UNIDAD 3
LA RECTA Y SU ECUACIÓN CARTESIANA

PROPÓSITOS: Reafirmar el conocimiento del método de la Geometría Analítica, al obtener la ecuación de la recta y avanzar en la solución analítica de problemas que involucran relaciones entre figuras rectilíneas estudiadas en Geometría Euclidiana.

INTRODUCCIÓN.
Estudiaremos En esta Unidad un concepto fundamental de la Geometría Analítica: *La línea recta*.

Analizaremos su ubicación en el plano cartesiano, su ecuación dados distintos elementos que la definen, como dos de sus puntos, un punto y su pendiente, su ordenada al origen y su pendiente. También estudiaremos los elementos geométricos que la definen, como su ángulo de inclinación y uno o dos de sus puntos. Veremos también la intersección de dos rectas que se cortan y el ángulo entre ellas. Las condiciones de paralelismo y perpendicularidad entre dos rectas; y terminaremos con la solución analítica de problemas de corte euclidiano.

Esperamos tu participación llevando a cabo las actividades que se plantean a lo largo de cada una de las secciones que conforman esta Unidad.

SECCIÓN 1. LA RECTA UBICADA EN EL PLANO CARTESIANO.

En esta sección pretendemos que, dada una ecuación lineal con dos variables, la identifiques como una recta y viceversa.

Iniciemos el estudio de esta sección analizando los siguientes problemas:

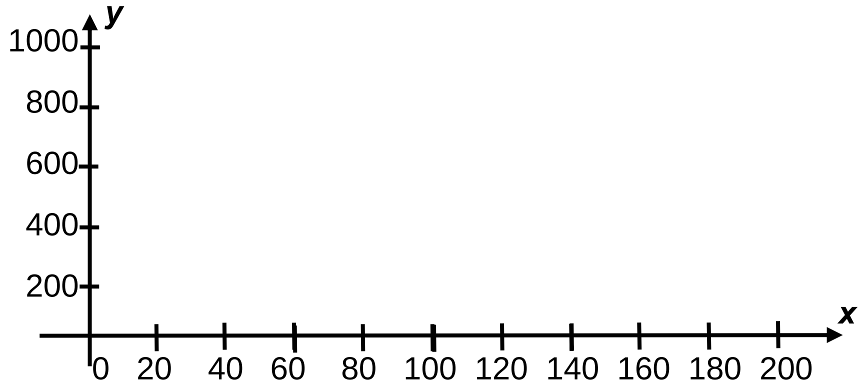
ACTIVIDAD 1.
1. Un tinaco de 1,100 litros, que se encuentra vacío va a ser llenado con el agua que sale de una manguera, a razón de 5 litros por minuto. Basándote en esta información:

a) Completa la siguiente tabla:

Minutos transcurridos	0	1	1.5	10	15.3			60	
Cantidad de agua en el tinaco	0	5	7.5			80	100		1100

b) Determina las variables que esta situación establece ________________.
c) Indica cuál es la variable dependiente, y cuál es la variable independiente __________________.
d) Si a la variable independiente la identificas por la letra ***x***, y a la dependiente por la letra ***y***, la relación algebraica entre las dos es: _______.

e) Traza la gráfica de represente la relación entre las dos variables:



El origen (0,0) representa el momento en el que el tinaco se encuentra vacío, antes del inicio del llenado.

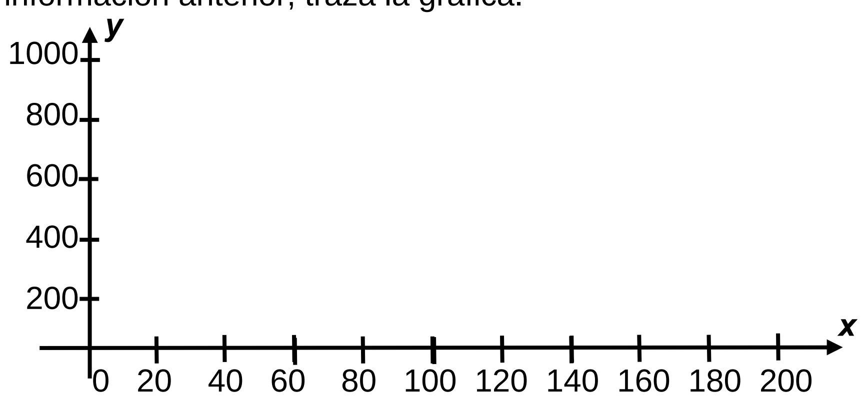
Esta gráfica, como tú ya te diste cuenta, representa a la ecuación lineal:

$$y = 5x$$

f) Con base en estos resultados, determina ahora el punto que representa el momento en el que el tinaco se encuentra lleno.

2. Supongamos ahora que otro tinaco va a ser llenado, con la misma manguera del problema anterior, de la cual recordemos, sale agua a razón de 5 litros por minuto. Este nuevo tinaco ya cuenta, antes del inicio del llenado, con 100 litros de agua. Basándote en esta información, entonces tenemos que:

a) El número de litros al minuto 0 es de __________________.
b) ¿Qué representa cada una de las variables? ________________________.
c) El número litros en el tinaco después de 100 minutos de llenado es de________.
d) El tinaco tendrá 1000 litros en el minuto ______________.
e) La relación algebraica entre esas variables es ***y* =** ________**.**
f) Con la información anterior, traza la gráfica.



Es importante recordar que toda línea recta es infinita. En el caso de la representación en el plano cartesiano del llenado del tinaco, estamos únicamente considerando el segmento de la recta limitado entre el punto que representa la cantidad de litros de agua que contiene antes del inicio de llenado, y el punto que representa el minuto en que se encuentra lleno.

EJERCICIO 1.

a) Si el tinaco estuviera vacío y su llenado se efectuara a razón de 3 litros por segundo, determina:
   - Una ecuación que indique la relación entre las dos variables.
   - La gráfica que representa a esa ecuación.

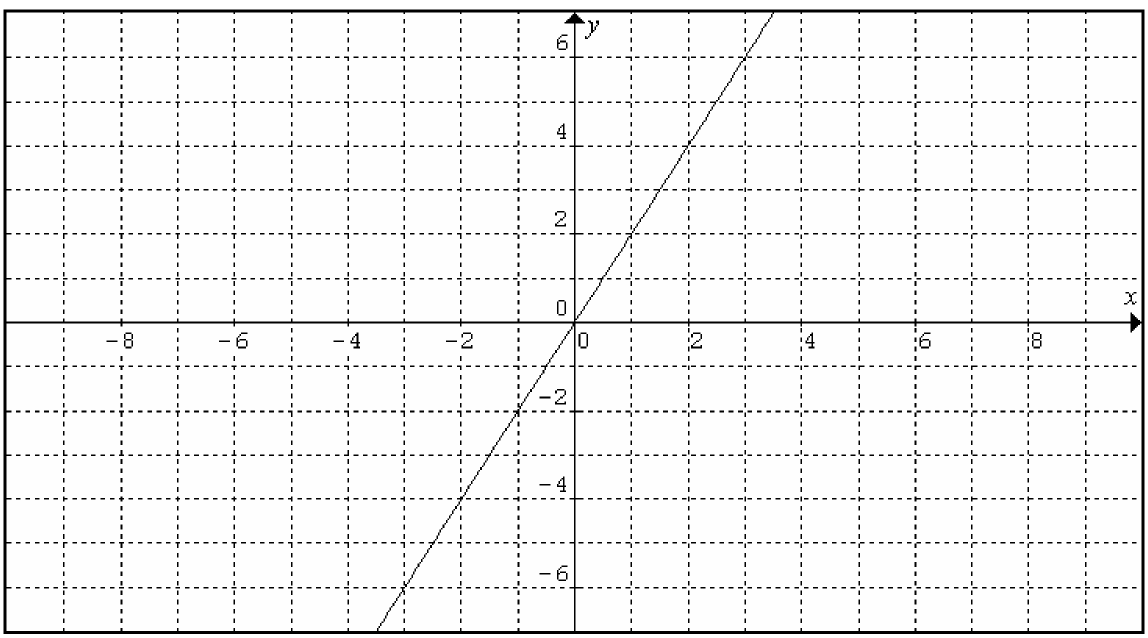
b) Determina la gráfica de las siguientes ecuaciones lineales:
   - $y = 2x + 3$
   - $y = 5x + 4$
   - $6x + 2y = 8$

Por los resultados obtenidos hasta aquí, seguramente estás de acuerdo en que toda ecuación lineal se representa en el plano cartesiano como una línea recta.

ACTIVIDAD 2.

Veamos ahora si podemos afirmar lo contrario, es decir si toda línea recta en el plano cartesiano puede ser expresada como una ecuación lineal

1. Analicemos la siguiente gráfica:



a) Con base en la información que de ella se deriva, completa la siguiente tabla:

x	-2	0	1	3			900
y	-4				8	1600	

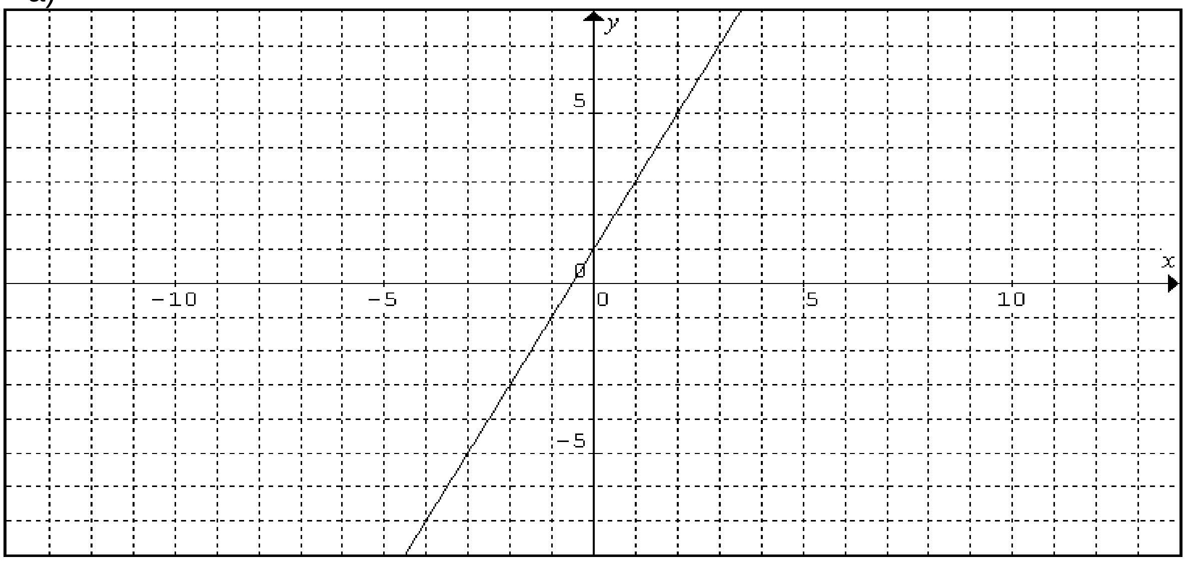
b) De acuerdo a estos resultados, la ecuación lineal que representa esta recta es: *y*= _________.

Por lo que cada línea recta representada en el plano se representa por una ecuación lineal.

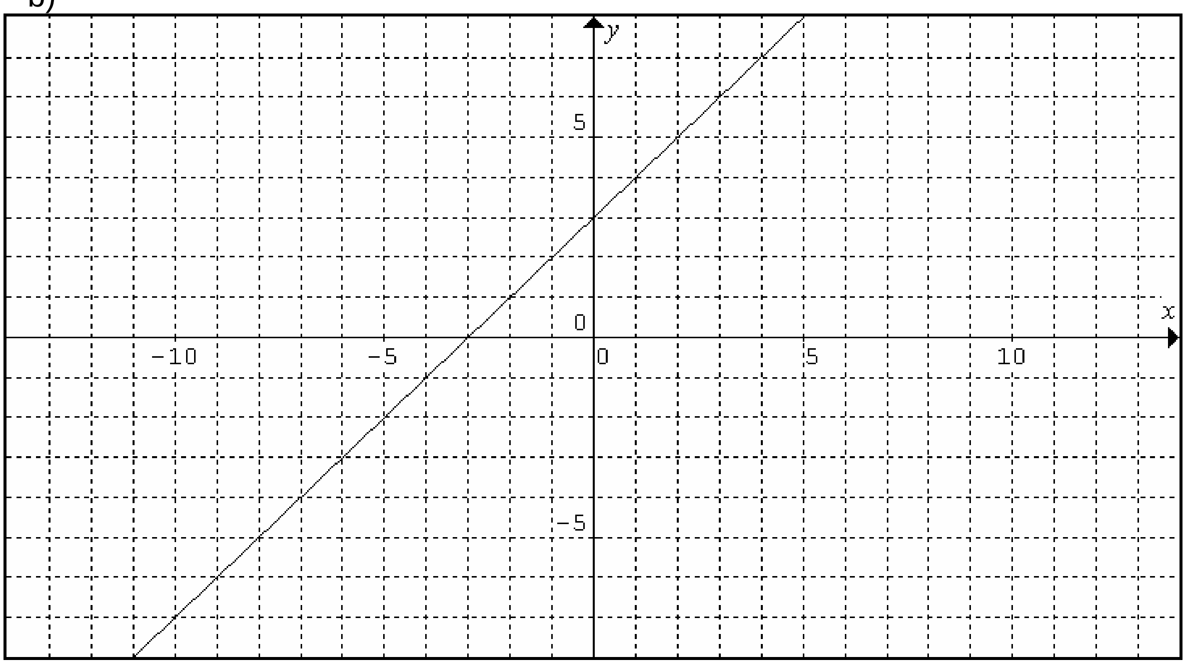
EJERCICIO 2.

De las siguientes rectas determina las ecuaciones lineales que las representan:

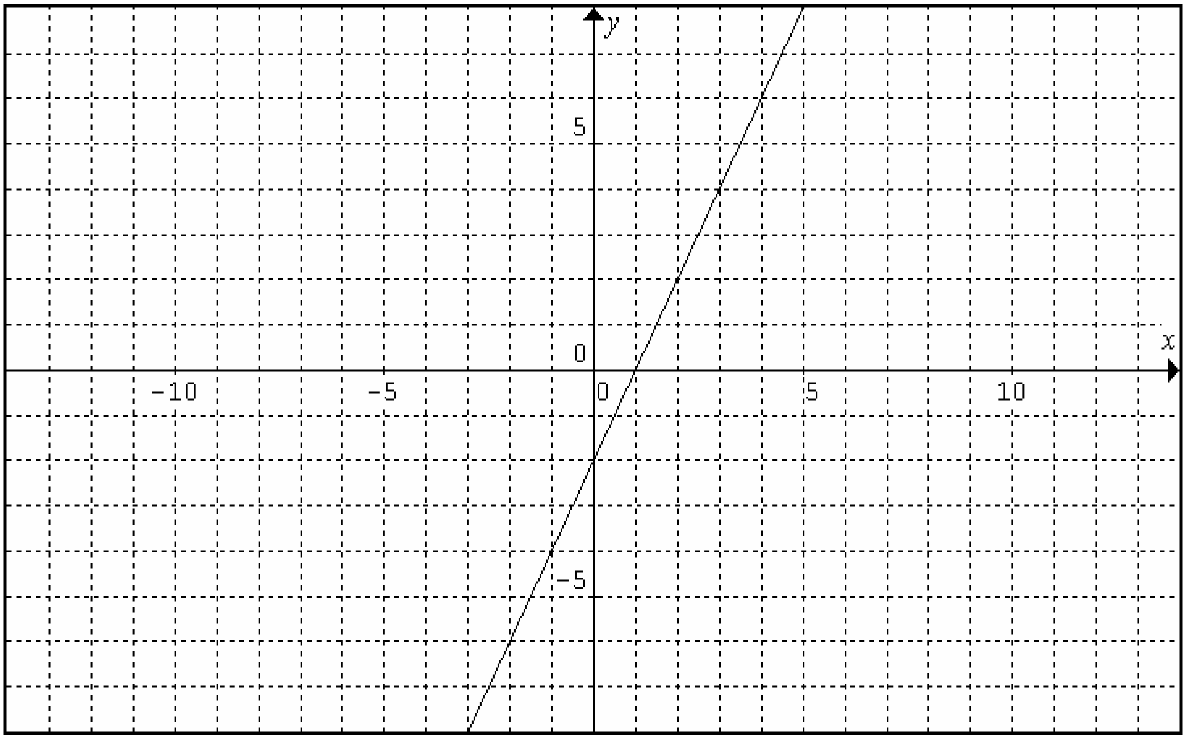
a)



b)



c)



Si no pudiste resolver el ejercicio no te preocupes, necesitamos contar con más elementos que a continuación te presentamos, o si lo pudiste resolver te darás cuenta que todas las rectas que hemos estudiado hasta aquí han sido representadas mediante una ecuación lineal.

SECCIÓN 2. LA ECUACIÓN CARTESIANA DE LA RECTA.

En esta sección pretendemos que puedas determinar la ecuación de una recta dados distintos elementos que la definen.

