UNIDAD 5
LA PARÁBOLA Y SU ECUACIÓN CARTESIANA

PROPÓSITOS: Consolidar el manejo del método analítico a través del estudio de la ecuación de la parábola. Avanzar en el reconocimiento de formas, estructuras y procedimientos, al resolver diversos problemas que involucren tanto a la parábola como a otros lugares geométricos ya vistos.

INTRODUCCIÓN.
Hasta el momento has estudiado a la recta, la elipse y la circunferencia en su forma analítica, descubriendo que la elipse y la circunferencia son parte de las curvas llamadas *cónicas*; la parábola es otra de ellas, y la más familiar, pues ya la estudiaste como *función* en Matemáticas II. Ahora conocerás de la parábola todos los elementos que la componen y encontrarás su ecuación cartesiana.

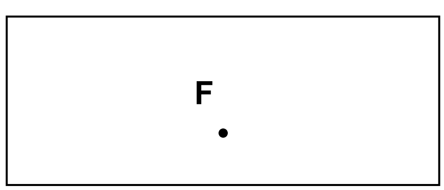
La importancia de la parábola también deviene porque tiene varias aplicaciones prácticas, como por ejemplo, al lanzar una pelota de béisbol, su trayectoria describe una parábola, si se lanza un proyectil, también (el famoso tiro parabólico), de igual manera las curvas que forman ciertos cables de algunos puentes, siempre y cuando el cable cargue un peso homogéneo mucho mayor que el peso del propio cable. Al girar una parábola sobre su eje, se genera una superficie llamada *paraboloide*, dicha superficie tiene aplicaciones, por ejemplo emplea para construir faros de los automóviles, focos para lámparas fotográficas, antenas parabólicas, espejos de telescopios, micrófonos direccionales, entre otros. Más adelante cuando trabajemos con las propiedades de la parábola sabrás por qué tiene tantas aplicaciones.

SECCIÓN 1. LA PARÁBOLA COMO LUGAR GEOMÉTRICO.

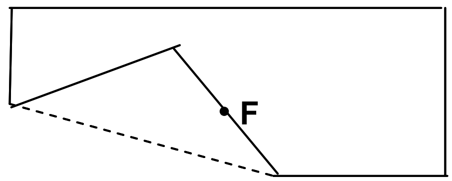
Pretendemos que en esta sección construyas a la parábola de varias maneras, la definas como el lugar geométrico e identifiques los elementos que la componen.

ACTIVIDAD 1.
Construcción de la parábola doblando papel. Para esta actividad necesitas una hoja de papel albanene o papel encerado.

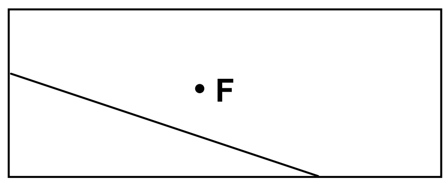
1) Coloca la hoja en forma horizontal y aproximadamente a la mitad y cerca del borde inferior marca en la hoja un punto y llámale F, observa la figura:



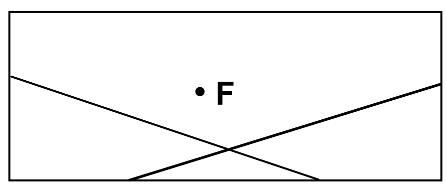
2) Dobla el papel de tal forma que el borde inferior coincida con F.



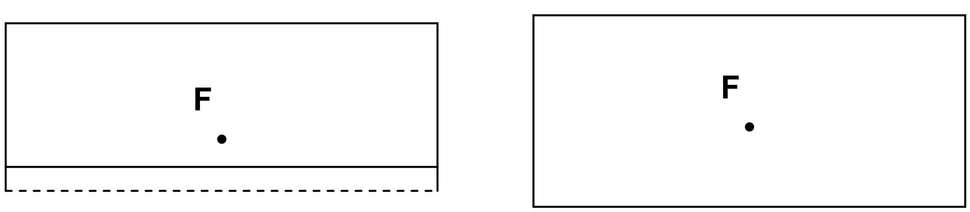
3) Desdobla la hoja para que quede marcada la línea.



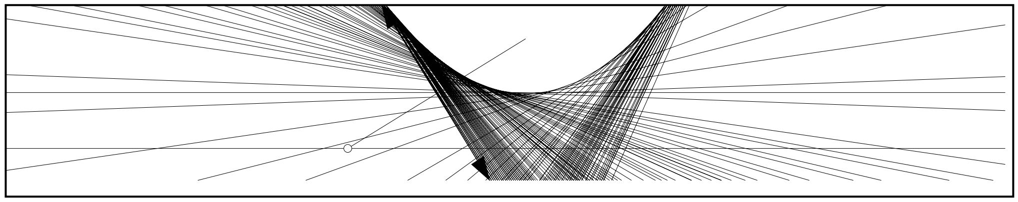
4) Haz varios dobleces del lado izquierdo de la hoja y varios del lado derecho.



5) Por último haz el doblez siguiente:

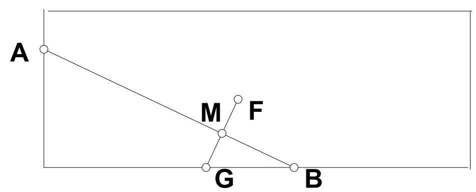


6) Al hacer muchos dobleces ¡aparecerá una parábola! Pues las *rectas* que marcaste con los dobleces son sus tangentes. Una curva construída a partir de sus tangentes se llama **envolvente**.



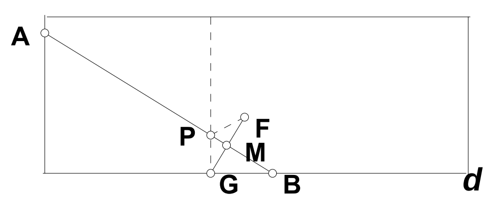
Pero, ¿Por qué se generó una parábola? ¿Tienes alguna idea? Veamos que sucedió:

7) Al doblar el papel de tal forma que el borde inferior (punto G) coincide con F, se forma el punto M ¿qué clase de punto es M en el segmento FG? __________



8) Al desdoblar la hoja el segmento marcado es AB, ¿qué relación guarda AB con FG? Explica. ____

9) Si trazas una perpendicular al borde de la hoja desde el punto G, ésta corta a AB en P y al unir P con F se forma el triángulo GPF, ¿qué clase de triángulo es? ¿por qué?____



Por la clase de triángulo que señalaste en la pregunta anterior, podemos afirmar que PG = PF, es decir que P equidista de F y G o lo que es lo mismo equidista de F y de la recta que forma el borde de la hoja (llamémosla ***d***), PG es la distancia de P a la ***d***, ya que es la perpendicular. Todo lo anterior sucede para cualquier doblez.

10) Siguiendo el procedimiento anterior, marca por lo menos otros cinco puntos como P. Todos estos puntos son de la parábola, ¿qué propiedad comparten?, ¿puedes dar una redacción inicial?

Lo que hemos encontrado anteriormente va a definir a la parábola, más adelante redactaremos la definición, pero antes, sigamos avanzando.

ACTIVIDAD 2.
El señor Hernández quiere construir su casa de tal manera que se encuentre a la misma distancia de un pozo y del camino que va a la ciudad. Dado el siguiente plano ¿dónde deberá construirla?
Recuerda que la distancia de un punto a una recta se calcula con el segmento de recta perpendicular que va de la recta al punto.

1) Traza, en forma aproximada, cinco o más puntos donde pueda edificarse la casa; puedes utilizar regla y compás o recurrir a otra estrategia.

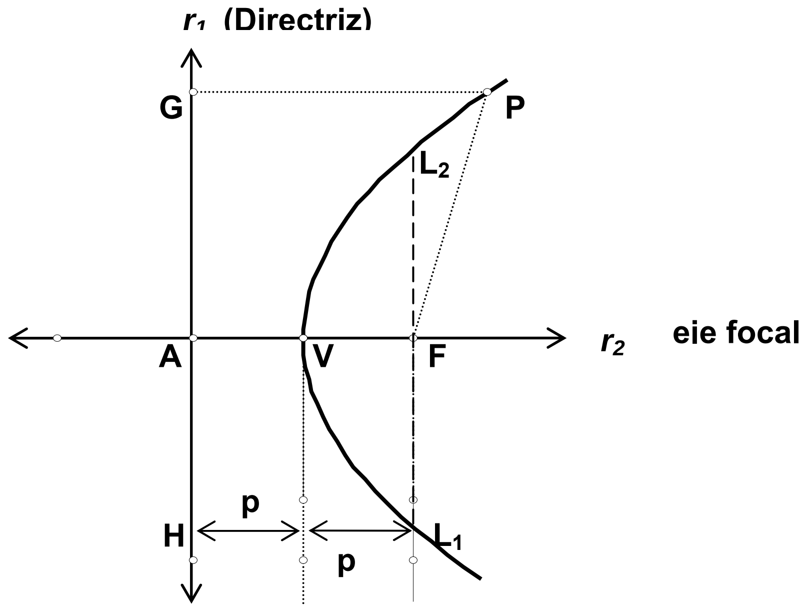
2) Une los puntos que encontraste, la figura que se forma, ¿te es familiar? _________

3) La propiedad de los puntos que encontraste, ¿tienen propiedades similares a los puntos encontrados en la actividad 1? _________ ¿por qué? _______________

Efectivamente los puntos de cada actividad tienen la propiedad de equidistar de un punto y de una recta, ahora estamos en condiciones de definir la parábola y sus elementos.

