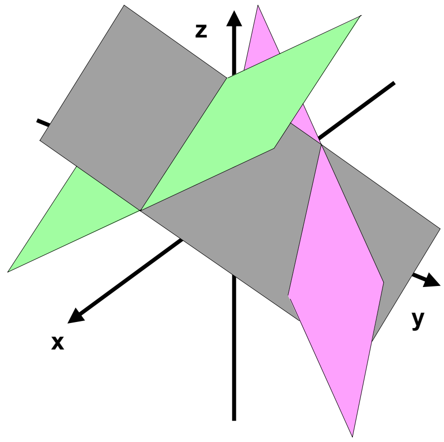
Sistema 3x3 con dos planos paralelos. Sin solución.



Sistema 3x3 con planos coincidiendo en una línea. Infinidad de soluciones (puntos en común en la recta).



Sistema 3x3 con tres ecuaciones que representan al mismo plano. Infinidad de soluciones (infinidad de puntos en común en el plano)



Sistema 3x3 con tres planos que coinciden en pares, pero no tienen los tres simultáneamente una línea o un punto en común. Sin solución.

Así pues, **pueden suceder tres casos** cuando resolvemos sistemas 3x3: que el sistema no tenga solución, que tenga infinidad de soluciones o tenga solución única. Es claro que estos tres casos se refieren a todos los sistemas de ecuaciones lineales, no sólo a los 2x2 o 3x3.

SECCIÓN 4. MÉTODOS DE REDUCCIÓN Y DE SUSTITUCIÓN.

En esta sección, aprenderás a:

- Distinguir cuando un sistema de ecuaciones 3x3 o 4x4, está escrito en forma triangular y explicar qué ventajas aporta esta forma para resolverlo.
- Dado un sistema de ecuaciones lineales 3x3, utilizar el método de suma y resta para transformarlo a la forma triangular, y a partir de ahí, obtener su solución.
- A través de la última ecuación de un sistema de ecuaciones escrito en forma triangular, identificar si éste es compatible o no, o bien, si es dependiente o no.

Ya hemos visto el **método de sustitución** para resolver un sistema 3x3.

Ahora veamos el **método de reducción** (también conocido como "suma y resta), que es similar al que aplicaste en los sistemas 2x2. Partamos del sistema que ya hemos visto:

$$\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 + 6x_3 = 64 \ \text{... (1)} \\ 1x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 38 \ \text{...(2)} \\ 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 56 \ \text{...(3)} \end{cases}$$

ACTIVIDAD 7.

Toma en cuenta las dos primeras ecuaciones: $\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 + 6x_3 = 64 \ \ldots(1) \\ 1x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 38 \ \ldots(2) \end{cases}$

Como recordarás el **método de reducción** consiste en eliminar alguna de las incógnitas igualando sus coeficientes pero con signo contrario para que al sumar ecuación con ecuación resulte el coeficiente cero de tal incógnita y así se elimine.
Multiplica la segunda ecuación por -2 y réstala de la primera. Escribe el procedimiento y el resultado:
La ecuación que te debió resultar es: $\mathbf{-2x_2 - 2x_3 = -12 \ \ldots(4)}$
Tratemos ahora con el mismo procedimiento a las ecuaciones (2) y (3):

$$1x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 38 \ \text{... (2)}$$

$$3x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 56 \ \text{... (3)}$$

Multiplica la ecuación (2) por -3 y súmala con la (3). Escribe el procedimiento y el resultado:
La ecuación que te debió resultar es: $\mathbf{-12x_2 - 5x_3 = -58 \ \ \ldots(5)}$
Con las ecuaciones (4) y (5), obtenemos al sistema de ecuaciones **2x2**:
$\begin{cases} -2x_2 - 2x_3 = -12 \ \text{...(4)} \\ -12x_2 - 5x_3 = -58 \ \text{...(5)} \end{cases}$, al cual le aplicamos nuevamente el método y encontramos los valores de x_2 y x_3.