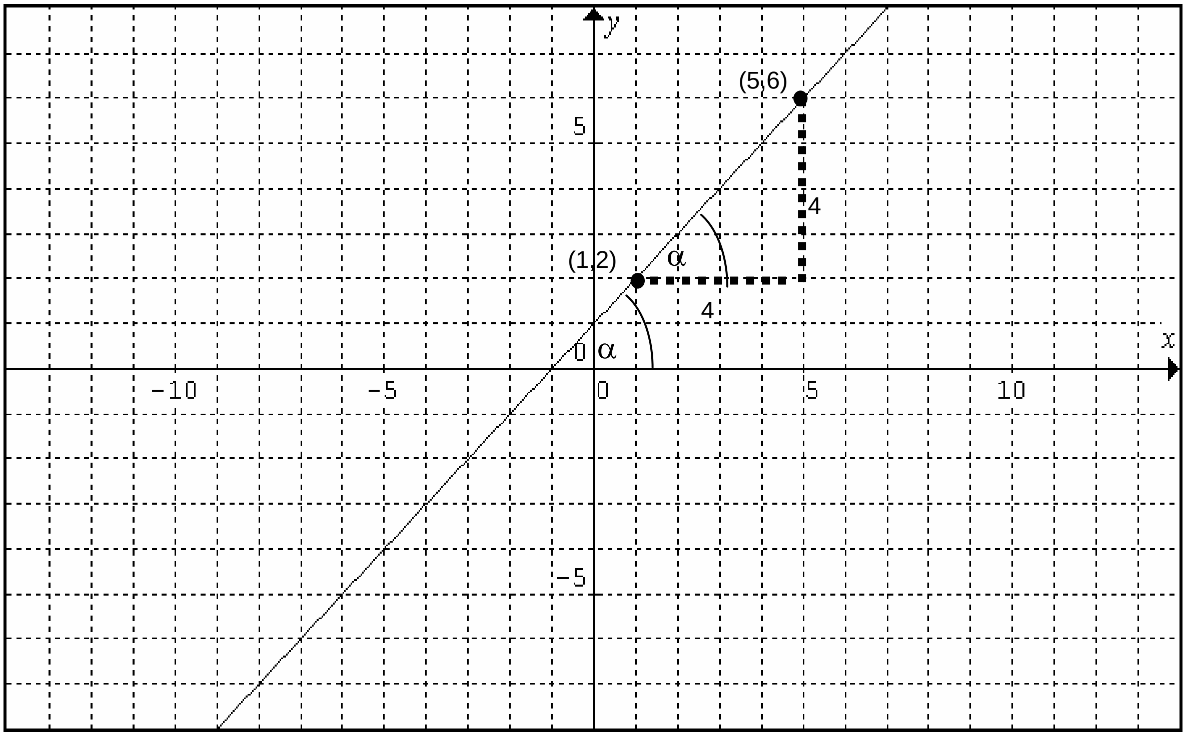
2.1 CUANDO SE CONOCEN LAS COORDENADAS DE DOS DE SUS PUNTOS.

ACTIVIDAD 3.

Tú sabes que para poder trazar una recta es necesario, conocer las coordenadas de dos de sus puntos.

1. Traza en tu cuaderno, la recta que pasa por los puntos (1,2) y (5,6).

Seguramente la recta que trazaste fue como la siguiente:



También sabes, la pendiente de una recta es la tangente del ángulo que forman la recta y la dirección positiva del eje de las abscisas. En el caso de la recta que estamos analizando la pendiente, a la que denotaremos con la letra ***m***, es igual la tangente del ángulo α.

a) Puedes observar que al intersectar la proyección horizontal del punto (1,2), con la proyección vertical del punto (5,6), creamos un triángulo rectángulo, cuyo ángulo inferior izquierdo es igual al ángulo que llamamos α. ¿Por qué son iguales esos ángulos? ________________

b) Como la tangente de un ángulo es igual al cociente de la longitud de su cateto opuesto entre la longitud de su cateto adyacente, podemos concluir que:

$$m = tg\alpha = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

2. Tomemos otro par de puntos de esta recta, por ejemplo con (4,5), y (6,7).

   a) Marca en la gráfica los puntos (4,5), y (6,7).
   b) Calcula la pendiente de la recta que pasa por los puntos.______________.

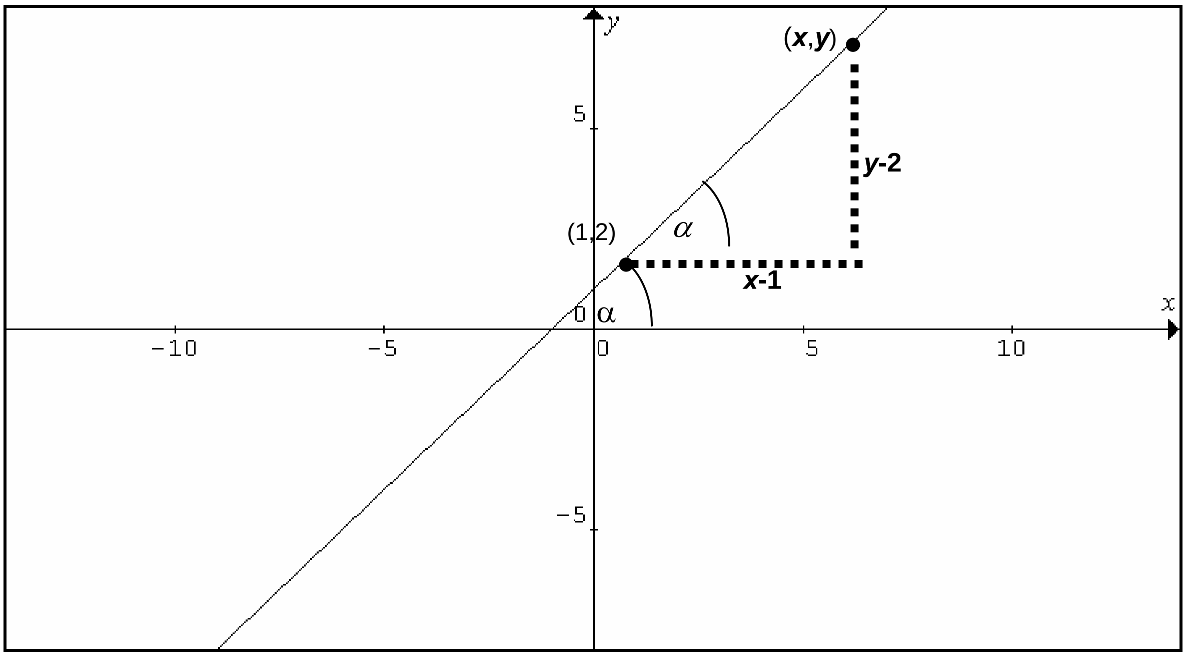
3. Basándote en esta gráfica, determina otra pareja de puntos por los que pasa la recta y calcula su pendiente.

Como observaste en todos los casos la pendiente vale uno, así podemos concluir que no importa la pareja de puntos con los que trabajemos para determinar la pendiente de una recta, el resultado siempre será el mismo.

Esto nos lleva a la siguiente:

Definición: Una recta es el conjunto de puntos del plano, en los que al tomar dos de ellos cualesquiera, la pendiente siempre es la misma.

4. Utilizando la misma recta selecciona uno cualquiera de sus puntos, cuyas coordenadas variables sean (x,y).
   Determina la pendiente de la recta, utilizando este punto, y cualquiera de los puntos que ya conoces de la recta, por ejemplo el (1,2).



a) Usando la información de la gráfica, ¿Cómo expresas la pendiente de la recta? ___________________________

Como sabemos que la pendiente de esta recta es igual a 1, sin importar la pareja de puntos con los trabajemos, podemos concluir que:

$$\frac{y-2}{x-1}=1.$$

La anterior es la ecuación de la recta que pasa por los puntos (1,2), (5,6),(6,7),(4,5),…en fin todos los que están en la recta.

b) La ecuación se puede simplificar si de ella despejas a ***y**,* obteniendo: ***y* = *x* – 3.** Explica por qué

5. Trabaja con otro punto de esta misma recta, por ejemplo con (5,6), y nuevamente con un punto de coordenadas variables (x,y), que también se encuentre sobre la recta, ***y***:

   a) Determina su ecuación.
   b) Compara esta nueva ecuación con la que obtuvimos anteriormente.
   c) Dándole a ***x*** los valores que tú quieras, determina otros 3 puntos por los que pasa la recta.

6. Trabaja ahora con la recta que pasa por los puntos (0,1) y (3,10).
   a) Grafícala.
   b) Determina su pendiente.
   c) Selecciona un punto cualquiera sobre la recta, de coordenadas variables (x,y), con este y con (0,1), determina nuevamente la pendiente de la recta en términos de ***x*** y de ***y***.
   d) Iguala este último cociente con la pendiente que obtuviste al trabajar con los puntos (0,1) y (3,10).
   e) Despeja de esta igualdad a ***y*.**

Como te puedes dar cuenta, es suficiente conocer dos puntos por los que pasa una recta para poder graficarla, determinar su pendiente y su ecuación.

2.2 CUANDO SE CONOCEN SU PENDIENTE Y LAS COORDENADAS DE UNO DE SUS PUNTOS.

ACTIVIDAD 4.
Determinemos ahora la gráfica y la ecuación de la recta que pasa por el punto de coordenadas (3,10) y cuya pendiente es igual a 2.

Seguramente te das cuenta que este es un caso particular de lo que hicimos en la *actividad 3*, en el cual ya no tenemos que calcular la pendiente. ¿Cómo podemos aprovechar lo que ya sabemos? Seguramente te será fácil determinar la ecuación.

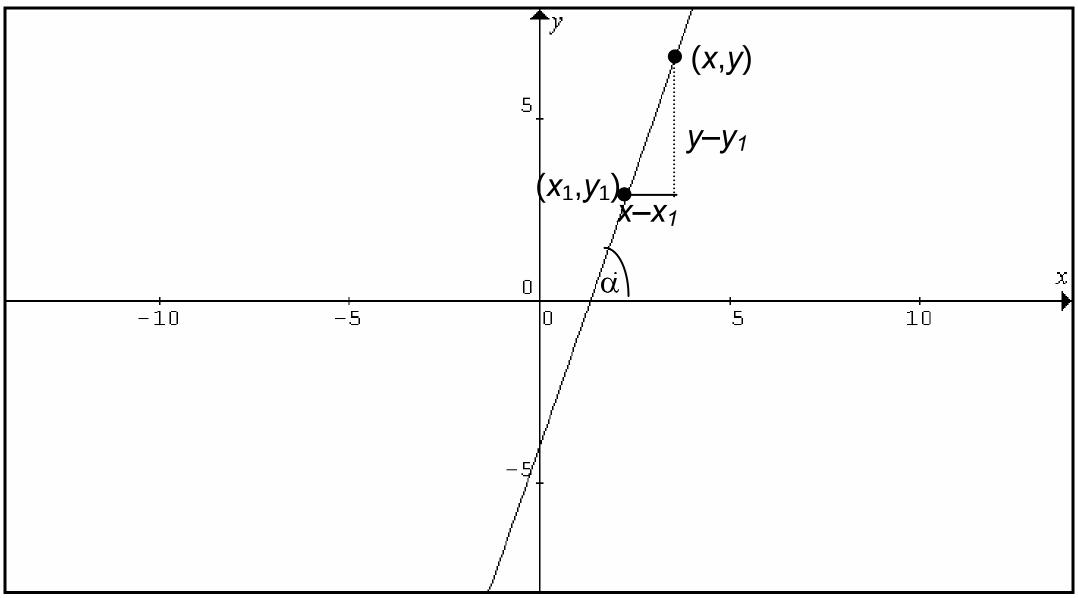
1) Como lo hiciste en el ejercicio 5 de la *actividad 3*, puedes tomar un punto de coordenadas variables (x,y) y el punto (3, 10) expresa la pendiente como un cociente:_________________
2) Pero ya conoces el valor de la pendiente, relaciónalo con lo que obtuviste en el inciso anterior: _________________________
3) Haz las operaciones correspondientes para comprobar que la ecuación es: $y = 2x + 4$
4) Utiliza la ecuación, obtén otro punto de la recta y en tu cuaderno traza la gráfica.
5) Con la ecuación determina otros 3 puntos y verifica que están sobre la recta.

EJERCICIO 3.

Construye la ecuación de las siguientes rectas:

a) Pasa por el origen y por (9,3)
b) Pasa por (1,2) y por (10,7)
c) Pasa por (–3,4), y su pendiente es igual a 4.
d) Pasa por (1,5) y su pendiente es igual a $\frac{1}{2}$.

Ahora queremos determinar la ecuación de la recta que pasa por un punto dado de coordenadas (x_1, y_1) y con pendiente m dada, para ello podemos, como lo hemos hecho en los problemas anteriores, representamos gráficamente dicha recta.



De esta recta seleccionamos un punto cualquiera de coordenadas (x, y), que represente a todos los que la conforman.

De acuerdo a la información proporcionada, la tangente del ángulo α es igual a $\boldsymbol{m}$.

Pero, la tangente del ángulo α también puede indicarse como el cociente:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}.$$

Es decir: $$\frac{y-y_1}{x-x_1}=m$$

.

Al despejar ***y*****,** tenemos la ecuación: $y=m(x-x_1)+y_1$

Esta es la ecuación de cualquier recta de la que se conocen las coordenadas de uno de sus puntos, y su pendiente.

ACTIVIDAD 5.
Utiliza el resultado anterior para:

1. Determinar:
   a) La ecuación de la recta que pasa por el punto de coordenadas (5,1) y cuya pendiente es igual a 3.
   b) Usando la ecuación encontrada, construye la gráfica de la recta, señalando el ángulo de inclinación, el cual como sabes, es agudo.

2. Comprobar que:
   a) La ecuación de la recta que pasa por el punto (–2,3) y cuya pendiente es igual a –2, es $y = -2x - 1$,
   b) Al trazar la gráfica, el ángulo de inclinación es obtuso.

Hasta ahora hemos estudiado ***los dos casos fundamentales*** para encontrar la ecuación de una recta: ***Dados dos puntos*** y ***dado un punto y la pendiente.***

EJERCICIO 4.
Utilizando este nuevo procedimiento, determina la ecuación de cada una de las siguientes rectas:

a) Pasa por el origen y su pendiente es igual a $\frac{3}{4}$
b) Pasa por el punto (–1,4) y su pendiente es igual a –3
c) Pasa por (1,3) y (5,7).

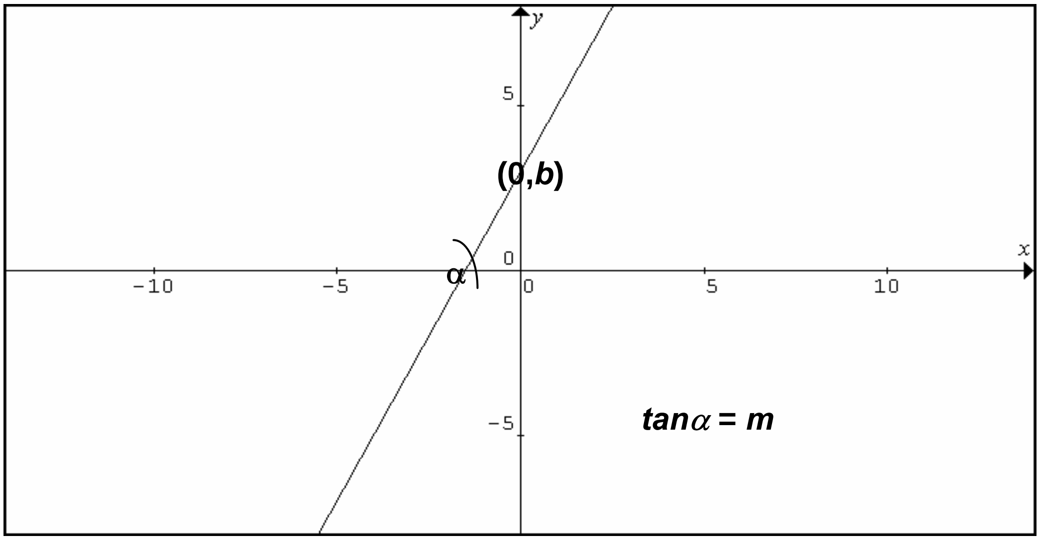
2.3 CONOCIENDO LA ORDENADA AL ORIGEN Y SU PENDIENTE

Veamos a un caso particular de la ecuación de la recta dada la pendiente y un punto.

ACTIVIDAD 6.

1. Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto **(0,*b*)** y cuya pendiente es igual a ***m***.

En la gráfica siguiente tenemos una recta que cumple con las condiciones dadas.