> **Definición.**
> Una parábola es el lugar geométrico de los puntos en el plano que se encuentran a igual distancia de un punto fijo llamado foco y de una recta fija llamada directriz

La parábola no se puede dibujar de un sólo trazo usando regla y compás, como en el caso de la circunferencia, pero podemos utilizar la regla y el compás para encontrar varios puntos de la curva y posteriormente unirlos. Tampoco existe un método sencillo, como el del jardinero para trazar la elipse; para trazar la parábola sin embargo existe una forma con hilo y escuadra que permite trazar la curva. La construcción con regla y compás y el uso de hilo y escuadra para la construcción de la parábola son métodos que encontrarás en un apéndice, al final de esta unidad.



La recta r_1 es la directriz. El punto F es el foco de la parábola. La recta r_2 es el eje focal (o eje de simetría). El punto V se encuentra a la menor distancia de la parábola con el foco y la directriz; V es el vértice de la parábola y al ser un punto de ésta, se cumple que la distancia entre el vértice y el foco (VF), es la misma que entre el vértice y la directriz (VA). A esta distancia, VF = VA, se simboliza como ***p*** y se le llama distancia focal o parámetro.

P es un punto cualquiera de la parábola, por lo que, de acuerdo a la definición, la distancia **F** a **P** debe ser igual a la distancia **F** a **G**.

Es decir: $d(P,F) = d(P, r_1)$

ACTIVIDAD 3.
Considerando la figura anterior, contesta cada una de las siguientes preguntas.

1) Afirmamos que AV=VF ¿por qué?

2) Hemos llamado **p** a la distancia de F a V, ¿Cuánto mide AV? ¿cuánto mide AF?

Al segmento L_1L_2 se le llama **lado recto**, es paralelo a la directriz y pasa por el foco.

3) L_1 y L_2 son puntos de la parábola ¿Cuánto mide L_1H? __________

4) ¿Cuánto mide L_1F? _______________ ¿Cuánto mide FL_2? __________

¿Por qué? ______________________________

5) ¿Cuánto mide el lado recto de la parábola? es decir, ¿cuál es su longitud? _________________ ¿Por qué? _____________________________________

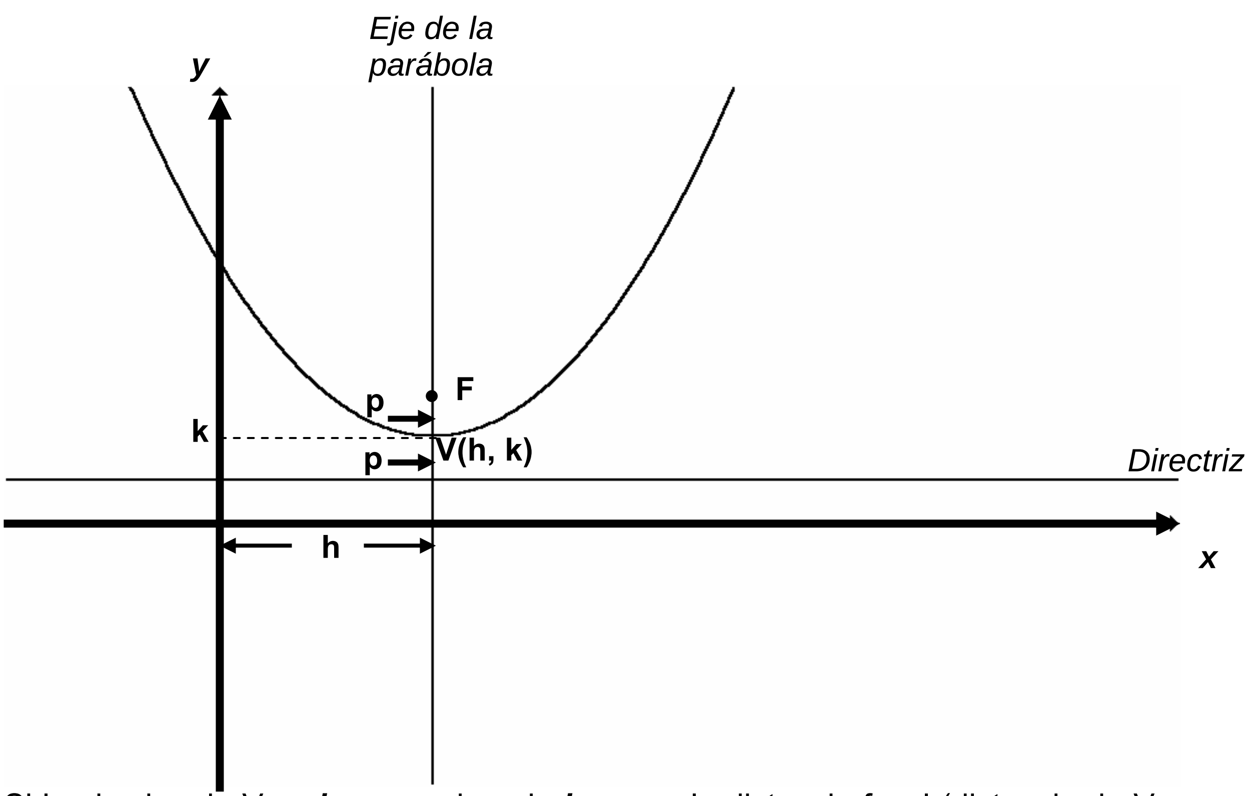
La longitud del lado recto se escribe como $|4\boldsymbol{p}|$ que es el valor absoluto de cuatro ***p***, lo que significa que a la longitud del lado recto le vamos a asignar siempre el valor positivo. ¿Por qué? ¿Existe la posibilidad de que ***4p*** sea negativa?

SECCIÓN 2. ECUACIÓN DE LA PARÁBOLA CON EJE PARALELO A ALGUNO DE LOS EJES DE COORDENADAS.

Pretendemos que en esta sección deduzcas la ecuación cartesiana de la parábola, dada una ecuación determines sus elementos y viceversa.

Ahora nos ocuparemos de deducir la ecuación de parábolas horizontales o verticales, también existen parábolas oblicuas, pero éstas no serán objeto de estudio de nuestro curso.

ACTIVIDAD 4.
Considera la siguiente parábola vertical, con vértice en V(h ,k)

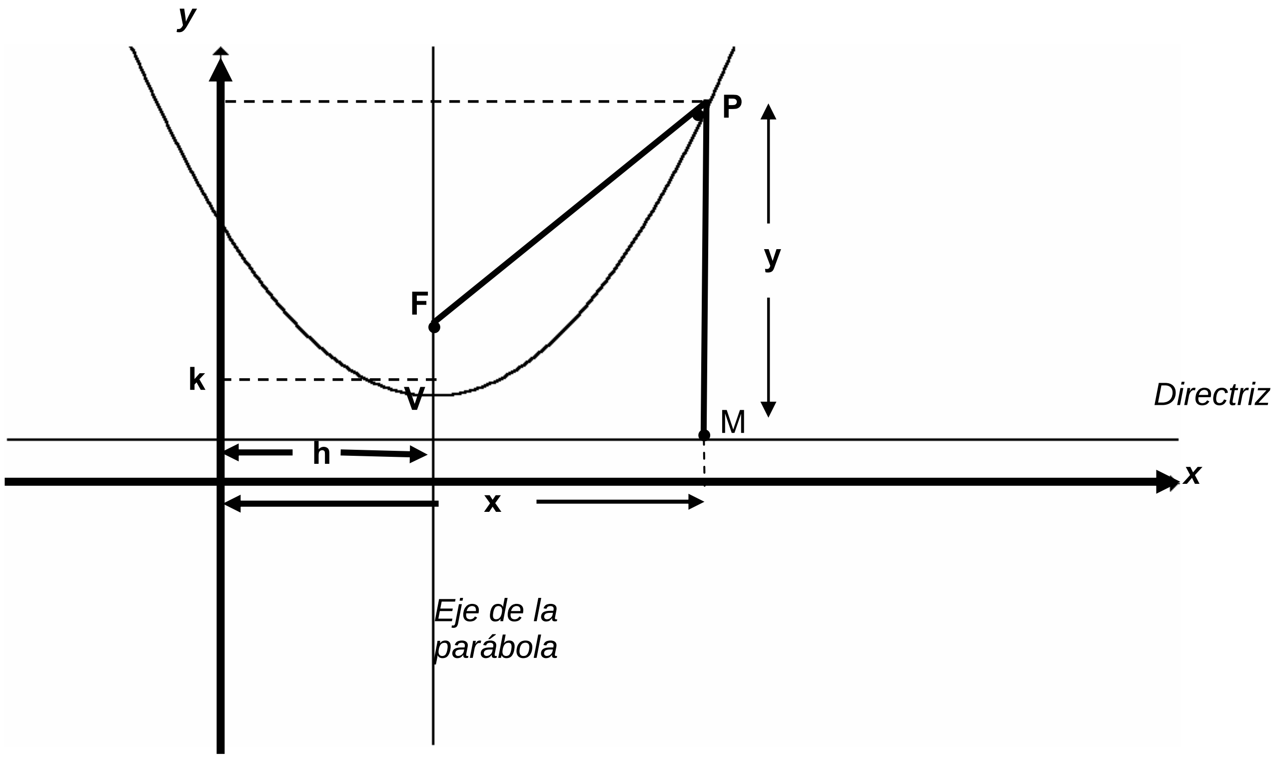


Si la abscisa de V es ***h*** y su ordenada ***k*** y ***p*** es la distancia focal (distancia de V a la directriz y de V a F).

