UNIDAD 2
SISTEMAS DE COORDENADAS Y LUGARES GEOMÉTRICOS

PROPÓSITOS: Mostrar una visión global del método de la Geometría Analítica como el medio para resolver problemas de corte euclidiano reduciéndolos a problemas algebraicos. Proporcionar los elementos que servirán el las unidades posteriores para emplear el método en situaciones más complejas.

INTRODUCCIÓN

Los griegos desarrollaron la geometría estableciéndola como el primer cuerpo de conocimientos científico. Euclides (del que se sabe que vivió alrededor del año 300 antes de nuestra era), en su obra "Los elementos", logra que a partir de un pequeño grupo de definiciones, postulados y nociones comunes, tales como: "punto es aquello que ya no tiene parte" (definición); "Dado un centro y un radio se puede construir una circunferencia" (postulado) y "Dos cosas iguales a una tercera son iguales entre si" (noción común), y apoyado en la lógica, deduzca cerca de 500 teoremas. Con lo anterior estableció un método, conocido como el método axiomático, mediante el cual logró que todos los conocimientos sobre geometría tuvieran una base sólida. Lo que se trató en las Unidades II, III y IV del curso de Matemáticas II tiene sus bases en esa geometría. La geometría planteada en "Los elementos" es conocida como geometría sintética.

Cuando los griegos desarrollaron la geometría, no existía el álgebra. Francisco Vieta (1540-1603) fue quien escribió el primer libro sobre el tema en 1591. Eso posibilito que Rene Descartes (1596-1650) la utilizara para establecer la relación que se podía dar entre la geometría y el álgebra, estableciendo la Geometría Analítica.

Descartes llegó a la conclusión de que las leyes de la naturaleza eran leyes de la mecánica, por lo que todo en la naturaleza podría ser reducido a las ecuaciones que describieran dichas leyes. Propuso como ideal de toda ciencia teórica, construir a partir del menor número de principios un sistema que cubriera todos los hechos conocidos y que condujera a nuevos descubrimientos. Como es claro, propone lo que hizo Euclides para la geometría, como un fin de toda ciencia. Isaac Newton (1643-1727) logró este propósito con la física, en particular con su obra *Philosophiae naturalis principia mathematica,* de 1687, en la cual además funda el Cálculo Diferencial e Integral.

En su obra: "Reglas para la dirección del Espíritu", describe su concepción de ciencia y su método para obtenerla. En el "Discurso del método", publicado en 1637, incluye como ejemplos de la potencia del método tres investigaciones: "Meteoros", "Dioptrías" y "Geometría". Es ahí en donde se encuentran las ideas centrales de lo que ahora conocemos como Geometría Analítica, En la historia de las Matemáticas puede verse claramente que los distintos conceptos y teorías, como los de variable, función y Geometría Analítica, no surgieron en su forma definitiva ni en la mente de Galileo, Newton o Descartes, ni de cualquier otro matemático. Estos conceptos y teorías los intuyeron muchos matemáticos y gradualmente fueron tomando formas más definitivas, precisas y generales.

El nuevo período de la matemática, que comienza en el siglo XVII, puede ser definido como el período del nacimiento y desarrollo del análisis. La creación y desarrollo de una teoría -y tanto más de una rama completa de la ciencia, como la del análisis matemático- requieren que los nuevos conceptos cobren una actividad propia, es decir, que entre ellos se descubran nuevas relaciones que permitan la solución de nuevos problemas.

Es más, un nuevo concepto puede nacer, desarrollarse, comprenderse y precisarse sobre la base de los problemas que permite resolver. El primer paso definido hacia la matemática de las magnitudes variables fue la aparición de la "Geometría" de Descartes. Las ideas básicas de Descartes son las siguientes: supongamos que nos dan, por ejemplo la ecuación

$$x^2 + y^2 = 5^2$$

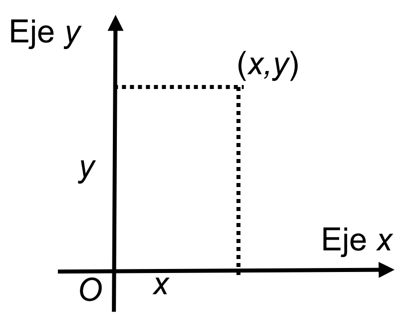
Consideró a x y y como variables, por lo que la anterior ecuación expresa, en este sentido, la interdependencia de dos variables. Tal ecuación puede escribirse en forma general, pasando todos sus términos al primer miembro:

$$F(x, y) = 0$$

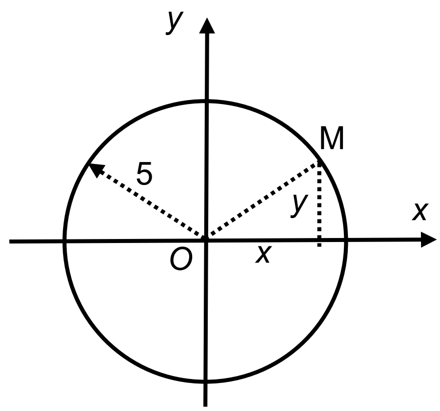
es decir,

$$x^2 + y^2 - 5^2 = 0$$

Además, Descartes introdujo en el plano las coordenadas x, y, que ahora llamamos coordenadas cartesianas en su honor.



De este modo a cada par de valores x y y corresponde un punto, y recíprocamente, a cada punto corresponde un par de coordenadas x, y. Así, la ecuación $F(x, y) = 0$ determina el lugar geométrico de los puntos del plano cuyas coordenadas satisfacen la ecuación. Por ejemplo, la ecuación escrita anteriormente determina la circunferencia de radio 5 y centro en el origen. En efecto, como se ve en la de abajo, $x^2 + y^2$ es, por el teorema de Pitágoras, el cuadrado de la distancia del origen O al punto M de coordenadas (*x*,*y*). Así la ecuación $x^2 + y^2 = 5^2$ representa el lugar geométrico de los puntos cuya distancia al origen es igual a 5, y este lugar es una circunferencia.



Como puede verse, el desarrollo de la Geometría Analítica necesitó para desarrollarse y resolver problemas, un sistema de referencia. En las gráficas anteriores dicho sistema corresponde al plano cartesiano o plano de coordenadas rectangulares.

Dentro de la Geometría Analítica, se puede hablar, por ejemplo, de los sistemas de referencia cartesiano o sistema de coordenadas rectangulares y el sistema coordenadas polares, ambos sistemas nos permiten fijar la posición de los puntos en dicho plano. A continuación explicaremos cada uno de estos sistemas.

SECCIÓN 1. ESTUDIO ANALÍTICO DE UN PUNTO EN EL PLANO.

Se reconocerán a los planos cartesiano y polar como sistemas de referencia necesarios para el estudio de puntos y en general para el estudio de todos los elementos de la Geometría analítica. Se analizaran las coordenadas cartesianas y coordenadas polares de un punto y su relación entre ellas, es decir, cómo transformar las coordenadas cartesianas de un punto a coordenadas polares y viceversa.

Ahora para comprender mejor los conceptos, te invitamos a realizar cada una de las siguientes Actividades. Es muy importante que durante el desarrollo de cada una de ellas vayas comparando tu solución con las de tus compañeros, al igual de que si tienes dudas le preguntes a tu profesor.

EL SISTEMA DE COORDENADAS RECTANGULARES

El plano cartesiano tiene dos ejes perpendiculares (eje *x* o eje de las abscisas y eje *y* o eje de las ordenadas), los cuales en donde se cortan forman un ángulo de 90^0, por ser perpendiculares y a su punto de intersección se le conoce como origen del plano. Los dos ejes dividen al plano en cuatro regiones llamadas cuadrantes. En este plano cartesiano, cada punto se representa por medio de una pareja de números (*x,y*), llamada pareja ordenada debido a que por ejemplo (2,3)

≠ (3,2). Así, cada punto está determinado por sus coordenadas (*x,y*), en donde *x* es llamada la abscisa y *y* la ordenada del punto. Así pues, el punto P(2,5) se encuentra en donde el valor de la abscisa es 2 y el de la ordenada 5. Todo lo anterior se encuentra representado en la figura de abajo.

ACTIVIDAD 1.

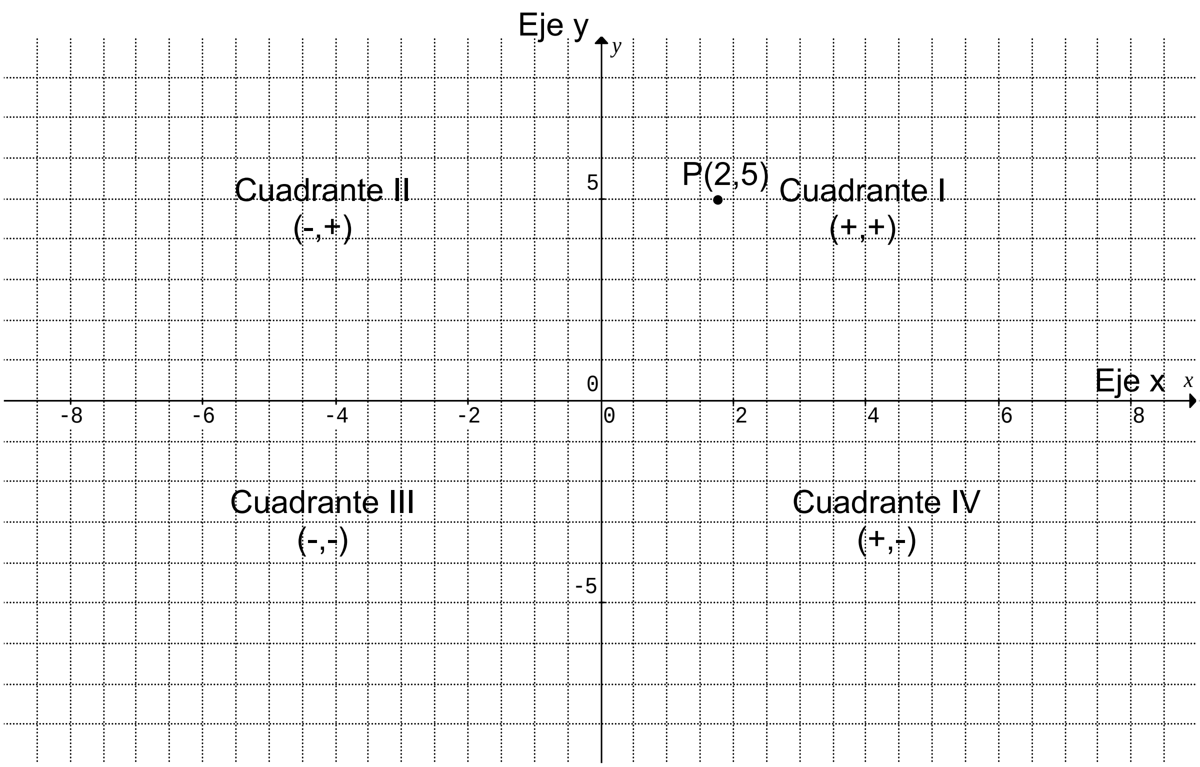
1. En el plano cartesiano localiza y dibuja los siguientes puntos:

a) A(-3,2)	b) B(-3,0)	c) C(-3,-1)	d) D(-3,-2)
e) E(-2,1)	f) F(-4,5)	g) G(1,2)	h) H(0,3)
i) I(-2,0)	j) J(5,0)		

