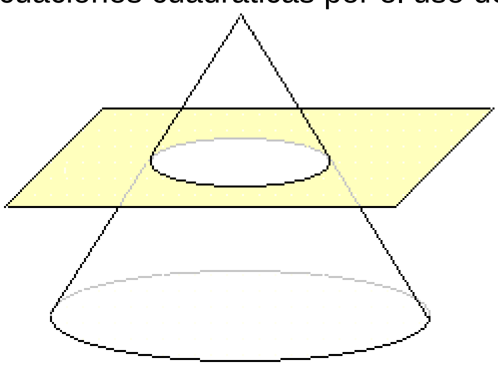
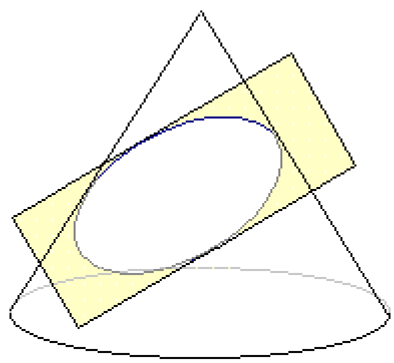
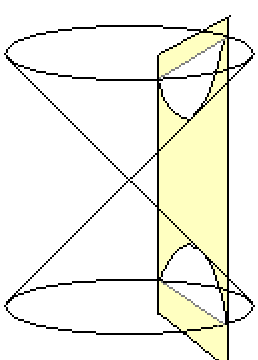
UNIDAD 4
LA ELIPSE, LA CIRCUNFERENCIA Y SUS ECUACIONES CARTESIANAS

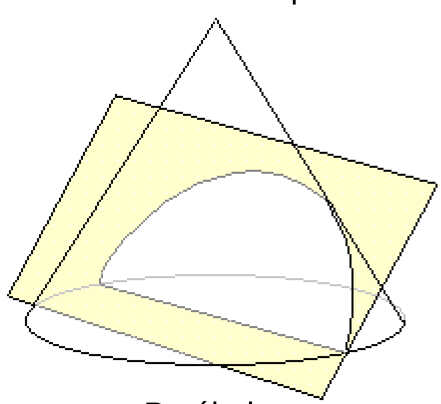
PROPÓSITOS: Reafirmar el método analítico al obtener las ecuaciones de la elipse y la circunferencia y avanzar en el reconocimiento de formas y estructuras, en la formulación de conjeturas y en la resolución analítica de problemas de corte euclidiano.

INTRODUCCIÓN.
En esta y siguiente unidad se tratan tres de las curvas llamadas **cónicas**. El origen del nombre y las curvas se remontan a la civilización griega alrededor del siglo III a. C. Fue Apolonio de Perga (262 – 200 a.C. astrónomo talentoso) quien escribió sobre una gran variedad de temas matemáticos, su fama esencialmente se debe a sus escritos sobre las secciones cónicas en donde el método utilizado está mucho más próximo a los métodos de la geometría analítica actual que a los métodos puramente geométricos de su época. Los griegos obtuvieron las curvas al cortar conos (de arcilla) con cuchillos, los nombres **elipse e hipérbola** los utilizó Apolonio, y fue Arquímedes (287 – 212 a. C) el que utilizó el de **parábola**. Los nombres fueron utilizados anteriormente por los pitagóricos (siglo VI a.C.) al resolver ecuaciones cuadráticas por el uso de áreas.


Circunferencia


Elipse


Hipérbola


Parábola

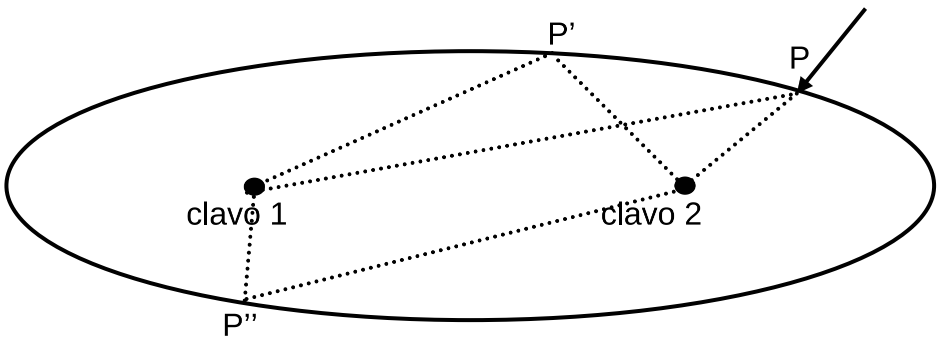
SECCIÓN 1. LA ELIPSE COMO LUGAR GEOMÉTRICO

Se pretende que reconozcas a la elipse como lugar geométrico, que a partir de su trazo determines algunas de sus propiedades así como sus elementos de mayor importancia.

Existen varios métodos para trazar una elipse, entre ellos esta el llamado “método del jardinero” que consiste en lo siguiente:

ACTIVIDAD 1.

En una cartulina, cartón o cualquier material donde puedas insertar un par de “chinches”, “tachuelas“ o “clavos”, colócalos a una distancia de 10 a 15cms. sujeta en ellos un cordón de más de 15cms. de largo. Después con la punta de un lápiz y manteniendo el cordón tenso, podrás trazar una figura como la que se muestra.



Te podrás dar cuenta que:

1) Para cualquier punto **P** en la curva, ¿la suma de distancias de **P** a cada una de los “clavos” es igual a: ______________________________?

2) Traza varios casos acercando o alejando los “clavos”:
¿siempre se obtiene una elipse? ________
¿qué curva se forma si los “clavos” coinciden? _____________________
¿qué curva se forma cuando alejas los “clavos” al máximo? ___________

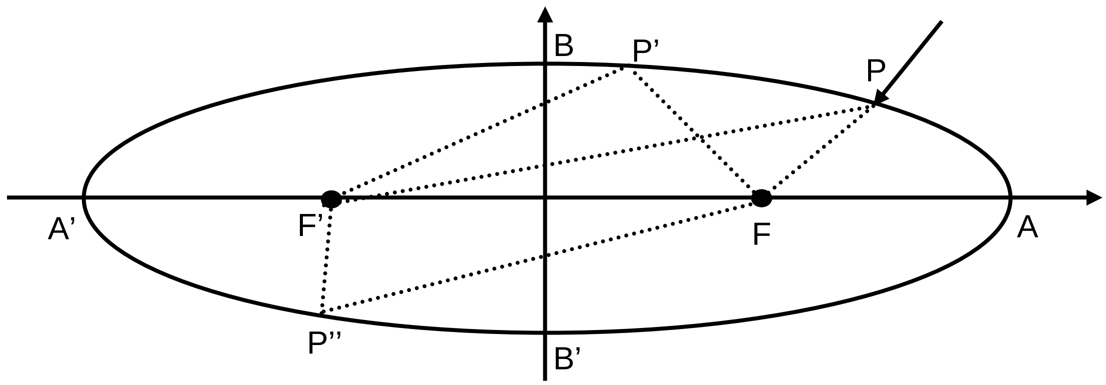
La respuesta del inciso (1) nos permite observar la propiedad que cumplen todos los puntos de la elipse.

La elipse es el conjunto de puntos, tales que la suma de las distancias de un punto a cada uno de los “puntos” fijos es constante, cuya longitud es la del cordón.

Actividad de investigación: ¿Existirá algún método de trazar elipses con regla y compás? ¿Cuál será el método más sencillo de trazar elipse?