1) Escribe las coordenadas de F ________________
2) Escribe la ecuación de la directriz _______________

3) Escribe la ecuación del eje de simetría (eje de la parábola) ______________

Tomemos un punto ***P*** cualquiera en la parábola, cuya abscisa es ***x*** y ordenada ***y***, es decir ***P(x, y)*** y coloquemos ***P*** en la gráfica siguiente:



4) Como **P** es un punto en la parábola ¿qué propiedad cumple? _____________
____

Recuerda que la distancia de un punto ***P*** a una recta ***r*** es la distancia de ***P*** al punto más cercano sobre la recta, y éste es donde se cortan ***r*** y la perpendicular que pasa por ***P***, que en este caso llamamos ***M***.

5) Escribe las coordenadas de M __________

Con la información que has obtenido, vamos a deducir la ecuación cartesiana de la parábola. Analiza con cuidado los pasos siguientes.

Como **P** es un punto en la parábola, se cumple que:

d(P, F) = d(P, M)

Para determinar esas distancias y encontrar la ecuación de la parábola, procedemos de la misma manera que cuando estudiamos lugares geométricos; consideremos las coordenadas de los puntos **P, F** y **M:**

P(x, y) **F (h, k + p)** **M(x, k – p)**

d(P, F) = $\sqrt{(x-h)^2+(y-(k+p))^2}$

d(P, M) = $\sqrt{(x-x)^2+(y-(k-p)^2}$

Pero, d(P, F) = d(P, M), entonces :

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-(k+p)^2}=\sqrt{(x-x)^2+(y-(k-p)^2}$$

Como las dos expresiones tienen raíz cuadrada, elevamos al cuadrado ambos lados de la igualdad y resulta:

$$(x-h)^2+(y-(k+p))^2=(x-x)^2+(y-(k-p))^2$$

Observa que si desarrollamos los binomios que contienen a ***y***, ***k*** y ***p*** es posible reducir términos semejantes, como no sucede lo mismo con el binomio que tiene a ***x*** y a ***h*** no lo desarrollaremos

Desarrollando los binomios descritos, obtenemos que:

$$(x-h)^2+y^2-2(k+p)y+(k+p)^2=y^2-2(k-p)y+(k-p)^2$$

Haciendo multiplicaciones y desarrollando los binomios que contienen a ***k*** y ***p***, resulta:

$$(x-h)^2+y^2-2ky-2py+k^2+2pk+p^2=y^2-2ky+2py+k^2-2kp+p^2$$

Al restar y^2, p^2 y k^2 de ambos lados de la igualdad se tiene que:

$$(x-h)^2-2ky-2py+2pk=-2ky+2py-2pk$$

Al despejar $(x-h)^2$**,** agrupar y reducir términos semejantes, resulta:

$$(x-h)^2=4py-4pk$$

Si del lado derecho factorizamos 4p, tenemos:

$$\boxed{(x-h)^2=4p(y-k)}$$

A la ecuación anterior se le llama ecuación cartesiana, estándar, ordinaria o canónica de la parábola con eje paralelo al eje de las ordenadas (o parábola vertical), con vértice en ***V(h, k)*** y distancia focal o parámetro ***p***.

En las preguntas 1, 2 y 3 de la actividad 4, determinaste las coordenadas del foco **F(h, k + p)**, la ecuación de la directriz: **y = k– p** y la ecuación del eje de simetría: **x = h**

Contar con la ecuación de la parábola en su forma ordinaria nos permite determinar todos los elementos que la conforman, veamos:

Ejemplo 1.
Determinar las coordenadas del vértice y el foco, las ecuaciones de la directriz y del eje de simetría, y trazar la gráfica de la parábola que tiene ecuación:

$$(x - 4)^2 = 8(y - 1)$$

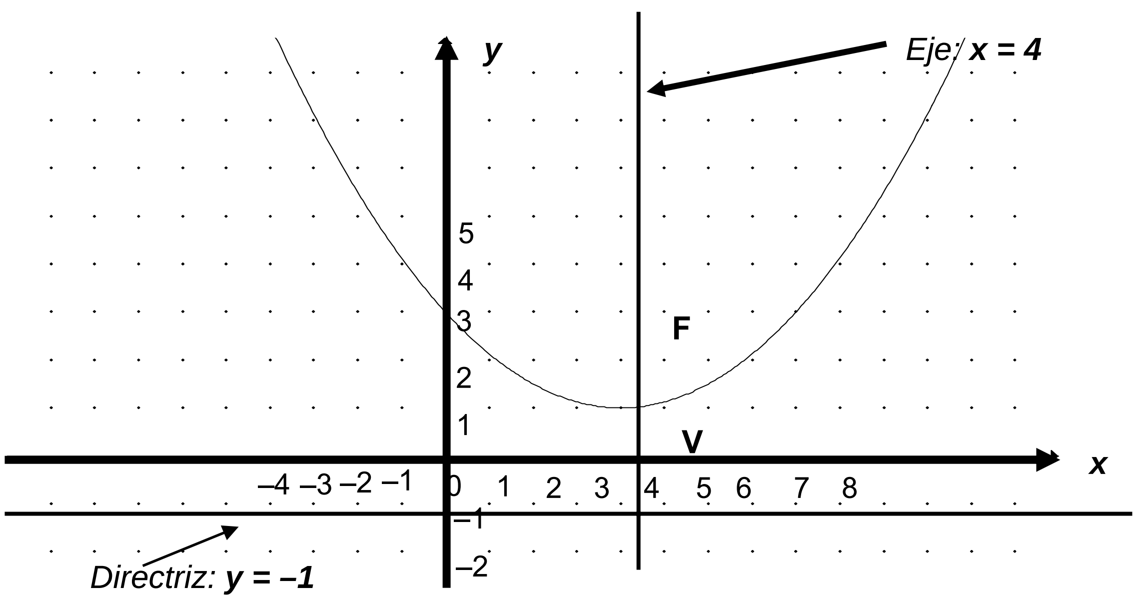
Comparando la ecuación que tenemos: $(x - 4)^2 = 8(y - 1)$, con la ecuación que encontramos anteriormente: $(x-h)^2 = 4p(y-k)$, es posible decir que $h = 4$ y $k = 1$ y así determinar las coordenadas del vértice que en este caso son: V(4, 1), también tenemos que: 4p = 8, por lo tanto la distancia focal **p** es igual a 2.

Como ya sabemos las coordenadas del foco son: F(h, k + p), por lo tanto en nuestro ejemplo F(4, 3).

La ecuación de la directriz es: y = k – p, así que en el ejemplo concreto resulta: y = – 1, que sabemos representa una recta horizontal.

Y por último, la ecuación del eje de simetría es: x = 4

Trazando la gráfica, tenemos:



ACTIVIDAD 5.
Encuentra: la ecuación cartesiana de la parábola con vértice en V(–3, 2) y foco en F(–3, 0), la ecuación de la directriz, la ecuación del eje y las coordenadas de los extremos del lado recto. Traza la gráfica, incluyendo todos los elementos.

Puedes, de manera simultánea, encontrar los elementos y trazar la gráfica

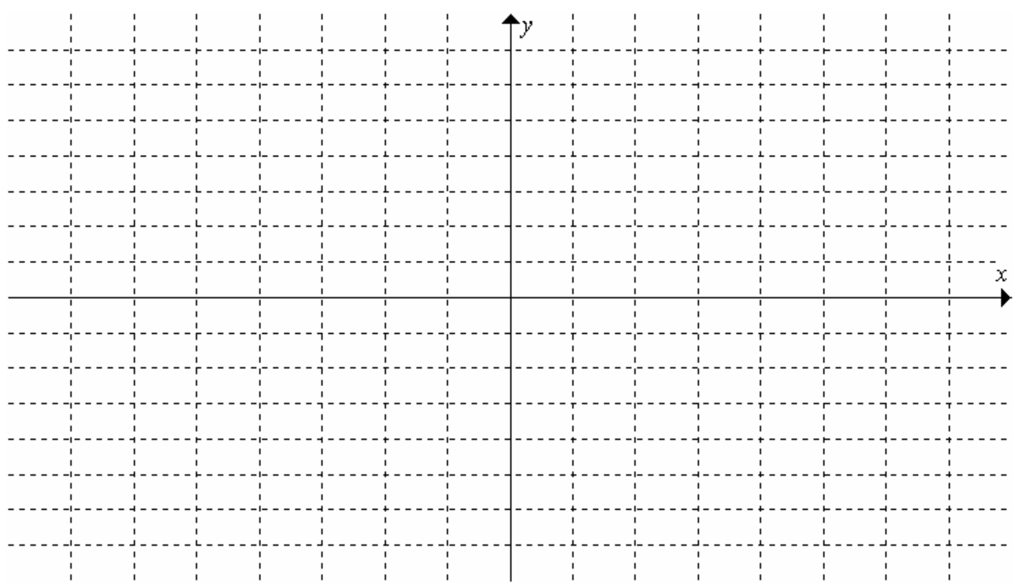
1) Sabes que las coordenadas del foco son de la forma: F(h, k + p), usando la información del problema ¿Cuánto vale ***p***?____________________________. ¿Qué te dice el signo de ***p***?