2. En qué cuadrante se encuentra cada uno de los siguientes puntos:

a) (-1000,8) b) $(5/3, \sqrt{2})$ c) (0,6) d) (-3,1) e) (0,0)

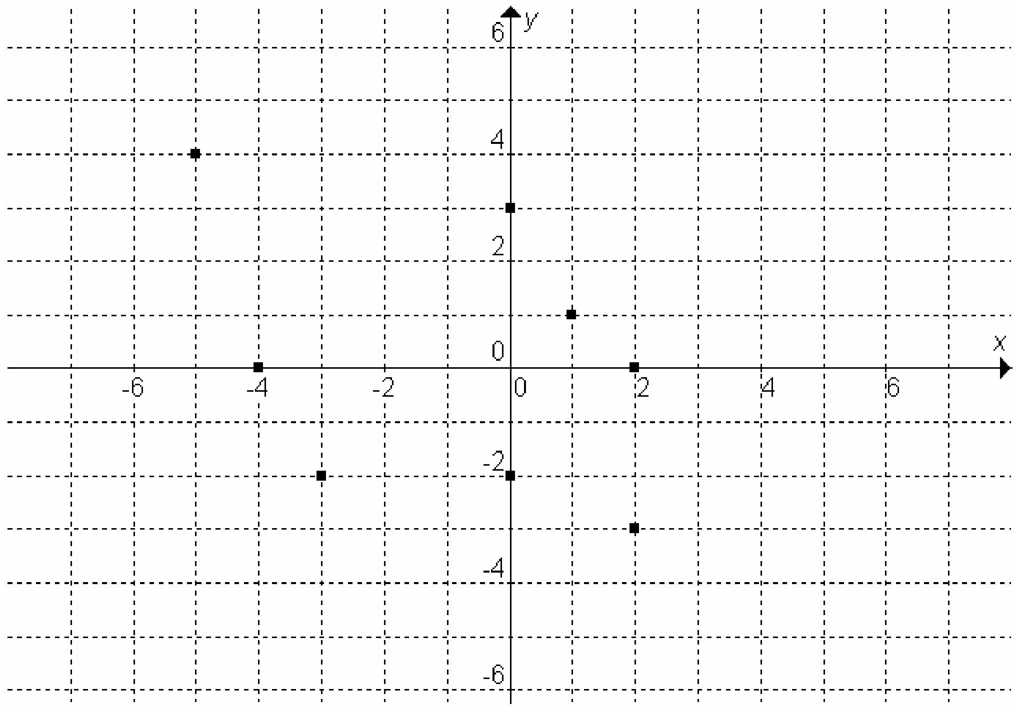
PLANO CARTESIANO



En el caso de las respuestas a los incisos c, d y e, del problema 2, se encuentran sobre el eje *x*, sobre el eje *y* y en el origen.

Observación. Todo punto del plano tiene una representación única (*x*,*y*), la cual se puede determinar al establecer el valor de la abscisa y ordenada del punto en el plano. De manera análoga, a toda representación (*x*,*y*) le corresponde un punto único en el plano, y se puede determinar al establecer el lugar en el plano que tiene abscisa *x* y ordenada *y*.

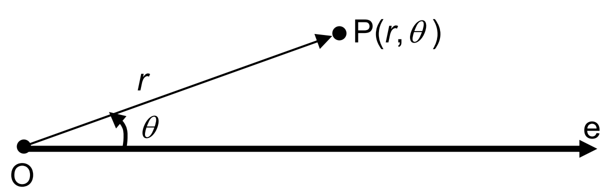
ACTIVIDAD 2.
En el siguiente plano cartesiano encuentra los valores de las coordenadas de los puntos que se muestran y asígnale a cada punto una letra mayúscula para su identificación.



El plano cartesiano, como ya lo dijimos, no es el único plano para representar puntos, hay otros sistemas, de los cuales sólo hablaremos, someramente, del sistema de coordenadas polares.

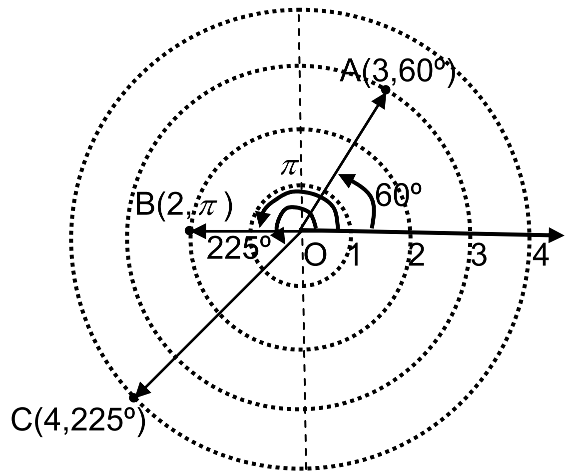
EL SISTEMA DE LAS COORDENADAS POLARES.
En el sistema de las coordenadas polares se necesita un ángulo θ y una distancia *r*. Para medir el ángulo necesitamos los siguientes elementos de referencia: un punto fijo llamado **polo** y denotado con la letra **O** y una semirrecta dirigida que parte del origen, llamada **eje polar** y denotada con la letra **e**, como se muestra en la figura

PLANO POLAR

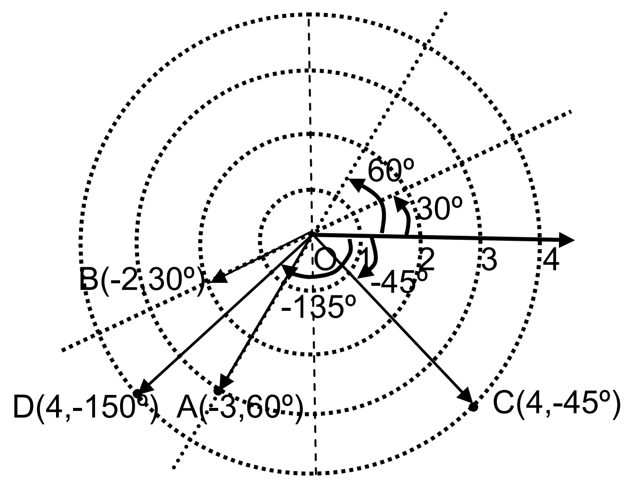


A la distancia dirigida del polo al punto P(r,θ) se le llama **radio vector del punto** y al ángulo θ **ángulo polar**, o bien **argumento**.

A continuación te mostramos la gráfica de tres puntos en el eje polar: A(3,60º), B(2, π) y C(225º,4). Analiza cuidadosamente su gráfica e intenta comprender la manera en que se gráfica cualquier punto P(r,θ) de esas características.

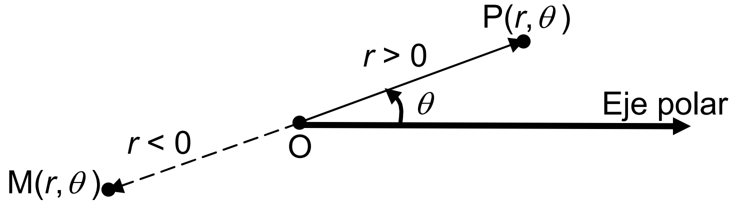


También es posible que el radio vector sea negativo, al igual que el ángulo polar. Observa cuidadosamente la gráfica de los puntos: A(-3,60º). B(-2,30º), C(4,-45º). D(4,-150º).

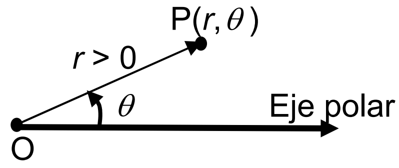


De lo anterior podemos concluir que:

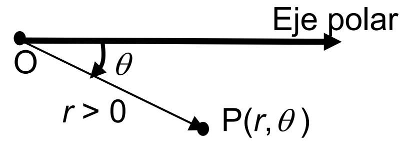
a) Si r es positiva y θ positiva, entonces se traza el radio vector, de magnitud r, a partir del polo y con el ángulo polar dado, quedando así ubicado el punto (r,θ). Si r es negativa y θ positiva, el radio vector se traza en sentido contrario a lo que se hace cuando r es positiva. A continuación te mostramos un dibujo donde se representa lo escrito.



b) Como pudiste observar, si el ángulo θ es positivo, se mide a partir del eje polar en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj y en el sentido de las manecillas del reloj cuando es negativo, como muestra a continuación. En ambos casos hemos supuesto que el radio vector es positivo.



$r > 0$ y $\theta > 0$



$r > 0$ y $\theta < 0$

El argumento se puede medir o dar en **medidas angulares**, grados, o en **medidas circulares**, radianes.

LOCALIZACIÓN DE UN PUNTO EN EL PLANO POLAR.