Si colocamos la figura anterior en un plano cartesiano se podrán determinar las partes o elementos de la elipse:

La ubicación más sencilla es la siguiente: se traza el eje de abscisas sobre los puntos fijos y el eje de ordenadas se traza perpendicularmente al eje de abscisas por el punto medio entre los puntos fijos. Observa que la figura así trazada queda simétrica con respecto de los dos ejes.



Lee con cuidado y completa las proposiciones:
Los puntos fijos se denominan **focos** y se les asociarán las coordenadas **F(c, 0) y F'(-c, 0).** La distancia entre los focos es _______.

El punto medio entre los focos es el **centro de la elipse,** en este caso el centro tiene coordenadas _____.

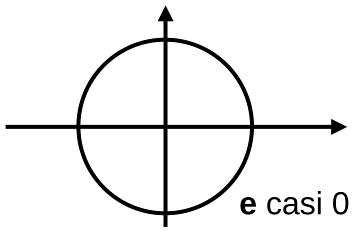
Los puntos de intersección de la elipse con los ejes de coordenadas se denominan, **vértices de la elipse:**

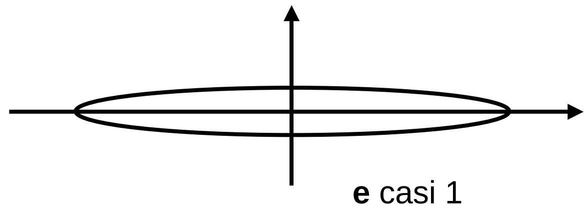
En las elipses, a los vértices que están sobre el mismo eje que los focos se les denomina **vértices del eje mayor** y tienen asociados las coordenadas: **A(a, 0) y A'(-a, 0).** De manera que la **longitud del eje mayor** será ____________.

Los vértices que no estén en el mismo eje que los focos serán los **vértices del eje menor** y sus coordenadas asociadas serán **B(0, b) y B(0, -b).** De manera que la **longitud del eje menor** será ________.

Nota: Para que exista la elipse es necesario que **2c < 2a** o también que **c < a.** De manera que las coordenadas de los focos deben ser menores que las de los vértices del eje mayor.

Una cuestión importante es la **excentricidad,** la cual esta dada por la razón $\frac{c}{a}$, por la nota anterior sabemos que **0 < c < a** dividiendo cada parte entre **a** se obtiene $\frac{0}{a} < \frac{c}{a} < \frac{a}{a}$, de manera que $0 < \frac{c}{a} < 1$.
La excentricidad, se denota por **e =** $\frac{c}{a}$ su valor que está entre cero y uno nos da información sobre la redondez o estiramiento de la curva.





Otro elemento de la elipse es el siguiente:

Un segmento que une dos puntos cualesquiera de la elipse se denomina **cuerda**. Las cuerdas que pasan por los focos y son perpendiculares al eje mayor se denominan **lados rectos** de la elipse y miden $lr = \frac{2b^2}{a}$

Existen situaciones que se asocian a elipses como son:

- La órbita de la tierra y de los planetas en general son trayectorias elípticas donde uno de sus focos es la posición del Sol. También la luna tiene una órbita elíptica alrededor de la tierra.

- El cometa Haley tiene una órbita elíptica donde uno de los focos es el Sol.

- Algunas veces se usan engranes elípticos, con centros de rotación en los focos.

- Las rectas que unen los focos con cualquier punto de la elipse, forman ángulos iguales con la recta tangente a la elipse en dicho punto. Por lo que si se colocará una fuente de luz o de sonido en uno de los focos está se reflejaría en el otro foco.

- Una de las cámaras del Capitolio de Washington, tiene una bóveda de forma elipsoide la cual se le llama "bóveda de los murmullos", pues lo que se dice, aunque sea en voz baja, en uno de los focos, será escuchado en el otro foco.

ACTIVIDAD 2.
Contesta las siguientes preguntas.

1) ¿Cuál es la forma de la elipse si F y F' se alejan del centro O y están más cerca de A y A'? Traza un dibujo.

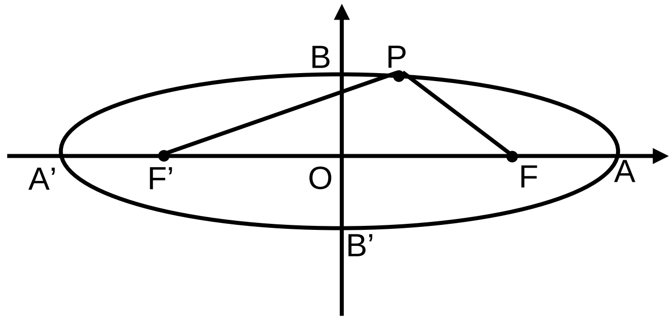
2) ¿Cuál es la forma de la elipse si F y F' coinciden respectivamente con A y A'? Traza un dibujo.

3) ¿Cuál es la forma de la elipse si F y F' están más cera del centro O? Traza un dibujo.

4) ¿Cuál es la forma de la elipse si F y F' coinciden con el centro O? Traza un dibujo.

5) En la siguiente elipse haz que P coincida con B, como B es un punto de la elipse, cumple con:

FB +F'B = 2a



Con base en los triángulos **F'OB** y **BOF,** completa las respuestas:

a) Los lados **OF'** y **OF** son ___________ y cada uno mide ____________

b) **OB** es lado ___________ de los dos triángulos y su medida es _________

c) Los ángulos **F'OB** y **BOF** son __________________

d) De manera que los triángulos son congruentes por el criterio __________

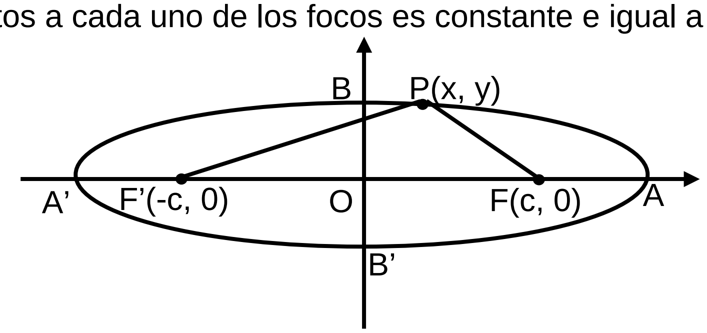
e) ¿Puedes concluir a que es igual: $\mathbf{c^2 + b^2 =}$ ______?

El resultado del inciso (e) es muy importante, por que relaciona los valores de las coordenadas de los focos con los valores de las coordenadas de los vértices de los ejes mayor y menor.

SECCIÓN 2. ECUACIÓN CARTESIANA DE LA ELIPSE.

Se mostrará un método sencillo para obtener la ecuación cartesiana de la elipse que tiene centro en O(0, 0), eje mayor sobre eje X y eje menor sobre eje Y.

Según la propiedad de los puntos de la elipse, se cumple que la suma de las distancias de sus puntos a cada uno de los focos es constante e igual a **2a**.



