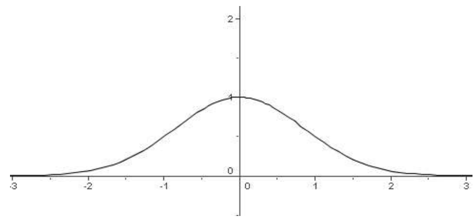
Universidad Nacional Autónoma de México

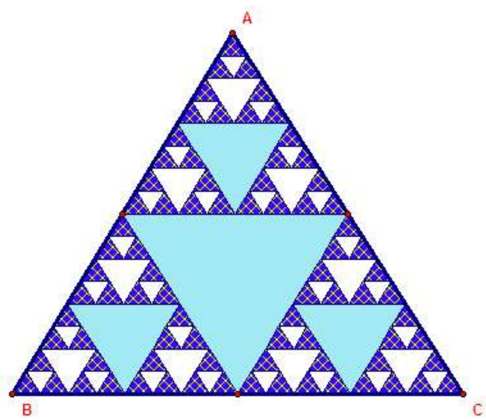
Colegio de Ciencias y Humanidades

Plantel Oriente



Paquete Didáctico para

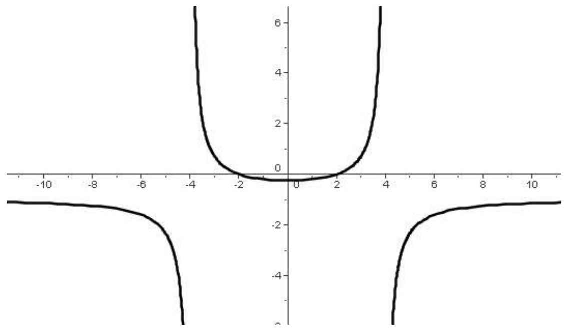
Matemáticas IV



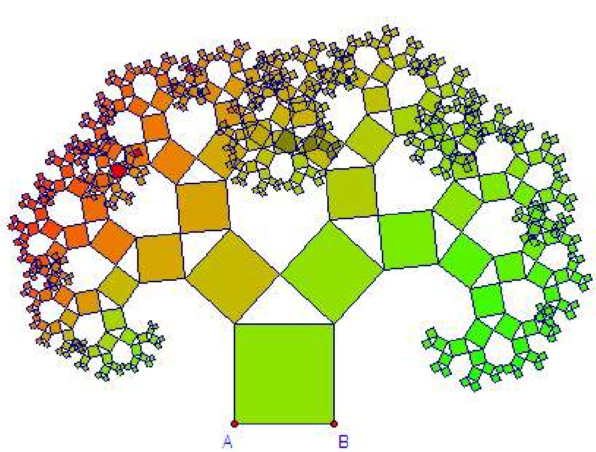
Elaborado por los profesores:

Martín Mejía Espinosa (Coordinador)	**Titular A**
María del Carmen Olivera Martínez	**Asignatura A**
María Tomasa Luz Tlahuel Tlahuel	**Asignatura A**
Juan German Valenzuela Ramos	**Asignatura A**
Verónica Monjaraz Campuzano	**Asignatura A**

Agosto, 2006



Índice:



Presentación

El colegio de Ciencias y Humanidades tiene como principios fundamentales:

- Aprender a Ser
- Aprender a Hacer
- Aprender a Aprender

Lo que nos lleva a que nuestros alumnos desarrollen características especiales como son el trabajo en equipo, la búsqueda de información, el poder de discernir entre la gran cantidad de información para utilizar la que sea adecuada a sus problemas, utilizar sus conocimientos previos para acceder a los nuevos conocimientos que se presentan en los programas y en su vida cotidiana, de manera que para desarrollar estas características las actividades que realicen los alumnos en las aulas deben ser significativas.

Para que esto sea posible se deben presentar a los alumnos actividades de aprendizaje guiadas que les permitan de manera individual o por equipo inferir las características de los nuevos conceptos tomando como base sus conocimientos previos, y que además permita que cada alumno sea capaz de avanzar a su ritmo ayudado por el maestro o su compañeros para lograr los nuevos aprendizajes de las diversas materias, en particular los de matemáticas.

Los materiales permiten que los alumnos a través de las actividades propuestas analicen los datos obtenidos para inferir las reglas que rigen los fenómenos estudiados y que posteriormente puedan aplicar estos a otros problemas relacionados con el mismo fenómeno dentro de los características propuestas por el programa de estudios.