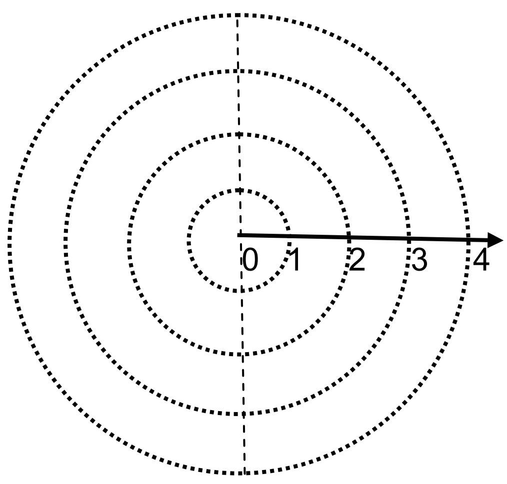
Después de haber comprendido lo anterior, no te será difícil entender el procedimiento que se te propone con el fin de localizar puntos en el plano polar.

Si deseas localizar el punto P(r, θ), una forma de hacerlo es:

1) Traza una circunferencia de radio r con centro en O.
2) Después traza una línea con un ángulo de inclinación θ, considerando su signo.
3) Por último localiza el punto de intersección entre la circunferencia y la recta, tomando en cuenta el signo de r. Este será el punto P(r, θ).

ACTIVIDAD 3.

En la siguiente figura se han trazado circunferencias de radio 1, 2, 3 y 4, y el plano polar, en Ella localiza los siguientes puntos A(1,90°), B(1,135°), C(1,-120°), D(-1,-135°) y E(-1,225°). En caso de tener dudas pregúntale a tu profesor, para que te ayude.

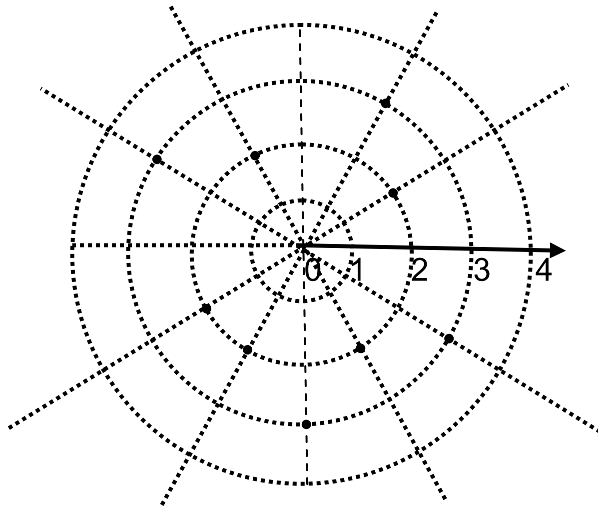


EJERCICIO 1.

En la figura anterior localiza además los siguientes puntos F(2,90°), G(3,135°), H(2,-120°), K(-3,-135°) y M (-4,225°).

EJERCICIO 2.

Encuentra las coordenadas polares de los puntos que se muestran en el siguiente plano polar y asígnale a cada punto una letra mayúscula para su identificación.



Con el fin de que puedas realizar la transformación de grados a radianes y de radianes a grados te mostramos el siguiente procedimiento, basado en que:

$$2\pi \text{ rad} = 360^{\circ}$$

1) Como 2π rad = 360º, entonces 1rad = 360º/2π. Lo anterior se obtiene al dividir ambas extremos del signo igual por 2π.

2) A partir de que 1rad = 360º/2π, si multiplicamos ambos lados por *x* obtendremos:

$$x \text{ rad} = x\frac{360^0}{2\pi}$$

esta relación nos sirve para transformar *x* radianes a grados.

3) De igual forma, si a 2π rad = 360º la dividimos por 360 obtendremos 2π rad/360 = 1º. Lo cual al simplificarlo queda como π rad/180 = 1º, o bien que 1º = π rad/180. Finalmente, si multiplicamos ambos lados por *x* obtendremos:

$$x^{\circ} = x\frac{\pi}{180}\text{rad}$$

la cual nos permitirá transformar x grados en sus respectivos radianes.

Realiza lo que se te pide en cada uno de los siguientes enunciados.

EJERCICIO 3.

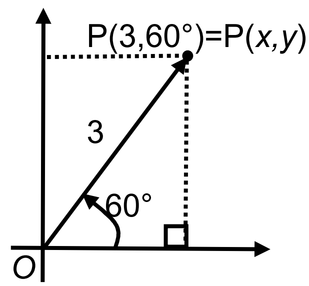
Localiza los puntos M $(2, \frac{\pi}{4})$, N $(1, \frac{\pi}{12})$ y P $(-3, \pi)$ en el plano polar.

RELACIÓN ENTRE COORDENADAS CARTESIANAS Y POLARES

Es conveniente poder transformar las representaciones gráficas del plano cartesiano al polar, del polar al cartesiano, así como las representaciones algebraicas asociadas a cada una de ellas. En muchas ocasiones el hacer esto permite resolver más fácilmente el problema que se este tratando.

¿Qué coordenadas le corresponderán al punto (3,60°) del plano polar en el plano cartesiano?
Para contestar la pregunta dibujaremos el punto en un plano en el cual se encuentren las dos representaciones superpuestas.

En el plano cartesiano los valores correspondientes a la absisa y la ordenada los podremos encontrar utilizando las funciones trigonométricas seno y coseno como sigue:



$\text{sen}60° = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{y}{3}$, de donde

$y = 3\text{sen}60° \approx 2.598$

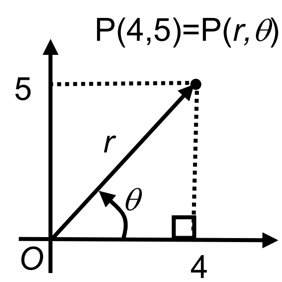
$\cos 60° = \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotesusa}} = \dfrac{x}{3}$, por lo que

$x = 3\cos 60° = 1.5$

Así pues, el punto (3,60°) del plano polar se transforma en el punto (3cos60°,3sen60°) del plano cartesiano.

Ahora bien, ¿y el punto (4,5) del plano cartesiano cómo quedará representado en el plano polar? Sigamos un procedimiento análogo. Dibujemos el punto en una gráfica en donde subsistan los dos planos.

En este caso, nuestro problema es encontrar los valores del radio vector y del ángulo polar correspondientes al punto (4,5) en el plano cartesiano. ¿Cómo determinaremos el valor de *r*? Claro, utilizando el teorema de Pitágoras. Y el valor de θ? Utilizando la función trigonométrica tangente.



Pasemos a hacerlo:

$$r^2 = 4^2 + 5^2\text{, de donde } r = \sqrt{41} \approx 6.4$$

$$\tan\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{5}{4}\text{, por lo que } \theta = \tan^{-1}\left(\frac{5}{4}\right) \approx 51.34°$$

Por lo anterior, podemos afirmar que el punto (4,5) del plano se transforma en el punto ($\sqrt{41}$,$\tan^{-1}(\frac{5}{4})$) en el plano polar.

EJERCICIO 4.

Determina la representación gráfica y como pareja en el plano cartesiano de los puntos indicados en el plano polar: A (1,45°), B(-4,30°) y C(5,-60°).

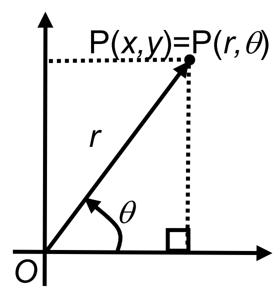
ACTIVIDAD 4.

Encuentra la representación gráfica y como pareja en el plano polar de los puntos indicados en el plano cartesiano: A(4,-4), B(-3,4) y C(8,3).

Ahora pasemos a determinar, de manera general, cómo se transforma la representación de un punto en coordenadas polares a coordenadas cartesianas y viceversa. Completa los pasos que no lo están.

a) Primero vamos a transformar el punto (*x,y*) en el plano cartesiano al punto (*r,θ*) en el plano polar.

Para auxiliarnos trazamos la gráfica del punto en los dos planos superpuestos.



Utilizando el teorema de Pitágoras obtenemos que:

$$r^2 =$$

de donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

Como sabemos, $\tan\theta =$, por lo que

$$\theta = \tan^{-1}(\frac{y}{x})$$

Hemos encontrado que el punto (*x,y*) en el plano cartesiano se transforma en el punto ($\sqrt{x^2 + y^2}$,$\tan^{-1}(\frac{y}{x})$) en el plano polar.

b) Pasemos a transformar el punto (*r,θ*) en el plano polar al punto (*x,y*) en el plano cartesiano.

Podemos utilizar la figura anterior considerando que ahora tenemos como información al punto (*r,θ*). De ahí, usando las funciones trigonométricas seno y coseno obtendremos:

$\cos\theta =$, de donde $x = r\cos\theta$

$\text{sen}\theta =$, por lo que $y = r\,\text{sen}\theta$

Por lo tanto, el punto (*r,θ*) en el plano polar se transforma en el punto ($r\cos\theta, r\,\text{sen}\theta$) en el plano polar.

EJERCICIO 5.

Determina las transformaciones que se te piden en los dos primeros problemas utilizando lo que hemos encontrado.

EJERCICIO 6.

Encuentra las coordenadas polares y realiza su interpretación gráfica en ambos planos sobrepuestos de los siguientes puntos.

a) A(3,4) b) B (1,1) c) C(-2,3) d) D(2,-3)
e) E(2,-1) f) F (-1,-1) g) G(-2,-3)

EJERCICIO 7.

Encuentra las coordenadas cartesianas y realiza su interpretación gráfica en ambos planos sobrepuestos.

a) A(3,45°) b) B (1,30°) c) C(-2,30°) d) D(2,135°)
e) E(2,-30°) f) F(-1,-225°) g) G(-2,60°)

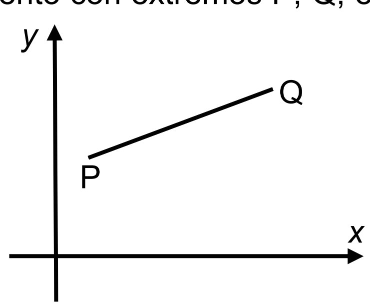
Nota. En todo lo que sigue sólo se hablará del plano cartesiano y por tanto de coordenadas cartesianas o rectangulares, es decir, ya no se hablará de las coordenadas polares.

SECCIÓN 2. ESTUDIO ANALÍTICO DE UN SEGMENTO RECTILÍNEO EN EL PLANO CARTESIANO.