2) Coloca el vértice y el foco en el plano cartesiano.

3) Ya sabes que la ecuación cartesiana de la parábola vertical es de la forma: $(x-h)^2 = 4p(y-k)$, ¿tienes todos los elementos para determinar la ecuación? _____ Si es así, escribe la ecuación ______________________________.

4) Usando lo que has aprendido y la información que tienes, da las ecuaciones de la directriz y del eje ____.

5) Llámale a los extremos del lado recto $\boldsymbol{L_1}$ y $\boldsymbol{L_2}$; en la actividad 3 encontraste que la distancia de cada uno de los extremos del lado recto (de L_1 y L_2) a F es ***2p*** ¿Cuáles son las coordenadas de los extremos del lado recto? _________________________ Colócalos en la gráfica.



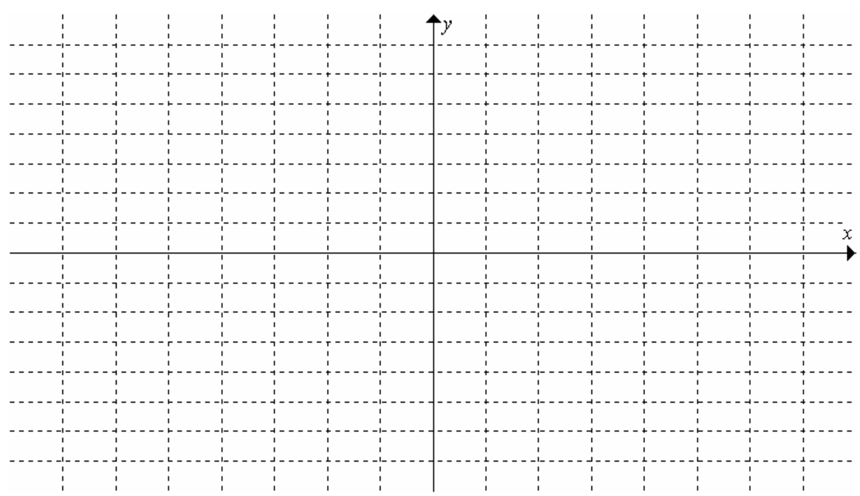
Como habrás concluido, cuando **p < 0** la parábola se abre hacia abajo.

ACTIVIDAD 6.

Encuentra la ecuación cartesiana (estándar) de la parábola vertical, con vértice en el origen y distancia focal p = $-\frac{3}{2}$. Encuentra además la ecuación de la directriz, del eje de simetría y da las coordenadas de los extremos del lado recto.

1) Para determinar la ecuación cartesiana de la parábola, ya tienes todos los elementos, da la ecuación. ____
2) ¿Qué significa que p = $-\frac{3}{2}$?, ¿qué información obtenemos al saber que p < 0?
3) Las ecuaciones: $x = 0$ y $y = \frac{3}{2}$ ¿qué representan?
4) Da las coordenadas de los extremos del lado recto.
5) Dibuja todo lo encontrado en el siguiente plano cartesiano de la página siguiente.

La ecuación que encontraste en esta actividad, es de la forma $x^2 = 4py$, la cual representa a una parábola vertical con vértice en el origen.



Tu conocías la ecuación de la parábola de la forma: $y = ax^2$ que es la que aprendiste en Matemáticas II cuando estudiaste la parábola como una función cuadrática, utilizando ambas ecuaciones, obtenemos que $a = \frac{1}{4p}$.

ACTIVIDAD 7.

Encuentra las coordenadas del vértice, el foco, los extremos del lado recto, y las ecuaciones de la directriz y del eje de simetría de la parábola: $y = 2x^2$. Construye su gráfica, con todos los elementos encontrados.

1) La ecuación anterior la podemos escribir de la forma: $(x-0)^2 = \frac{1}{2}(y-0)$.

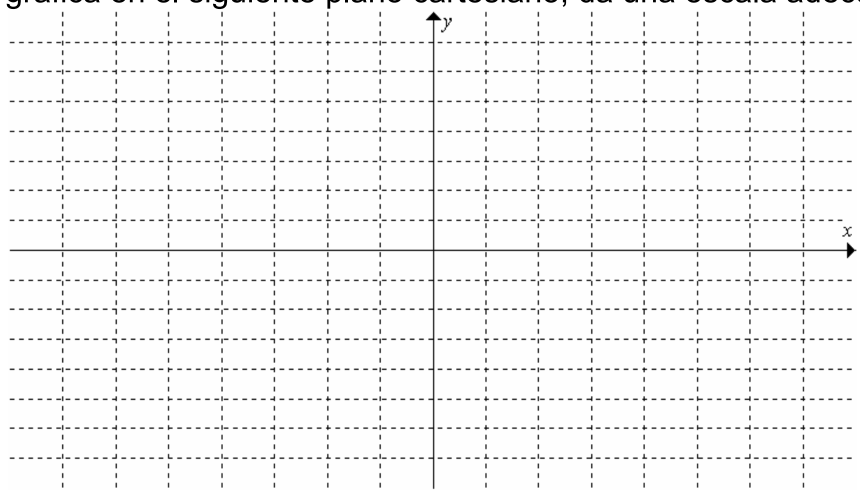
   Explica por qué. Da las coordenadas del Vértice.

2) ¿Cuánto vale 4p? ____________ ¿De lo anterior puedes concluir que p = $\frac{1}{8}$?

3) Los siguientes puntos: $(\frac{1}{4},\frac{1}{8})$, $(-\frac{1}{4},\frac{1}{8})$ *y* $(0,\frac{1}{8})$ ¿qué representan? ¿por qué?

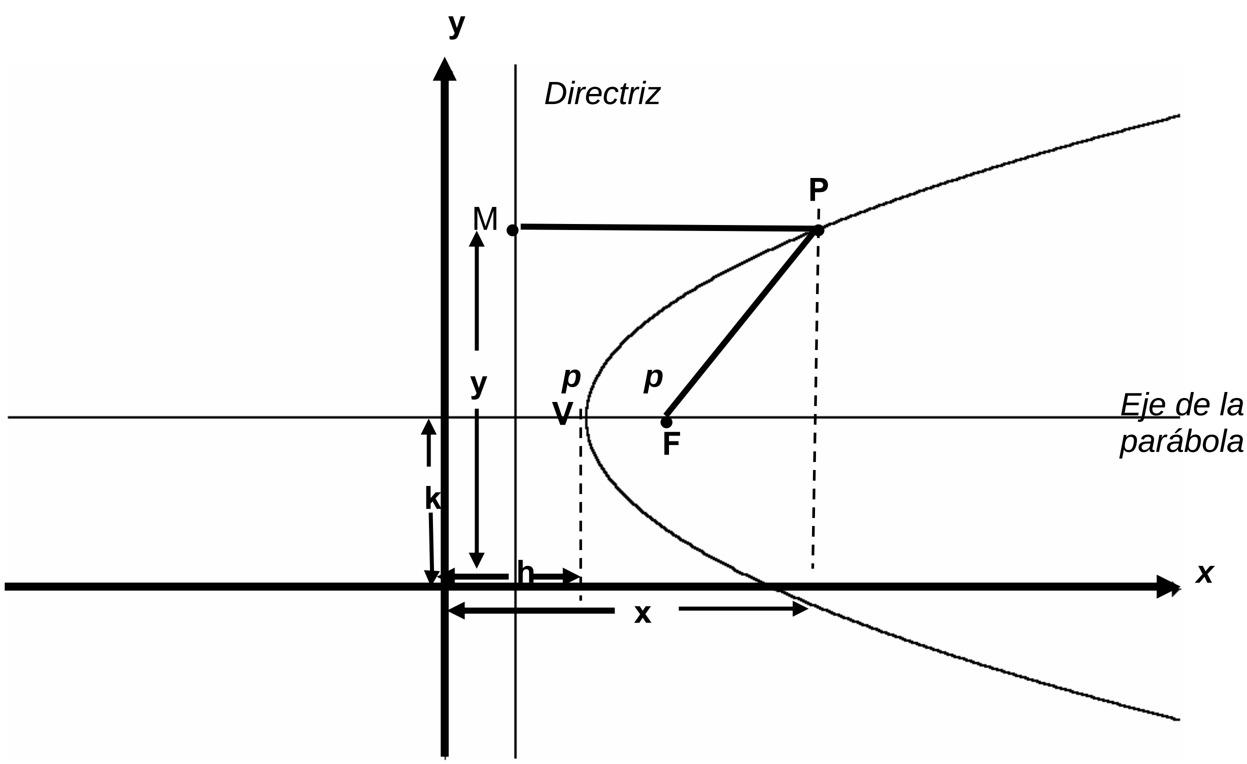
4) Da las ecuaciones de la directriz y la del eje de simetría.

5) Traza la gráfica en el siguiente plano cartesiano, da una escala adecuada.



ACTIVIDAD 8.

Encuentra la ecuación cartesiana de la parábola horizontal, con vértice en ***V(h,k)*** y ***p*** como longitud de la distancia focal.



1. Establece una conjetura y plantea como esperas la ecuación cartesiana de la parábola horizontal con vértice ***V(h,k)*** y ***p*** como longitud de la distancia focal.