Además los materiales permiten al docente desarrollar una clase taller que permita a los alumnos trabajar en equipo y socializar sus conocimientos, y que los alumnos vean en el a un compañero de clase con más experiencia que les guiará en sus dudas y recapitulará las investigaciones hechas por el grupo, para establecer los conceptos y proponer alternativas en la solución de los problemas,
Con estos materiales pretendemos que los alumnos se involucren en su formación de acuerdo a las siguientes características.

- Asuma que el aprendizaje es una construcción personal, y que él debe atribuir algún significado a la información que se le propone, en función de sus conocimientos y experiencia anterior.
- Que el profesor es un mediador, que debe ajustar su ayuda de acuerdo a las necesidades de cada alumno, en la medida que las condiciones del grupo lo permitan.
- De manera que el alumno sea cada vez más independiente en la adquisición de los conocimientos y sea capaz de analizar los procesos que realiza y logre con el tiempo encontrar sus errores y corregirlos.

Las fichas elaboradas corresponden a uno o varios de los tipos siguientes, la información sobre el tipo de fichas que se pueden elaborar fue tomada del paquete didáctico para matemáticas I, elaborado por el rubro 2.

- **Ficha de Lectura.** El alumno debe leer este tipo de ficha con atención para comprender y anotar las nociones básicas o introductorias de un tema, su propósito es la motivación del alumno o como una referencia de consulta, permite la recuperación de los antecedentes de la unidad.
- **Ficha de exploración.** Las tareas presentadas al estudiante son de bajo grado de complejidad por medio de problemas para que el alumno realice conjeturas o redescubra propiedades de algún objeto matemático. Este tipo de fichas requieren de respuestas escritas, se recomienda su trabajo por equipos de tres o cuatro alumnos, y al final hacer una discusión de los resultados obtenidos, y finalmente el maestro debe recapitular los resultados.
- **Ficha de sistematización.** Estas fichas deben ser trabajadas por equipos de tres o cuatro alumnos para obtener la solución de problemas por un proceso guiado que le permita la sistematización de procedimientos y estrategias usuales en la solución de los mismos, se requieren respuestas escritas.
- **Ficha de consolidación.** Aquí se pretende observar los avances logrados por los estudiantes respecto algún aprendizaje, y lograr la retroalimentación de los aprendizajes adquiridos, las respuestas deben ser escritas.
- **Ficha de aplicación.** Se pretende que los alumnos transfieran los aprendizajes adquiridos, al resolver problemas con un contexto diferente al que permitió la adquisición de los aprendizajes, las respuestas deben ser escritas.

Esperamos pues que estos materiales le permitan al docente implementar una clase taller donde los alumnos se sientan motivados en el aprendizaje de la matemática que se les presenta, y utilice esta experiencia de analizar y resolver problemas en otros ámbitos de vida, por último agradeceremos las sugerencias que resulten de haber utilizado este material, para su corrección continua de manera que cada vez permita mejor los logros planteados en los principios del Colegio.

Atentamente

Los autores

Introducción:

El presente paquete didáctico cubre las cuatro unidades del programa del cuarto semestre de Matemáticas, Álgebra y Geometría Analítica.

1. Funciones Polinomiales.

De acuerdo al programa de estudios en esta unidad se inicia el estudio de las funciones polinomiales a través de problemas cuya solución nos lleva a modelos de funciones polinomiales que permita a los alumnos obtener las principales características de las mismas, como son variable independiente, variable dependiente, regla de correspondencia que las relaciona, dominio, rango, elaboración de tablas de valores y la gráfica de la función.
Relacionado con lo anterior se estudia la forma de obtener las raíces de las funciones, lo que permite resolver problemas cuyo modelo matemático es una función polinomial.

2. Funciones Racionales y con Radicales.

Tomando como base el estudio de las funciones polinomiales se introducen las funciones racionales y se obtienen las principales características de las mismas, la unidad inicia con el estudio de algunos problemas cuyo modelo matemático son funciones racionales lo que permite pasar posteriormente a estudiar otras características de las funciones.
Después se estudian las funciones con radicales para lo cual se utiliza los conceptos de círculo y elipse de matemáticas III, que nos proporcionan funciones con radicales al considerar la mitad superior o inferior de las mismas, las actividades que se plantean permiten que los alumnos estén realizando constantemente actividades e intercambiando las ideas que resultan de las mismas.