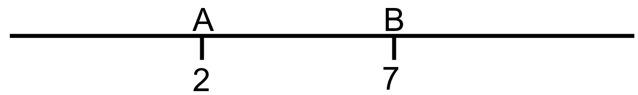
Pretendemos que en esta sección aprendas a localizar un segmento rectilíneo en el plano cartesiano, la longitud del segmento, la distancia entre dos puntos, la inclinación del segmento, concepto de pendiente, la razón en que un segmento es dividido por uno de sus puntos y las coordenadas del punto que divide al segmento en una razón dada.

Cuando sobre una recta señalamos dos puntos, digamos P y Q, se le llama **segmento** al conjunto de puntos comprendidos entre esos puntos, incluyéndolos. A los puntos P y Q se les llama extremos del segmento.

Así, un segmento queda determinado por sus extremos y se le puede graficar uniéndolos por medio de un trazo recto. La longitud del segmento es igual a la distancia que existe entre sus extremos en línea recta. A continuación te mostramos la gráfica de un segmento con extremos P, Q, el cual se designa como PQ o QP.



Cuando la recta es horizontal se tiene lo siguiente: Sean A y B dos puntos en una línea horizontal, como se muestra en la figura, la longitud del segmento AB se obtiene a través de $d_{AB} = |B - A| = |7-2| = 5$, o bien $d_{BA} = |A - B| = |2-7| = |-5| = 5$, en donde $|B - A|$ se lee como: *"el valor absoluto de B menos A"*.



Como habrás observado, el valor absoluto aplicado a un número lo transforma a positivo si no lo era. La manera matemática en que se expresa el valor absoluto de un número es la siguiente:

$$|a| = \begin{cases} a \text{ si } a \geq 0 \\ -a \text{ si } a < 0 \end{cases}$$

ACTIVIDAD 5.

Dados los extremos A y B que se indican, determina la longitud del segmento que forman en cada caso.

1. A = 3 y B = 9
2. A = -3, B = 7
3. A = -10 y B = -13
4. A = 1 y B =-12
5. A = 1/3 y B = -1/2
6. A = 3/7 y B = 5/4
7. A = m y B = m/3, en donde m > 0.

Como habrás observado, los puntos con los que se trabajo para encontrar la longitud de un segmento estaban sobre la recta real. Ahora pasaremos a encontrar la longitud de un segmento cuando se encuentran sus extremos en el plano cartesiano.

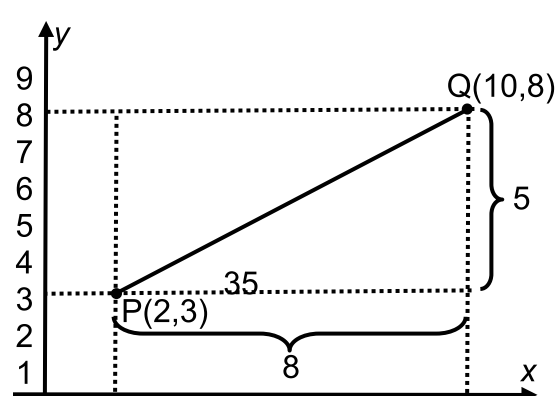
ACTIVIDAD 6.

Completa los pasos que son necesarios para encontrar la longitud de los segmentos que se indican.

Determina la longitud del segmento definido por los puntos P(2,3) y Q(10,8). Dibuja su gráfica para comprender mejor como se resuelve.

Con base en la gráfica puedes observar que para determinar la longitud del segmento PQ será necesario en este caso utilizar el teorema de Pitágoras, aprovechando que se forma un triángulo rectángulo de base 8 y altura 5. Así pues, la longitud del segmento PQ está dada por:

$$d_{PQ} = \sqrt{\qquad\qquad} = \sqrt{89} \approx 9.43$$

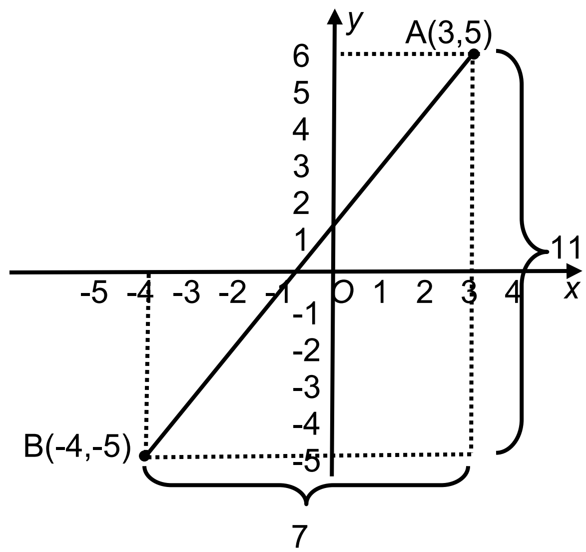


ACTIVIDAD 7.
Determinar la longitud del segmento definido por los puntos A(3,6) y B(-4,-5). Realiza un dibujo.

El triángulo rectángulo que hemos formado con las líneas auxiliares trazadas, nos lleva a determinar, utilizando el teorema de Pitágoras, la longitud del segmento AB como sigue:

$$d_{AB} = \sqrt{\qquad\qquad}$$

$$d_{AB} = \sqrt{\qquad} \simeq 13.04$$



EJERCICIO 8.
Determina la longitud del segmento definido por los puntos M(-3,8) y N(11,4).

EJERCICIO 9.
La longitud del segmento determinado por los extremos P (-4,-5) y Q(-11,-2) es igual a:

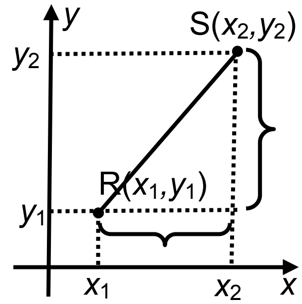
ACTIVIDAD 8.
Considera los puntos R(x_1,y_1) y S(x_2,y_2). Con ayuda de la gráfica que te proporcionamos determina la longitud del segmento RS.

a) La base del triángulo que se forma está dada por: ___________________

b) La altura del triángulo se puede determinar por: _______________

c) Utilizando el teorema de Pitágoras, la longitud del segmento RS quedará determinada por la fórmula:

____

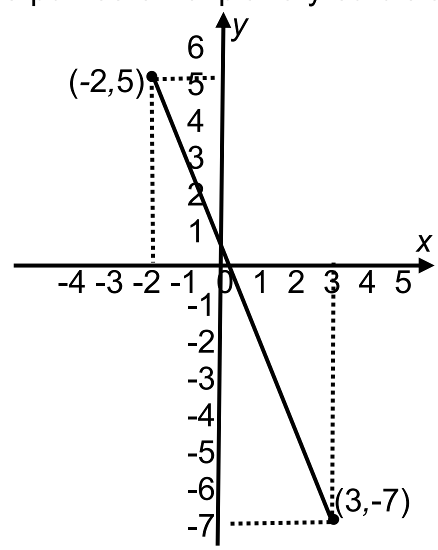


ACTIVIDAD 9.

Revisa los pasos que se han seguido para encontrar la solución de cada problema y, cuando sea necesario completa los pasos.

Calcula la distancia del punto A (-2,5) y B (3,-7).

Hemos trazado una gráfica del problema Los puntos en el plano y su distancia es:



$$d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(3-(\quad))^2 + (\quad -5)^2}$$

$$= \sqrt{(\quad)^2 + (\quad)^2}$$

$$= \sqrt{169}$$

$$d_{AB} =$$

Determinar la distancia del segmento AB donde A (3/2,5/2) y B(1/2,2).

$$d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

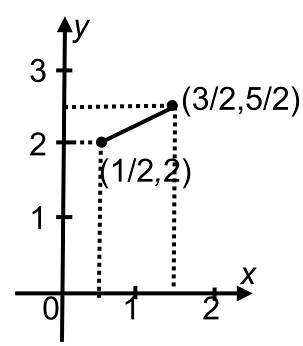
$$= \sqrt{(\quad - 3/2)^2 + (2 - \quad)^2}$$

$$= \sqrt{(\quad)^2 + (-1/2)^2}$$

$$= \sqrt{\quad + 1/4}$$

$$= \sqrt{5/4}$$

$$d_{AB} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1.118$$



ACTIVIDAD 10.

Calcular la distancia del segmento AB donde A(-2,3) y B(4,1). Traza la gráfica y completa los siguientes pasos:

$d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (\qquad)^2} =$

EJERCICIO10.

La distancia del punto A(2,3), al punto B(8,*y*) es 10, ¿cuál es el valor de *y*?

$d_{AB} = \sqrt{(\quad - \quad)^2 + (\quad - \quad)^2} = 10$ Elevando cada miembro al cuadrado eliminaras la raíz y después sólo tienes que resolver para determinar el valor de *y.*

ÁNGULO DE INCLINACIÓN DEL SEGMENTO. CONCEPTO DE PENDIENTE.

Conociendo las coordenadas de los extremos de un segmento, aprende a calcular la pendiente y ángulo de inclinación del mismo.

Ya aprendimos a localizar un segmento en el plano cartesiano utilizando las coordenadas de sus extremos, aprendimos también a calcular la medida de este segmento; es decir la distancia entre los dos puntos extremos. Otra característica importante de este segmento es su inclinación con respecto al eje *x* que puede ser medida de diferentes formas.