1) Escribiendo las distancias: $d(P, F) + d(P, F') = 2a$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

2) Otra manera conveniente es: $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

3) Elevando al cuadrado ambos miembros y desarrollando se obtiene:

$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2$$

4) Al simplificar términos semejantes se obtiene:

$$4cx=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

5) Dividiendo entre (4) y asociando como: $cx-a^2=-a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

6) Elevando al cuadrado ambos miembros, desarrollando y simplificando:

$$c^2x^2+a^4=a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2$$

7) Escribiendo como: $c^2x^2-a^2x^2-a^2y^2=a^2c^2-a^4$

8) Multiplicando por (- 1) ambos miembros: $a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2$

9) Factorizando en ambos miembros: $x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$

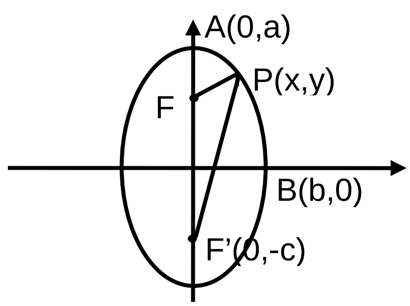
10) Por el resultado de la **Actividad 2, (a^2 – c^2 = b^2)** entonces al sustituir en la expresión anterior se obtiene: $x^2b^2+a^2y^2=a^2b^2$

11) Al dividir ambos miembros entre **a^2b^2,** se obtiene: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

La cual es llamada ecuación de la elipse en **forma ordinaria.**

Tomando en cuenta la ecuación del inciso (11), completa las proposiciones siguientes:
Las coordenadas del centro de la elipse son: __________
Los vértices del eje mayor está sobre el eje: _______________ y sus coordenadas son: ________.
Los vértices del eje menor está sobre el eje: _____________ y sus coordenadas son: ________.
Las coordenadas de los focos son: ___________

ACTIVIDAD 3.
De manera similar se determina la ecuación cartesiana de la elipse que tiene centro en O(0, 0), eje mayor sobre eje Y y eje menor sobre eje X.



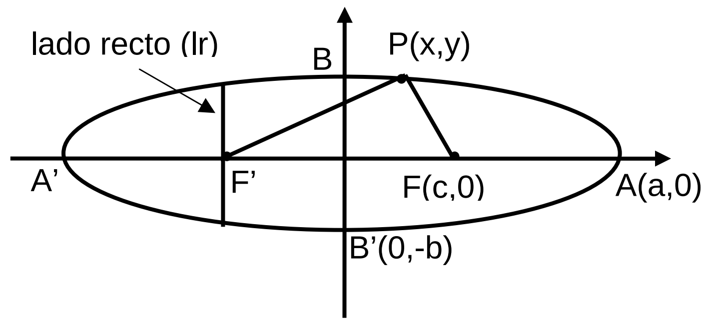
$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

Como resumen escribimos que; la ecuación cartesiana de una elipse de **centro el origen** y cuyos ejes coinciden con los ejes coordenados.

Primer caso: Focos sobre el eje X: longitud entre los focos 2c, longitud del eje mayor 2a y la longitud del eje menor 2b.

$a>c$ y $a>b$ *relacionadas por* : $a^2=b^2+c^2$

ecuación: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$



$lr=\dfrac{2b^2}{a}$

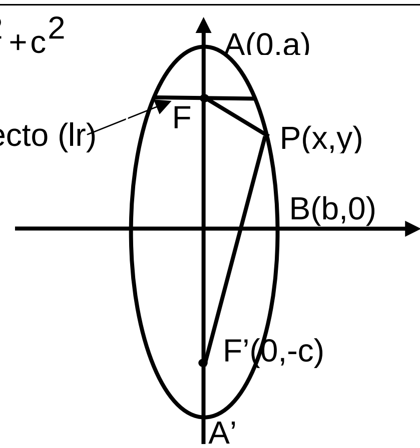
$e=\dfrac{c}{a}$

No se colocaron todas las coordenadas de los puntos para que el dibujo fuera entendible

Segundo caso:: Focos sobre el eje Y: longitud entre los focos 2c, longitud del eje mayor 2a y la longitud del eje menor 2b.

$a>c$ y $a>b$ *relacionadas por* : $a^2=b^2+c^2$

ecuación: $\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$



$lr=\dfrac{2b^2}{a}$ $\quad e=\dfrac{c}{a}$

SECCIÓN 3. APLICACIONES DE LA ELIPSE

En esta sección se resolverán problemas diversos de elipse con centro en el origen de coordenadas.

En geometría analítica hay **dos problemas fundamentales**:
El primero: Conocida una ecuación interpretarla geométricamente, es decir construir su gráfica correspondiente.

El segundo: Conocida la figura geométrica, o la condición que deben cumplir los puntos de la misma, determinar su ecuación

Para hacer el estudio más sencillo conviene analizar los dos problemas por separado.

Comenzaremos con problemas del primer tipo: conocida una ecuación trazar su gráfica.

Ejemplo 1. Conocidas las ecuaciones de algunas elipses con centro en el origen, trazar sus gráficas, dando sus datos.

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

Como la variable "x" esta sobre el mayor valor (25), la elipse que representa es del primer tipo (horizontal) con focos sobre el eje X.

Para determinar los elementos, de la elipse se hacen las comparaciones:

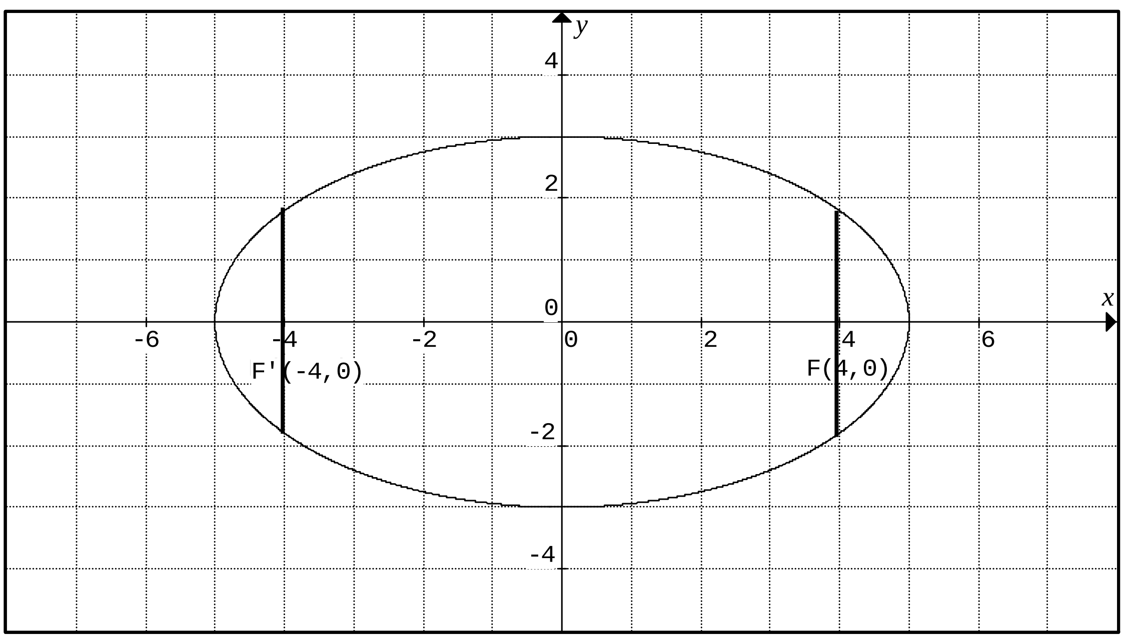
$a^2 = 25 \;\rightarrow\; \mathbf{a} = \pm 5 \;\rightarrow$ vértices del eje mayor son A($\pm$ 5, 0).

$\mathbf{b}^2 = 9 \;\rightarrow\; \mathbf{b} = \pm 3 \;\rightarrow$ vértices del eje menor son B(0, $\pm$ 3)

Por la relación $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$, obtenemos que $\mathbf{a^2 - b^2 = c^2}$, de manera $c^2 = 25 - 9 = 16 \;\rightarrow\; \mathbf{c} = \pm 4 \;\rightarrow$ focos son F($\pm$ 4, 0)

Longitud del lado recto es: $lr = \frac{2b^2}{a} = \frac{2\cdot 9}{5} = \frac{18}{5}$

La excentricidad es: $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0.8$



ACTIVIDAD 4.