Resuelve el sistema anterior y escribe tus resultados. Termina de resolver el sistema 3x3 que se planteó al principio de esta actividad. Compara tu solución con la que obtuvimos cuando solucionamos este mismo problema por el método de sustitución.
Haz un resumen explicando el método de reducción para un sistema 3x3.

ACTIVIDAD 8.

Dado el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} x - y - 4z = 3 \ \cdots\cdots(1) \\ 2x - 3y + 2z = 0 \ \cdots\cdots(2) \\ 2x - y + 2z = 2 \ \cdots\cdots(3) \end{cases}$

Despeja a **x** de la ecuación (1) $\begin{cases} \underline{\hspace{4cm}} \ \cdots\cdots(1) \\ 2x - 3y + 2z = 0 \ \cdots\cdots(2) \\ 2x - y + 2z = 2 \ \cdots\cdots(3) \end{cases}$

Sustituye el valor de **x** de la ecuación (1) en las otras dos para obtener el sistema equivalente

$$\begin{cases} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ 2(\_\_\_\_\_\_\_\_) - 3y + 2z = 0 \\ 2(\_\_\_\_\_\_\_\_) - y + 2z = 2 \end{cases}$$, simplifica donde sea posible: $$\begin{cases} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

Despeja a **y** de la segunda ecuación: $$\begin{cases} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ y + 10z = -4 \end{cases}$$

Sustituye el valor de **y** de la segunda ecuación en la tercera se obtiene el sistema equivalente

$$\begin{cases} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ (\_\_\_\_\_\_\_\_) + 10z = -4 \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de **z** obtenido de la tercera ecuación en la segunda, se encuentra el valor de **y**

Sustituyendo los valores de **y** y **z** de la segunda y tercera ecuaciones en la primera obtenemos el valor de **x.**

El conjunto de soluciones del sistema es: (,   ,   )

Comprueba las soluciones sustituyendo estos valores en cada una de las ecuaciones originales.

FORMA TRIANGULAR

De hecho los métodos algebraicos para resolver sistemas de ecuaciones lineales consisten en transformar al sistema dado a una **forma triangular**.

Veamos primero qué es una forma triangular.

Un sistema es "**triangular**" si:

1) Una de las ecuaciones del sistema nos da directamente el valor de una de las incógnitas.
2) Después de sustituir este valor en una segunda ecuación, se determina el valor de una segunda incógnita.
3) Después de sustituir estos dos valores en una tercera ecuación, se determina una tercera incógnita.

Ejemplo forma triangular:

$3x = 12$ (1)
$2x + y = 13$ (2)
$3x - 2y + 4z = 14$ (3)

La primera ecuación nos da "directamente" el valor de **x = 4**.

Sustituyendo este valor en la segunda ecuación obtenemos el valor de una segunda incógnita: 2(4) + y = 13 → 8 + y = 13 → **y = 5**.

Al sustituir los dos valores anteriores en una tercera ecuación se determina la tercera incógnita: 3(4) – 2(5) + 4z = 14 → 2 + 4z = 14→ 4z = 12 → **z = 3**.

Si analizamos la solución al sistema de ecuaciones en la **Actividad 6** tenemos que transformamos al sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 + 6x_3 = 64 \quad ...(1) \\ 1x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 38 \quad ...(2) \\ 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 56 \quad ...(3) \end{cases}$$

Obteniendo primero al sistema $\begin{cases} -2x_2 - 2x_3 = -12 \quad ...(4) \\ -12x_2 - 5x_3 = -58 \; ...(5) \end{cases}$, el cual al resolverlo nos da como resultado, si eliminamos a x_2, (aplicando el método de reducción multiplicando la ecuación (4) por - 6):

$$\begin{array}{r} 12x_2 + 12x_3 = 78 \\ -12x_2 - 5x_3 = -58 \\ \hline \end{array}$$