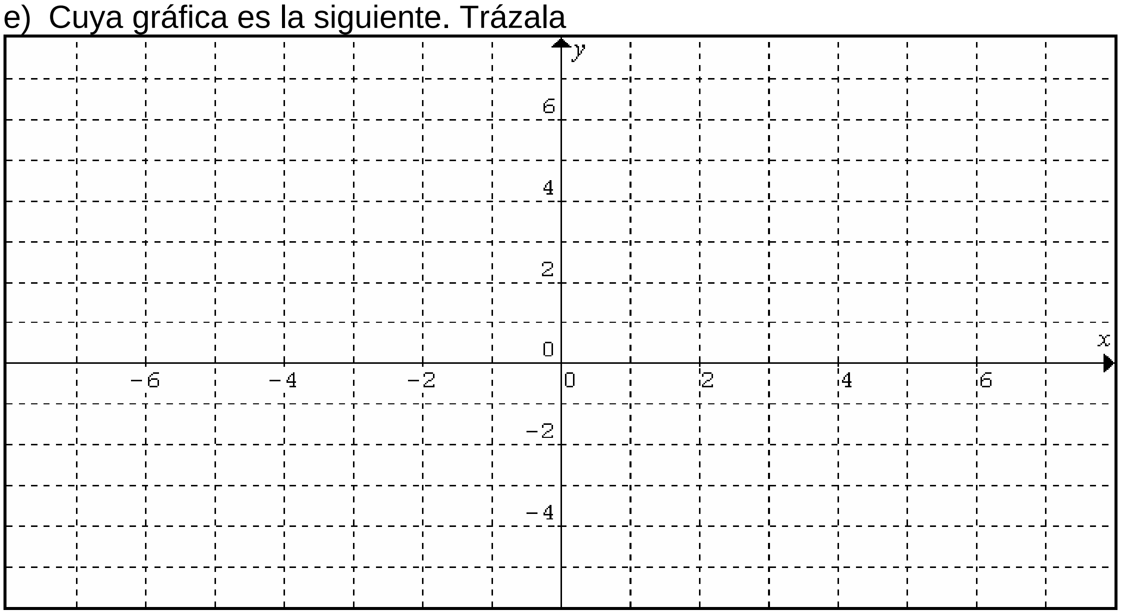
Si Observas la recta te puedes dar cuenta que:

a) Intersecta al eje de las ordenadas en el punto de coordenadas: _______.
b) La tangente del ángulo que forma la recta con la dirección positiva del eje de las abscisas es igual a ______.
c) Al sustituir en la ecuación : $y = m(x - x_1) + y_1$, el punto encontrado en (a), resulta: ***y*** =

Simplificando tenemos la ecuación: $y = mx + b$, que como hemos visto, representa a la recta que pasa por el punto de coordenadas (0,*b*), y cuya pendiente es igual a ***m*.** A *b* se le conoce como la ***ordenada al origen*.**

2. De acuerdo a esta conclusión, la ecuación: *y* = 3*x* +1, representa a la recta:

a) Que Intersecta al eje de las ordenadas en el punto: __________
b) Con pendiente igual a ___.
c) Con ordenada al origen es igual a ____.
d) Que pasa por el punto (1, __)
e) Cuya gráfica es la siguiente. Trázala



3. La ecuación: y = 5x + 6, representa a la recta:
   a) Que intersecta al eje de las ordenadas en el punto _______.
   b) Con pendiente igual a ___.
   c) Que cuando la ordenada vale 4, la abscisa vale: ____________.
   d) Traza su gráfica en tu cuaderno:

4. Determinemos ahora la ecuación y la gráfica de la recta con ordenada al origen igual a 4 y con pendiente igual a 2.

   a) Utilizando la ecuación $y = mx + b$ **,** al sustituir obtenemos la ecuación:

      ____
   b) Sabemos que la recta intersecta al eje de las ordenadas en:
   c) Si a x le damos cualquier valor, por ejemplo –3, la ordenada es: ________
   d) En tu cuaderno, construye su gráfica:

EJERCICIO 5.

1. Determina la ecuación y la gráfica de la recta que:
   a) Pasa por los puntos (–3,2) y (5,7)
   b) Pasa por (–1,–2), y con pendiente igual a 2
   c) Pasa por (3,-1), y con pendiente igual a –4.
   d) Con ordenada al origen igual a –3, y pendiente igual a 5.
   e) Con ordenada al origen igual a 6, y pendiente igual a –1.

2. De cada una de las siguientes ecuaciones lineales, determina, su pendiente, su ordenada al origen, el punto en el que intersecta al eje de las ordenadas, su gráfica:
   a) $y = 5x + 2$
   b) $y = –3x +4$
   c) $y + 2x = 7$
   d) $2y + 4x – 8 = 6$
   e) $3y + 4x + 9 = 0$

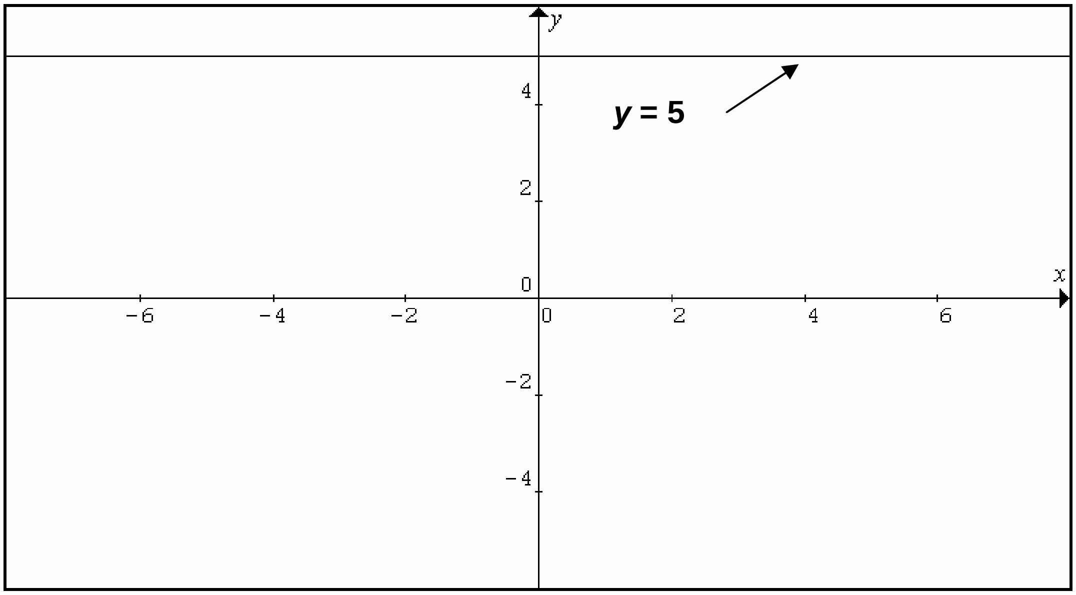
2.4 CUANDO ES PARALELA A UNO DE LOS EJES DE COORDENADAS.

ACTIVIDAD 7.

1. Analicemos la ecuación: ***y = 5***.

Esta también es una ecuación lineal, pero con una sola variable, la ***y,*** que en este caso en realidad es una constante. No importa el valor que tome la ***x,*** el valor de *y* siempre será igual a 5. De esta forma podemos determinar puntos como: (–7,5), (–3,5), (0,5), (3.7, 5), etcétera.

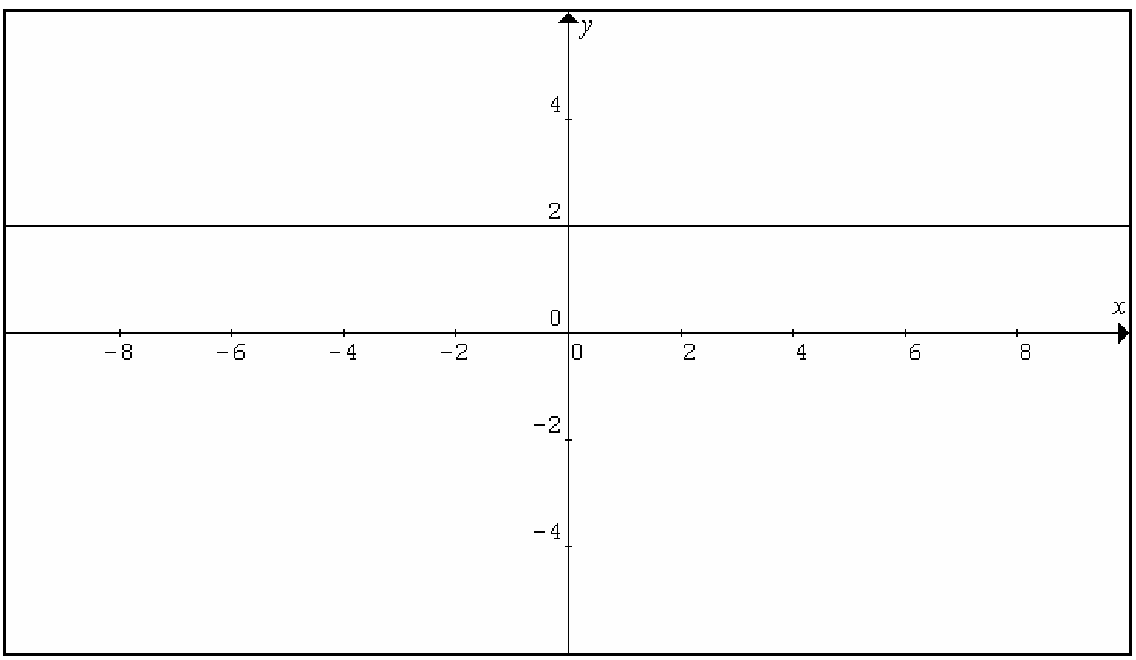
Con estos puntos podemos determinar la siguiente recta:



Como puedes observar, esta es una recta paralela al eje de las abscisas con una altura constante de 5 unidades.

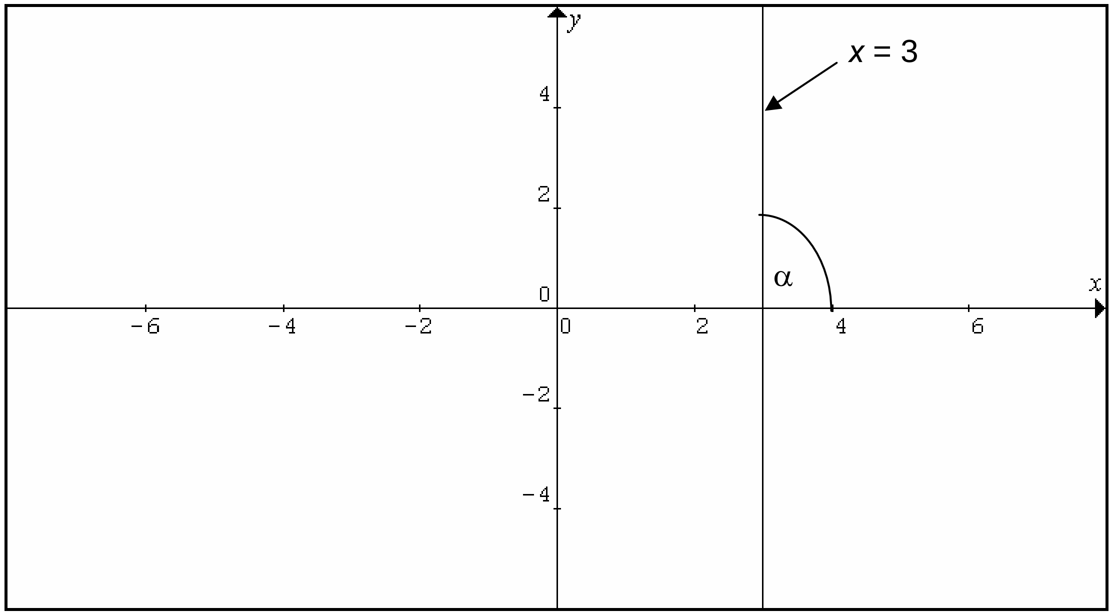
a) ¿Es posible determinar su pendiente?, si es así ¿cuánto vale?

2. Analiza la siguiente gráfica y responde:



a) Esta gráfica representa a la recta con ecuación: ***y* =** ____.
b) Determina su pendiente.

3. Trabajemos con la ecuación lineal: ***x* = 3**.



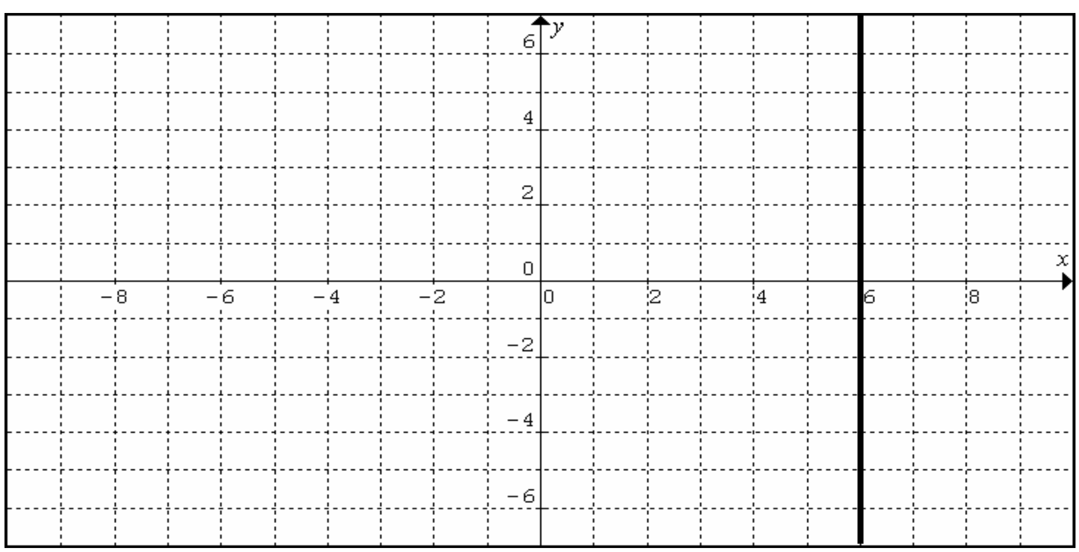
a) Esta es una ecuación lineal en la que la abscisa tiene un valor constante ¿Cuál es ese valor? ___________.
b) Algunos puntos que pueden derivarse de ella son: (__, 0), (__, 5), (3, __), (__, 7).

La gráfica que la representa es una línea recta paralela al eje de las ordenadas.

c) ¿Cuánto vale la distancia constante de la recta al eje de las ordenadas?

Como α = 90°, por lo tanto, la pendiente de la recta es igual a la tangente de 90°, la cual, como tú sabes, no está definida.

4. Determina la ecuación e indica si la pendiente de la recta realzada está definida:



EJERCICIO 6.

Determina la gráfica y la pendiente de las rectas definidas por las siguientes ecuaciones lineales:

a) $y = 7$
b) $x + 4 = 5$
c) $x + 6 = 0$
d) $y - 7 = 3$

Podemos concluir que, si ***c*** es cualquier número real:

- La ecuación: ***y = c*,** representa a una recta paralela al eje de las abscisas, con una altura constante de ***c*** unidades, y con pendiente igual a cero.
- La ecuación ***x = c*,** representa a una recta paralela al eje de las ordenadas, con una distancia constante a él de ***c*** unidades. Su pendiente no está definida.

Después de lo que hemos estudiado hasta aquí, podemos afirmar, que: **toda ecuación lineal representa a una recta, y que toda recta en el plano cartesiano, puede ser expresada como una ecuación lineal.**

SECCIÓN 3. TRATAMIENTO ANALÍTICO PARA DETERMINAR A PARTIR DE LA ECUACIÓN DE UNA O DOS RECTAS:

En esta sección pretendemos que dadas las ecuaciones de dos rectas o bien los elementos que definen sus posiciones, determines si se cortan o no, y en su caso el ángulo de intersección y las coordenadas del punto donde se cortan

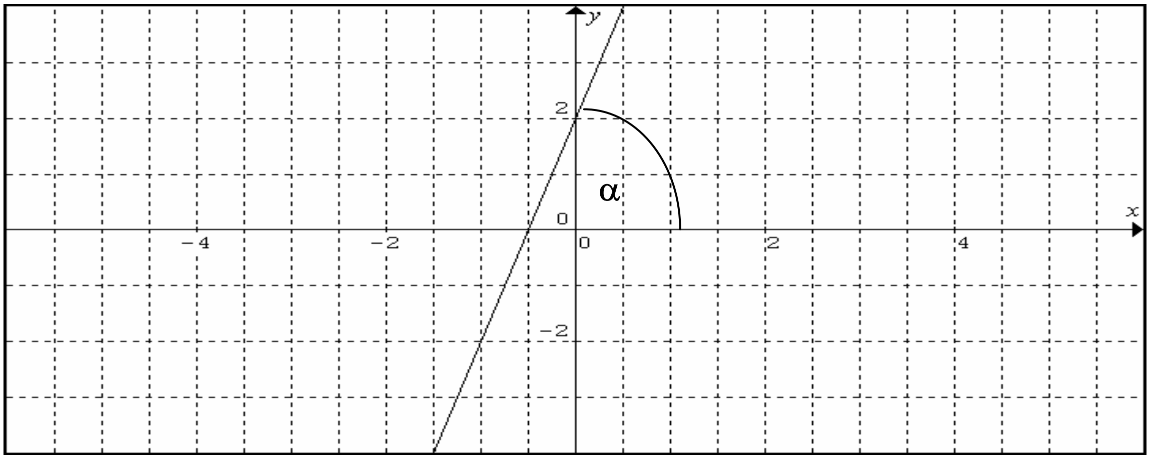
3.1 LOS ELEMENTOS GEOMÉTRICOS QUE LA DEFINEN: ÁNGULO DE INCLINACIÓN, Y UNO O DOS DE SUS PUNTOS.

ACTIVIDAD 8.