Llena los espacios en blanco:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$

Como el variable "y" esta sobre el mayor valor (9) entonces la elipse está en posición vertical, los focos están en el eje Y.

Comparando la ecuación con las fórmulas del segundo caso, se tiene:

a^2 = → **a** = → vértices eje mayor. A(,)

$\mathbf{b}^2$ = → **b** = → vértices eje menor B(,)

Por la relación $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$, obtenemos que $\mathbf{a^2 - b^2 = c^2}$ de manera c^2 = = → **c** = → focos F(,)

Longitud del lado recto es: $lr = \dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{\quad}{\quad} = \dfrac{\quad}{\quad}$

La excentricidad es: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\quad}{\quad} =$

Ubica los vértices y focos, sobre los focos traza un segmento perpendicular al eje Y, y que tenga una magnitud igual a la del lado recto. Traza la elipse que pasa por los vértices y por los extremos del lado recto.

ACTIVIDAD 5.

Llena los espacios en blanco:

No siempre se da la ecuación en forma "simplificada" como es el siguiente caso:

$$9x^2 + 36y^2 = 324$$

Este tipo de problemas se resuelve dividiendo toda la ecuación entre el término independiente para obtener la igualdad con 1, en este caso dividimos entre 324 obteniéndose:

$$\frac{9x^2 + 36y^2 = 324}{324} \rightarrow \frac{9x^2}{324}+\frac{36y^2}{324}=\frac{324}{324} \rightarrow \frac{x^2}{\frac{324}{9}}+\frac{y^2}{\frac{324}{36}}=1 \rightarrow \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$$

Ahora la ecuación esta simplificada y observamos que es como en el ejemplo 1.

La ecuación es de una elipse horizontal con focos en el eje X.

a^2 = → **a** = → vértices eje mayor A(,)

$\mathbf{b}^2$ = → **b** = → vértices eje menor B(,)

Por la relación $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$, obtenemos que $\mathbf{a^2 - b^2 = c^2}$

de manera c^2 = = → c = → focos F(,)

Longitud del lado recto es: $lr = \dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{\quad}{\quad} = \dfrac{\quad}{\quad} =$

La excentricidad es: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\quad}{\quad} =$

Ubica los vértices y focos, sobre los focos traza un segmento perpendicular al eje X, y que tenga una magnitud igual a la del lado recto. Traza la elipse que pasa por los vértices y por los extremos del lado recto.

ACTIVIDAD 6.

Llena los espacios en blanco:

Un problema de otro tipo: $3x^2 + y^2 - 4 = 0$.

El término independiente, por el que vamos a dividir, no es el cero ¿verdad?.

Acomodando la ecuación se tiene: $3x^2 + y^2 = 4$ de manera que dividiremos la ecuación entre 4.

$$\frac{3x^2 + y^2 = 4}{4} \rightarrow \frac{3x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = \frac{4}{4} \rightarrow \frac{x^2}{\frac{4}{3}} + \frac{y^2}{4} = 1$$

La ecuación es de una elipse vertical con focos en el eje Y.

$a^2 =$ $\rightarrow$ **a** = $\rightarrow$ vértices eje mayor A(,).

$\mathbf{b}^2 =$ $\rightarrow$ **b** = $\rightarrow$ vértices eje menor B(,).

Por la relación $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$, obtenemos que $\mathbf{a^2 - b^2 = c^2}$

de manera que $c^2 =$ $=$ $\rightarrow$ **c** = $\rightarrow$ focos F(,).

Longitud del lado recto es: $lr = \dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{\quad}{\quad} = \dfrac{\quad}{\quad}$

La excentricidad es: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\quad}{\quad} =$

Ubica los vértices y focos, sobre los focos traza un segmento perpendicular al eje Y, y que tenga una magnitud igual a la del lado recto. Traza la elipse que pasa por los vértices y por los extremos del lado recto.

EJERCICIOS 1.

Determinar los elementos de las siguientes elipses (centro, ejes, vértices, focos, lado recto y excentricidad). Trazar la grafica correspondiente.

1) $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{48} = 1$

2) $\dfrac{y^2}{16} + \dfrac{x^2}{25} = 1$

3) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

4) $\dfrac{x^2}{144} + \dfrac{y^2}{169} = 1$

5) $4x^2 + 9y^2 = 36$

6) $4x^2 + y^2 = 16$

7) $9x^2 + 4y^2 = 144$

8) $x^2 + 4y^2 = 64$

Ahora se tratará el problema inverso: conocidos algunos datos de elipses que tienen el centro en el origen, hallar las ecuaciones y los elementos faltantes.

Ejemplo 2. Las condiciones de la elipse son: a = 8, b = 3 y eje focal sobre eje X.

Solución: Como el eje focal está en el eje, entonces la elipse es vertical y tiene vértices en A($\pm$ 8, 0) y B(0, $\pm$ 3).
El valor de c se determina por la relación $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$ de manera que: $c=\sqrt{a^2 - b^2} \rightarrow c=\sqrt{64-9}=\sqrt{55}$, los focos están en, F($\pm\sqrt{55}$, 0)
La ecuación, el lado recto y su excentricidad son:

$$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{9}=1 \qquad lr=\frac{2\cdot 9}{8}=\frac{18}{8} \qquad e=\frac{\sqrt{55}}{8}=0.9270$$

Ejemplo 3. Las condiciones son: a = 11, c = 5 y eje mayor sobre el eje Y.

Solución: Los focos y los vértices están en F(0, $\pm$ 5) y A(0, $\pm$ 11)
El valor de b se determina por la relación $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$ de manera que:
$b=\sqrt{a^2 - c^2}=\sqrt{121-25}=\sqrt{96}$, luego los vértices están en B($\pm\sqrt{96}$, 0)
La ecuación, el lado recto y su excentricidad son:

$$\frac{x^2}{96}+\frac{y^2}{121}=1 \qquad lr=\frac{2\cdot 96}{11}=\frac{192}{11} \qquad e=\frac{5}{11}=0.4545$$

ACTIVIDAD 7.
Completa el análisis o las operaciones: Determinar la ecuación de la elipse cuando b = 3, su lado recto 3, y el eje mayor sobre el eje Y.
Solución: te conviene hacer una pequeña gráfica de los datos para apreciar la posición de la elipse.

De acuerdo a los datos la elipse estará en posición ____________

Con la fórmula del lado recto, tienes que: $lr=\frac{2\cdot b^2}{a}=\frac{}{a}=3$ haciendo operaciones obtienes que **a** = _______, ya se conocen **a** y **b** luego la ecuación resulta ser: $\frac{x^2}{}+\frac{y^2}{}=1$

ACTIVIDAD 8.
Completa el análisis o las operaciones: Determinar la ecuación de la elipse cuando las condiciones de la elipse son: un foco es (5, 0) y $e=\frac{2}{3}$.

Primero tienes que **c** = 5 por el dato del foco F(5, 0) además está en el eje X, de manera que la elipse esta en posición: _______________

Por la fórmula de la excentricidad se sigue que: $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{a}=\frac{2}{3}$ haciendo operaciones obtienes que el valor de **a** = _______, ya tienes **a** y **c** de manera que para encontrar el valor de **b** se usa la relación $a^2 = b^2 + c^2$ haciendo operaciones encuentras que **b** = _______

La ecuación resulta ser: $\frac{x^2}{\quad}+\frac{y^2}{\quad}=1$

EJERCICIOS 2.
Conocidas las siguientes condiciones, escribe una ecuación de la elipse que tenga centro C(0, 0) y trazar la gráfica.