3. Funciones Trigonométricas.

En esta unidad se recuerdan algunos conceptos tratados en matemáticas II y se generalizan para obtener las funciones y sus características como son el periodo, la amplitud, la frecuencia y el desfasamiento, para posteriormente emplear estos conceptos en el estudio de un fenómeno físico, también se trata el concepto de las raíces de las funciones trigonométricas, los conceptos de máximo y mínimo, el domino, el rango y las gráficas de las funciones, se resalta el estudio del circulo unitario para obtener el valor de las funciones para cualquier ángulo dado.

4. Funciones Exponenciales y Logarítmicas.

Con respecto a las funciones exponenciales se trata de motivar su introducción a través del estudio de problemas que tienen comportamiento exponencial, una vez establecidas sus características se pasa al problema del dominio, rango, asíntotas y gráfica de las funciones, las cuales luego se utilizan para introducir las funciones logarítmicas como funciones inversas de las funciones logarítmicas, se finaliza aplicando estas funciones a varios problemas que aparecen en física, química y contabilidad.

El tratamiento dado debe permitir a los alumnos que van a estudiar cálculo entender mejor los conceptos de la materia.

Cómo utilizar el material del Paquete Didáctico.

Los materiales que contiene el paquete didáctico son elementos auxiliares para el proceso de enseñanza – aprendizaje de la materia de Matemáticas IV en su modalidad de clase – taller de acuerdo a los programas del Colegio, ya que permite que los alumnos trabajen sobre los materiales que selecciones el profesor de manera individual o en equipo, si el trabajo se realiza en equipo en el desarrollo del trabajo los conceptos se discuten por los alumnos y tienen un primer acercamiento a los mismos si el temor de quedar mal ante el grupo, a la vez que el profesor puede ir viendo el trabajo desarrollado por los equipos y en caso de encontrar errores dar sugerencias que les permita reorientar su trabajo.

Para que el trabajo realizado por los alumnos sea adecuado deben de tomar nota de las preguntas y respuestas obtenidas por su equipo de trabajo, así como también deben tomar nota de las dudas que surgieron y cómo las resolvieron o en su defecto que fue lo que intentaron, para que al hacer la discusión todo el grupo y el profesor se aclaren los puntos que no se entendieron correctamente.

Si hay que resolver problemas en el desarrollo de la secuencia es conveniente ver las diferentes soluciones propuestas por los alumnos, ya que esto les permite ver que puede haber más de una solución para un problema dado, también es conveniente que el profesor exponga la solución encontrada por él para que los alumnos la comparen con las suyas.

Como esta forma de trabajo consume demasiado tiempo, el profesor debe elegir previamente los materiales que se verán en clase y de acuerdo a las condiciones del grupo asignar el tiempo que considere adecuado para su realización, pero debe ser flexible ya que algunos alumnos se sienten agredidos cuando se les indica que deben de parar su trabajo e integrarse a la discusión del grupo.

También se puede dejar de tarea la exploración de alguna de las secuencias e iniciar la clase haciendo preguntas sobre la misma de manera que esto permite la participación de la mayor parte de los alumnos, el profesor debe tener el cuidado de darle oportunidad a los alumnos que intervienen poco en el desarrollo del curso.

Evaluación del curso.

La evaluación de los alumnos debe contemplar todas las actividades que realiza para el logro de los aprendizajes por lo cual hacemos las siguientes sugerencias.

- Considerando que las actividades propuestas en el paquete didáctico permiten el desarrollo del curso con clases – taller, se deben formar grupos de alumnos que realicen las tareas propuestas y cuando se realice la discusión de los resultados por todo el grupo, el profesor puede dar participaciones individuales a los alumnos que contesten adecuadamente las preguntas planteadas en las secuencias, o que resuelvan alguno de los problemas propuestos, así como a los alumnos que detecten algún error en el proceso.

- Si el profesor deja de tarea alguna de las secuencias puede dar participaciones a los alumnos que den las respuestas adecuadas.
  Al finalizar la unidad a criterio del profesor puede dejar exentos del examen a los alumnos que tengan mayor número de participaciones.

A los alumnos que no queden exentos les puede dar de medio a un punto por cada participación de manera que esto le ayuda con la calificación del examen.

- A los reprobados se les debe dar una segunda vuelta de cada examen parcial.

- Las tareas que estén correctas deben de ser consideradas como una participación.