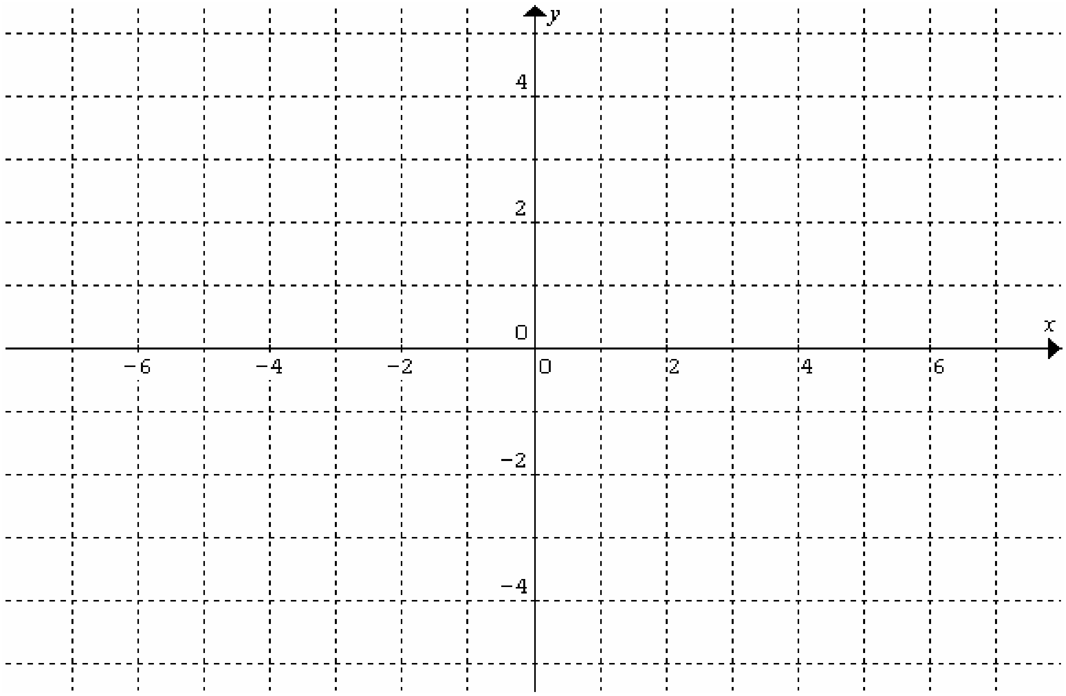
La pendiente de un segmento $\overline{AB}$ es una medida de la inclinación de este segmento con respecto al eje x. La pendiente de un segmento es el cociente de dos incrementos o cambios: el de las ordenadas de los dos extremos, entre el de las abscisas de éstos. Si las coordenadas de los puntos extremos son A(x_1,y_1) y B(x_2,y_2), lo que hemos dicho se puede expresar como sigue:

$$\text{pendiente} = m_{AB} = \frac{\text{incremento en } y}{\text{incremento en } x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Supongamos los extremos de un segmento son: A(1,0) B(4,3), por lo que su pendiente se calcula como:

$$m_{AB} = \frac{3-0}{4-1} = \frac{3}{3} = 1$$

Traza la gráfica correspondiente:



Ahora bien, este segmento de recta tiene un ángulo de inclinación medido desde el eje *x* positivo, en sentido contrario al avance de las manecillas del reloj hasta el segmento dado. En el ejemplo anterior si trasladamos una recta horizontal, es decir paralela al eje *x* hasta el punto extremo A, formamos un triángulo rectángulo y el ángulo de inclinación α puede expresarse como:

$$\tan\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Y, este cociente, como se estableció anteriormente es el valor de la pendiente del segmento $\overline{AB}$. Por lo que:

$$\tan\alpha = m$$

Para determinar el ángulo α de inclinación:

$$\alpha = \tan^{-1} m$$

EJERCICIO 11.

I. Determina la pendiente y el ángulo de inclinación de los segmentos:

1. A(1,3), B(5,9) 2. A(1,1), B(-4,-4) 3. A(2,6), B(-6,7)

II. ¿Cuál es la pendiente y ángulo de inclinación de los segmentos horizontales?

III. ¿Cuál es la pendiente y ángulo de inclinación de los segmentos verticales?

RAZÓN EN QUE UN SEGMENTO ES DIVIDIDO POR UNO DE SUS PUNTOS.

Considera A(-1,-5) y B(3,7) los extremos de un segmento, y al punto P(2,4) que se encuentra sobre el segmento. ¿En qué razón divide el punto P al segmento AB? Para contestar la pregunta primero dibujemos una gráfica en la que representemos lo información que tenemos y algunos trazos auxiliares.

NOTA: Es importante señalar que siempre se considerara al primer punto como el punto inicial del segmento y que el segundo punto siempre será el punto final.

¿Qué significa la razón en que divide el punto P al segmento AB?
La respuesta es: ***¡Encontrar el valor de AP/PB!***
Se denomina a la razón con la letra r, de manera que: $r = \dfrac{AP}{PB}$.

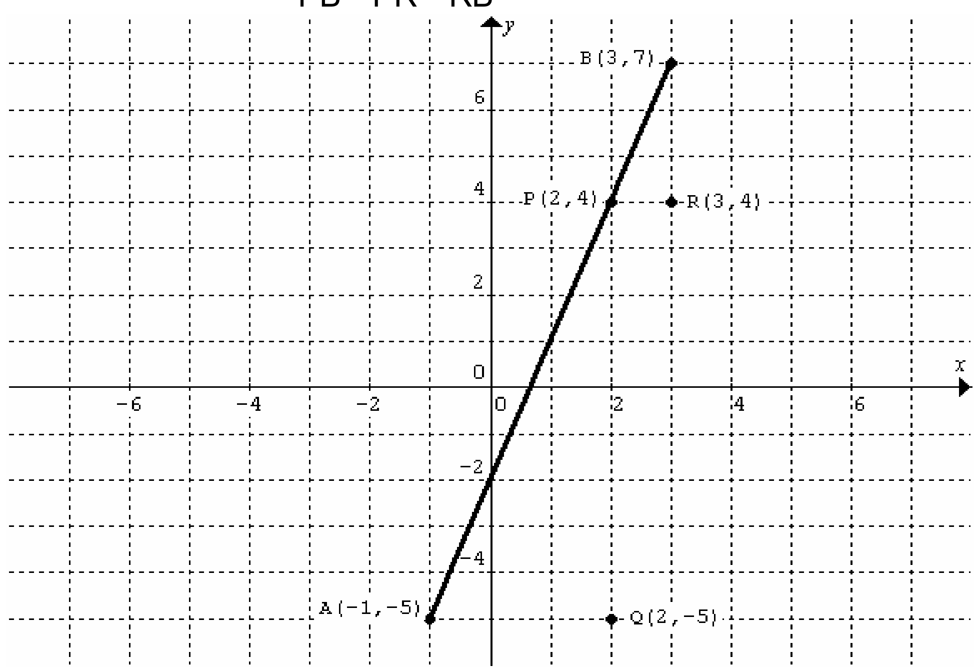
Es importante aclarar en este concepto que en nuestra unidad siempre nos referiremos a puntos P de división interna de segmentos y sólo nos referiremos a razones de división r positivas.

Pasemos a calcular la razón en que divide el punto P al segmento AB:

$$r = \frac{AP}{PB} = \frac{\sqrt{(2-(-1))^2 + (4-(-5))^2}}{\sqrt{(3-2))^2 + (7-4)^2}}$$

$$r = \frac{\sqrt{90}}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{90}{10}} = 3$$

Afortunadamente, existen otras formas más sencillas para determinar la razón *r*. Hemos trazado la gráfica que nos representa el problema y colocado dos puntos que nos ayudan a visualizar los triángulos AQP y PRB. Los dos triángulos son semejantes, por lo que: $r = \dfrac{\text{AP}}{\text{PB}} = \dfrac{\text{AQ}}{\text{PR}} = \dfrac{\text{QP}}{\text{RB}}$

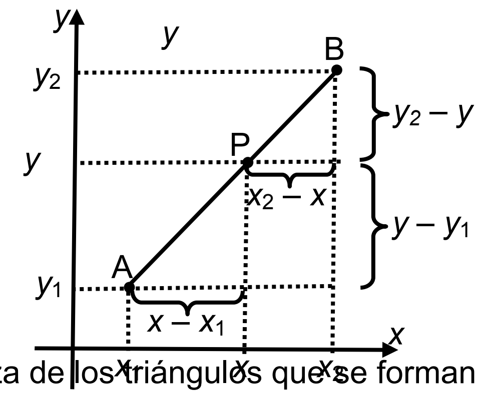


Por lo que podemos calcular la razón de manera sencilla utilizando:

$$r = \frac{AQ}{PR} = \frac{2\text{-}(\text{-}1)}{3\text{-}2} = 3 \text{, o bien } r = \frac{QP}{RB} = \frac{4-(-5)}{7-4} = 3$$

Podemos interpretar el resultado obtenido a partir de la gráfica, observando que decir que un punto P divide en una razón de 3 al segmento AB significa que si dividimos al segmento AB en cuatro partes iguales, del punto A al P habrá tres y del punto P al B una, por lo que la razón AP/PB será igual a 3.

Pasemos a establecer lo anterior de manera general. Consideremos A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) y P(x, y). La razón en que divide P al segmento AB está dado por: $r = \frac{AP}{PB}$



Con base en la semejanza de los triángulos que se forman, podemos afirmar que:

$$r = \frac{AP}{PB} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}, \quad \text{o bien que:} \quad r = \frac{AP}{PB} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

EJERCICIO 12.

Determina la razón en que divide al segmento dado AB el punto P que se indica:

1. A(0,4), B(6,10) y P(2,6)
2. A(-1,5), B(4,-5) y P(2,-1)

COORDENADAS DEL PUNTO QUE DIVIDE AL SEGMENTO EN UNA RAZÓN DADA.