1) **a** = 6, **b** = 4, focos sobre eje Y.
2) **a** = 6, **c** = 4, focos sobre eje X.
3) **a** = 6, lado recto = 3, focos sobre eje Y.
4) **b** = 4, lado recto = 4, focos sobre eje X.
5) **a** = 9, **b** = 5, vértices del eje mayor sobre eje X.
6) **b** = 3, **c** = 4, vértices del eje mayor sobre eje Y.
7) Vértices A($\pm$5, 0) y focos F($\pm$4, 0).
8) Un foco F(0, $\pm$3) y **b** = 4.

Problemas diversos de elipse con centro en C(h, k)

Primer caso: Centro en **C(h, k)** y focos sobre eje paralelo al eje X.

$a>c \rightarrow a^2=b^2+c^2$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

$$lr=\frac{2b^2}{a}$$

$$e=\frac{c}{a}$$

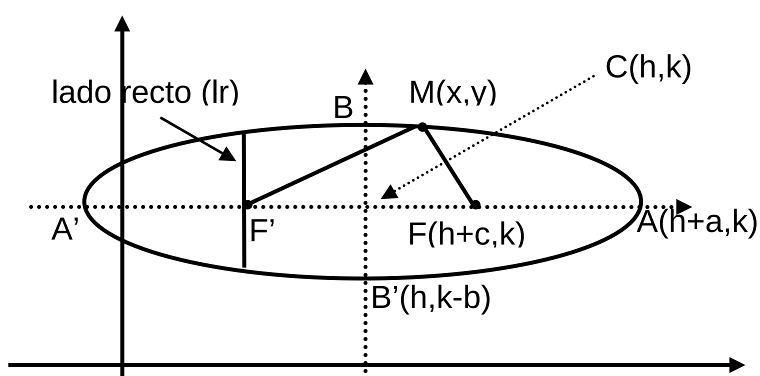


fig. 4

Segundo caso: Centro **C(h, k)** y focos sobre eje paralelo al eje Y.

$a > c \rightarrow \quad a^2 = b^2 + c^2$

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

$$lr = \frac{2b^2}{a}$$

$$e = \frac{c}{a}$$

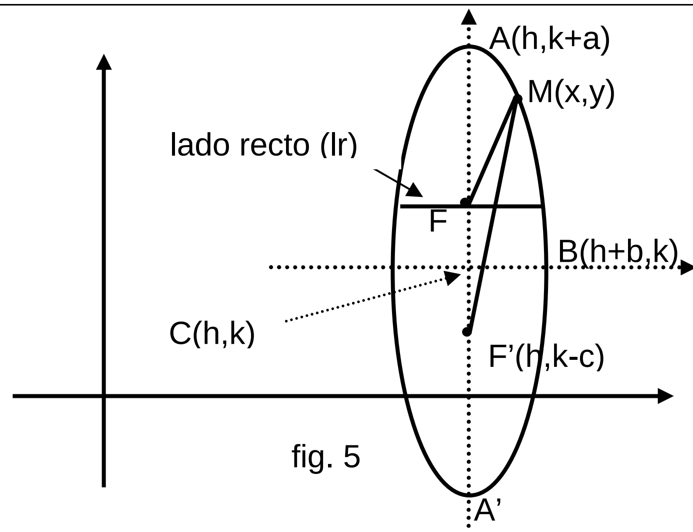


fig. 5

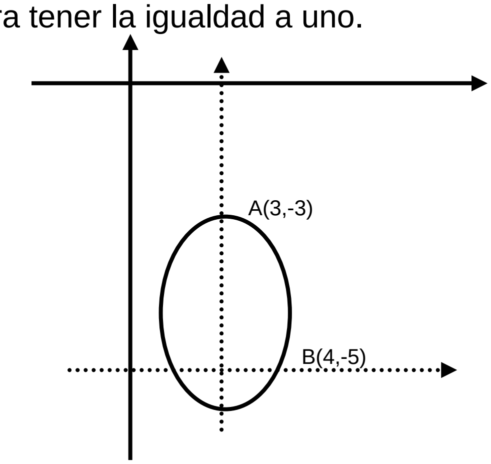
Se habrá observado que las fórmulas de lado recto, excentricidad, la relación entre los elementos no cambian y sólo cambian las fórmulas de la elipse, los vértices y los focos.

Ejemplo 4. Conocida la ecuación de una elipse: $4(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 4$, determinar todos sus datos para trazar su gráfica.

En éste caso, se divide la ecuación entre 4 para tener la igualdad a uno.

$$\frac{4(x-3)^2 + (y+5)^2 = 4}{4} \rightarrow \frac{(x-3)^2}{1} + \frac{(y+5)^2}{4} = \frac{4}{4}$$

$$\frac{(x-3)^2}{1} + \frac{(y+5)^2}{4} = 1$$



El centro es: C(h, k) = C(3, -5)

El valor de a y b se determinan fácilmente:

$a^2 = 4 \rightarrow a = \pm\sqrt{4} \rightarrow a = \pm 2$

$b^2 = 1 \rightarrow b = \pm\sqrt{1} \rightarrow b = \pm 1$

De manera que el valor de c:

$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow 4 = 1 + c^2 \quad \therefore c = \pm\sqrt{3}$

Los focos y vértices se determinan a partir de las coordenadas del centro:

F(3, $-5 \pm \sqrt{3}$), A(3, -5 ± 2), B(3 ± 1, -5), lr = $\frac{2 \cdot (1)^2}{2} = 1$, e = $\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.8660$.

Ejemplo 5. Un caso en el que se requiere de varias cuestiones algebraicas es cuando se da la ecuación de la elipse en forma general. Lo que se debe hacer es pasar está ecuación a su forma canónica o estándar.

$16x^2 + 7y^2 – 64x + 42y + 15 = 0$

$16(x^2 – 4x) + 7(y^2 + 6y) = -15$ se factorizó el coeficiente de los términos cuadráticos.

$16\left(x^2 – 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2\right) + 7\left(y^2 + 6y + \left(\frac{6}{2}\right)^2\right) = -15 + 16\left(\frac{4}{2}\right)^2 + 7\left(\frac{6}{2}\right)^2$ se completaron los trinomios cuadrados perfectos sumando en ambos miembros la misma cantidad.

$16(x^2 – 4x + 4) + 7(y^2 + 6y + 9) = - 15 + 16(4) + 7(9)$

$16(x – 2)^2 + 7(y + 3)^2 = 112$ Se factorizaron los trinomios cuadrados perfectos.

$\dfrac{16(x - 2)^2 + 7(y + 3)^2 = 112}{112}$ Se dividió la expresión entre el término independiente.

$$\frac{16(x-2)^2}{112} + \frac{7(y+3)^2}{112} = \frac{112}{112}$$

$$\frac{(x-2)^2}{\frac{112}{16}} + \frac{(y+3)^2}{\frac{112}{7}} = 1$$ Se simplificaron los numeradores y denominadores.

$$\frac{(x-2)^2}{7} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1$$

La ecuación representa una elipse vertical con centro en C(2, -3).
El valor de a y b se determinan fácilmente:

$a^2 = 16 \rightarrow a = \pm 4$

$b^2 = 7 \rightarrow b = \pm\sqrt{7}$

De manera que el valor de c:

$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow 16 = 7 + c^2 \quad \therefore \; c = \pm 3$

Los elementos son:

$F(2, -3 \pm 3)$, $A(2, -3 \pm 4)$, $B(2 \pm \sqrt{7}, -3)$, $lr = \dfrac{2\cdot(\sqrt{7})^2}{2} = 7$, $e = \dfrac{3}{4} = 0.75$.