- Considerando el uso de la tecnología al finalizar cada unidad cada alumno debe resolver un problema con el mayor de los detalles que pueda en un documento de Power Point de Tamaño Póster de 60 x 80 que luego puede ser usado para montar una exposición al finalizar el semestre.

- Al final de cada unidad sugerimos dos exámenes que el alumno puede utilizar para autoevaluarse.

Propósitos del Curso:

Al finalizar el cuarto curso de Matemáticas, a través de las diversas actividades al desarrollo de habilidades y a la comprensión de conceptos y procedimientos, el alumno:.

- Incrementa su capacidad de resolución de problemas, al conocer y manejar nuevas herramientas para modelar y analizar situaciones y fenómenos que se puedan representar con las funciones estudiadas en este curso.
- Enriquece y utiliza de manera integrada, diversos conceptos y procedimientos de la Aritmética. El Álgebra, la Trigonometría, las Geometrías Euclidiana y Analítica, en el estudio y modelación del tipo de funciones trabajadas en este curso.
- Modela diversas situaciones que involucran variación funcional y a través del análisis del comportamiento de la función respectiva, obtiene información y conclusiones sobre la situación modelada.
- Consolida su manejo del plano cartesiano, a través de la graficación de funciones, y el dominio de la vinculación entre los parámetros y las características de la gráfica asociada.
- Obtiene conclusiones sobre el comportamiento de las funciones estudiadas y es capaz de distinguir el tipo de variación que las caracteriza.
- Comprende y maneja el concepto de función, así como el sentido e interrelación de subconceptos, características y procedimientos asociados a él.

Propósitos de cada una de las unidades del programa.

Están al inicio de cada unidad, así como los aprendizajes que permiten alcanzar los propósitos de cada unidad.

Bibliografía:

Al final de cada unidad esta indicada la bibliografía que consideramos adecuada para el alumno y sugerimos otra para el profesor que le permita tener ejercicios adicionales.

Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica
Louis Leithold
Oxford University Press
Primera Edición, febrero de 2005

Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica
Earl W. Swokowski
International Thomson Editores
Novena Edición, 1998

Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica
Walter Fleming
Prentice Hall Hispanoamericana
Tercera Edición

Álgebra
Ronald E. Larson
Robert P. Hostetler
Publicación CULTURAL
Primera Edición 1996

ÁLGEBRA trigonometría y geometría analítica
Stanley A. Smith
Addison Wesley
Primera Edición 1998

Matemáticas IV	Funciones Polinomiales
Unidad I	

Secuencia Didáctica de Lectura:

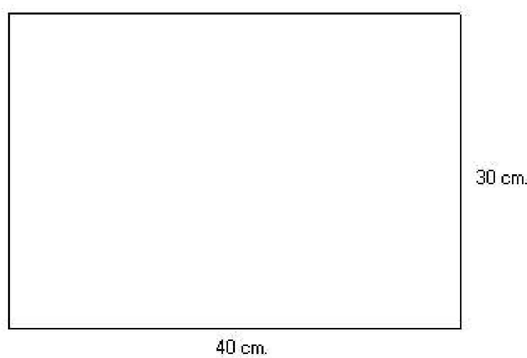
Aprendizaje: Explora en una situación o problema que da lugar a una función polinomial, las condiciones, relaciones o comportamientos, que le permitan obtener información y sean útiles para establecer la representación algebraica.

Inicio de la secuencia:

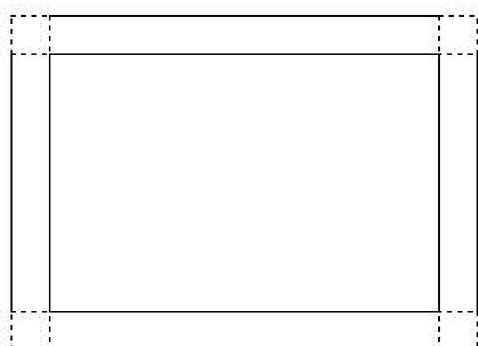
Ejemplo 1. Construcción de una caja: Se va a fabricar una caja sin tapa a partir de una lámina de cartón de 30 x 40 centímetros, cortando cuadrados idénticos de área x^2 en cada esquina y doblando hacia arriba los lados.

Solución del ejemplo:

Empezamos haciendo un dibujo que represente la lámina de cartón.



Ahora hacemos un dibujo mostrando los cuadrados de igual área que serán cortados en cada esquina.



Para determinar las dimensiones de los lados de la caja se considera lo siguiente.