La ecuación $y = 4x + 2$ que representa a la recta:

a) Con pendiente igual a ___.
b) Con ordenada al origen igual a___.
c) Que Intersecta al eje de las ordenadas en el punto: _______.

La representación gráfica de la recta es:



d) Por la definición de pendiente, la tangente del ángulo α es igual a ___.

Esto significa que α es el ángulo cuya tangente es igual a 4 y se escribe así:

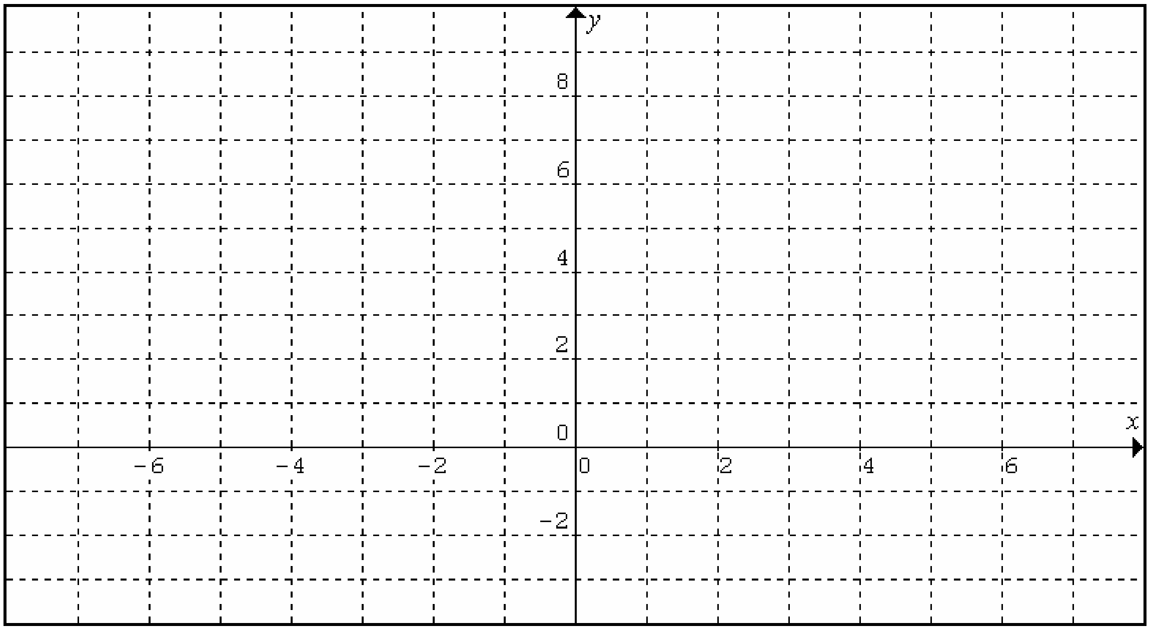
$$\boldsymbol{\alpha = ang(tg = 4)}$$

Si haces uso de tu calculadora, verás que la medida aproximada de α es de 76°, que como tu ya sabías, el ángulo es agudo
.

e) Podemos entonces concluir que la ecuación $y = 4x + 2$, representa a la recta que forma con la dirección positiva del eje de las abscisas un ángulo, con longitud aproximadamente igual a ____ °.

2. La ecuación: $y = 2x + 9$ representa a la recta:

a) Que Intersecta al eje de las ordenadas en el punto: __________
b) Cuya ordenada al origen es igual a: ______.
c) Cuya pendiente es igual a ___.
d) Que forma con la dirección positiva del eje de las abscisas un ángulo, cuya medida aproximada es de:___°.
e) Que tiene la representación gráfica siguiente, constrúyela:



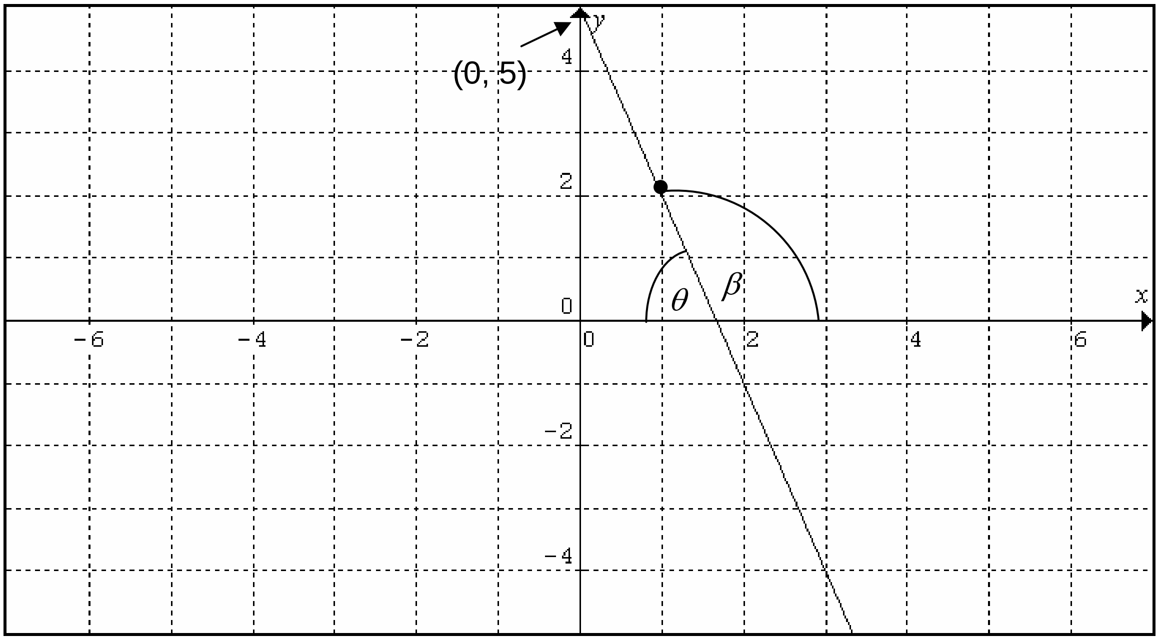
ACTIVIDAD 9.
¿Cuál es la medida del ángulo de inclinación de la recta $y = -3x + 5$ con el eje de las abscisas?

Para responder la pregunta, determina:

1. Las coordenadas del punto de intersección con el eje ***y***.
2. La pendiente
3. El tipo de ángulo (agudo, obtuso o recto)
4. Otro punto de la recta y en tu cuaderno traza la gráfica.
5. El valor aproximado del ángulo de inclinación. ¿Obtuviste un valor como el que esperabas?

Como ya lo habías establecido, dado que la pendiente es negativa, el ángulo formado por la recta y la dirección positiva del eje de las abscisas (β)**,** es mayor que 90°, sin embargo el resultado que obtuviste fue de aproximadamente -72^0 ¿qué sucede? ¿esperabas un ángulo negativo y menor de 90^0?, ¿cómo interpretar el resultado obtenido? ¿qué significa?

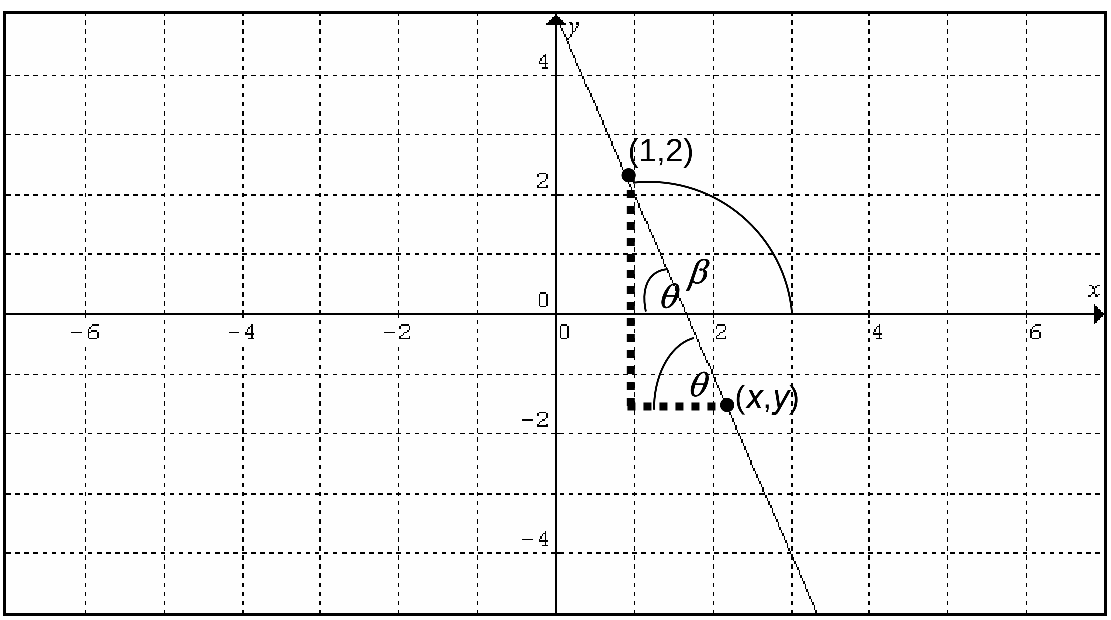
Analicemos que está pasando, seguramente la recta que trazaste fue similar a ésta.



6. La recta forma con el eje de las abscisas, dos ángulos a los que llamaremos β y θ ¿Qué relación guardan entre sí estos ángulos?

7. ¿Cuál de los dos ángulos β ó θ puede valer 72^0?

Analicemos la gráfica y veamos que sucede.
Sobre la recta selecciona un punto, por ejemplo el (1,2), (¿cómo saber que está en la recta?) y otro cualquiera de coordenadas (x, y) que represente a todos los que la conforman y como en ocasiones anteriores, forma un triángulo rectángulo.



Como puedes observar, el triángulo solamente lo pudiste formar del lado izquierdo de la recta, es decir θ es el ángulo formado por la recta y la dirección negativa del eje de las abscisas. Entonces $\theta \approx 72^0$, pero θ está medido en sentido contrario a las manecillas del reloj, así que $tg(-\theta) = -3$, esto es: $tg(-72^0) \approx -3$, pero entonces

8. Entonces, ¿Cuánto mide β? ________________

Como la pendiente $m = tg\ \beta = -3$ entonces: $tg108^0 \approx -3$

Concluyendo: $tg108^0 = -\ tg72^0 \approx -3$

Lo anterior nos permite recordar una propiedad que seguramente estudiarás con más detalle en Matemáticas IV, que dice que:

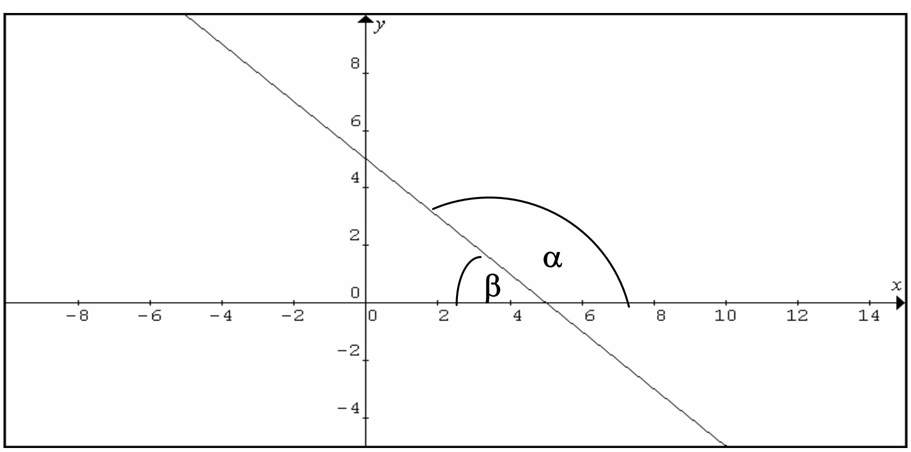
"La tangente de un ángulo es igual a menos la tangente de su suplemento"

$$tg\ \beta = -\ tg(90^0 - \beta)$$

Cuando usas la calculadora para encontrar la medida del ángulo de una recta cuya pendiente es negativa, el resultado que obtienes es el valor negativo del ángulo suplementario, así que necesitas hacer una operación más para encontrar la medida del ángulo que deseas.

ACTIVIDAD 10.

1. Trabajemos ahora con $y = -x + 5$. Esta ecuación lineal representa a la recta:
   a) Que Intersecta al eje de las ordenadas en el punto: _________
   b) Cuya ordenada al origen es igual a _____.
   c) Cuya pendiente es igual a ____.
   d) Que forma con la dirección positiva del eje de las abscisas un ángulo, cuya medida aproximada es ____.
   e) Cuya gráfica es:



   f) Sabemos que los ángulos α y β son ___________________.
   g) La tangente de α es igual a____.

h) La tangente de β es igual a _____.
i) Explica por qué $\alpha = 135^0$.

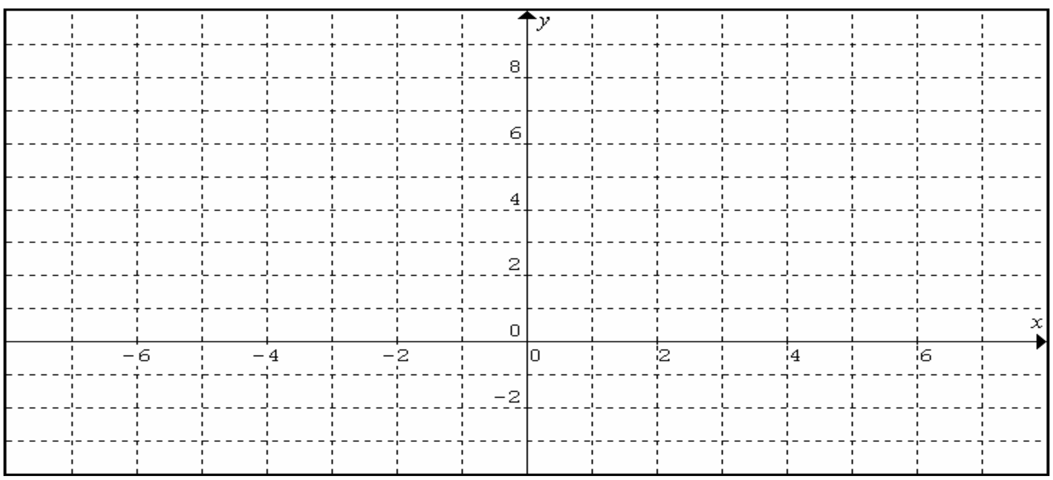
EJERCICIO 7.

De cada una de las siguientes ecuaciones lineales determina, la pendiente, la ordenada al origen, el punto en el que la recta que representa Intersecta al eje de las ordenadas, y la medida aproximada del ángulo que forman la recta y la dirección positiva del eje de las abscisas, traza la gráfica.

a) $y + 3x + 4 = 0$
b) $2y + 3x - 8 = x - 2$
c) $y - 5x + 9 = 7$

ACTIVIDAD 11.

1. Determina la ecuación de la recta que pasa por los puntos (–4,0) y (0,8).
   a) Traza la recta en el plano siguiente y llama α al ángulo de inclinación.



Como puedes ver, estos son los puntos en los que la recta Intersecta a los ejes cartesianos.

b) Determina la pendiente de la recta: ____________________________
c) Sabemos que la ordenada al origen es igual a _____.
d) Por lo tanto su ecuación es: _____________

Si restamos 2x a ambos lados de esta ecuación tenemos que: $-2x + y = 8$.

Al dividir entre 8 ambos lados: $\dfrac{-2x}{8} + \dfrac{y}{8} = \dfrac{8}{8} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x}{-4} + \dfrac{y}{8} = 1$

Podemos observar que:

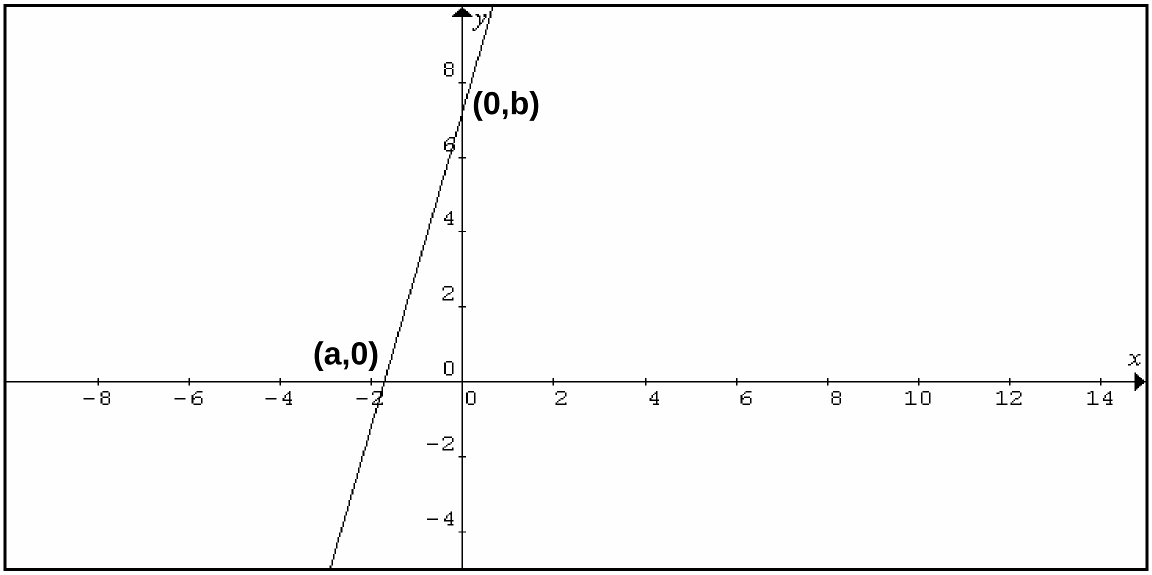
- El denominador del término en ***x***, es igual a la abscisa del punto en el que recta intersecta al eje de las abscisas.
- El denominador del término en ***y***, es igual a la ordenada del punto en el que recta intersecta al eje de las ordenadas.