2) Escribe las coordenadas de F ________________________

3) Escribe la ecuación de la directriz _______________

4) Escribe la ecuación del eje de simetría (eje de la parábola) ______________

5) Escribe las coordenadas de M __________

Tomando un punto **P** cualquiera en la parábola (como se muestra en la gráfica anterior), cuya abscisa es **x** y ordenada **y**, es decir P(x, y).

6) Siendo **P** es un punto en la parábola ¿qué propiedad cumple? _____________ ____

Como **P** es un punto en la parábola, se cumple que:

d(P, F) = d(P, M)

Para determinar esas distancias y encontrar la ecuación de la parábola, procede de la misma manera que cuando encontramos la ecuación de la parábola vertical, Demos las coordenadas de los puntos **P**, **F** y **M**:

P(x, y) F (h + p, k) M(h – p, y)

d(P, F) = $\sqrt{(x-(h+p))^2+(y-k)^2}$

8) d(P, M) = ________________

Como: d(P, F) = d(P, M), entonces :

$$\sqrt{(x-(h+p))^2+(y-k)^2}=\sqrt{(x-(h-p))^2+(y-y)^2}$$

9) Al igual que cuando encontramos la ecuación cartesiana de la parábola vertical, las dos expresiones tienen raíz cuadrada, eleva al cuadrado ambos lados de la igualdad, desarrolla los binomios que contienen a ***x***, ***h*** y ***p*** para reducir términos semejantes y el binomio que tiene a ***y*** y a ***k*** no los desarrolles pues no se pueden reducir con ningún otro. Escribe el procedimiento:

Al despejar $(y-k)^2$, agrupar y reducir términos semejantes, seguramente obtuviste:

$$(y-k)^2 = 4px - 4ph$$

Al factorizar 4p, tienes que:

$$\boxed{(y-k)^2 = 4p(x-h)}$$

De igual manera, se le llama ecuación cartesiana, estándar, ordinaria o canónica de la parábola con eje paralelo al eje de las abscisas (o parábola horizontal), con vértice en ***V(h, k)*** y distancia focal o parámetro ***p***.

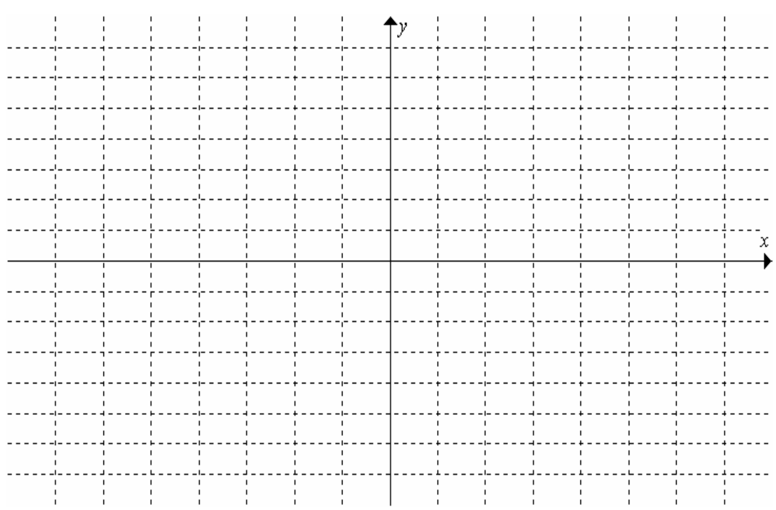
Además, como ya determinaste anteriormente, las coordenadas del foco son: **F(h + p, k)**, la ecuación de la directriz es: **x = h– p** y la ecuación del eje de simetría es: **y = k**

Contar con la ecuación de la parábola en su forma ordinaria nos permite determinar todos los elementos que la conforman, veamos:

ACTIVIDAD 9.

Determina la ecuación de la parábola con foco en $F(3,-\frac{7}{3})$ y ecuación de la directriz: $x = -1$. Traza la gráfica.

1. ¿La parábola, es horizontal o vertical? Explica como lo determinaste.
2. Da las coordenadas del vértice. Explica como lo encontraste.
3. ¿Cuánto vale la distancia focal?
4. Como ya cuentas con todos los elementos necesarios para dar la ecuación de la parábola, ahora escríbela
5. Traza la gráfica



EJERCICIOS 1.
Encuentra la ecuación de la parábola que satisface las condiciones dadas. En cada caso traza la gráfica.

1) Vértice (0, 0), p = 2, vertical

2) Vértice (–1, 0), Foco (0, 0).

3) Foco (3, –2) lado recto igual a 4 y abre hacia abajo

4) Ecuación de la directriz: x = 1 y tiene foco en $\left(-\frac{7}{2}, \frac{4}{3}\right)$

Determina los elementos de las siguientes parábolas (vértice, foco, longitud del lado recto, ecuación de la directriz, ecuación del eje de simetría). Traza la grafica en cada caso.

5) $(x-2)^2 = -5(y+1)$

6) $(y-1)^2 = -6x$

7) $(y+\frac{5}{3})^2 = 3(x+\frac{5}{4})$

8) $x^2 = y - 4$

ECUACIÓN GENERAL DE LA PARÁBOLA.

En la unidad 4, aprendiste a pasar de la ecuación cartesiana de la circunferencia o elipse a la ecuación general y viceversa, aquí también nos interesa hacer lo mismo, retomemos el ejercicio que resolviste en la actividad 9 y desarrollemos la ecuación cartesiana para llegar a la ecuación general.

Ejemplo 2.
Encontrar la ecuación general de la parábola: $(y+\frac{7}{3})^2 = 8(x-1)$

Solución:
Desarrollando ambos lados de la igualdad, resulta:

$$y^2 + \frac{14}{3}y + \frac{49}{9} = 8x - 8$$

Multiplicando por 9:

$$9y^2 + 42y + 49 = 72x - 72$$

Agrupando todos los términos del lado izquierdo de la igualdad:

$$9y^2 + 42y - 72x + 121 = 0$$

La anterior es la ecuación general de la parábola con foco en $F(3, -\frac{7}{3})$ y ecuación de la directriz: $x = -1$.

La ecuación general de una parábola, con eje de simetría paralelo a uno de los ejes de coordenadas, es de la forma:

$$Ax^2 + Bx + Cy + D = 0 \quad \text{si la parábola es vertical}$$

$$Ay^2 + By + Cx + D = 0 \quad \text{si la parábola es horizontal}$$

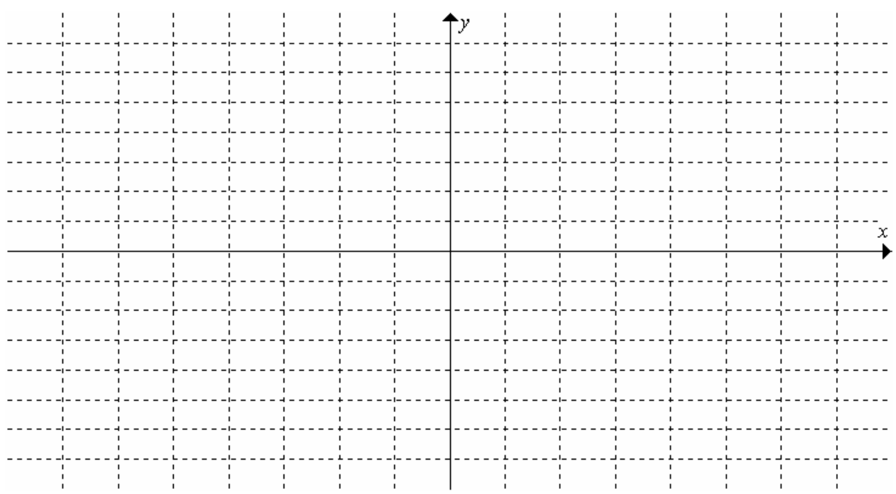
Además es necesario pedir que $A \neq 0$ ¿por qué?

ACTIVIDAD 10.

Encuentra la ecuación general de la parábola con vértice en V(–1.–2), su lado recto mide 12 y abre hacia la izquierda.

1) Para encontrar la ecuación general primero puedes encontrar la ecuación cartesiana, ya tienes el vértice, pero te falta ***p*****,** determínalo, ¿cómo afecta a ***p*** el que la parábola se abre hacia la izquierda?

2) Con la información encontrada puedes trazar la gráfica de la parábola, trázala y da las coordenadas de los extremos del lado recto.



3) Escribe la ecuación cartesiana de la parábola

4) Desarróllala para encontrar la ecuación general

5) ¿Cuál de las siguientes ecuaciones es equivalente a la que diste en el inciso 4?

a) $x^2 + 2x = 12y + 16$ b) $y^2 + 4y - 2x = -8$ c) $y^2 + 4y = -12x - 16$

Ahora pasaremos de la ecuación general a la ecuación cartesiana para poder determinar sus elementos y trazar la gráfica. El procedimiento ya lo conoces pues lo utilizaste en la unidad 4.

ACTIVIDAD 11.

Encuentra las coordenadas del vértice y las del foco de la parábola: $y^2 - 6y + 5x - 1 = 0$. Traza la gráfica.

1) ¿La parábola es vertical u horizontal? ¿Cómo lo determinaste?

2) ¿La ecuación cartesiana es de la forma: $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ o $(x-h)^2 = 4p(y-k)$? ¿por qué?