Si tenemos un segmento determinado por los extremos A(-1,5) y B(2,-4) y deseamos encontrar las coordenadas de un punto P(x,y) que divida al segmento en la razón 3/7, sustituimos los datos en las ecuaciones:

$$r = \frac{AP}{PB} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}, \text{ y } r = \frac{AP}{PB} = \frac{y - y_1}{y_2 - y},$$

se obtiene:

$$\frac{3}{7} = \frac{x - (-1)}{2 - x}, \text{ y } \frac{3}{7} = \frac{y - 5}{-4 - y}$$

Luego, despejando tanto x como y:

$$\frac{3}{7} = \frac{x-(-1)}{2-x}$$

$$3(2 - x) = 7(x + 1)$$

realizando las operaciones indicadas se determina que el valor de x es:

x =

$$\frac{3}{7} = \frac{y-5}{-4-y}$$

$$3(-4 - y) = 7(y - 5)$$

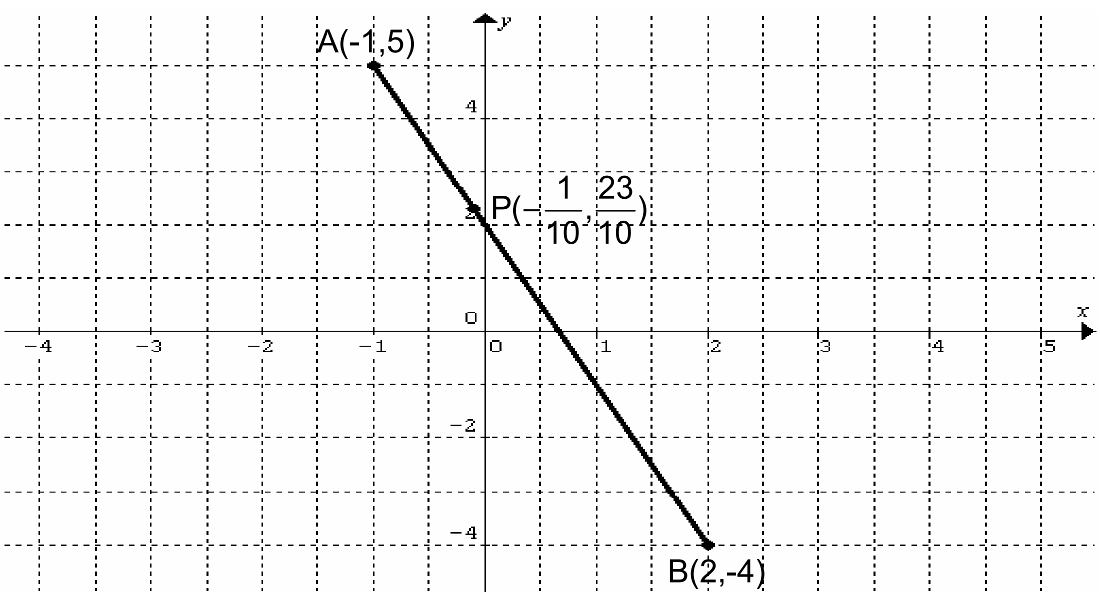
realizando las operaciones indicadas se determina que el valor de y es:

y =

Con lo anterior hemos obtenido que el punto P, que divide al segmento determinado por los extremos A (-1,5) y B(2,-4) en la razón 3/7 es:

P(,   )

Dicho de otra forma, hemos encontrado al punto P, tal que si dividimos al segmento AB en 10 partes iguales, la longitud AP será de 3 de esas partes y la longitud PB es de 7, por lo que AP/PB=3/7.



ACTIVIDAD 11.

Si bien es posible realizar el procedimiento anterior en todos los casos similares que se nos presenten, es mejor hacerlo de una vez para todos resolviendo el problema en general, lo cual haremos a continuación con tu ayuda al completar los pasos que hagan falta.

> Dados los extremos de un segmento AB, con A(x_1,y_1) y B(x_2,y_2), encontrar las coordenadas del punto P(x,y) que dividen al segmento en la razón r.

Partamos de que $r = \frac{\text{AP}}{\text{PB}} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$ o bien $r = \frac{\text{AP}}{\text{PB}} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$. Despejemos de la primera ecuación a la abscisa del punto P y de la segunda a la ordenada.

En la parte izquierda se presenta el procedimiento de despejar “x”, escribe que propiedad justifica cada operación.

$r = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$ ____________ $r(x_2 - x) = (x - x_1)$ _________________ $r x_2 - r x = x - x_1$ __________________ $- x - r x = - x_1 - r x_2$ _______________ $- x(1 + r) = - (x_1 + r x_2)$ _____________ $x = \frac{-(x_1 + rx_2)}{-(1+r)}$ _________ $x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r}$ ____________ *r no debe ser igual a -1 ¿por qué?* _______________________________	En este espacio escribe el procedimiento para despejar “y”.

Resumiendo, hemos obtenido que si el punto P(x,y) divide al segmento AB, con A(x_1,y_1) y B(x_2,y_2), en la razón r, entonces:

$$P(x,y) = P\left(\frac{x_1 + rx_2}{1+r}, \frac{y_1 + ry_2}{1+r}\right), \text{ con } r \neq -1 \text{ …………………(**)}$$

EJERCICIO 13.
Utilizando las fórmulas anteriores, comprueba que si los extremos del segmento AB son: A(-1,5) y B(2,-4), entonces el punto P que divide a ese segmento en la razón 3/7 es: P(-1/10,23/10).

Observación. Si el punto **P(x,y) es el punto medio**, entonces $r = \frac{AP}{PB} = 1$, ya que AP = PB, por lo que (**) se transforma en: P(x,y) =P$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

ACTIVIDAD 12.
Calcular, con las dos fórmulas las coordenadas del punto medio del segmento AB, con A(3,4) y B(7,2).

Solución. Con la primera fórmula el valor de $r = \frac{\text{AP}}{\text{PB}} =$

P(x,y) =P$\left(\frac{x_1 + rx_2}{1+r}, \frac{y_1 + ry_2}{1+r}\right)$ =

Con la segunda fórmula: P(x,y) =P($\frac{x_1 + x_2}{2}$, $\frac{y_1 + y_2}{2}$) =

El punto medio de un segmento es muy usado en la teoría y problemas de la Geometría Analítica, por lo que es conveniente el manejo de la fórmula.

ACTIVIDAD 13.

Veamos otro ejemplo, encontremos las coordenadas del punto P(x,y) que divide al segmento AB en la razón de $r = \frac{AP}{PB} = \frac{2}{3}$**,** pensemos que las coordenadas de los extremos del segmento son las mismas del ejemplo anterior.

Solución. Como r = 2/3, es positiva, entonces el punto P(x,y) esta situado entre A y B, además divide al segmento en dos partes, uno de ellos AP vale 2 unidades y el otro, PB vale 3 unidades.
Sustituyendo las coordenadas en la fórmula:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r} \quad \text{y} \quad y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}$$

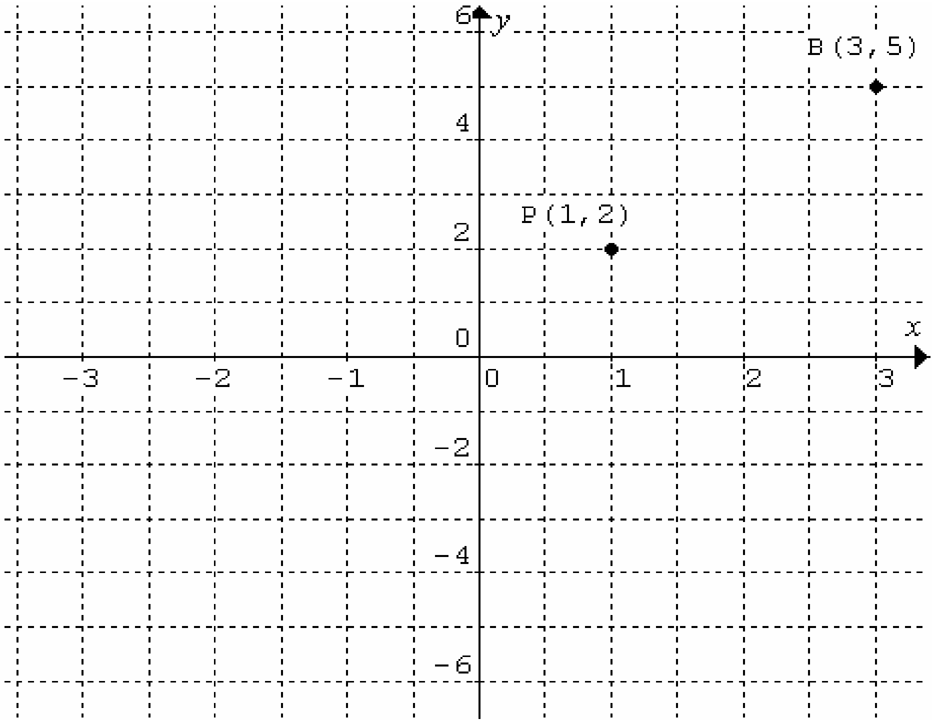
Se obtiene que:

$x =$ $\qquad\qquad$ $y =$

Por lo que las coordenadas del punto son **P(,   )**, Traza una grafica del problema.

ACTIVIDAD 14.

Por último encontremos las coordenadas del extremos, A(,), del segmento AB, con B(3,5), si el punto P(1,2) divide al segmento AB en la razón r = 2**.**
Solución. Es importante siempre que se haga un dibujo de lo que se tiene, como se muestra en la siguiente figura.



Sabemos que el punto A(x_1,y_1) es el punto inicial, del segmento y B(3,5) es el punto final por lo que x_2 = 3 e y_2 = 5; además P(1,2) = P(x,y) es el punto de división se tiene x = 1 e y = 2 y r = 2 entonces sustituyendo en:

$x=\frac{x_1+rx_2}{1+r}$ $1=\frac{x_1+2(3)}{1+2}$ $1=\frac{x_1+6}{3}$ $1(3) = x_1 + 6$ $3 = x_1 + 6$ $3 - 6= x_1$ $- 3 = x_1$	calcula el resultado para y_1:

Por lo que las coordenadas del punto A son: A(,   )

Se sugiere marcar el punto solución en la gráfica anterior.

EJERCICIO 14.
Calcula las coordenadas del punto P(x,y) que divide al segmento AB, con A(2,1) y B(3,3), en la razón de r = 1.

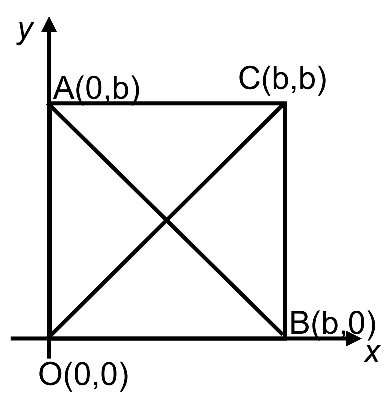
EJERCICIO 15.

Calcula las coordenadas de los puntos P(*x,y*) y Q(*x,y)* que dividen al segmento AB, con A(2,1) y B(3,3), en tres partes iguales.

También con los conceptos básicos de Geometría Analítica que en esta unidad has conocido o recordado, se pueden demostrar, analíticamente distintas propiedades de figuras geométricas que en las unidades de Geometría Euclidiana del curso de Matemáticas II se demostraron por otros métodos. A continuación te planteamos la siguiente actividad:

ACTIVIDAD 15.
La propiedad geométrica de los rectángulos "Las diagonales de todo cuadrado son perpendiculares entre sí" es una propiedad que en tu curso de Matemáticas II pudiste demostrar por medio de congruencia en triángulos o por medio de alguna otra propiedad geométrica de los triángulos que se forman dentro del cuadrado al trazar las diagonales.
Sean los puntos A (0,b), O (0,0), B(b,0) y C(b, b) los vértices de un cuadrado, en los que el número b es un número real diferente de cero $b \neq 0$. Si calculamos la pendiente de las diagonales AB y OC obtenemos que:

m_{AB} = m_{OC} =



En algún texto de geometría analítica investiga cómo son las pendientes de rectas o segmentos de recta perpendiculares entre sí. Concluye si has demostrado la propiedad o no. Explica.