$0x_2 + 7x_3 = 14$; la que al simplificarla queda: $7x_3 = 14$, de donde $\mathbf{x_3 = 2}$

Así, podemos tener la forma triangular, con la ecuación $7x_3 = 14$, escogiendo después cualquiera de las ecuaciones (4) o (5) y cualquiera de (1), (2), (3), por ejemplo:

$$\begin{array}{l} 7x_3 = 14 \\ -2x_2 - 2x_3 = -12 \\ 2x_1 + 8x_2 + 6x_3 = 64 \end{array}$$

De la primera ecuación de este sistema: $\mathbf{x_3 = 2}$ (como ya vimos)
Sustituyendo este valor en la segunda ecuación: $-2x_2 - 2(2) = -12$; entonces $\mathbf{x_2 = 4}$.
Sustituyendo estos dos valores en la tercera ecuación: $2x_1 + 8(4) + 6(2) = 64$, por lo tanto, $2x_1 = 20$; entonces $\mathbf{x_1 = 10}$

Es claro que también podríamos tener la forma triangular:

$$\begin{array}{l} 2x_1 + 8x_2 + 6x_3 = 64 \\ -2x_2 - 2x_3 = -12 \\ 7x_3 = 14 \end{array}$$

Y la solución del sistema sería la misma.

El transformar a un sistema de ecuaciones a una forma triangular se le conoce como **método de Gauss**, o también **método de cascada**.

EJERCICIO 3.
Establece una forma triangular equivalente al siguiente sistema:
$x_1 + x_2 + x_3 = 11$
$2x_1 – x_2 + x_3 = 5$
$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 24$

SOLUCIONES DE SISTEMAS DE ECUACIONES 3x3.
Como ya lo dijimos anteriormente, en los sistemas lineales ocurren cualquiera de tres casos: **I.** Sistemas con una solución; **II.** Sistemas con infinidad de soluciones; **III.** Sistemas sin solución. Hasta este momento hemos visto sistemas 3x3 con **una solución**, esto es, un punto (s_1, s_2, s_3). Veamos ahora los otros dos casos.

ECUACIONES 3x 3 CON INFINIDAD DE SOLUCIONES.
Podemos tener un sistema 3x3 **que tenga infinidad de soluciones**, esto es:
1. Que el sistema se represente gráficamente en tres planos con **una recta común a los tres planos**, en cuyo caso la solución para el sistema serían todos los puntos de la recta (infinidad de puntos y por tanto **infinidad de soluciones**).
2. O bien un sistema de ecuaciones en el que cada ecuación represente **al mismo plano**, por lo cual las soluciones del sistema serían todos los puntos de tal plano (todos los puntos de ese plano hacen verdaderas a las tres ecuaciones). Por lo tanto el sistema tendrá **infinidad de soluciones**.

En cualquiera de los dos incisos anteriores tendremos infinidad de soluciones. Veamos una actividad.

ACTIVIDAD 9.
Tomemos al siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{ll} y + 2z = -3 & (1) \\ 2x - 4y + 6z = 2 & (2) \\ x - 3y + z = 4 & (3) \end{array}\right\} \text{ También se podría simbolizar: } \left\{\begin{array}{l} x_2 + 2x_3 = -3 \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 2 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 4 \end{array}\right.$$

Usemos la primera simbolización y apliquémosle un método de solución que ya vimos:

Despeja a **y** de la primera ecuación: ________________________

Sustituye el valor de **y** en la segunda y tercera ecuación, con lo que tendrás un sistema **2x2** con las incógnitas **x**, **z**. Simplifica las ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{l} \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} \\ \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} \end{array}\right. \text{, simplificación: } \left\{\begin{array}{l} \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} \\ \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} \end{array}\right.$$

¿Qué puedes decir de la solución del sistema anterior?

Tal vez te diste cuenta que las dos últimas ecuaciones que encontraste representan **al mismo plano**: $x + 0y + 7z = -5$, por lo cual este sistema 2x2 tendrá **infinidad de soluciones**, lo cual ocasiona que el sistema 3x3 tenga a su vez infinidad de soluciones.