Una vez que determinaste cual es a la forma que quieres llegar, escribimos una ecuación equivalente:

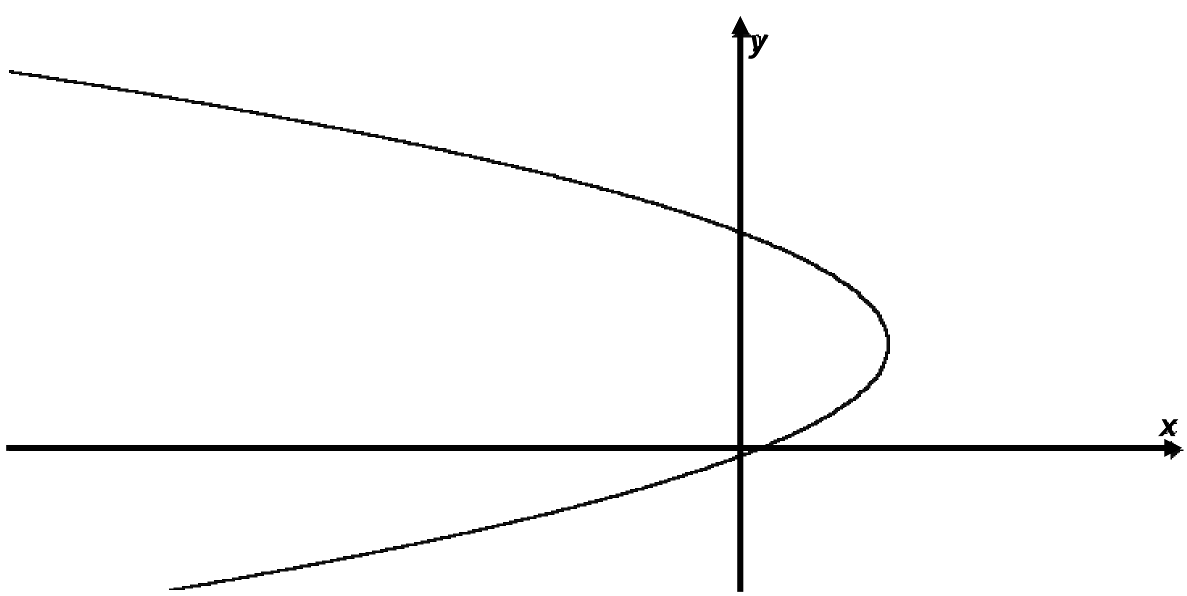
$$y^2 - 6y = -5x + 1$$

3) Queremos escribir el lado izquierdo de la igualdad como un binomio al cuadrado, por lo tanto es necesario completar el cuadrado del lado izquierdo, ¿qué número debes sumar del lado derecho y del lado izquierdo de la igualdad?

4) Haz las operaciones necesarias para escribir la ecuación de la forma: $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

5) De la ecuación que determinaste, ¿puedes decir que la parábola que abre hacia la izquierda, que V(2, 3) y p = $-\frac{5}{4}$? Explica por qué.

6) En la grafica siguiente, coloca la escala adecuada, el foco, el vértice, traza la directriz, el eje de simetría y los extremos del lado recto.



ACTIVIDAD 12.
Encuentra las coordenadas del vértice y el foco de la parábola: $y = x^2 - 8x - 3$. Traza la gráfica.

1) ¿La parábola es vertical u horizontal? ¿Cómo lo determinaste?

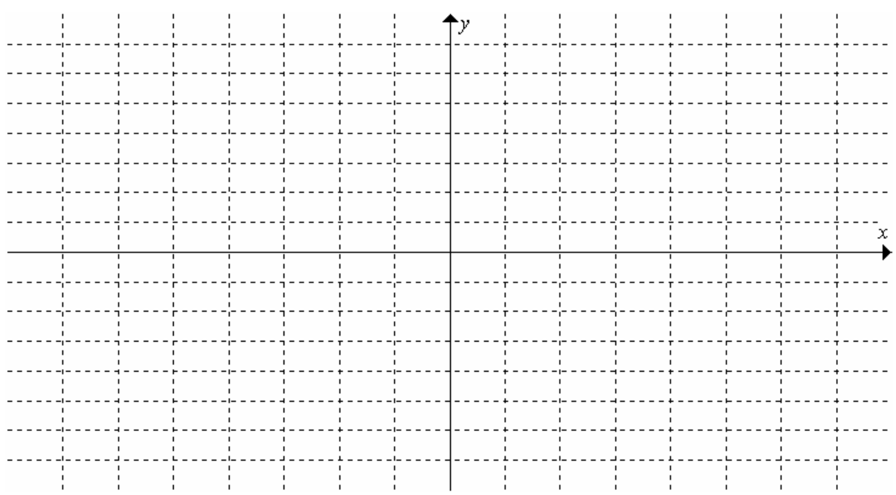
2) ¿La ecuación cartesiana es de la forma: $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ o $(x-h)^2 = 4p(y-k)$? ¿por qué?
3) Agrupa los términos de la ecuación para que adopten la forma cartesiana que elegiste en el inciso anterior.

4) Elige el valor adecuado para completar el trinomio, recuerda sumar ese número de ambos lados de la igualdad.
5) Una forma equivalente de escribir la ecuación que escribiste es: $y = (x-4)^2 - 19$

6) Seguramente encontraste que la parábola tiene vértice en V(4,–19) y foco en $F(4, -\frac{75}{4})$, también puedes encontrar los extremos del lado recto y así, al tener tres puntos de la ecuación, trazar su gráfica.

Lo anterior es otra forma de trazar las graficas de las parábolas verticales, la cual ya habías estudiado en Matemáticas II.

Traza la gráfica



ACTIVIDAD 13.
Determina las coordenadas del vértice y de los extremos del lado recto, de la parábola: $y = 4x^2 - 6x$. Traza la gráfica.

1) Al ver que la ecuación de la parábola no tiene término independiente, afirmamos que pasa por el origen. Explica por qué

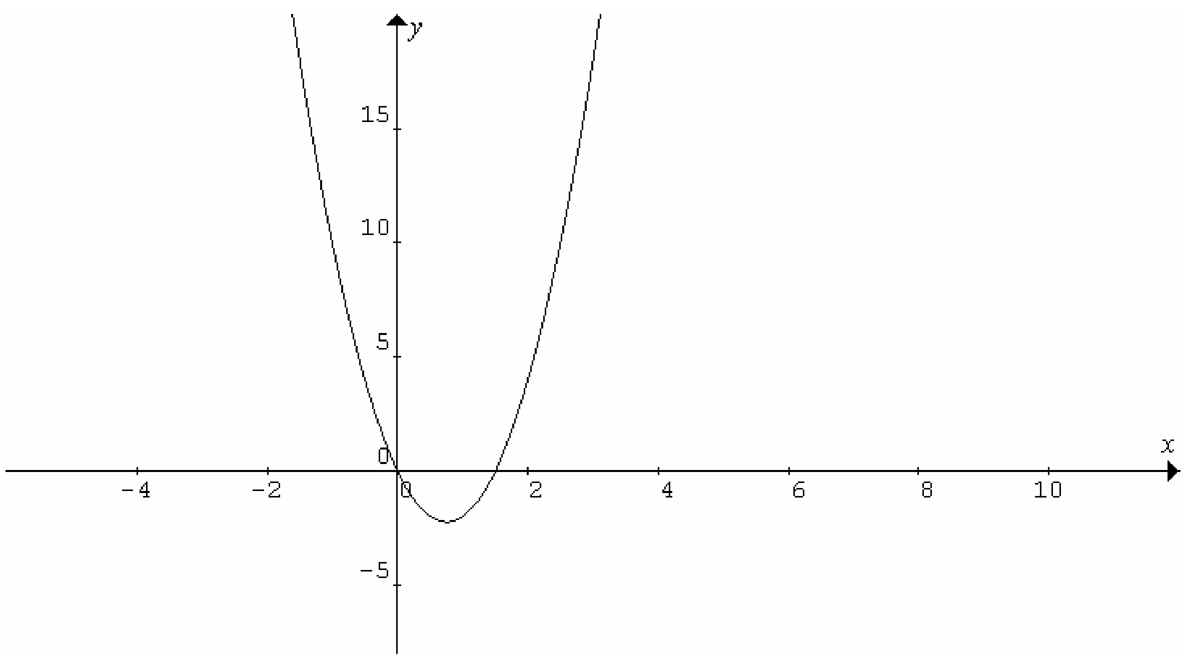
2) Para calcular el vértice y los extremos del lado recto requerimos escribir la ecuación de la parábola en la forma: $(x-h)^2 = 4p(y-k)$. En todos los ejercicios que has resuelto anteriormente el coeficiente de la *x* es *1*, pero ahora es *4*, ¿Qué hacemos para tener la ecuación equivalente donde el coeficiente sea *1*?

3) Realiza las operaciones necesarias para escribir la ecuación en su forma estándar (cartesiana), recuerda que las operaciones que hagas a la izquierda de la igualdad, también debes hacerlas a la derecha.

La ecuación te debió quedar como: $(x-\frac{3}{4})^2 = \frac{1}{4}(y+\frac{9}{4})$. De no ser así revisa el procedimiento con tus compañeros.

4) Da las coordenadas del vértice y de los extremos del lado recto.

5) Coloca los puntos en la gráfica siguiente.



EJERCICIOS 2.

En cada uno de los siguientes ejercicios, encuentra la ecuación general de la parábola. Traza la gráfica

1) $(y-3)^2 = 2(x+1)$ 2) $(x+1)^2 = -6y$ 3) $x^2 = \frac{3}{4}(y-\frac{1}{2})$ 4) $(y-\frac{3}{2})^2 = x+9$

En cada uno de los siguientes ejercicios, encuentra los elementos de la parábola (vértice, foco, ecuación de la directriz, ecuación del eje de simetría). Traza la gráfica.