ACTIVIDAD 9.
Completa el análisis o las operaciones, para determinar los elementos de la elipse y trazar su gráfica: $4x^2 + 5y^2 - 8x - 40y + 64 = 0$

$4(x^2 - 2x) + 5(y^2 - 8y) = -64$ se factorizó el coeficiente de los términos cuadráticos.

completar los trinomios cuadrados perfectos $4(x^2 - 2x + \left(\frac{}{2}\right)^2) + 5(y^2 - 8y + \left(\frac{}{2}\right)^2)$

$= - 64 + 4\left(\frac{}{2}\right)^2 + 5\left(\frac{}{2}\right)^2$

El resultado ya simplificado es: $4(x^2 - 2x + \quad) + 5(y^2 - 8y + \quad) = - 64 + 4(\quad) + 5(\quad)$

factorizando los trinomios cuadrados perfectos: $4(x - \quad)^2 + 5(y - \quad)^2 = 20$

dividiendo la expresión entre el término independiente: $\frac{4(x - \quad)^2 + 5(y - \quad)^2 = 20}{20}$

se obtiene la ecuación de la elipse en su forma canónica: $\frac{(x-1)^2}{5} + \frac{(y-4)^2}{4} = 1$

La ecuación representa una elipse horizontal con centro en C(,).

El valor de a y b se determinan fácilmente:

$a^2 = \quad \rightarrow a = \pm$

$b^2 = \quad \rightarrow b = \pm$

De manera que el valor de $c^2 =$

Los elementos son: F(,), A(,), B(,), lr = $\frac{2\cdot(\quad)^2}{2} =$, e =

EJERCICIOS 3.

1) Determinar todos los datos de la elipse y trazar la gráfica:
   $4x^2 + 6y^2 - 16x + 36y + 46 = 0$
2) Dar la ecuación de la elipse cuyos vértices son los puntos (-6, 8) y (6, 8), y los focos son los puntos (-2, 8) y (2, 8).
3) Determinar la ecuación de la elipse y trazar la gráfica cuando:
   F(3, 5), F'(-3, 5), longitud del eje menor es 8.
4) Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la suma de las distancias a los puntos F(2, -3) y F'(-2, -3) es siempre 6.
5) Determinar todos los datos de la elipse y trazar la gráfica:
   $6x^2 + y^2 - 3x + y - 27/16 = 0$
6) Determinar todos los datos de la elipse y trazar la gráfica:
   $x^2 + 4y^2 - 2x - 24y + 21 = 0$
7) Determinar todos los datos de la elipse y trazar la gráfica:
   $9x^2 + 4y^2 + 72x = 0$

8) Dar la ecuación de la elipse que tiene e = 1/2 y los vértices del eje mayor están en (-3, 4) y (5, 4)

SECCIÓN 4. LA CIRCUNFERENCIA COMO LUGAR GEOMÉTRICO.

En esta sección se pretende que reconozcas a la circunferencia como el lugar geométrico que se encuentra con mayor frecuencia en nuestro entorno, obtener el lugar geométrico de la circunferencia como caso límite de la elipse, identificar los elementos que determinan a la circunferencia, así como definirla como un lugar geométrico.

La circunferencia es una figura geométrica que al igual que otras está presente en nuestro entorno, es muy probable que en este momento puedas observar algunas como es: en las monedas, en la base de algunos vasos, las tapas de las botellas, en los anillos…etc.

ACTIVIDAD 10.
Construye y explica cómo dibujas una circunferencia de radio 3cm.

CIRCUNFERENCIA COMO CASO LÍMITE DE LA ELIPSE.

ACTIVIDAD 11.
Dibuja en un mismo plano cartesiano elipses con centro en el origen, que tengan la misma magnitud del eje mayor (tu escógela), pero con diferente excentricidad: 1) **e** = 0.75, 2) **e** = 0.5, 3) **e** = 0.25 y 4) **e** = 0.01. ¿Qué caso se aproxima más a una circunferencia? Con tus compañeros comenta tus observaciones.

1) Tomando la longitud que elegiste para el eje mayor:
   a) ¿cuánto mide el semieje mayor **a**?
   b) De acuerdo con la longitud de tu semieje mayor y tomando **e** = 0.75, ¿cuánto vale **c**?
   c) Considerando el valor de **a** y **c**, ¿cuál es la longitud del semieje menor **b**?

2) Considerando la longitud del semieje mayor y **e** = 0.5, determina el valor de: **c** y **b.**

3) Determina el valor de **c y b** para **e** = 0.25.

4) Calcula los valores de **c** y **b** cuando **e** = 0.1.

Explica la relación que existe entre **a** y **b** cuando **e** se aproxima a 0.
Tomando en cuenta la Actividad 10 y tus conclusiones de la Actividad 11, se puede afirmar lo siguiente: La circunferencia es considerada como un caso especial de la elipse en donde la excentricidad es cero y por consecuencia los ejes tienen la misma longitud.

¿Qué nombre reciben los semiejes en una circunferencia?

Definición: Una circunferencia es el conjunto de puntos que equidistan de un punto fijo llamado centro. La distancia que existe entre el centro y cualquier punto de la circunferencia se llama radio.

SECCIÓN 5. ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA.

El propósito de esta sección es obtener la ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria, con centro en el origen y fuera de él. Así como la ecuación de la circunferencia en su forma general, transitar de la forma ordinaria a la general y viceversa, utilizando el método de completar cuadrados. Además determinar el centro y el radio, a partir de su ecuación y utilizarlos para graficar circunferencias.

Deducción de la ecuación ordinaria de la circunferencia a partir de la ecuación ordinaria de la elipse.

Sabemos que la ecuación ordinaria de la elipse es: $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

Donde C(**h, k**) son las coordenadas del centro de la elipse y las longitudes de los semiejes al cuadrado son: a^2, b^2.

En la circunferencia el eje mayor y el eje menor son iguales, es decir $a^2 = b^2$.

Entonces se tiene: $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$

Multiplicando por a^2, la ecuación anterior se obtiene $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$ que es la ecuación **Ordinaria de la Circunferencia** con centro C(**h**, **k**) y radio **a**.

ACTIVIDAD 12.

Construye una circunferencia con centro en el origen y cualquier radio.

a) Obtén su ecuación.
b) Comprueba, con al menos tres puntos de la circunferencia, que estos satisfacen a la ecuación que planteaste en (a).
c) ¿Qué relación existe entre los puntos de la circunferencia y el centro?

ACTIVIDAD 13.

Construye una circunferencia con centro fuera del origen y cualquier radio.

a) Determina su ecuación
b) Comprueba con al menos tres puntos de la circunferencia que se satisface la ecuación que planteaste en (a).

ECUACIÓN GENERAL DE LA CIRCUNFERENCIA.

ACTIVIDAD 14.

En la ecuación $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$**,** se tienen binomios al cuadrado completa el desarrollo de estos:

$$x^2 - 2hx + \_\_\_ + y^2 - \_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_ = a^2$$

Escribiendo los términos de manera ordenada; es decir primero los términos cuadráticos, después los lineales y en seguida las constantes e igualando a cero se tiene:

$$x^2 + y^2 - 2hx - \_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_\_\_ = 0$$

Para simplificar la ecuación se toman los cambios siguientes:

D = – 2h, E = – 2k, F = $h^2 + k^2 - a^2$, entonces la ecuación se transforma en: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ la llamada Ecuación General de la Circunferencia.

Ejemplo 6. Pasar la ecuación de la circunferencia $(x - 17)^2 + (y + 9)^2 = 3^2$ de forma ordinaria a la forma general.

i) El desarrollo de los binomios: $(x - 17)^2 = x^2 - 2(17)x + (17)^2 = x^2 - 34x + 289$

ahora el segundo binomio: $(x + 9)^2 = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

ii) Escribiendo los términos en orden e igualando con cero se obtiene la ecuación en forma general: $x^2 + y^2 - 34x + \_\_\_\_\, y + \_\_\_\_ = 0$

ACTIVIDAD 15.
El problema inverso.