Si queremos obtener **algunas de tales soluciones** podemos despejar **x** de la última ecuación que obtuvimos: x = - 7z – 5; sabemos además que: y = - 3 -2z. Por lo anterior, si damos un valor arbitrario (el que queramos) a **z**, por ejemplo 5, tendremos:

z = 5
y = - 3 – 2(5), entonces: y = - 13
x = - 7(5) – 5, entonces: x = - 40

De donde, **una** solución al sistema original 3x3 es; (- 40, -13, 5). Comprueba lo anterior en el sistema 3x3 original.

Encuentra al menos cuatro triadas más que solucionen al sistema y comprueba tus resultados.

En general, si queremos generalizar la solución del sistema original planteado, podemos decir que **su solución** es:

$$\left.\begin{array}{l} z = \lambda \\ y = -3 - 2\lambda \\ x = -7\lambda - 5 \end{array}\right\}$$

En donde **λ** es un número real cualquiera.

Otra forma de simbolizar la infinidad de soluciones es: (- 7**λ** – 5, - 3 - 2**λ, λ**)

Analiza esta actividad y contesta: ¿en qué circunstancias un sistema 3x3 tiene infinidad de soluciones? ¿Cómo puedes encontrar algunas de esas soluciones?

ECUACIONES 3x3 SIN SOLUCIÓN.

Además de tener sistemas 3x3 con una solución o bien con infinidad de soluciones (como te debes de acordar estos dos casos se llaman **sistemas compatibles o consistentes**), podemos tener sistemas 3x3 **sin solución** (que llamamos **incompatibles o inconsistentes**). Veamos al respecto la siguiente actividad.

ACTIVIDAD 10.

Tomemos al siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{ll} 2x + 4y + 6z = 18 & (1) \\ 4x + 5y + 6z = 24 & (2) \\ 2x + 7y + 12z = 40 & (3) \end{array}\right\} \text{También se podría simbolizar:} \left\{\begin{array}{l} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 18 \\ x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24 \\ 2x_1 + 7x_2 + 12x_3 = 40 \end{array}\right.$$

Usemos la primera simbolización y apliquémosle un método de solución que ya vimos:

Despeja a **y** de la primera ecuación: ________________________

Sustituye el valor de **y** en la segunda y tercera ecuación, con lo que tendrás un sistema **2x2** con las incógnitas **x**, **z**. Simplifica las ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{l} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{array}\right. \text{, simplificación: } \left\{\begin{array}{l} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{array}\right.$$

Resuelve el sistema último que obtuviste (tal vez el método más conveniente sea el de reducción).

¿Qué puedes decir de la solución del sistema anterior?

Al resolver el sistema 2x2, te debió quedar un resultado como **0 = 4, ¡lo cual es un resultado que en ningún caso es cierto!** Como te acordarás, en casos como estos la conclusión es que el sistema no tiene solución, lo cual nos lleva a decir que **el sistema 3x3 no tiene solución**.

Analiza esta actividad y contesta: ¿en qué circunstancias un sistema 3x3 no tiene solución?

SECCIÓN 5. SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES 2X2:
a) Con una ecuación lineal y otra cuadrática.
b) Con ambas ecuaciones cuadráticas.
c) El significado gráfico de su solución.
d) Método de sustitución.

Al finalizar esta sección:

- En el caso de sistemas 2x2, ya sea que ambas ecuaciones sean lineales o incluyan cuadráticas, explicaras a partir de una gráfica, qué significa que el sistema tenga una, ninguna o infinidad de soluciones.
- Para sistemas de ecuaciones 2x2 con ambas ecuaciones cuadráticas (dos parábolas, dos circunferencias, o una y una), trazarás un bosquejo que ilustre cómo están colocadas las graficas y, en consecuencia, cuántas soluciones tendrá el sistema.