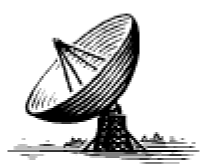
5) $y^2 - 6y + x + 9 = 0$ 6) $x^2 + x - y + 1 = 0$

7) $5y^2 + 10y + 4x = 0$ 8) $y - x^2 = 0$

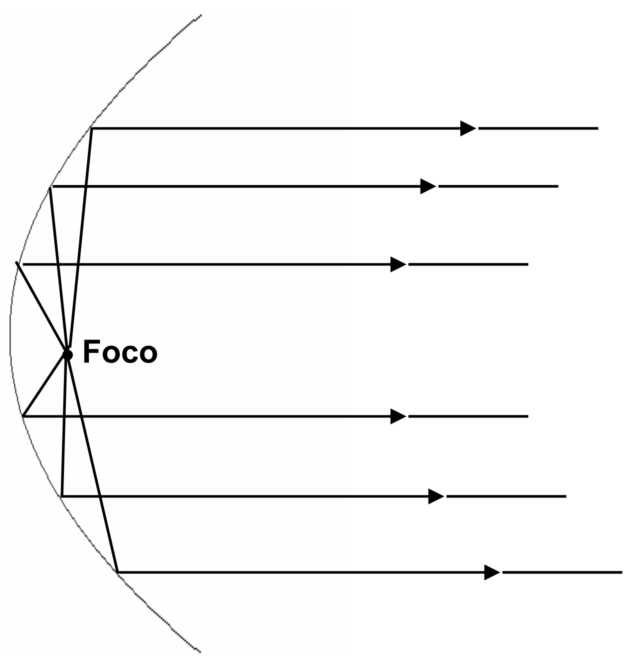
SECCIÓN 3. ALGUNAS APLICACIONES.

Pretendemos que en esta sección apliques tus conocimientos sobre parábola a diversos problemas y valores la importancia de lo aprendido.

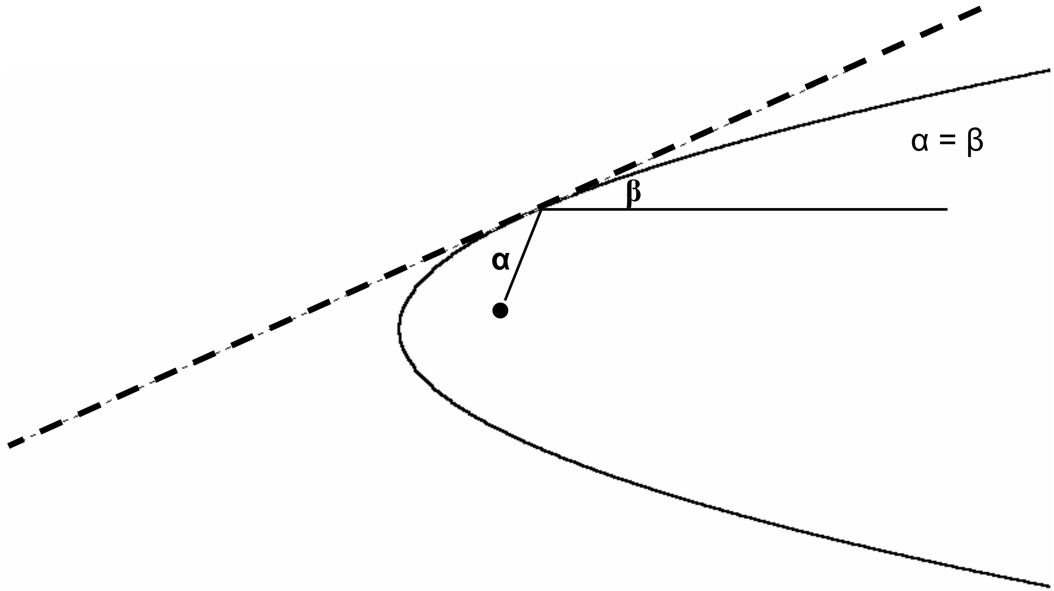
¿Por qué la parábola tiene esta propiedad? también ya comentamos que, al girar una parábola sobre su propio eje, se genera una superficie llamada *paraboloide de revolución*, Si a un paraboloide (que puede estar representado por un faro, una antena, un espejo, etc.)



se le hace un corte transversal, este queda representado por la siguiente parábola:

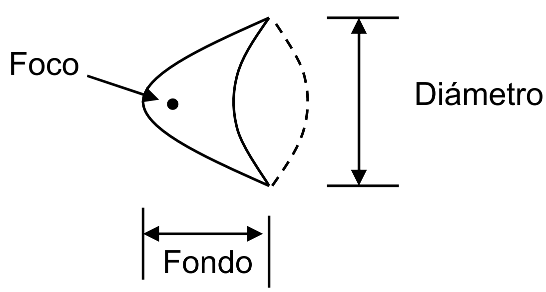


Por la forma de la parábola, si hubiese rayos de luz que salieran del foco *rebotarían* en la curva, se reflejarían a lo largo de rectas paralelas al eje de simetría y esto debido a que el ángulo entre una tangente a la parábola y un rayo que proviene del foco es igual al ángulo entre esta tangente y una recta paralela al eje de la parábola.

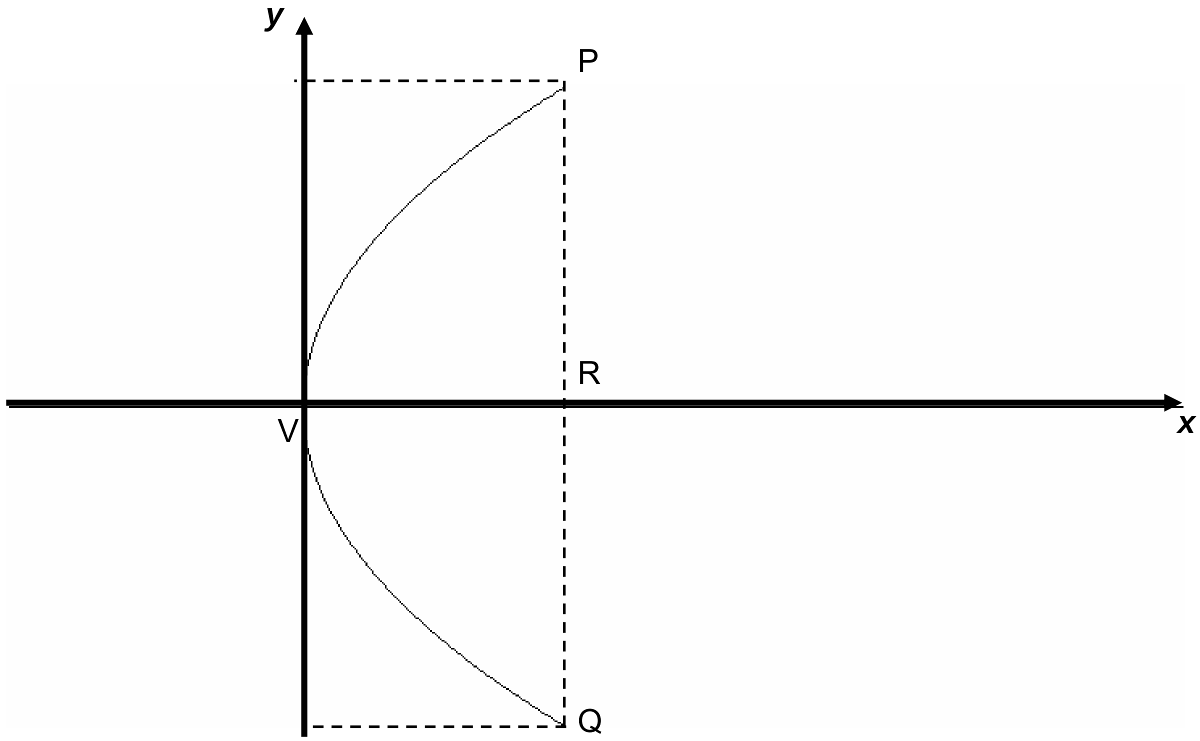


Lo anterior es conocido como la propiedad de **reflexión de la parábola**, la cual no demostraremos pero la usaremos para resolver algunos problemas.

ACTIVIDAD 14.
El faro de un automóvil tiene un diámetro de 18 cm. y 9 cm. de fondo, ¿dónde debe colocarse el foco? (Si observas un faro de estos, verás que es un paraboloide)



Una manera de resolver el problema es haciendo un corte transversal al faro y colocando la parábola resultante sobre un plano cartesiano, después para facilitar las operaciones y la visualización de los elementos, colocamos el vértice en el origen de coordenadas. La parábola se puede colocar en forma horizontal o vertical. En este caso coloquémosla en forma horizontal.



1) PQ es el diámetro del faro y VR es la longitud del fondo. Da las coordenadas de P, Q y R

2) Seguramente ya has observado que la ecuación de la parábola es de la forma $y^2 = 4px$; explica por qué

3) Para resolver el problema requerimos las coordenadas del foco. Con la información que tienes ¿Puedes dar dichas coordenadas?, ¿Necesitas algo más? ¿Qué es?