Dada la ecuación de la circunferencia en forma general: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ determinar la ecuación ordinaria.

i) Completa en los espacios la cantidad que debe sumarse en ambos miembros para completar el trinomio cuadrado perfecto para x y para y.

$$x^2 + Dx + \left(\frac{+D}{2}\right)^2 + y^2 + Ey + \left(\frac{\quad}{\quad}\right)^2 + F = 0 + \left(\frac{+D}{2}\right)^2 + \left(\frac{\quad}{\quad}\right)^2$$

Factorizando los trinomios cuadrados perfectos (raíz 1ro, signo 2do, raíz 3ro)^2 y pasando F al segundo miembro se tiene:

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2 - F$$

ii) Simplificando el segundo miembro, la ecuación queda de la forma:

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}$$

iii) La ecuación esta expresada en forma ordinaria.

Determina las coordenadas del centro y el radio: Centro C(,   ) radio r =

Ejemplo 7. Obtén la ecuación en su forma ordinaria de la circunferencia:

$$x^2 + y^2 + 16x - 8y + 16 = 0$$

Completando el trinomio cuadrado perfecto para x y para y se tiene:

$$x^2 + 16x + \left(\frac{16}{2}\right)^2 + y^2 - 8y + \left(\frac{-8}{2}\right)^2 = -64 + 64 + 16$$

Factorizando el primer miembro y simplificando el segundo:

$(x + \_\_\_\_)^2 + (y + \_\_\_\_)^2 = 16$ que corresponde a la ecuación ordinaria.

La ventaja de esta ecuación es que se aprecia fácilmente el centro y el radio.

SECCIÓN 6. APLICACIONES DE LA CIRCUNFERENCIA.

En esta sección se pretende, que aplicando los conocimientos adquiridos se resuelvan problemas de diferente índole.

EJERCICIOS 4.

En las siguientes ecuaciones identifica cuales representan una circunferencia o una elipse en caso que sea una elipse, indica cuál de los ejes de coordenadas es paralelo a su eje mayor. En el caso de ser circunferencia, determina su centro y su radio.

1) $\frac{(x+1)^2}{36} + \frac{(y+1)^2}{20} = 1$

2) $\frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{34} = 1$

3) $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{25} = 1$

4) $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{y^2}{100} = 1$

5) Determina el centro, el radio y la gráfica de las siguientes circunferencias:

a) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$

b) $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 22 = 0$

6) Determina la ecuación ordinaria y general de la circunferencia que tiene centro C(3, - 4) y radio r = $\sqrt{70}$.

7) Determina la ecuación ordinaria y general de la circunferencia de centro C(2, 7) y radio r = 5.

8) Dar la ecuación de la circunferencia, en su forma general, que tiene centro en C(-1, 3) y pasa por el punto R(2, -4).

ACTIVIDAD 16.

Ecuación de la circunferencia que pasa por tres puntos que no están en una misma línea.

Traza un dibujo para contestar las siguientes preguntas:

¿Cuántas circunferencias pueden pasar por **un solo** punto? ________________

¿Cuántas circunferencias pueden pasar por **dos** puntos? __________________

¿Cuántas circunferencias pueden pasar por **tres** puntos? __________________

¿Cómo consideras la proposición: Por tres puntos -que no estén en una misma línea- pasa una sola circunferencia, verdadera o falsa?______________

Dados los puntos A(4, 5), B(3, -2) y C(1, -4) determinaremos la ecuación de la circunferencia que pasa por ellos.

Por hipótesis los puntos pertenecen a una circunferencia, entonces satisfacen la ecuación de la circunferencia: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

Sustituyendo las coordenadas del punto A(4, 5) en la ecuación se tiene:
$(4)^2 + (5)^2 + D(4) + E(5) + F = 0$, simplificando obtenemos: 4D + 5E + F = -41.

1) Establece las ecuaciones correspondientes para los puntos B y C.

2) Con las tres ecuaciones que se obtuvieron, se forma un sistema de ecuaciones lineales que al resolverlo se obtienen los valores de las literales D, E y F.

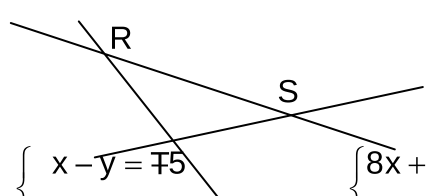
$$\begin{cases} 4D + 5E + F = -41 \\ 3D - 2E + F = -13 \\ D - 4E + F = -17 \end{cases}$$, resuelve el sistema por el método de eliminación.

Los valores que obtuviste fueron: D = ____, E = ____ y F = ____.

Al sustituir esos valores, la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A, B y C es: $x^2 + y^2 + \_\_\_ x + \_\_\_ y + \_\_\_ = 0$

ACTIVIDAD 17.
Determinar la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo cuyos lados son partes de las rectas:
a) x - y = -5 b) 8x + 3y = 59 c) 6x + 5y = 47

1) Debemos obtener las coordenadas de los vértices del triángulo, para ello se toman las ecuaciones de dos en dos y se resuelven para establecer los puntos de intersección de las rectas.



$$\begin{cases} x - y = -5 \\ 8x + 3y = 59 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = -5 \\ 6x + 5y = 47 \end{cases} \qquad \begin{cases} 8x + 3y = 59 \\ 6x + 5y = 47 \end{cases}$$

Solución: R(,)   S(,)   T(,)

Los vértices pertenecen a una circunferencia por lo tanto satisfacen la ecuación de la circunferencia: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

2) Establece las ecuaciones correspondientes para los vértices.

Para el punto R:

Para el punto S:

Para el punto T:

3) Se resuelve el sistema resultante.

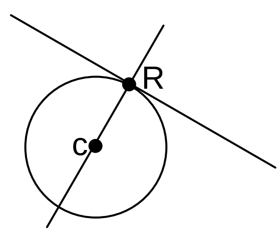
4) La ecuación resultante es: $x^2 + y^2 + \_\_\_ x + \_\_\_ y + \_\_\_ = 0$

ACTIVIDAD 18.

Determinar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia:

$$(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 36$$

en el punto R(3, 11).



a) ¿Cuál es el centro de la circunferencia?
b) Obtén la pendiente de la recta que pasa por el centro C y el punto R; $m =$
c) Determina la pendiente de la perpendicular; $m^{\perp} =$
   Por el dibujo te darás cuenta que la pendiente perpendicular es la pendiente de la recta tangente a la circunferencia.
d) Determina la ecuación de la recta tangente.

Recuerda: La recta tangente a cualquier circunferencia, es perpendicular a la recta que une el punto de la circunferencia con el centro.

ACTIVIDAD 19.

Determinar la ecuación de la circunferencia con centro C(- 4, 2) y es tangente a la recta 3x + 4y – 16 = 0.

Recuerda que siempre existe un radio de la circunferencia que es perpendicular a la recta tangente, por lo tanto se debes calcular la distancia de C(- 4, 2) a la recta 3x + 4y – 16 = 0 para obtener el radio.