Existen **sistemas de ecuaciones que no son lineales**; basta con que una ecuación del sistema sea no lineal, esto es, basta con que una ecuación **no tenga la forma** $\mathbf{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = c_1}$

Para analizar un sistema no lineal veamos la siguiente actividad.

ACTIVIDAD 11.
Establece **un sistema de ecuaciones** que represente al siguiente problema: "Un alambre de 72 cm de largo es doblado para formar un triángulo rectángulo. Sabemos que la hipotenusa del triángulo mide 32 cm. Encuentra la medida de cada cateto. Considera que el alambre es sumamente delgado". **No es necesario que resuelvas el sistema de ecuaciones**.

El sistema que obtuviste es un **sistema no lineal**; veamos algunas ideas para resolverlo.

Por ejemplo, un **sistema no lineal** es: $\begin{cases} 2x^2 + 4x + y = 12 \cdots (1) \\ 6x + 3y = 9 \cdots (2) \end{cases}$

En donde la primera ecuación no es lineal y la segunda si lo es.

Utilicemos el **método de igualación** para resolver este sistema:

Despejemos **y** en la primera ecuación: $y = -2x^2 - 4x + 12$
Despejando **y** en la segunda ecuación, tenemos: $y = -2x + 3$

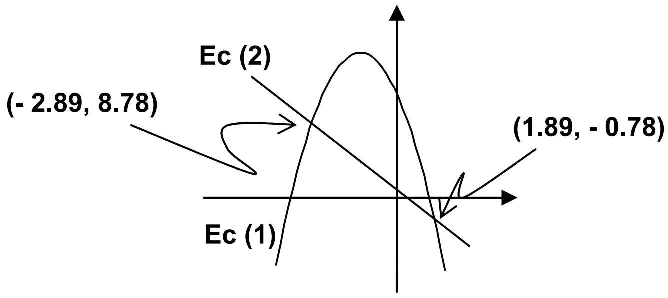
Sistema equivalente al original

Igualando el valor de **y**: $-2x + 3 = -2x^2 - 4x + 12$; como es una ecuación de segundo grado es conveniente convertirla a la **forma $ax^2 + bx + c = 0$** para poder aplicar a la fórmula: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$; así pues igualemos la ecuación a cero: $-2x + 3 + 2x^2 + 4x - 12 = 0$, simplificando: $2x^2 + 2x - 11 = 0$. Aplicando la fórmula: $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(2)(-11)}}{2(2)} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+88}}{4} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{92}}{4} \approx \dfrac{-2 \pm 9.59}{4}$, de donde obtenemos los valores: $\mathbf{x_1 = 1.89}$; $\mathbf{x_2 = -2.89}$, con los cuales sustituyendo estos valores en cualquiera de las ecuaciones del sistema equivalente obtenemos: $\mathbf{y_1 = -0.78}$; $\mathbf{y_2 = 8.78}$. Así pues, la solución del sistema son los valores **(1.89, -0.78), (-2.89, 8.78)**

Veamos ahora cual es la **representación gráfica** del sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{ll} 2x^2 + 4x + y = 12 & \ldots(1) \\ 6x + 3y = 9 & \ldots(2) \end{array}\right\} \quad \text{Sistema equivalente:} \quad \begin{cases} y = -2x^2 - 4x + 12 \\ y = -2x + 3 \end{cases}$$

La primera ecuación representa, según te enseñaron en el curso de segundo semestre, a una parábola abierta hacia abajo; la segunda es una recta:



Los puntos de intersección son la solución del sistema, esto es: los valores:
$\mathbf{x_1 = 1.89, y_1 = -0.78; x_2 = -2.89, y_2 = 8.78}$, vuelven verdaderas a ambas ecuaciones.

Si entendiste el ejemplo anterior resuelve el siguiente ejercicio:

EJERCICIO 4.

Determina la solución del sistema $\begin{cases} x - y = -4 \\ x^2 - 2y = 0 \end{cases}$

ACTIVIDAD 12.