4) ¿Qué significa que P y Q sean los extremos del diámetro del faro del automóvil?

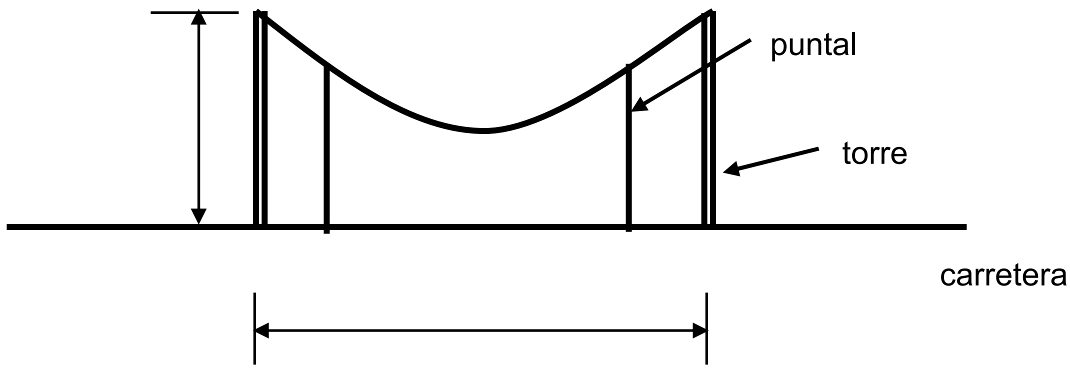
5) ¿Cómo puedes utilizar P o Q para determinar la distancia focal?

6) ¿Por qué podemos afirmar que: *el foco debe colocarse a 2.25 cm. del vértice*?

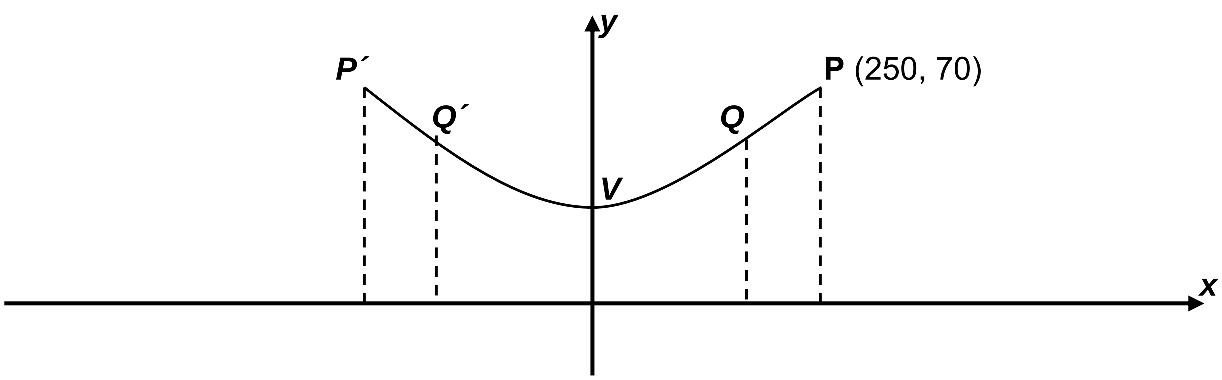
ACTIVIDAD 15.

El cable de un puente colgante cuelga en forma de parábola cuando el peso está uniformemente distribuido horizontalmente. La distancia entre las dos torres es de 500 metros, los puntos de soporte del cable de las dos torres están a 70 metros sobre la carretera, y el punto más bajo del cable está a 20 metros sobre la carretera. Encontrar la longitud de los puntales que se encuentran situados a 30 metros del pie de una torre.

1. Coloca en el dibujo los datos del problema



Coloquemos el dibujo en el plano cartesiano, ubicando la carretera sobre el eje de las abscisas y el eje de la parábola en el de las ordenadas:



Da las coordenadas de P´ y V

2. Da las abscisas de Q y Q´. ¿Conocemos las ordenadas de Q y Q´?

3. ¿Qué debemos determinar para poder resolver el problema? ¿Necesitas la ecuación de la parábola? ¿por qué?
4. De la ecuación $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ ¿Conoces ***h***, ***k***, y ***p***? ¿qué necesitas?

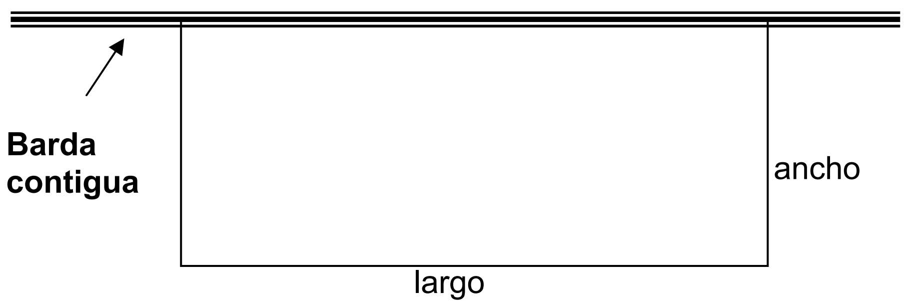
5. Usa P (o P´) para determinar 4p ¿Para qué necesitas ese valor?

6. Da la ecuación de la parábola:

Para encontrar la longitud de los puntales sustituimos la abscisa de Q (o de Q´), hazlo y seguramente podrás responder que la longitud de los puntales es de 58. 72 metros.

ACTIVIDAD 16.
Se desea construir un gallinero rectangular, cercando tres de sus costados, el cuarto lado no se cercará ya que se va aprovechar la barda del terreno contiguo. Para cercar el gallinero se cuenta con 80 metros alambrado. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del terreno para que tenga máxima área?

El terreno quedaría como se muestra en la figura.



1) ¿Varía el área del terreno si varían las medidas de sus lados, conservando el mismo perímetro?

2) Da valores al largo y ancho del gallinero manteniendo el perímetro de 80 metros, calcula el área y completa la siguiente tabla:

Ancho	2	4	8		15		35	m
Largo	76	72		60		30		m
Área	152		512		250		350	m^2

3) Con las diferentes medidas, para el ancho y largo ¿cambió o se mantuvo constante el área del terreno?

*Si llamamos **A** al área del gallinero y **x** a su ancho,*

4) ¿Cómo queda expresado el largo del terreno, en función del ancho?

5) Expresa el área del terreno **(*A*)**, en función del ancho **(x).**

6) ¿Qué restricciones tiene **x**?

7) Considerando valores de ***x*** y encuentra algunos valores de ***A***

x	0							40
A								

8) Con los datos de la tabla, construye una gráfica, colocando en el eje de las abscisas los valores de ***x*** y en el de las ordenadas los valores de ***A.***

9) Al expresar el área en función de x, lo que tienes es la ecuación de una parábola vertical, cóncava hacia abajo. ¿Qué representa el vértice de la parábola?

10) Desarrolla la ecuación: A = x(80 – 2x) y exprésala de la forma:

$(x - h)^2 = 4p(y - k)$, ¿qué representa "y" ?

11) Da las coordenadas del vértice de la parábola.

12) ¿Qué significa para el problema que *h = 20* y *k = 800*?

13) Da las dimensiones del gallinero para que el área sea máxima. También da el área máxima.

EJERCICIOS 3.

1) La antena de un radio telescopio en forma de paraboloide tiene un diámetro de 8 metros. Si la profundidad de la antena es de 0.5 metros ¿a qué distancia del vértice debe colocarse el receptor?

2) Un arco parabólico tiene una altura de 7 metros y un ancho de 12 metros de la base. ¿A qué altura sobre la base tiene un ancho de 6 metros?

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

Encuentra la ecuación general de la parábola que tiene las características dadas. En cada caso traza la gráfica.

1. Con foco en el origen y ecuación de la directriz es $y = \frac{7}{5}$
2. Vértice en (–2, –1), pasa por el punto (3, 6) y eje vertical.
3. Vértice V(–1, 3), lado recto de longitud 16 y abre hacia la izquierda.

4. Tiene eje horizontal y pasa a través de los puntos A(4,7), B(1, 5) y C (4, –1)

De cada una de las siguientes ecuaciones, determina las coordenadas del vértice, el foco y la ecuación de la directriz.

5. $3y^2 - 2x = 0$
6. $2x^2 + 4x - y + 1 = 0$
7. $y = x^2 - 2x + 1$
8. $x = y^2 - y$

Plantea y resuelve cada uno de los siguientes problemas.

9. Una antena parabólica tiene un diámetro de 80 cm. Si tiene una profundidad de 20 cm. ¿a qué altura debe colocar el receptor? Resuelve el problema usando una parábola vertical con vértice en el origen.

10. Un diseñador de automóviles desea diseñar un faro que tenga 16 cm. de diámetro, la bombilla que se va a utilizar en él tiene un filamento a 2 cm. del cuello ¿qué profundidad debe tener el faro para que el filamento quede en el foco del faro, si el cuello de la bombilla se coloca a la altura del vértice del faro?

BIBLIOGRAFÍA.

1) Hernández Velasco Fernando F. **Geometría Analítica para Principiantes**. CCHO.
2) Hernández Velasco Francisco J. et al. Matemáticas III **Álgebra y Geometría Analítica**. CCHO.
3) De Oteyza de Oteyza Elena et al. **Geometría Analítica y Trigonometría**. Prentice Hall.
4) .Leithold, Louis. **El Cálculo con Geometría Analítica**. Harla.