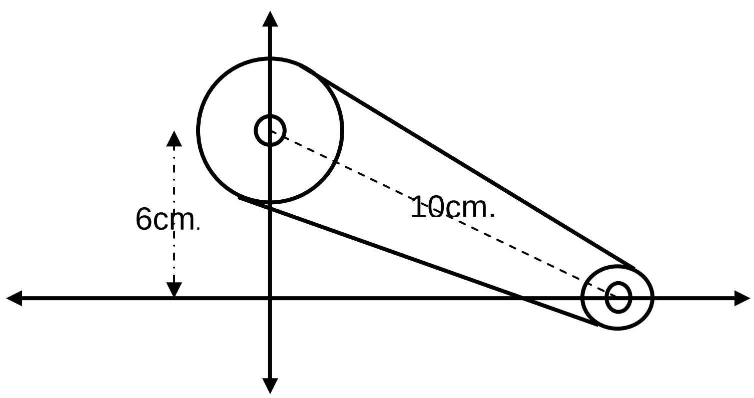
Recuerda que la fórmula para calcular la distancia de un punto a una recta es:

$d(P,L) = \dfrac{|A(x_0) + B(y_0) + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ donde (x_0, y_0) son las coordenadas del punto conocido.

1) Calcula la distancia del centro C de la circunferencia a la recta: d = _______

2) Como ya se conoce el centro y el radio de la circunferencia, se puede determinar la ecuación: ____________________

ACTIVIDAD 20.
La figura siguiente muestra un impulsor de banda y polea dibujado en un sistema de coordenadas. Si el radio de la polea mayor es de 4.2cm. y el radio de la polea menor es de 2.1cm. determina la ecuación de la circunferencia de cada polea circular.



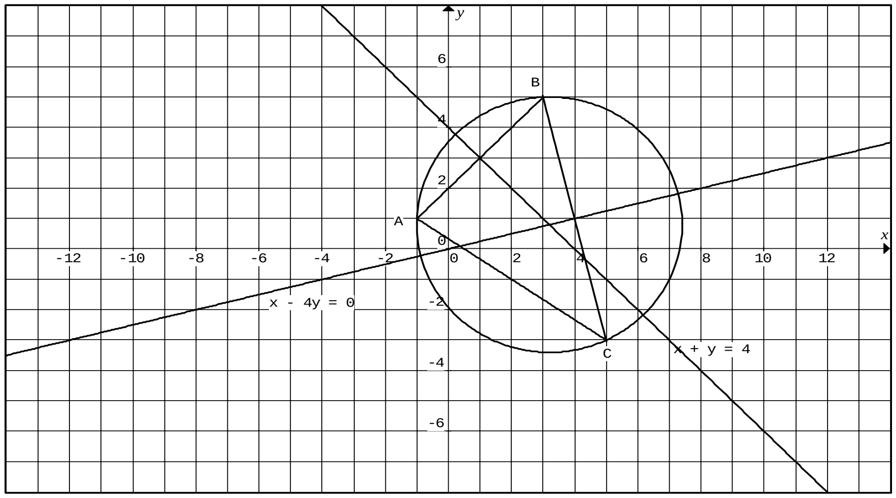
a) ¿Cuáles son las coordenadas del centro de la polea mayor?

b) La ecuación de la polea circular mayor queda de la forma __________________

c) ¿Cuáles son las coordenadas del centro de la polea menor? (Sugerencia: utiliza el teorema de Pitágoras para obtener la abscisa)

d) La polea circular menor tiene como ecuación ___________________________

ACTIVIDAD 21.
Se requiere construir un pozo de tal manera que se encuentre a la misma distancia de tres casas localizadas en los puntos A(-1, 1), B(3, 5) y C(5, -3). ¿En qué punto debe construirse el pozo?
La figura siguiente muestra como están colocadas las casas, los segmentos de recta que las unen y las mediatrices de los lados AB y BC.



1) ¿En qué punto deberá construirse el pozo?

Para determinar el centro de la circunferencia que pasa por las tres casas se deberá obtener el punto de intersección de dos de las mediatrices del triángulo ABC.

Para ello deberás obtener la ecuación de las mediatrices. (Recuerda; que la mediatriz de un segmento es la recta perpendicular que pasa por su punto medio).

2) ¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta que pasa por AB?

3) ¿Cuál es el valor de la pendiente de la mediatriz de AB?

4) Calcula el punto medio de AB.

5) Obtén la ecuación de la mediatriz del lado AB.

6) Determina la pendiente de la recta que pasa por BC.

7) ¿Cuál es la pendiente de la mediatriz de BC?

8) ¿Qué coordenadas tiene el punto medio de BC?

9) Obtén la ecuación de la mediatriz del lado BC.

10) Escribe las ecuaciones de las mediatrices y resuelve el sistema de ecuaciones para obtener el punto de intersección e indica que en la circunferencia.

11) ¿Cuáles son las coordenadas del punto donde debe construirse el pozo?

EJERCICIOS 5.

1) Determinar la ecuación de la circunferencia con centro en (3, - 1) y radio 5

2) Obtén el centro y el radio de la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 9 = 0$

3) Obtén el centro y el radio de la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$

4) El centro y el radio de la circunferencia $x^2 + y^2 = 36$ son:

5) Obtener la ecuación general de una circunferencia con centro en (1, -2) y con radio igual a 4.

6) Determinar la ecuación de la circunferencia con centro en (-2, 1) y es tangente al eje de las ordenadas.

7) Una estación de radio está ubicada en un mapa en las coordenadas (50, 35). el máximo alcance de su emisión es de 15 kilómetros. Determina la ecuación que represente a las coordenadas de todos los puntos de máximo alcance de la estación.

8) Determinar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos (5,3), (6,2) y (3, -1).

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

1. Determinar los elementos (ejes, vértices, focos, lado recto y excentricidad) y trazar la gráfica de las elipses siguientes.
   a) $4x^2 + 9y^2 = 1$
   b) $225x^2 + 64y^2 - 144 = 0$.
2. Conocidas las siguientes condiciones, escribir una ecuación de la elipse que tenga centro C(0, 0) y trazar la gráfica.
   a) Un extremo del eje menor esta en (0, 5) y su lado recto = 6.
   b) Un foco esta en (6, 0) y la longitud del eje mayor = 18.
3. Conocidas las siguientes condiciones, escribir una ecuación de la elipse que tenga centro C(h, k) y trazar la gráfica.
   a) Dar la ecuación de la elipse que tiene focos en (2, -2) y (2, 10) y su excentricidad = 3/4.
   b) Dar la ecuación de la elipse que tiene centro en (-4, 5) un extremo del eje mayor en (-4, 13) y la longitud del lado recto = 3.
4. Dar la ecuación de la circunferencia, en su forma ordinaria, que tiene por extremos de un diámetro los puntos: A(7, -3) y B(-5, 1).
5. Dar la ecuación de la circunferencia, en su forma general, que tiene centro en C (-8, 8) y es tangente a los ejes de coordenadas.
6. Obtén la ecuación de la circunferencia cuyo centro se encuentra en C (-1, 3) y es tangente a la recta $y = 2x + 10$
7. Se desea trazar una pista circular en un mapa. Las condiciones dadas es que la pista tenga centro en las coordenadas **C**(5, 12) y que pase por un punto **A** de coordenadas (-2, 8).
   a) Encuentra la ecuación que describe a todos los puntos de la pista.

b) Encuentra la ordenada del punto sobre la pista que tiene como abscisa –6.
c) Realiza la gráfica de la ecuación.

BIBLIOGRAFÍA

1) Torres, Carlos. **Geometría Analítica.** Editorial Santillana, México, 1998.
2) Swokowski, Eart. **Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica**, Grupo Editorial Iberoamérica, México1988.
3) Kindle, Joseph H. **Geometría Analítica**, Mc Graw – Hill. México1970.
4) Hernández. Fernando, **Geometría Analítica para Principiantes**. Colegio de Ciencias y Humanidades Plantel Oriente. México 1997.
5) Rodríguez. Francisco J. **Introducción a la Geometría Analítica**. Colegio de Ciencias y Humanidades Plantel Oriente. México.