2. Trabajemos ahora con la recta que pasa por los puntos (a,0) y (0,b), siendo ***a*** y ***b*** cualquier pareja de números reales.

Tú sabes que esta recta:

a) Intersecta al eje de las abscisas en el punto: _________.
b) Intersecta al eje de las ordenadas en el punto ________.

Su gráfica es como la siguiente:



c) Su pendiente es igual :
d) La ordenada al origen es igual a ____.
e) Al sustituir esta información en $y = mx + b$, obtenemos la ecuación: $y = -\frac{b}{a}x + b$. Explica por qué

Si sumamos $-\frac{b}{a}x$ a ambos lados de esta última ecuación tenemos: $y + \frac{b}{a}x = b$

Al dividir entre ***b*** ambos lados de la ecuación tenemos la ecuación:

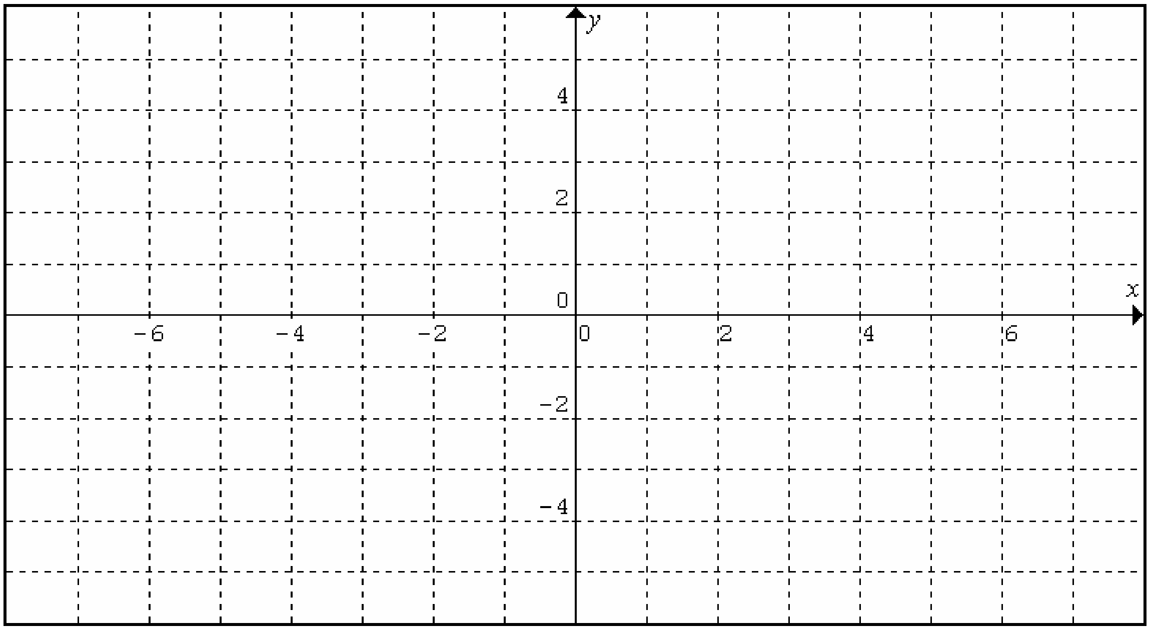
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

A esta se le conoce como ***la ecuación simétrica de la recta***, y nos permite, como ya hemos visto, conocer los puntos en los cuales la recta Intersecta a los ejes cartesianos, y su pendiente.

3. Por ejemplo, podemos afirmar que la ecuación $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ representa a la recta:

a) Que Intersecta al eje de las abscisas en el punto: ________.
b) Que Intersecta al eje de las ordenadas en el punto: _______.
c) Cuya pendiente es: _______

d) Cuya gráfica la puedes trazar en el siguiente plano colocando las coordenadas de los puntos de intersección con los ejes.



e) α es el ángulo que forman la recta y la dirección positiva del eje de las abscisas. Su longitud es aproximadamente igual a ___°

4. Trabajemos con la ecuación lineal $y + 4x = 8$:

a) Expresa la ecuación de la forma $y = mx + b$: _______________

b) Su pendiente es igual a ____ y su ordenada al origen es _______.

c) Para expresarla de la forma $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ es necesario dividir ambos lados de la ecuación; $y + 4x = 8$ entre 8, Escribe la ecuación resultante _____________.

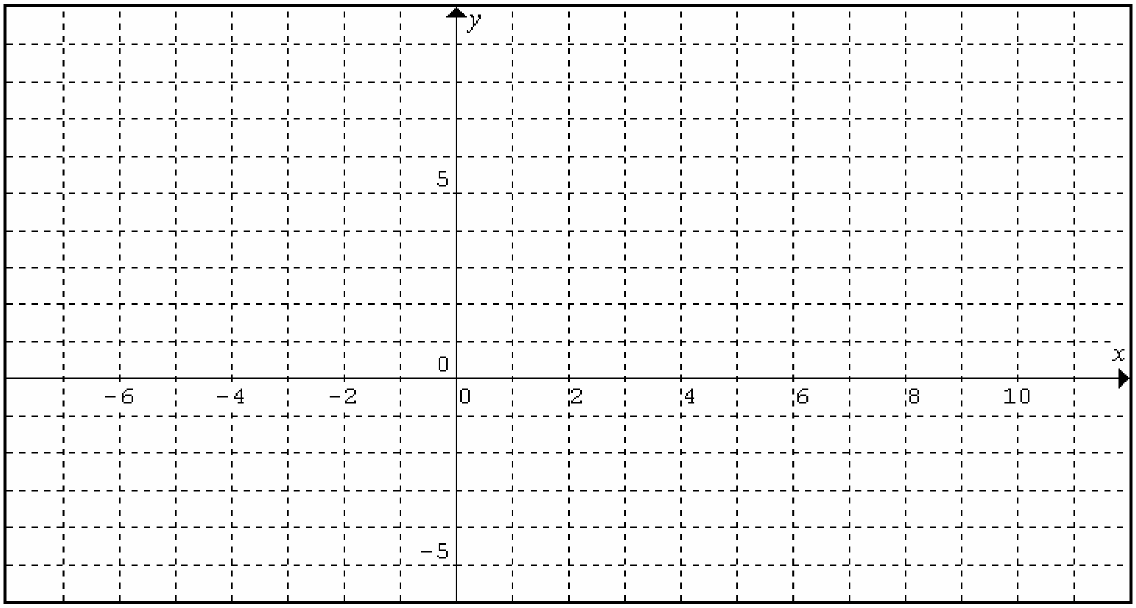
d) El punto en el cual la recta intersecta al eje de las abscisas es _____.

e) El punto en el cual la recta intersecta al eje de las ordenadas es_____.

f) Con los puntos que obtuviste en los incisos anteriores, calcula nuevamente la pendiente.

g) ¿Qué relación hay entre la pendiente ***m*** con ***b*** y ***a*** la ordenada y abscisa al origen respectivamente?

h) Represente gráficamente la recta:



i) El ángulo α, que es el formado por la recta y la dirección positiva del eje de las abscisas, tiene una longitud aproximada de ___°

EJERCICIO 8.

Expresa cada una de las siguientes ecuaciones lineales como $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, y determina, las intersecciones de la recta que la representa gráficamente, con los ejes cartesianos, su pendiente, el ángulo que forma con la dirección positiva del eje de las abscisas, y su gráfica.

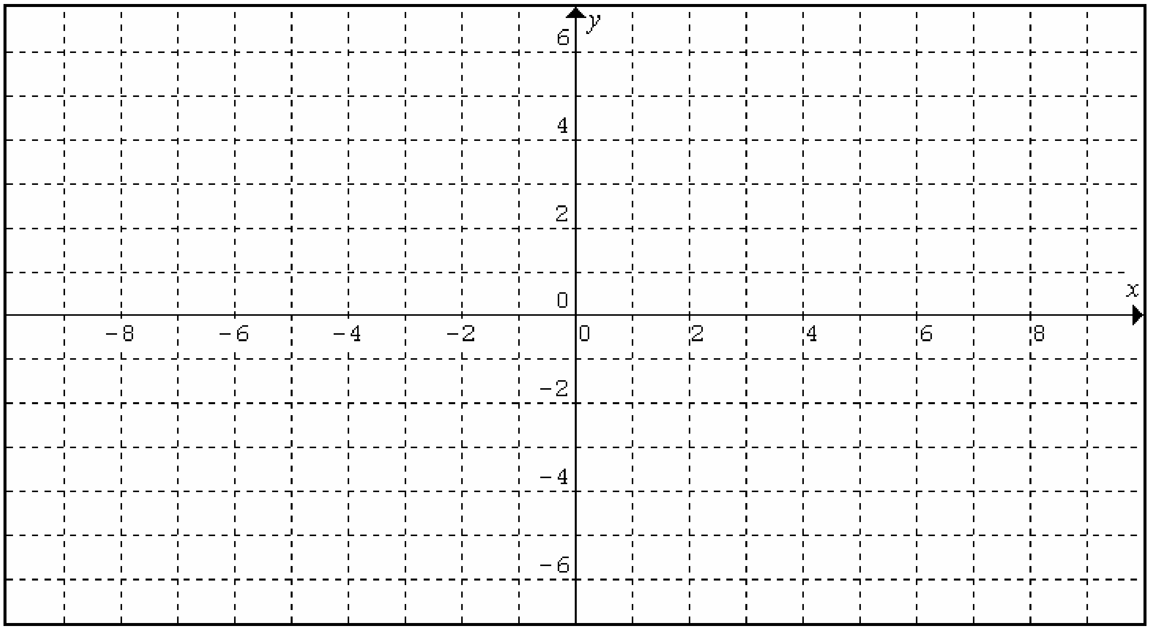
a) $y - 4x + 12 = 0$
b) $3x + 4y - 4 = 2$
c) $7x - 5y + 9 = x + 7$
d) $-6y + 8x + 9 = 3x + 2y + 3$

3.2 SI UN PUNTO CUYAS COORDENADAS SE CONOCEN PERTENECE O NO A UNA RECTA.

Es importante saber si un punto pertenece o no a una recta sin recurrir a la gráfica, analicemos cómo hacerlo a través de una actividad.

ACTIVIDAD 12.
Después de lo que hemos estudiado en esta unidad, sabemos que la ecuación lineal $y = 3x + 1$ representa al conjunto infinito de puntos que conforman la recta.

1) Traza la gráfica de la recta.



2) Es obvio, sin embargo que no todos los puntos del plano cartesiano pertenecen a esta recta. Analicemos por ejemplo al punto (4,1), colócalo en el plano cartesiano.

Gráficamente nos podemos dar cuenta que no forma parte de nuestra recta. Comprobémoslo ahora algebraicamente:

3) El valor que toma la variable ***x*** en ese punto es igual a 4. Sustituye ese valor en la ecuación $y = 3x + 1$. El valor que obtuviste para ***y*** fue _____.

4) El punto de la recta que encontraste fue _______ que es diferente a (4,1).

Podemos afirmar entones que este último punto no pertenece a la recta con ecuación: $y = 3x + 1$.

5) Encuentra 5 puntos en el plano cartesiano que no formen parte de esta recta, comprueba esto gráfica y algebraicamente.

EJERCICIO 9.

De la recta que pasa por (1,–1), y por (5,11), determina

a) Su pendiente.
b) Su ecuación.
c) Su gráfica.
d) Sus puntos de intersección con los ejes cartesianos.
e) La longitud de su ángulo de inclinación con la dirección positiva del eje de las abscisas.
f) 10 puntos que formen parte de ella.
g) Si los siguientes puntos forma parte de ella:
   - (100,296)

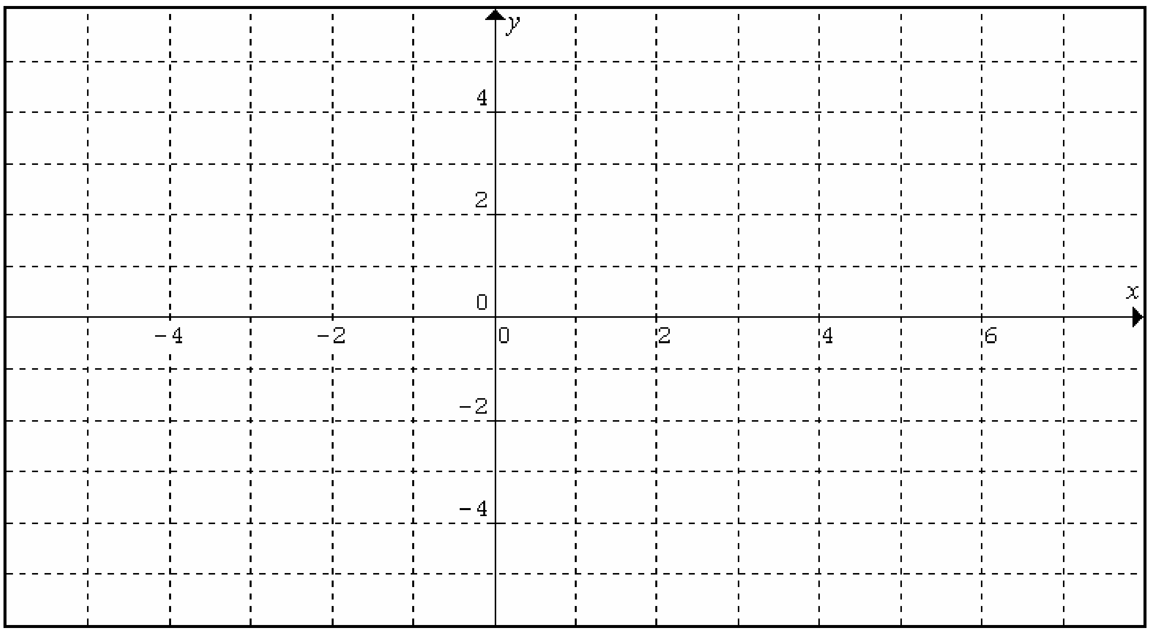
- (–5, –20)
- (7,17)
- (–1, –8)

3.3 LA INTERSECCIÓN DE DOS RECTAS QUE SE CORTAN

ACTIVIDAD 13.

1. Para iniciar el estudio de este tema, trabajemos con las siguientes rectas:
   - La primera tiene por ecuación: $y = 3x + 2$.
   - La segunda tiene por ecuación: $2x + y + 3 = 0$

a) Traza la gráfica de las dos rectas, y trata de determinar en el plano cartesiano, el punto en el que se cortan.



b) El punto de intersección de las dos rectas es: ______.

Comprobemos esto algebraicamente, En el punto de intersección, tanto la abscisa como la ordenada de ambas rectas son iguales, por lo tanto, el valor de ***y*** de la primera ecuación puede ser sustituido en la segunda, creando entonces la siguiente ecuación en términos exclusivamente de ***x***, resultando:

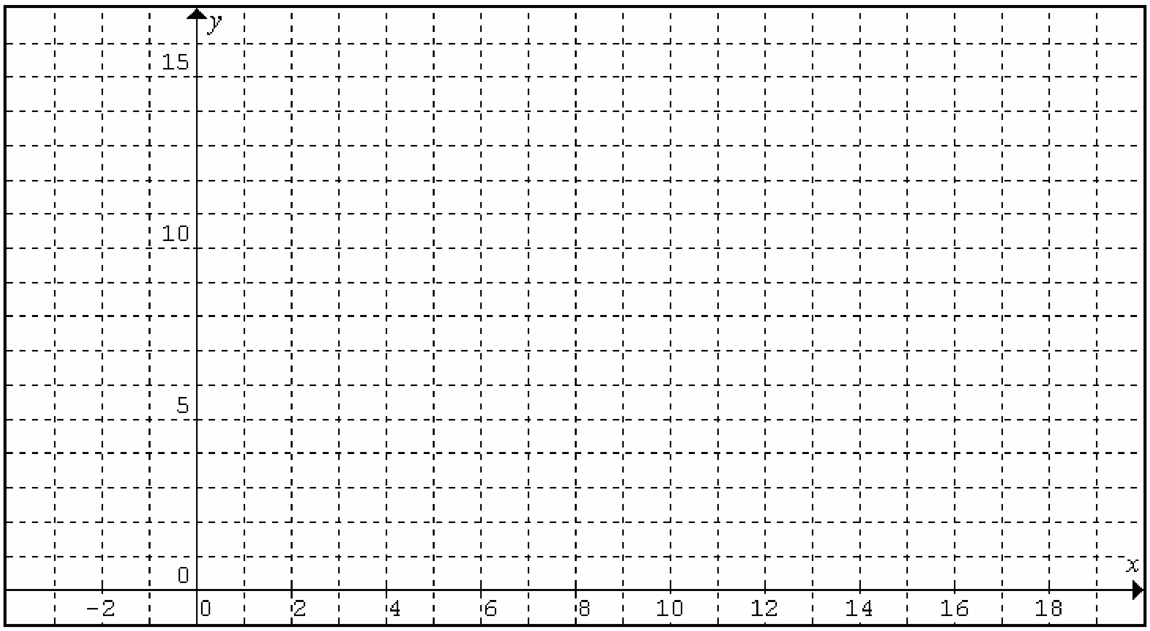
c) 2x + ____________+ 3 =0.
d) Al despejar **x** de esta nueva ecuación, tenemos que: ***x* =** ___.
e) Sustituyendo este valor en cualquiera de las dos ecuaciones iniciales llegamos a que: ***y* =** ___.