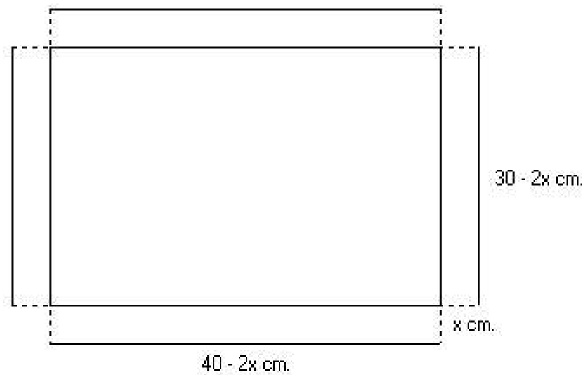
Como se deben cortar cuadrados idénticos en cada esquina de área x^2, la longitud del lado de cada uno de los cuadrados mide x centímetros, y como se cortan x unidades de cada lado de la lámina las medidas de cada una de las partes que se tienen que doblar son las siguientes:

Para el lado de 40 centímetros, después de hacer los cortes queda, 40 – 2x.

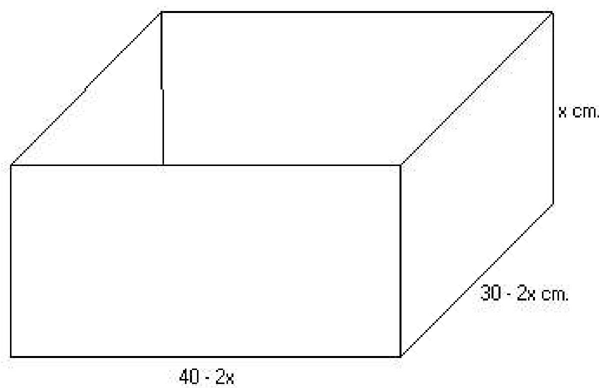
Para el lado de 30 centímetros, después de hacer los cortes tenemos, 30 – 2x.

Y la altura de la caja será de x centímetros.

Las medidas finales se pueden observar en la siguiente imagen.



La caja ya armada se muestra en la siguiente imagen.



El volumen de la caja esta dado por la siguiente fórmula:

Volumen = (largo) (ancho) (altura)

Y de acuerdo a la figura tenemos que:

Largo = $40 - 2x$

Ancho = $30 - 2x$

Altura = x

Sustituyendo en la fórmula del volumen:

Volumen = $(40 - 2x)(30 - 2x)(x)$

Hemos obtenido que el volumen de la caja esta en función de los valores que tome x, pero dichos valores están limitados por las dimensiones de la lámina.

Los valores de x deben ser positivos, pero no deben ser mayores que 15, ¿explica el por qué de estas condiciones?

La función del volumen de la caja se puede escribir como se muestra.

$V(x) = (40 - 2x)(30 - 2x)(x)$

Haciendo la multiplicación de polinomios indicada, la función del volumen es la siguiente.

$V(x) = 4x^3 - 140x^2 + 1200x$

Vamos a calcular el volumen de la caja para diversos valores de x, por ejemplo para x = 0.5 el volumen de la caja es.