EJERCICIO 16.
Demuestra con Geometría Analítica que:

1. Las diagonales de un rectángulo son de la misma longitud.
2. El punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es equidistante de los tres vértices del triángulo.

SECCIÓN 3. ESTUDIO ANALÍTICO DE ALGUNOS LUGARES GEOMÉTRICOS EN EL PLANO CARTESIANO.

Nuestra intención en la presente sección es que comprendas que una ecuación con dos variables se puede representar como una curva en el plano, a la que se le denomina lugar geométrico.

Ya has trabajado con las funciones lineales, las cuales estudiaste en el curso de Matemáticas I, que como recordarás se representan gráficamente por medio de líneas rectas en el plano cartesiano. Otra manera de representarlas, además de gráficamente, es como funciones, por ejemplo: $f(x) = mx + b$. Para entender a este tipo de funciones como lugares geométricos, te pedimos analicemos la siguiente función: $f(x) = 2x + 1$

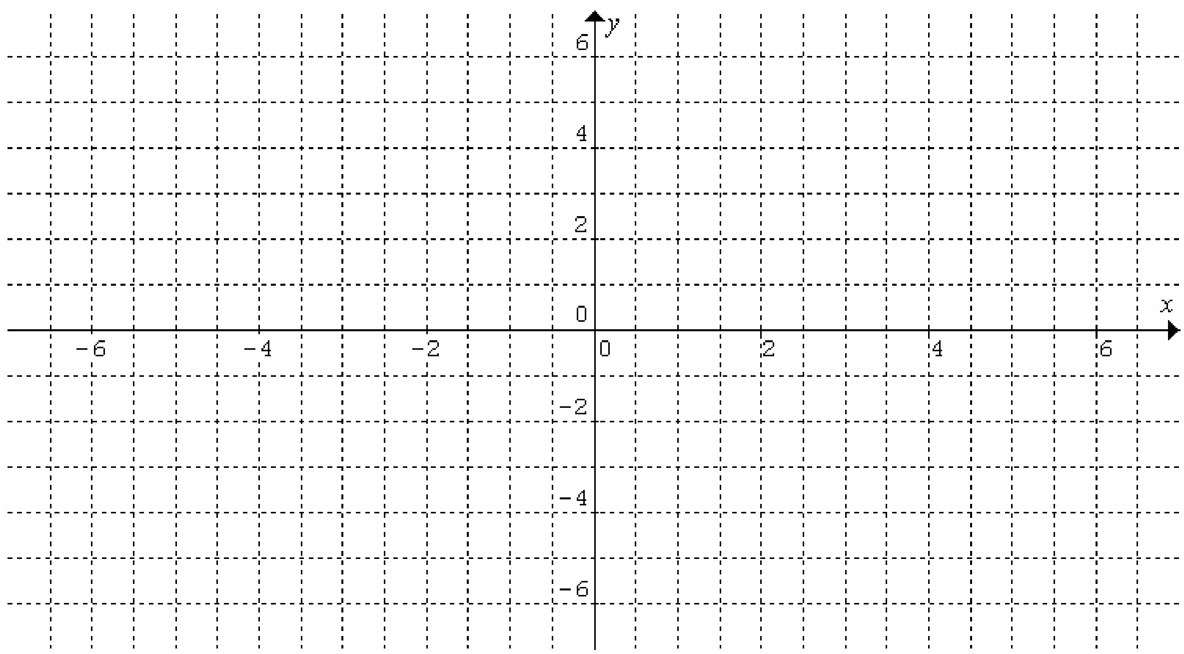
ACTIVIDAD 16.

La recta representada por esa función tiene como pendiente: m = _________

El valor de su ordenada al origen es igual a b =___________

Si no recuerdas te proponemos que hagas una tabulación, con cuatro puntos, determines su pendiente, su ordenada al origen y traza su grafica.

x				
y				



¿Podrías describir con palabras qué características tienen en común todos los puntos P(*x,y*) que pertenecen a la línea recta?

Intenta hacerlo, si no te queda claro como hacerlo continúa leyendo este material y posteriormente lo podrás hacer.

En el ejemplo de la línea recta que acabamos de ver, te puedes dar cuenta que un lugar geométrico tiene varias maneras de representarse, o registros de representación:

A) El registro gráfico, representado por una gráfica en el plano cartesiano.
B) El registro algebraico, o ecuación con dos variables.
C) El registro tabular. El cual representa mediante una tabla de parejas ordenadas (x,y) que muestran algunos puntos de dicho lugar geométrico.
D) El registro verbal, mediante el cual, a través de palabras, se describe el lugar geométrico.

ACTIVIDAD 17.

Analicemos un problema con sus cuatro registros.

El registro verbal es: "El lugar geométrico de todos los puntos P(x,y) tales que su distancia al punto C(2,3) es de 4 unidades":

A) Para dar el registro Algebraico realizamos lo siguiente:
Utilizando la fórmula de distancia entre dos puntos y el hecho de que los puntos P(x,y) están a una distancia de 4 unidades de C(2,3), tendremos que:

$\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}=4$ ¿cómo eliminas el radical?

$(x-2)^2+(y-3)^2=4^2$ ¿cómo desarrollas un binomio al cuadrado?

$x^2+y^2-4x-6y+4+9=16$ simplifica los términos semejantes

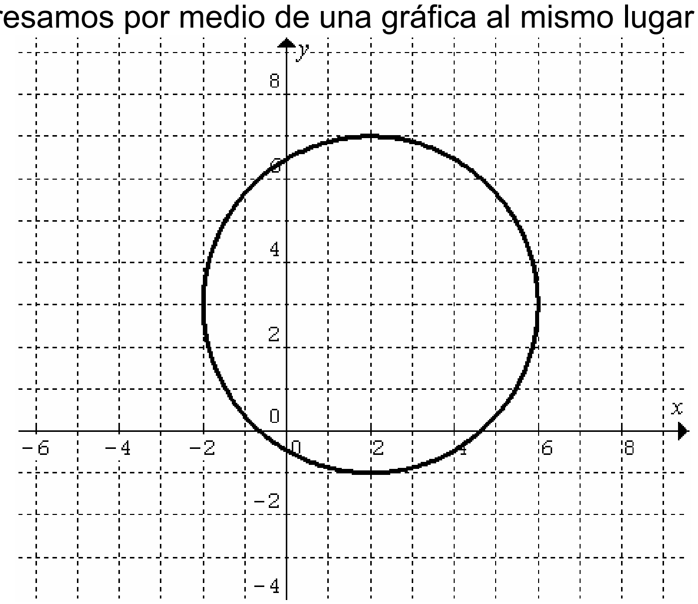
$x^2+y^2-4x-6y-3=0$ esta es la expresión algebraica.

B) Su registro Tabular
Al tabular algunos puntos que cumplen con la condición algebraica, y obviamente con el registro verbal, obtenemos:

x	-2	0	2	6
y	3	6.46	7	3

C) Para su registro Gráfico

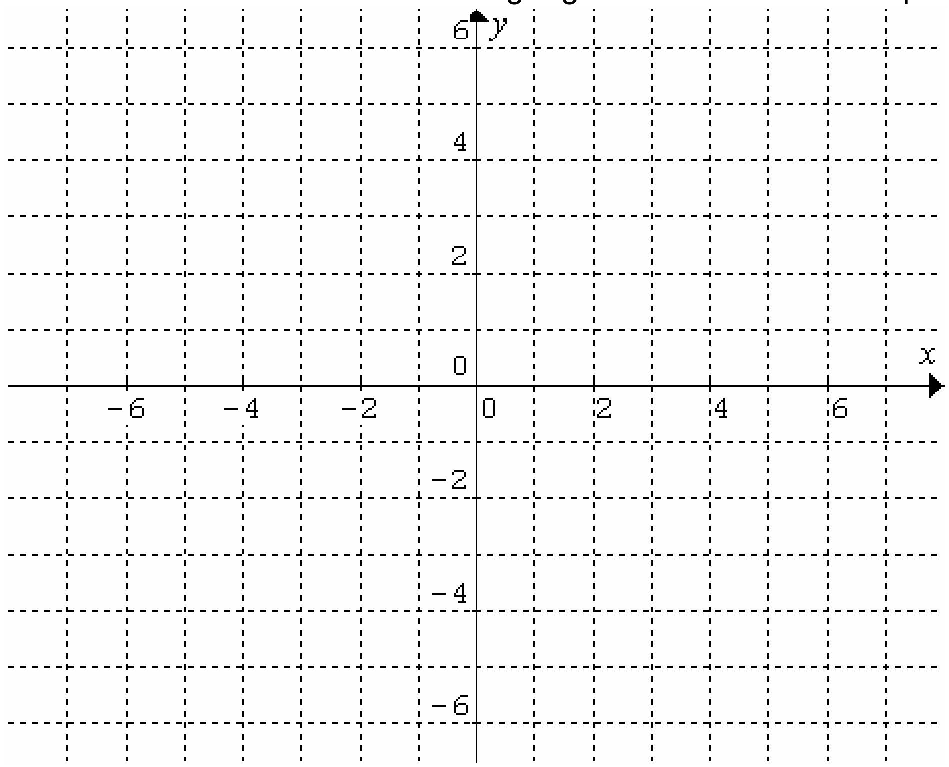
Finalmente, expresamos por medio de una gráfica al mismo lugar geométrico:



ACTIVIDAD 18.

Completa los pasos del desarrollo del siguiente problema.

Construir el lugar geométrico de todos los puntos P(*x,y*) cuya distancia al punto F(0,2) es igual a su distancia al eje *x*. Grafiquemos los datos del problema. En principio es importante observar que el punto V(0,1) es un punto que pertenece al lugar geométrico y es importante dibujar un trazo de puntos que gráficamente cumplen con la condición verbal de dicho lugar geométrico además del punto V.