1. Grafica a las ecuaciones $y = x^2$ y $y = -2x^2 + 3$
2. Establece en la gráfica, aproximadamente, cuáles son los puntos en donde se intersectan las gráficas de ambas ecuaciones.
3. Resuelve el sistema de ecuaciones por algún método algebraico.
4. Compara los resultados gráficos con los algebraicos y escribe tus conclusiones.

EJERCICIO 5.
Establece un sistema de ecuaciones lineales 3x3 que no tenga solución.

EJERCICIO 6.
Establece un sistema de ecuaciones lineales 3x3 que tenga infinidad de soluciones.

SECCIÓN 6. PROBLEMAS DE APLICACIÓN

En secciones anteriores se han mostrado ejemplos en los que se aplican sistemas de ecuaciones para resolver problemas. En esta sección te proponemos dos actividades para que te ejercites en la aplicación de sistemas de ecuaciones.

ACTIVIDAD 13.
Una fábrica produce tres tipos de camisas. Cada uno de los tres tipos de camisa tiene que pasar por tres departamentos de producción: corte, cosido y empaque. Según el tipo de camisa, el tiempo de trabajo que se ocupa en cada una está dado en la siguiente tabla:

	Tipo A	Tipo B	Tipo C
Departamento de corte	0.2 hr	0.4 hr	0.3 hr
Departamento de cosido	0.3 hr	0.5 hr	0.4 hr
Departamento de empaque	0.1 hr	0.2 hr	0.1 hr

Los departamentos de corte, cosido y empaque tienen disponibles como máximo 1160, 1560 y 480 horas de trabajo por semana respectivamente. ¿Cuántas camisas de cada tipo debe de producirse a la semana para ocupar al máximo la capacidad de cada departamento?

1. Plantea el sistema de ecuaciones que representa al problema
2. Realiza las operaciones necesarias para tener un sistema equivalente.
3. Aplica alguno de los métodos que se han visto en esta unidad para resolver el sistema
4. Comprueba tus resultados

ACTIVIDAD 14.
La altura de un objeto que se mueve verticalmente en el planeta tierra está dada por la ecuación $\mathbf{h = 0.5at^2 + v_0t + h_0}$; en donde: **a** es la aceleración del objeto, **t** es el tiempo después de iniciado el evento, $\mathbf{v_0}$ es la velocidad inicial del objeto (en el tiempo $\mathbf{t_0}$), $\mathbf{h_0}$ es la altura inicial. Calcula los valores de **a**, $\mathbf{v_0}$ y $\mathbf{h_0}$, si la altura del objeto es 11.1 metros en un segundo, 27 metros en dos segundos, 52.7 metros en tres segundos.

1. Plantea el sistema de ecuaciones que representa al problema
2. Realiza las operaciones necesarias para tener un sistema equivalente.
3. Aplica alguno de los métodos que se han visto en esta unidad para resolver el sistema
4. Comprueba tus resultados

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

1. La alcancía de un niño contiene dos veces más monedas de diez centavos que de cinco centavos y cuatro veces más monedas de un centavo que monedas de cinco. Hay 42 monedas en la alcancía ¿Cuál es el valor total de las monedas?

2. En un local de comida rápida, una orden de 5 hamburguesas, 2 papas fritas y 3 refrescos cuesta 56 pesos. Una orden de 4 hamburguesas, 3 papas fritas y 2 refrescos cuesta 46 pesos. Una orden de 6 hamburguesas, 4 papas fritas y 3 refrescos cuesta 68 pesos ¿Cuál será el precio de una sola hamburguesa con un refresco?

3. Una farmacia vende 10 frascos de vitamina A, 5 frascos de vitamina C y 25 frascos de vitamina D, todo por un valor de 355 pesos. Además, vende 20 frascos de vitamina A, 10 de vitamina C y 10 de vitamina D por un total de 310 pesos. Por otra parte vende 12 frascos de vitamina A, 4 de vitamina C y 15 de vitamina D por un total de 266 pesos. Encuentra el costo correspondiente a cada frasco de las vitaminas A, C y D.