$V(0.5) = 4(0.5)^3 – 140(0.5)^2 + 1200(0.5)$

$V(0.5) = 4(0.125) – 140(0.25) + 600$

$V(0.5) = 0.5 – 35 + 600$

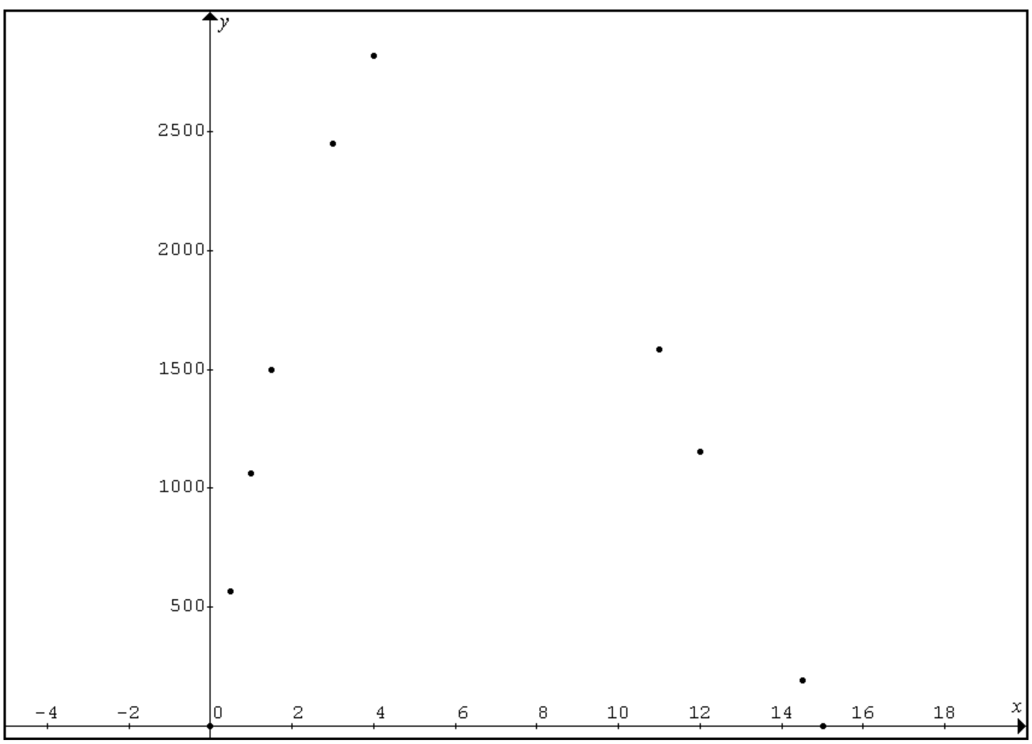
$V(0.5) = 565.5$

Con el procedimiento anterior se calcularan los volúmenes para los valores indicados en la siguiente tabla.

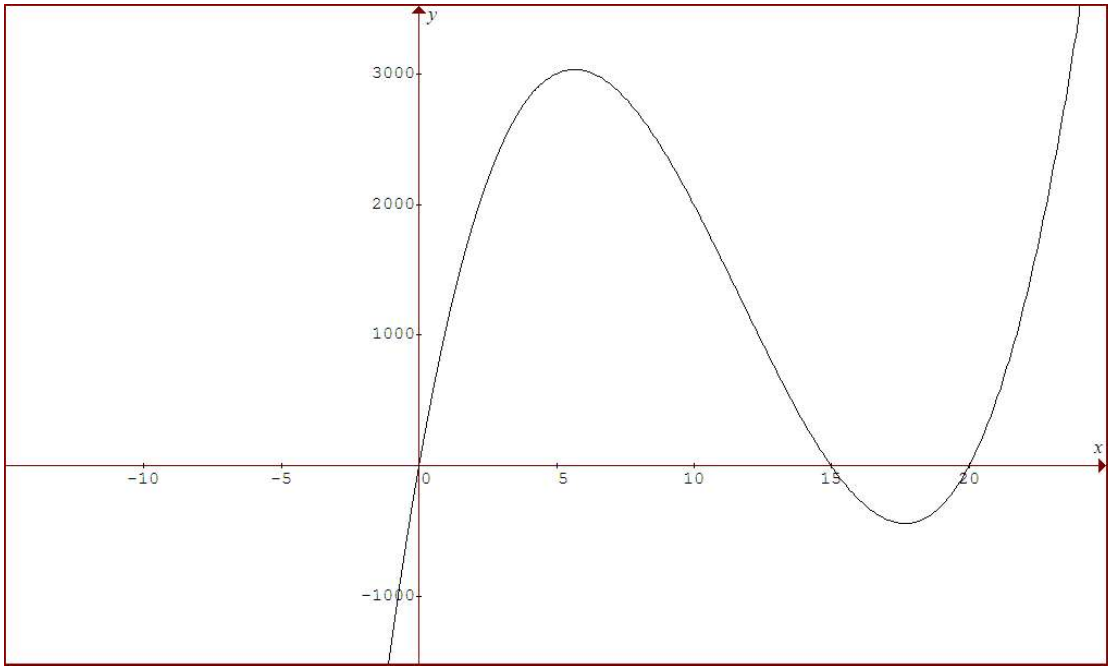
x	V(x)
1	1064
1.5	1498.5
3	2448
4	2816
6	3024
9	2376
11	1584
12	1152
14.5	193.535

Para comprobar que los valores de x deben ser mayores que cero, pero menores que 15, encuentra el valor de V(16), ________

La siguiente imagen muestra los puntos en el plano de coordenadas.