Para determinar la ecuación del lugar geométrico utilizaremos la fórmula de distancia entre dos puntos: d = ______________________________ y, si observamos en la gráfica que esbozamos, la distancia de cada uno de estos puntos al eje *x* es el valor de su propia ordenada *y*, si le llamamos d_1 a la distancia del punto P(*x,y*) al punto F(0,2) y sustituimos estos datos en la fórmula de distancia entre dos puntos, nos queda:

$$d_1 = \sqrt{\qquad} \qquad\qquad d_2 = y$$

Y, como estas distancias son iguales por la descripción del lugar geométrico.

$$d_1 = d_2$$

$$\sqrt{\qquad\qquad} = y$$

Eleva al cuadrado ambos lados de la igualdad y la ecuación queda:

$$\left(\sqrt{\qquad\qquad}\right)^2 = y^2$$

Esta es la ecuación de una parábola, tabula algunos puntos que satisfacen dicha ecuación y compáralos con los puntos de la gráfica que conjeturaste al principio del ejercicio.

Elabora una tabla con algunos puntos tabulados a partir de la ecuación.
Elabora una gráfica que represente al lugar geométrico.
Concluye cuáles son los registros o representaciones posibles de este lugar geométrico.

EJERCICIO 17.
Escribe y grafica los registros tabular, gráfico y verbal del lugar geométrico cuya expresión o registro algebraico es.

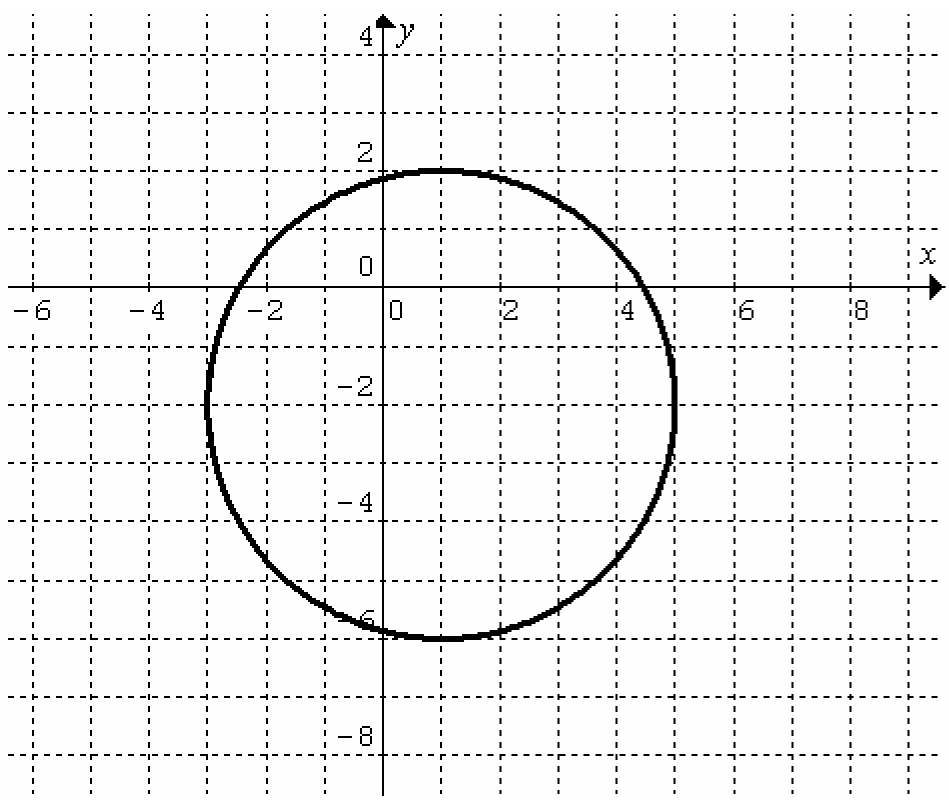
$$y = 2x^2 + 4$$

EJERCICIO 18.
Grafica y escribe las expresiones gráfica, algebraica y tabular del lugar geométrico cuyos puntos cumplen con la condición verbal siguiente:

"Todos los puntos P(x, y) tales que su distancia al punto F(-6,0) es igual a su distancia al eje y"

¿Cuál es el nombre de este lugar geométrico?

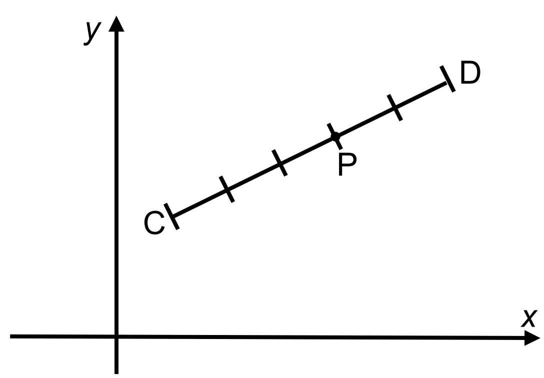
EJERCICIO 19.
Describe las representaciones tabular, verbal y algebraica del lugar geométrico que se encuentra dibujado en la siguiente gráfica:



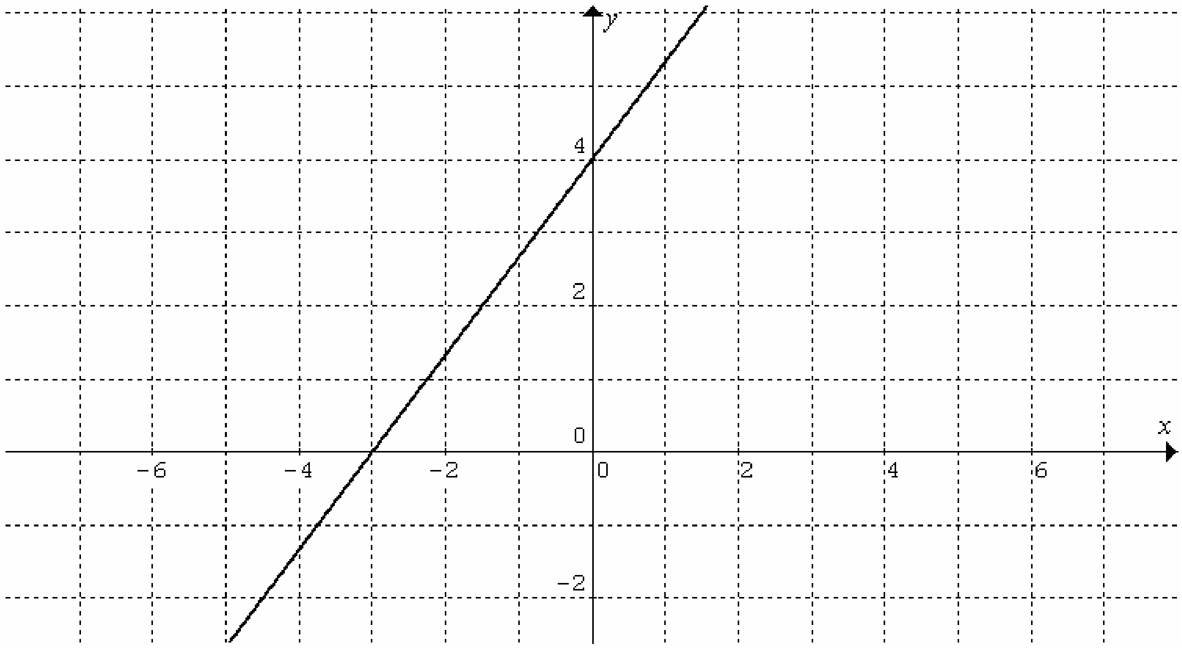
¿Cómo se llama este lugar geométrico?
Explica tu respuesta.

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

1. Contesta las siguientes preguntas, realizando trazos en un plano polar.
   a) ¿Los puntos A (4,45°) y B (-4,225°) son o no iguales?
   b) ¿Los puntos anteriores quedan representados en un solo punto o en dos puntos distintos en el plano polar?
   c) ¿Los puntos C (3,30°), D (3,30°+360°) y E (-3,30°+180°) como quedan representados en el plano polar?
   d) ¿En base a la pregunta anterior los puntos en el plano tendrán una representación única o una infinidad?
2. Transforma el punto P (2,90º) del plano polar a coordenadas del plano cartesiano.
3. Transforma el punto (-3,4) del plano cartesiano a coordenadas del plano polar.
4. Si la longitud de un segmento AB es 12 unidades y las coordenadas de uno de sus extremos es A (-5,2). ¿Cuáles son las coordenadas del otro extremo B si este se encuentra situado sobre el eje de las y?
5. Si la pendiente de un segmento es $m = \frac{3}{2}$ ¿Cuánto mide su ángulo de inclinación?
6. Si una recta pasa por los puntos A (-1,6) y B (4,10) su pendiente tiene por medida.
7. En la siguiente gráfica, se muestra un segmento $\overline{CD}$, dividido en partes iguales, toma el punto **P** de división para calcular la razón *r*.



8. Sea y = -3x-2 la ecuación que representa un lugar geométrico. Escribe sus representaciones o registros: Gráfico, tabular y verbal.
9. Si un lugar geométrico está formado por todos los puntos P(x, y) tales que su distancia al eje y siempre es igual a su distancia al punto fijo llamado F (10,2), esboza su gráfica marcando una serie de posibles puntos P que cumplieran con esa condición. Utilizando la fórmula de distancia entre dos puntos y las características descritas verbalmente, escribe la expresión algebraica de este lugar geométrico.
10. Si en la siguiente gráfica está representado un lugar geométrico. Escribe sus registros o expresiones; algebraica, tabular y verbal.



BIBLIOGRAFÍA.

1) Hernández Velasco Fernando Fabián. **Geometría Analítica para principiantes**. CCH Oriente. 1997.
2) Aleksandrov A. D., *et al.* **La matemática: su contenido, métodos y significado I.** Alianza Editorial. Madrid 1973.
3) Fuller Gordon, et al. **Geometría Analítica.** Addison Wesley. México 1999.
4) Santalo Marcelo, *et al.* **Geometría Analítica**. Textos Universitarios, S.A. México, 1976.
5) Smith, Stanley, *et al*. **Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica.** Addison-Wesley Longman, México, 1998.