4. Un laboratorista tiene tres soluciones que contienen cierto ácido. La primera solución contiene 10% de sustancia ácida, la segunda 30% y la tercera 50%. Desea utilizar las tres soluciones para obtener una mezcla de 60 litros que contenga 30% de ácido, utilizando tres veces más solución de la solución de 50% que la de 30% ¿Cuántos litros de cada solución debe usar?

5. Una mujer compró tres clases diferentes de acciones por $20,000. Una de ellas paga un 6% anual de intereses, otra paga un 7%, y la otra un 8% anual. Al final del primer año, la suma de los intereses de las acciones al 6% y al 7% es de $940, y la suma de los intereses de las acciones al 6% y al 8% es de $720. ¿Cuánto invirtió en cada una de las acciones?

6. La suma de las áreas de dos cuadrados es $106m^2$. y la suma de sus perímetros es 56m. Determina la medida de los lados de los cuadrados.

7. El perímetro de un rectángulo es 46m. La medida de la diagonal es 17m. Determinar las dimensiones de los lados del rectángulo.

8. ¿Cuáles son los números cuyo producto es 270 y cuyo cociente es 1.2?

9. Un círculo es tangente exteriormente a otro. La suma de sus áreas es de $80\pi\, cm^2$. Determina el radio de cada círculo, sabiendo que sus centros están separados 12cm.

10. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones. En caso de que no tengan solución, argumenta tu respuesta. Cuando tengan soluciones infinitas, encuentra al menos tres de ellas.

a. $\begin{cases} 2x + 4y + 6z = 18 \\ 4x + 5y + 6z = 24 \\ 3x + y - 2z = 4 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 5x - y + z = -1 \\ x + 3y = 7 \\ y = -6 - 2z \end{cases}$

c. $\begin{cases} 3x + z = 7 + y \\ 4x + 2y - 7z = -4 \\ -3z = 14 - 10x \end{cases}$

d. $\begin{cases} x = \frac{3}{4}y - \frac{5}{4}z + \frac{17}{4} \\ 6x + 2y - 3z = 15 \\ 14x - 4y + 9z = 51 \end{cases}$

e. $\begin{cases} y = 2x - 4 \\ 6x - 3y - 12z = 24 \\ x + y + z = -20 \end{cases}$

f. $\begin{cases} -5x + 3y + 2z = 2 \\ 3x + y - 4z = 3 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$

g. $\begin{cases} x = 2y - z - 5 \\ 3x + y - 4z = 8 \\ -5x + 3y + 2z = 2 \end{cases}$

h. $\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 6x_3 = 9 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 6 \\ -x_1 + 16x_2 - 14x_3 = -3 \end{cases}$

i. $\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 = 34 \\ 4x_2 - 3x_3 = 23 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$

j. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases}$

11. Resuelve algebraicamente los siguientes sistemas de ecuaciones no lineales, después gratícalos y ubica la solución gráfica:

a) $\begin{cases} y^2 = 4x \\ x + y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 3x + 4y = 25 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - 2y = 8 \\ x \bullet y = 24 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x \bullet y = 72 \\ x^2 + y^2 = 145 \end{cases}$

BIBLIOGRAFÍA.

1) Phillips, Elizabeth, et al. **Álgebra con Aplicaciones**. Harla.
2) Rees, Paul. Sparks, Fred. **Álgebra Contemporánea**. Mc Graw Hill.
3) Grossman, Stanley. **Álgebra Lineal**. Mc Graw Hill.
4) Larson, Ronald, et. al. **Álgebra intermedia.** Mc Graw Hill.
5) Barnett, Raymond. **Álgebra y Trigonometría**. Mc Graw Hill.
6) Barnett, Raymond. **Precálculo**. Limusa.