La imagen anterior solo muestra un bosquejo de la gráfica de la función $V(x) = 4x^3 – 140x^2 + 1200x$, para ver una gráfica más completa de la función podemos utilizar el programa “Graphmatica” y la gráfica correspondiente es la siguiente.



Ahora compara la parte de la gráfica comprendida entre el 0 y el 15, con la gráfica anterior, e indica si son parecidas o no, y cuál es la razón de tu respuesta.

Ejemplo 2. Construcción de una caja (continuación). En el problema anterior se construyo el modelo de la función de volumen de la caja tomando en cuenta los cuadrados de área x^2 que se cortan en cada esquina de la lámina, ahora consideremos además la condición de que el volumen de la caja sea igual a:

$V(x) = 3000 \text{ cm}^3$

Tomando en cuenta la ecuación polinomial obtenida para el volumen de la caja.

$V(x) = 4x^3 – 140x^2 + 1200x$

Igualando las ecuaciones obtenemos.

$4x^3 – 140x^2 + 1200x = 3000$

Si igualamos a cero la ecuación anterior, tenemos.

$4x^3 – 140x^2 + 1200x – 3000 = 0$

Los valores de x buscados son las raíces de la siguiente función polinomial.

$f(x) = 4x^3 – 140x^2 + 1200x – 3000$

Recuerda que una raíz x de una función, es aquel valor que hace que se cumpla la siguiente condición.

$f(x) = 0$

En este caso la variable x que representa la longitud de los cuadrados que se cortan en las esquinas de la lamina para formar la caja abierta puede tomar los siguientes valores.

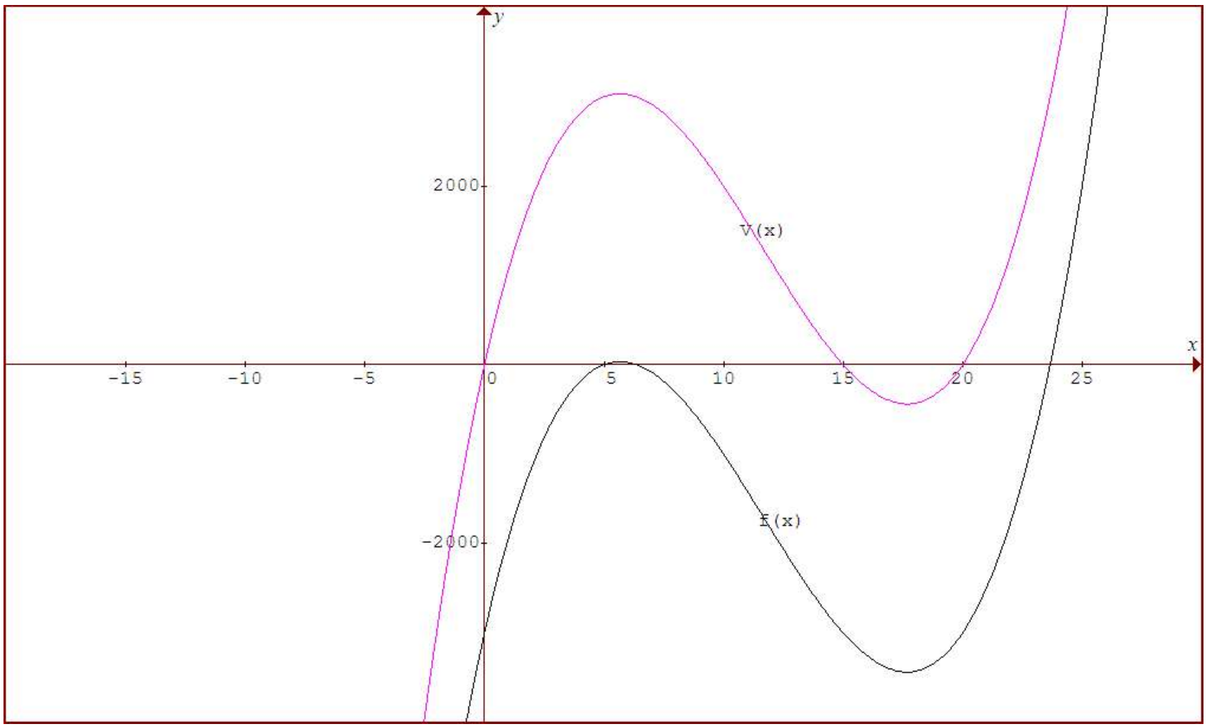
Debe ser mayor que cero y además menor que 15, el conjunto de números reales que cumple estas condiciones se llama intervalo abierto (ya que los extremos no pertenecen al intervalo) y se representa como se muestra a continuación.