Por lo tanto, el punto de intersección de las dos rectas es (–1,–1), que es el mismo que seguramente habías determinado gráficamente.

2. Determinemos ahora el punto de intersección de las siguientes dos rectas:

- La primera pasa por (–1,3) y por (3,15).
- La segunda tiene por ecuación: y +2x – 3 = 0.

a) Traza las dos rectas y trata de determinar gráficamente el punto en el que se cortan.



Como puedes ver, en este caso, gráficamente no es sencillo determinar con exactitud el punto de intersección.

Trabajemos algebraicamente:

a) La pendiente de la primer recta es igual a: ____________
b) Al sustituir en la ecuación $y = m(x - x_1) + y_1$ utilizando cualquiera de los puntos de la primera recta y la pendiente calculada, tenemos que: y = ________
c) Recuerda que en el punto de intersección, el valor de ***x*** y el de ***y*** son iguales en las dos rectas. Por lo tanto, es posible sustituir el valor de ***y*** que hemos determinado de la ecuación de la primer recta, en la segunda, con lo que tenemos: _________ + 2x – 3 = 0

d) Despejando tenemos que: ***x* =** ____
e) Sustituyendo este valor en cualquiera de las dos ecuaciones tenemos que: ***y* =** ____.

El punto de intersección es entonces: (–0.6, 4.2), el cual no es sencillo determinar con precisión en forma gráfica.

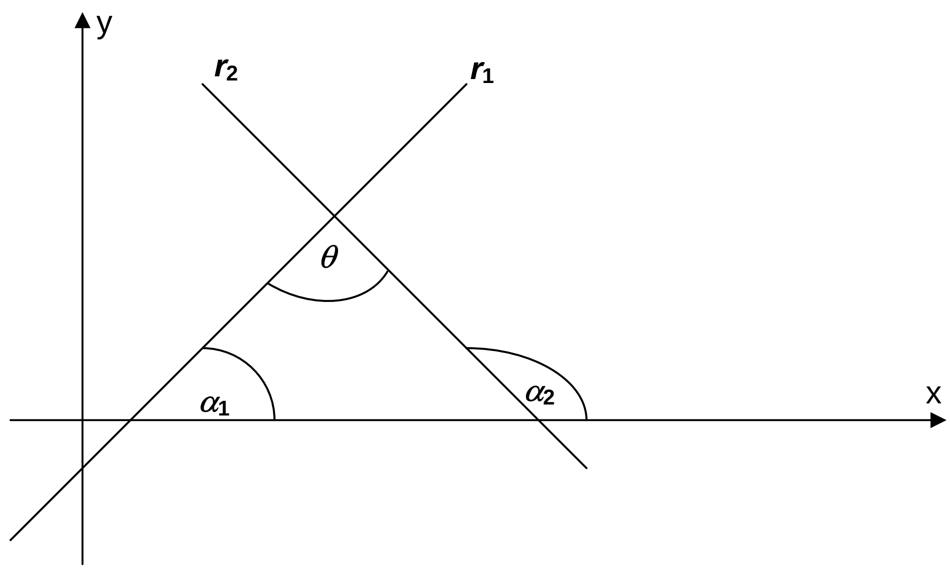
Después de estos ejemplos, podemos concluir que para poder determinar adecuadamente el punto de intersección de dos rectas, es necesario conocer sus ecuaciones y posteriormente trabajar con ellas algebraicamente para conocer el valor de *x* y el de *y* que las satisface simultáneamente.

EJERCICIO 10.
Determina el punto de intersección de las siguientes rectas:

a) La primera pasa por el origen y tiene pendiente igual a 4. La segunda tiene por ecuación, $y + 3x - 2 = 1$
b) La primera pasa por los puntos (–1,3) y (5,10). La segunda pasa por (4, –3) y (–5, –3).
c) La pendiente de la primera recta es igual a 5 y su ordenada al origen es igual a 1. La segunda pasa por (–2, –5) y por (2,10).
d) Sus ecuaciones son: $5x - 2y + 4 = 0$, y $3x + y - 1 = 0$

3.4 ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS QUE SE CORTAN

Iniciemos su estudio con dos rectas cualesquiera que se intersecten:



ACTIVIDAD 14.
De acuerdo a esta gráfica:

1. La pendiente de la recta r_1 es igual la tangente del ángulo _____.
2. La pendiente de la recta r_2 es igual la tangente del ángulo _____.
3. El ángulo entre las dos rectas, que va de r_1 a r_2 , en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, es θ.

Como puedes observar, $\alpha_2 = \alpha_1 + \theta \quad \Rightarrow \quad \theta = \alpha_2 - \alpha_1$

Por lo tanto: $tg\theta = tg(\alpha_2 - \alpha_1)$

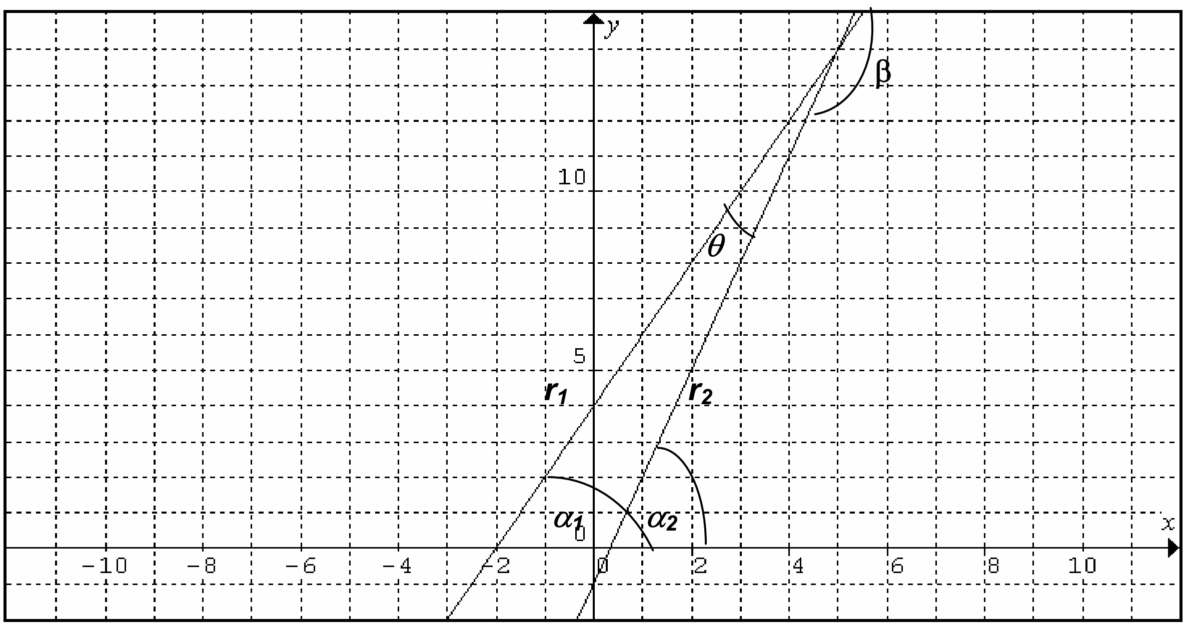
Aplicando la fórmula para la tangente de la diferencia de dos ángulos tenemos que: $tg\,\theta = \dfrac{tg\,\alpha_2 - tg\,\alpha_1}{1 + tg\,\alpha_1\, tg\,\alpha_2}$

Si denotamos a $tg\,\alpha_1$, que es la pendiente de la recta $\boldsymbol{r_1}$ como $\boldsymbol{m_1}$, y a $tg\,\alpha_2$, que es la pendiente de la recta $\boldsymbol{r_2}$ como $\boldsymbol{m_2}$, tenemos que:

$$tg\,\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

ACTIVIDAD 15.

1. Utilizando este último resultado determinemos el ángulo formado por las siguientes dos rectas:
   - La primera pasa por los puntos (–2, 0) y (2,8)
   - La segunda pasa por (1,2) y (4,11)



De acuerdo a la información de la grafica, podemos decir que:

a) La pendiente de $\boldsymbol{r_1}$, a la que denotaremos como $\boldsymbol{m_1}$, es la tangente del ángulo _____

b) La pendiente de $\boldsymbol{r_2}$, a la que denotaremos como $\boldsymbol{m_2}$, es la tangente del ángulo _____

c) $m_1 =$ ____

d) $m_2 =$ ____

e) θ es el ángulo que va de $\mathbf{r_1}$ a $\boldsymbol{r_2}$, en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, calcula:

$$tg\,\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

Como seguramente encontraste $tg\theta = 0.1428$, por lo que θ es igual al ángulo cuya tangente es igual a 0.1428. Esto lo denotaremos como:

$$\theta = ang\,(tg = .1428)$$

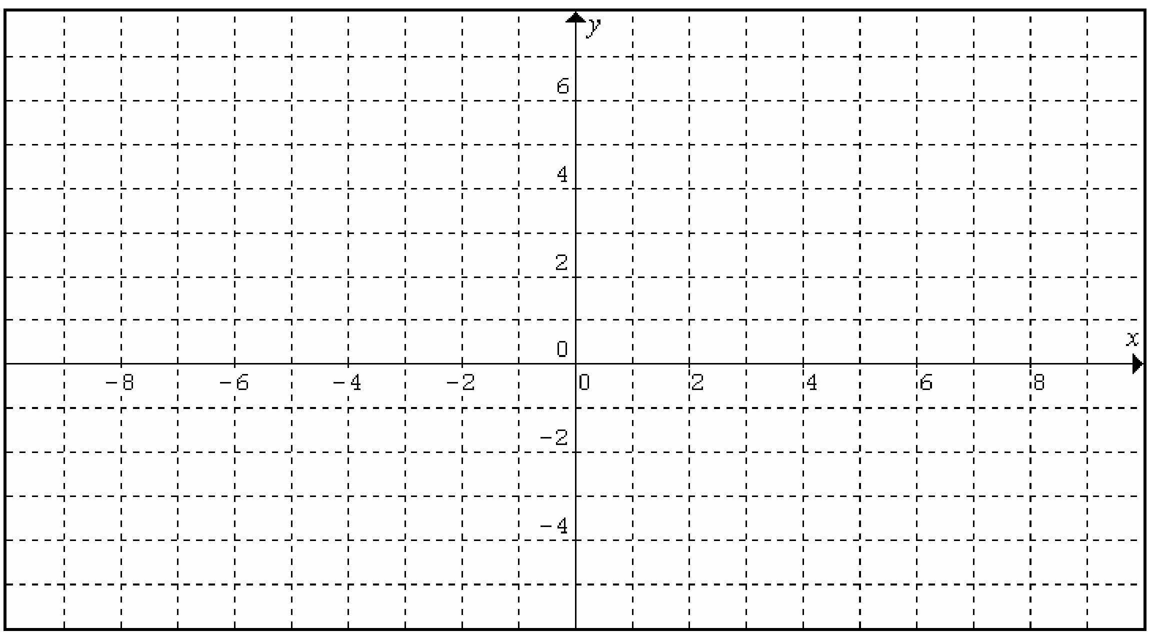
f) Usando la calculadora, comprueba que $\theta = 8° \ 10´$ (aproximadamente)

Como puedes observar, β es el otro ángulo que forman las rectas, que va de $\boldsymbol{r_2}$ a $\boldsymbol{r_1}$, y como θ y β son suplementarios, entonces:

g) β = _____________.

2. Determinemos ahora la medida del ángulo formado por las siguientes rectas:
   - La pendiente de la primera es igual a 1.5, y su ordenada al origen es igual a –3. (Llámala $\boldsymbol{r_1}$)
   - La segunda ($\boldsymbol{r_2}$) pasa por los puntos (–3, 7) y (0,–2)

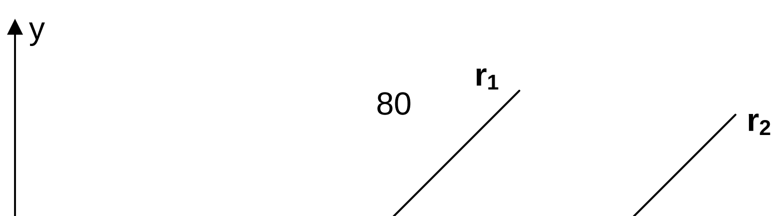
a) Como primer paso para resolver el problema, determina la gráfica de las dos rectas, y el ángulo entre ellas (llámalo θ), partiendo de la primera, en sentido inverso a las manecillas del reloj, coloca la notación adecuadamente.



b) Calcula $\boldsymbol{m_1}$ (pendiente de $\boldsymbol{r_1}$):
c) Calcula la pendiente de $\boldsymbol{r_2}$ ($\boldsymbol{m_2}$):
d) Comprueba que $tg\,\theta = 1.285$ y que θ = 52° 10´ aproximadamente

3.5 LA CONDICIÓN DE PARALELISMO O PERPENDICULARIDAD DE DOS RECTAS

Iniciemos el estudio de este tema trazando en el plano cartesiano dos rectas paralelas



Como puedes observar, los ángulos α_1 y α_2 son correspondientes, y como r_1 y r_2 son paralelas ($r_1 \,||\, r_2$), entonces $\alpha_1 = \alpha_2$. Esto nos permite afirmar que sus tangentes son también iguales ($tg\ \alpha_1 = tg\ \alpha_2$).
Es decir si dos rectas son paralelas, sus pendientes son iguales:

$$r_1 \,||\, r_2 \Rightarrow m_1 = m_2$$

Desde luego, podemos también afirmar que si las pendientes de dos rectas son iguales, entonces los ángulos que forman con la dirección positiva del eje de las abscisas son iguales, y por lo tanto las rectas son paralelas:

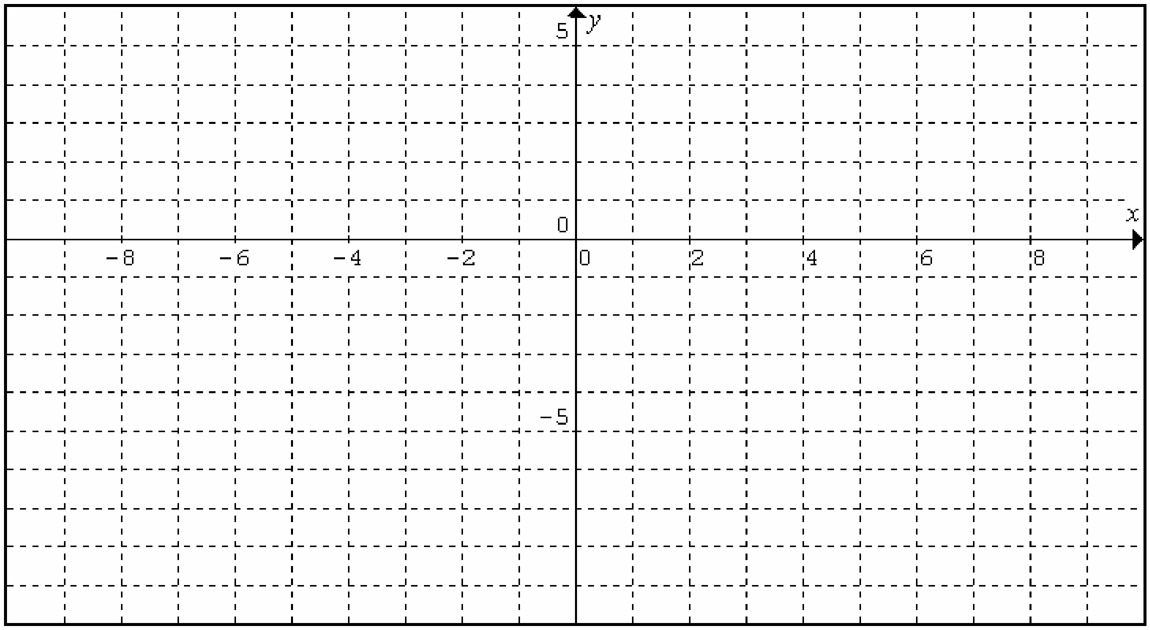
$$m_1 = m_2 \Rightarrow r_1 \,//\, r_2$$

Dos rectas son paralelas si y solo si sus pendientes son iguales

ACTIVIDAD 16.

1. Utilizando esta conclusión, demostremos que las siguientes rectas son paralelas:
   - La primera pasa por los puntos (0,5) y (3,4)
   - La segunda pasa por los puntos (–3, –8) y (1,4)

   a) Traza las dos rectas en el plano cartesiano, con la información proporcionada.



b) ¿Las rectas son paralelas? Explica por qué

2. Determinemos la ecuación de la recta que pasa por el punto (–7, –9), y que es paralela a la recta cuya ecuación es: $y - 5x + 9 = 7$.
   a) La pendiente de la recta con ecuación: $y - 5x + 9 = 7$, es igual a ___.
   b) Si sustituimos en la ecuación: $y = m(x - x_1) + y_1$, la ecuación requerida en el problema es y = ____________

3. Determinemos la ecuación de la recta que pasa por (0,7) y que es paralela a la que pasa por (0,1) y (2, –9)
   a) Calcula la pendiente de la recta que pasa por los puntos (0,1) y (2, –9) :
   b) Por lo tanto, la pendiente de la recta cuya ecuación nos solicitan es también igual a ____.
   c) Por lo tanto su ecuación es: y = ____________

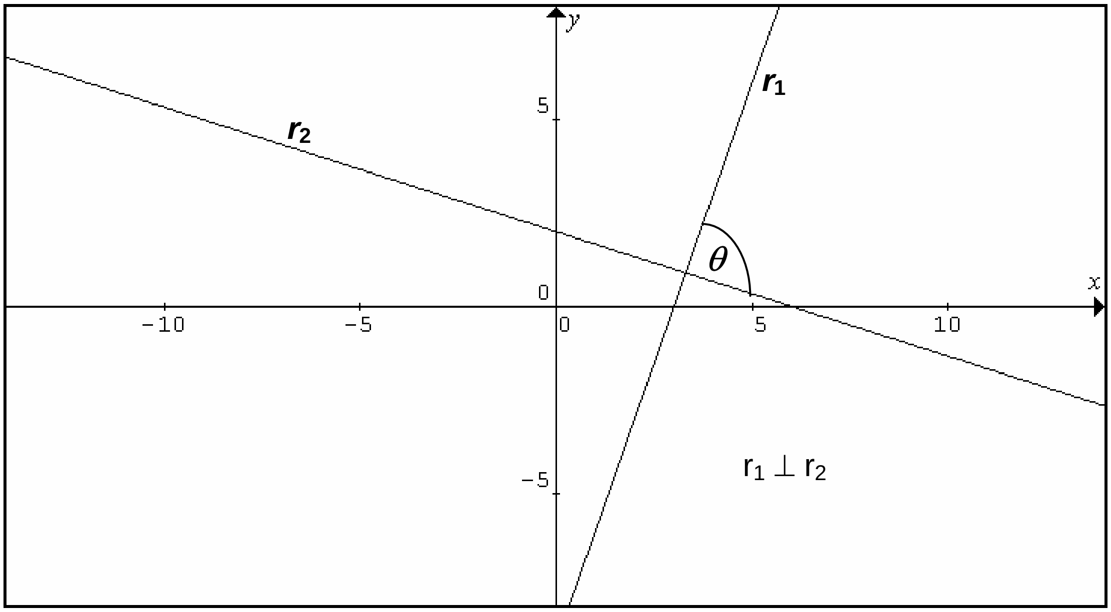
EJERCICIO 11.

a) Demuestra que las siguientes rectas son paralelas: la primera tiene por ecuación, $3y - 6x - 9 = 0$; la segunda pasa por los puntos (0, 7) y (–3,1)

b) Demuestra que los puntos (1,1), (5,3), (8,0), (4, –2) son los vértices de un paralelogramo.

c) Determina la ecuación de cada una de las siguientes rectas:
   - Pasa por (–3, –2), y es paralela a la recta que pasa por (–1,8), y (2,–10).
   - Pasa por (10, –2) y es paralela a la recta con ecuación $2x + 3y = 7$.

Trabajemos ahora con dos rectas perpendiculares:



Como $\boldsymbol{r_1}$ es perpendicular a $\boldsymbol{r_2}$ ($r_1 \perp r_2$), el ángulo entre estas dos rectas, al que hemos llamado θ , es igual a 90°.

Si utilizas tu calculadora científica, o revisas en tablas de razones trigonométricas, verás que la tangente de 90° no esta definida.

Esto nos lleva a la conclusión de que en la igualdad, $tg\,\theta = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$ el denominador tiene que ser igual a cero, es decir:

$$1 + m_1\, m_2 = 0 \;\;\Rightarrow\;\; m_1\, m_2 = -1 \;\;\Rightarrow\;\; m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

(m_1 y m_2 son inversas multiplicativas y de signo contrario).

Analicemos ahora lo que ocurre si sabemos que las pendientes de dos rectas son inversas multiplicativas, y de signo contrario:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2} \;\;\Rightarrow\;\; m_1\, m_2 = -1 \;\;\Rightarrow\;\; 1 + m_1\, m_2 = 0$$

Esto nos lleva a concluir que el cociente $\dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$ no está definido, y que el ángulo entre las dos rectas es igual a 90°. Por lo tanto, las dos rectas son perpendiculares.

Dos rectas son perpendiculares si y sólo si sus pendientes son inversas multiplicativas y de signo contrario

ACTIVIDAD 17.

Utilicemos esta conclusión en la solución de los siguientes problemas.

1. Determinemos la ecuación de la recta que pasa por (1,3), y que es perpendicular a la recta cuya ecuación es $y = 4x - 5$.

a) Como tú sabes, la pendiente de la recta con ecuación $y = 4x - 5$, es ____.
b) La pendiente de la recta perpendicular a ella, es igual a:______.
c) Por la tanto, la ecuación requerida es: $y =$

2: Calculemos la ecuación de la recta que pasa por el origen y que es perpendicular a la que pasa por (3,3) y (6,2).

a) Determina la pendiente de la recta que pasa por (3,3) y (6,2): ______.
b) Por lo tanto, la pendiente de su perpendicular igual a ______.
c) La ecuación solicitada es: $y =$ ________

EJERCICIO 12.

a) Indica si las siguientes rectas son perpendiculares:
  - La primera tiene por ecuación: $2x + y = 7$. La segunda pasa por los puntos (2,2) y (8,5).
  - La primera pasa por (0,5) y (–3, –7), y la segunda pasa por (8,0) y por (–12,5)

b) Determina la ecuación de las siguientes rectas:
  - Pasa por la (–3, –5) y es perpendicular a la que tiene por ecuación $3x + 5y = 8$.
  - Es perpendicular a la recta cuya pendiente es igual a –3, y pasa por la intersección de las rectas cuyas ecuaciones son: $y = 4x + 9$, $3x + 4y = 7$.

SECCIÓN 4. SOLUCIÓN ANALÍTICA DE PROBLEMAS DE CORTE EUCLIDIANO

En esta sección pretendemos que compruebes algunas relaciones que involucran rectas, estudiadas en Geometría Euclidiana.

4.1 CALCULO DEL ÁREA DE UN TRIÁNGULO.

ACTIVIDAD 18.

Resolvamos el siguiente problema.

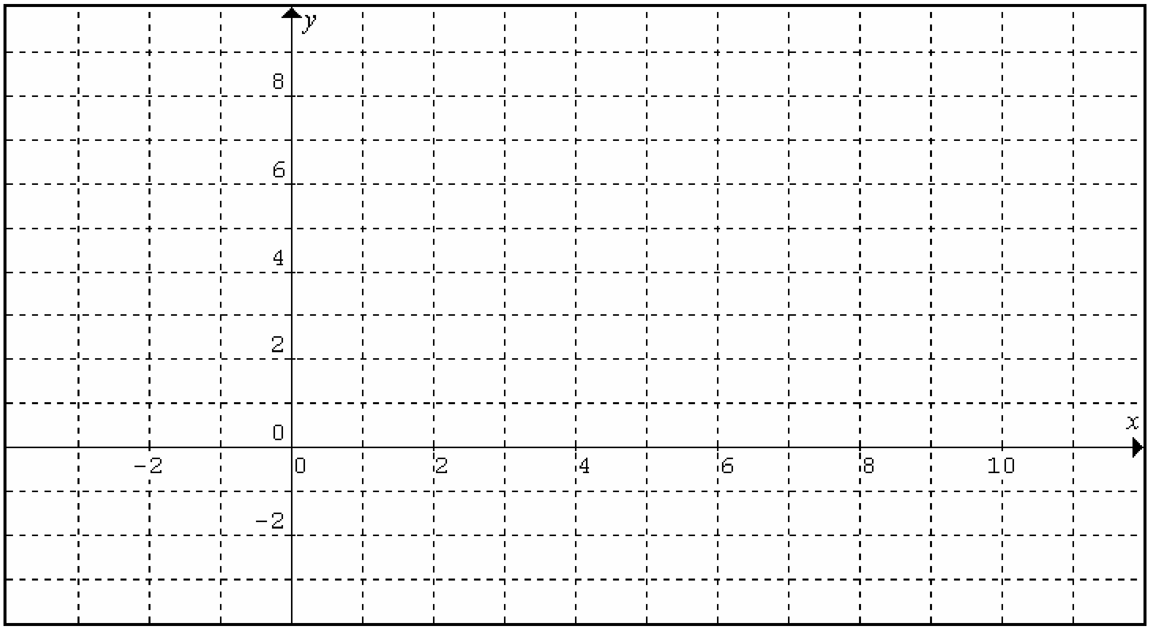
1. Determinemos el área del triángulo formado por la intersección de las siguientes rectas:

- La primera tiene por ecuación: $y = 3x + 4$ ($\boldsymbol{r_1}$)
- La segunda pasa por los puntos (0,2) y (3,8) ($\boldsymbol{r_2}$)
- La tercera pasa por (3,5), y su pendiente es igual a –1 ($\boldsymbol{r_3}$)

a) La pendiente de r_2 es igual a ___, por lo que su ecuación es: $y =$ ______

b) La ecuación de r_3 es: $y =$ _________

c) Traza las gráficas de r_1, r_2, y r_3, respectivamente, en el siguiente plano:



d) r_1 y r_2 se intersectan en el punto ***A*** de coordenadas: ________.

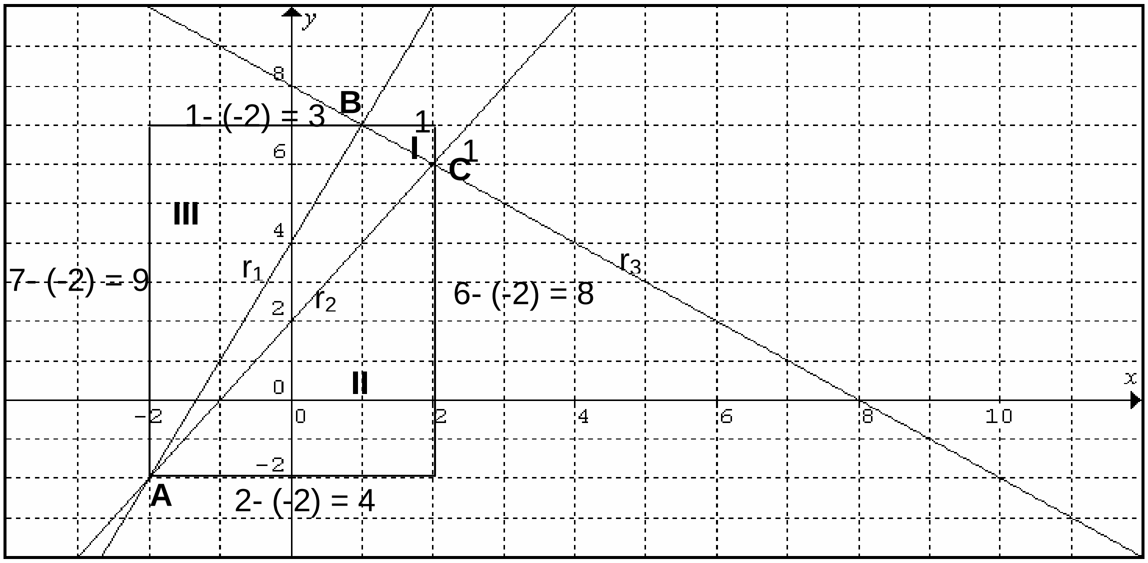
e) r_1 y r_3 se intersectan en el punto ***B*** de coordenadas: _________.

f) r_2 y r_3 se intersectan en el punto ***C*** de coordenadas:________.

g) Señala cada punto en la gráfica.

Hemos creado el triángulo ***ABC***

Si proyectamos las coordenadas de los puntos ***A***, ***B*** y ***C***, hasta intersectarlas, generamos un rectángulo en el cual queda inscrito nuestro triángulo. Analicemos la siguiente gráfica:



Podemos observar que el área del triángulo ***ABC*, **es igual al área del rectángulo que hemos generado, menos el área de los triángulos rectángulos **I**, **II**, y **III**.

h) Es decir: **A** (***ABC***) = **A**$\boxed{}$ – **A**(**I**) - **A**(**II**) – **A**(**III**)

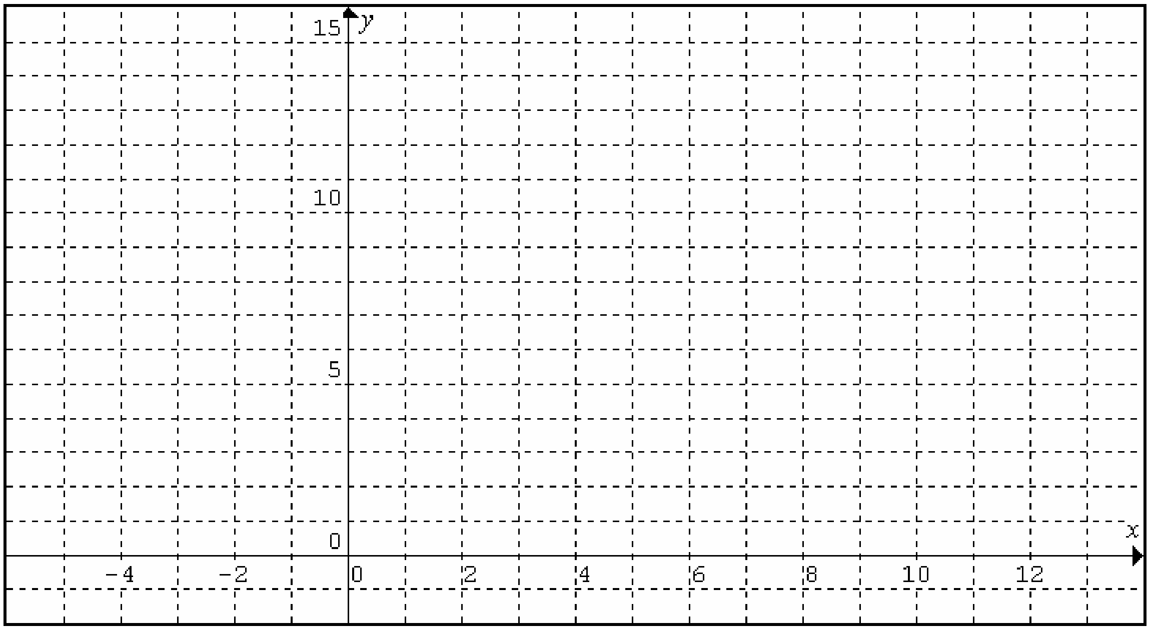
Por lo que:

$$\textbf{A}\ (\textbf{\textit{ABC}}) = 9 \times 4 - \frac{1 \times 1}{2} - \frac{8 \times 4}{2} - \frac{3 \times 9}{2} = 6\ u^2$$

2. Determinemos el área del triángulo generado al intersectar las siguientes rectas:

- La primera pasa (0,5) y (4,1) ……………………………..……($\boldsymbol{r_1}$)
- La segunda tiene por ecuación $y - x = 7$ …………….…..……($\boldsymbol{r_2}$)
- La tercera pasa por (5,9) y su pendiente es igual a 2. ……($\boldsymbol{r_3}$)

a) La ecuación de $\boldsymbol{r_1}$ es: y = ________
b) La ecuación de $\boldsymbol{r_3}$ es: y = __________
c) El punto (llámalo ***E***) de intersección de $\boldsymbol{r_1}$ y $\boldsymbol{r_2}$, es: __________
d) El punto ***G***(2,3) es la intersección de la rectas____________
e) El punto de intersección (***F***) de $\boldsymbol{r_2}$ y $\boldsymbol{r_3}$ es: _________
f) Construye la gráfica de la tres rectas y del triángulo que determinan, colocando todos los elementos:



g) **A**(***EFG***) = **A**$\boxed{}$ – **A**(I) – **A**(**II**) – **A**(**III**)

h) Verifica que **A**(**EFG**) = = 27 u^2

4.2 LA CONCURRENCIA DE LAS MEDIATRICES DE UN TRIÁNGULO

Como tus sabes: **la mediatriz de un segmento de recta**, **es la recta perpendicular al segmento, que pasa por su punto medio**

ACTIVIDAD 19.

1. Basándonos en esta definición, determinemos la mediatriz de cada uno de los lados del triángulo ***EFG***, de la *actividad 18*, utiliza la figura que tú construiste.

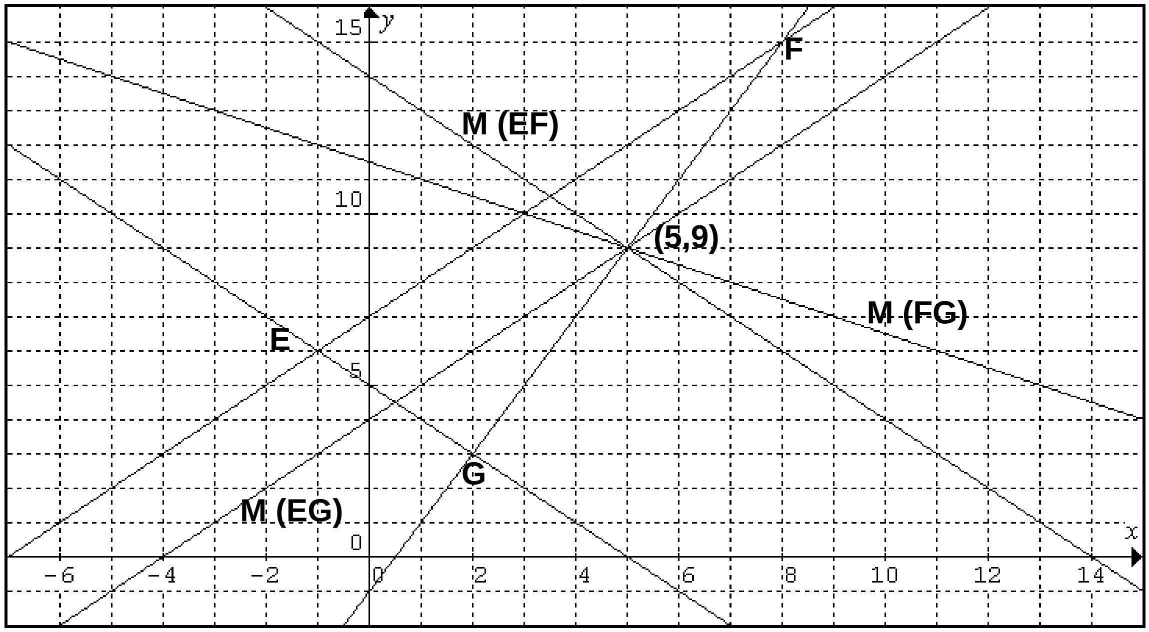
a) La mediatriz del segmento ***EF*****,** pasa por el punto: _____. Tiene pendiente es igual a –1. Su ecuación es: y = –x +14.

b) La mediatriz del segmento ***EG*****,** pasa por el punto: _______ Su pendiente es igual a 1. Su ecuación es: y =_________

c) La mediatriz del segmento ***FG*****,** pasa por el punto: _______ Su pendiente es igual a: _______. Su ecuación es: ____________

d) Las tres mediatrices se intersectan en el punto: __________

La gráfica del triángulo ***EFG***, con sus mediatrices es la siguiente:



4.3 LA RAZÓN DE 1:2 EN QUE EL PUNTO DE INTERSECCIÓN DE LAS MEDIANAS DE UN TRIÁNGULO, DIVIDE A CADA UNA DE ELLAS.

Recordemos que: **la mediana es la recta que pasa por el vértice y por el punto medio de su lado opuesto**.

ACTIVIDAD 20.

1. Determinemos las ecuaciones de las medianas del triángulo ***EFG***.

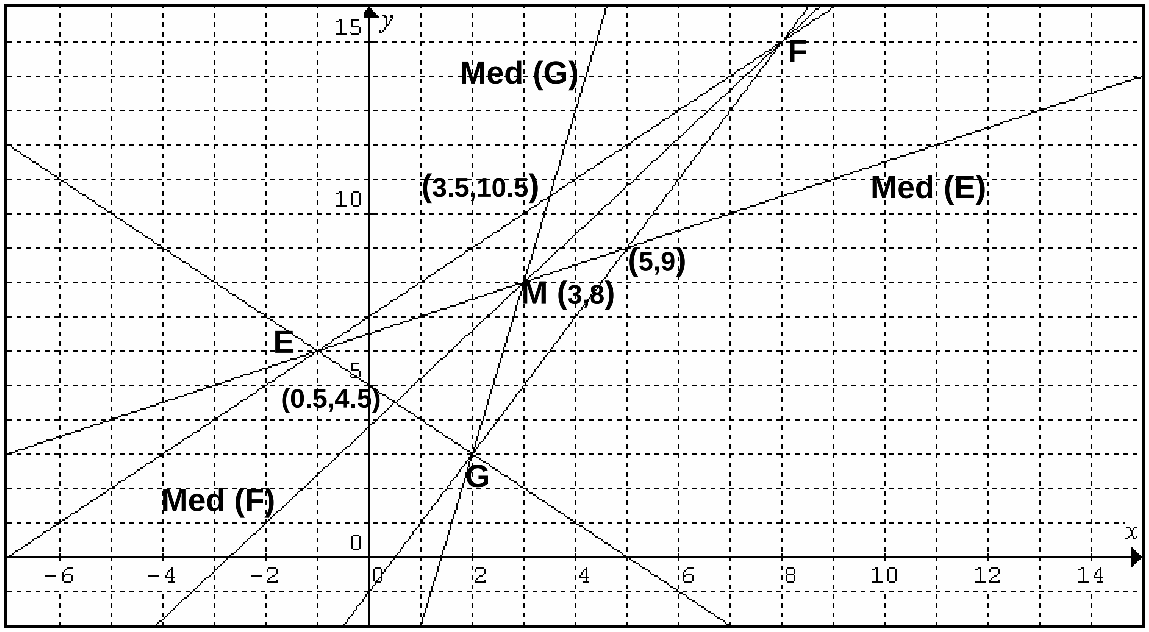
   a) La mediana correspondiente al vértice ***E***, pasa por los puntos: (–1,6) y (5,9). Su ecuación es: *y* = _______

   b) La mediana correspondiente al vértice ***F***, pasa por los puntos: (8,15) y _________. Su ecuación es: *y* = __________

   c) La mediana correspondiente al vértice ***G***, pasa por los puntos: _____ y _______ Su ecuación es__________

   d) Comprueba que el punto de intersección de las tres medianas, al que denotaremos como ***M***, es (3,8)

La gráfica es la siguiente:



2. Demostremos que el punto en el que se intersectan las medianas, al que identificaremos con la letra ***M*,** establece una razón de 1:2 entre los puntos que determinan cada una de las medianas del triángulo ***EFG***.

   a) Para la mediana que pasa por ***E*** y por (5,9):
   - Comprueba que: d(E,M) = $\sqrt{(3+1)^2+(8-6)^2}$ = $= 2\sqrt{5}$
   - Verifica que: d((5,9), M) = $= \sqrt{5}$

   b) Para la mediana que pasa por ***F*** y por (0.5,4.5), explica por qué:
   - d(F,M) = $= \sqrt{74}$ =2 $\sqrt{18.5}$
   - d((0.5,4.5), M) = $= \sqrt{18.5}$

   c) Comprueba que para la mediana que pasa por ***G*** y por (3.5,10.5):
   - d(G,M) = 2 $\sqrt{6.5}$
   - d((3.5,10.5), M) = $= \sqrt{6.5}$

Podemos observar que el punto de intersección de las medianas las divide en una razón de **1:2**.

EJERCICIO 13.
Del triángulo con vértices en los puntos (-3,2), (5,-2) y (1,3). Determina:

a) La ecuación de cada una de las rectas que lo definen.
b) Su área.
c) La ecuación de la mediatriz de cada uno de los segmentos que conforman el triángulo.
d) El punto de intersección de las mediatrices.
e) La ecuación de cada una de sus medianas.

f) El punto de intersección de las medianas. Demuestra que ese punto las divide en una razón de 1:2.

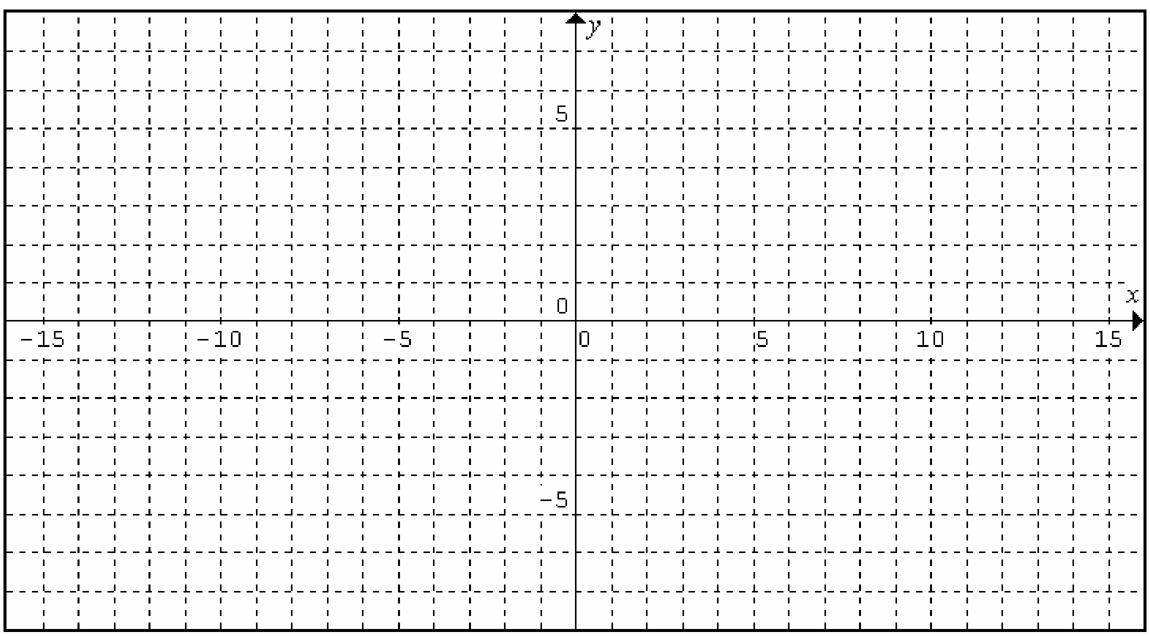
4.4 LA IGUALDAD DE LOS ÁNGULOS EN UN TRIÁNGULO ISÓSCELES

ACTIVIDAD 21.

Trabajemos ahora con las siguientes tres rectas, cuyas ecuaciones son:

$$3x + 4y - 6 = 0$$
$$4x - 3y - 8 = 0,$$
$$x - 7y + 23\ 0 = 0.$$

1. Determinemos sus intersecciones.
   a) Las rectas $3x + 4y - 6 = 0$, $4x - 3y - 8 = 0$ se intersectan en el punto de coordenadas: ***A***(____, ___).
   b) La intersección de las rectas $4x–3y–8 = 0$, $x –7y + 23 = 0$ es: (,   ), al cual llamaremos ***B***.
   c) Las rectas $3x + 4y - 6 = 0,\ \ x - 7y + 23 = 0$, se intersectan en ***C***(,   ).
   d) Traza la gráfica de las tres rectas y ubica a ***A***, ***B*** y ***C***.



2. Determinemos las longitudes de los lados del triángulo ***ABC***.
   a) d(A, B) = ________
   b) d(B, C) = ________
   c) d(C, A) = ________
   d) Como d(A, B) = d(A, C), al clasificar al triángulo ***ABC*** por la medida de sus lados, podemos decir que es un triángulo ____________.

3. Determinemos, la longitud de los ángulos interiores del triángulo ***ABC***.

a) $\operatorname{tg} \alpha = \underline{\hspace{1cm}} \;\Rightarrow\; \alpha = \text{ang}\,(\operatorname{tg} = \underline{\hspace{0.8cm}}) \;\Rightarrow\; \alpha = \underline{\hspace{0.8cm}}°$.
b)
c) $\operatorname{tg} \beta = 1 \;\Rightarrow\; \beta = \text{ang}\,(\operatorname{tg} = 1) \;\Rightarrow\; \beta = \underline{\hspace{0.5cm}}°$.
d)
e) $\operatorname{tg} \delta = 1 \;\Rightarrow\; \delta = [\text{ang}\,(\operatorname{tg} = 1)] \;\Rightarrow\; \delta = \underline{\hspace{0.5cm}}°$.

Puedes observar, que los ángulos opuestos a los lados iguales, también fueron iguales.

EJERCICIO 14.

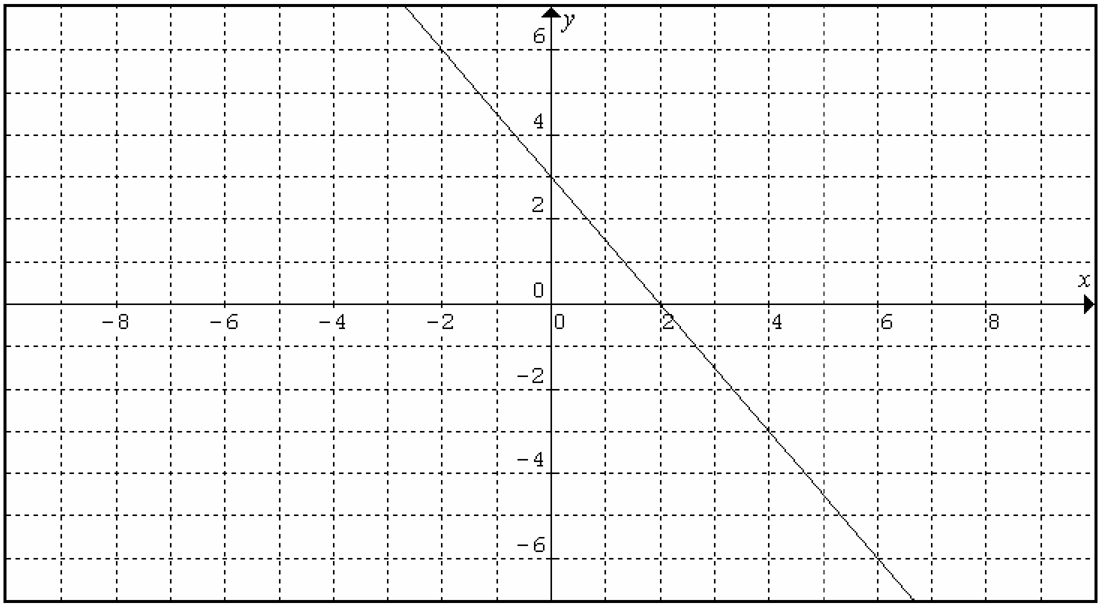
1. De las siguientes parejas de rectas, determina, su punto de intersección, y la longitud del ángulo que forman en ese punto partiendo de la primera a la segunda recta en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.

   a) La primera pasa por (3, –1) y por (–3,11). La segunda tiene por ecuación: $y - 4x - 1 = 0$
   b) La primera tiene pendiente igual a 5 y pasa por (–1, –1). La segunda tiene pendiente igual a –2, y ordenada al origen igual a 7.
   c) La primera tiene como ecuación: $y = 3x - 9$. La segunda pasa por los puntos (0,8) y (40, 0).

2. Demuestra que los siguientes puntos son vértices de un triángulo isósceles y que en él, los ángulos opuestos a sus lados iguales, son iguales.
   A(6,2), B(2,–3) y C(–2,2).

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

1. Determina la ecuación de la recta:
   a) Que pasa por los puntos (5,4) y (1, –3)
   b) Que pasa por (–7,0) y cuya pendiente es igual a –3
   c) Que pasa por (–3,–4) y que es paralela a la que tiene por ecuación:
      $y - 4x + 9 = 0$
   d) Que es perpendicular a la que pasa por (–7,1) y (5,4) y cuya ordenada al origen es igual a 10.
   e) Que pasa por (–3,2), y que es perpendicular a la recta con ecuación:
      $7x - 6y = 10$
   f) Cuya gráfica es la siguiente:



2. Determina el ángulo que forman la recta de la gráfica anterior y la dirección positiva del eje de las abscisas.
3. Determina el punto de intersección de las siguientes parejas de rectas:
   a) La primera pasa por (0,1) y por (4,13). La segunda pasa por (–1, –6) y (2,0).
   b) La primera tiene por ecuación: $y - 5x + 1 = 0$, y la segunda pasa por (–1,3), y su pendiente es igual a 3.
4. Determina el ángulo entre las siguientes parejas de rectas:
   a) Sus ecuaciones son: $5y + 9 = 3x$, y $3x + 2y = 6$
   b) La primera pasa por los puntos: (1,1), (5,13). La ecuación de la segunda es: $y + 4x = 5$
5. Determina si las rectas son paralelas:
   a) La primera pasa por (0,1) y (5, –9), y la segunda tiene por ecuación: $y + 2x + 7 = 3$.
   b) La primera pasa por (1,10) y por (–4, –5), y la segunda pasa por (–1, –4) y por (7,20).
6. Determina si las rectas son perpendiculares:
   a) La primera tiene por ecuación: $y + 3x - 27 = 0$. La segunda pasa por (0,3), y por (9,6).
   b) La primera pasa por (0,5) y (7,19). La segunda pasa por (6,0) y (–4,5)
7. Determina las coordenadas del punto en el que se cortan las mediatrices del triángulo cuyos vértices se encuentran en los puntos: (–2,1), (4,7) y (6,3).

BIBLIOGRAFÍA

1) Filloy Eugenio, Hitt Fernando. **Geometría Analítica**. Editorial Grupo Editorial Iberoamérica. 1997.
2) Torres Carlos. **Geometría Analítica**. Editorial Santillana. 1998.