(0, 15)

La siguiente imagen generada por el programa de Graphmatica nos muestra la gráfica de las dos funciones asociadas a este problema que son.

$V(x) = 4x^3 – 140x^2 + 1200x$

$f(x) = 4x^3 – 140x^2 + 1200x – 3000$



Qué relación encuentras entre las dos gráficas?

En estos ejemplos como lo indica el aprendizaje lo importante es encontrar las variables del problema, la relación que hay entre ellas y la expresión algebraica que representa al problema, así como las condiciones del problema que determinan el rango de variación de las variables. Pero si queremos encontrar la solución del problema, hay que determinar las raíces de la función polinomial f(x), para lo cual se puede usar el programa Graphmatica, después de hacer la gráfica de la función, se usa la opción **Cálculo** de la barra de herramientas. Y luego la instrucción **Encontrar puntos críticos**.

Después de lo cual aparece un cuadro de diálogo indicando los siguientes valores.

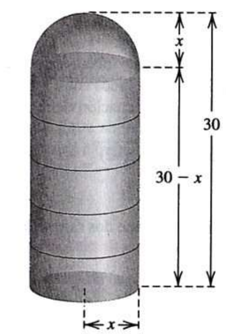
Cero 5.0 Cero 6.3397, Cero 23.6603

¿Cuáles de ellas, de acuerdo a las condiciones del problema, lo satisfacen?

Las siguientes secuencias didácticas te permitirán explorar y aplicar los aprendizajes indicados en esta secuencia didáctica.

Secuencia didáctica de exploración: Determinación del radio de un silo. Un silo tiene forma de cilindro circular recto con una semiesfera unida en la parte superior. Si la altura total de la estructura es de 30 metros, encontrar el radio del cilindro para que el volumen total sea 1008 π m^3.

Inicio de la secuencia:



1. Escribe la fórmula para encontrar el volumen de un cilindro circular recto, indicando el significado de cada una las variables.

____

2. Si x es el radio del cilindro del problema, escribe la fórmula para encontrar su volumen:

____

3. Efectúa la multiplicación de polinomios indicada en la formula para encontrar el volumen del cilindro y escribe el resultado.

____

4. Escribe la fórmula para encontrar el volumen de una esfera:

____

5. ¿Cuál será la fórmula para encontrar la mitad del volumen de una esfera?

____

6. Escribe la fórmula para encontrar el volumen de la semiesfera de la parte superior del silo:

____

7. ¿Cómo son entre sí el radio del cilindro y el radio de la semiesfera en la parte superior del cilindro?

____

8. Tomando en cuenta los resultados de los puntos 3 y 6 para encontrar el volumen del cilindro y la semiesfera que forman el silo, escribe la fórmula que da el volumen total del silo:

____

9. Como puedes observar la fórmula del punto 8, nos indica que el volumen del silo esta en función de los valores que demos al radio, así que escribe la función que expresa esta dependencia:

____

10. ¿Indica cuántas variables aparecen en este problema, cuáles son, qué variable puede tomar valores de manera independiente, y qué variable toma valores de manera dependiente?

____

11. De acuerdo a las condiciones físicas del problema que valores puede tomar la variable independiente.

____

12. Completa la siguiente tabla de valores, para los valores x del radio del silo indicados.

x (radio)	V(x) volumen
2	
4	
5	
5.5	
7	
10	

13. Ya que el volumen de la caja debe ser 1008 Π m^3, escribe la ecuación que resulta de igualar este valor con la función de volumen del silo.

____

14. Iguala a cero la ecuación que resulta en el punto 13.

____

15. Simplifica la ecuación que resulta en el punto 14, de manera que los coeficientes de la ecuación sean números enteros.

____

16. Escribe la función correspondiente asociada a la ecuación que resulta en el punto 15.

____

16. Observa los valores del volumen, obtenidos en la tabla anterior, y trata de encontrar el valor de x que satisface las condiciones del problema.

____

Secuencia didáctica de exploración: Construcción de una caja. Se va a construir una caja sin tapa a partir de un cartón rectangular de 40 x 50 centímetros, cortando cuadrados idénticos de área x^2 cm^2, en cada esquina y doblando hacia arriba los lados.

Inicio de la secuencia:

1. Realiza un dibujo que represente el cartón rectangular escribiendo las dimensiones en cada lado.

2. Realiza un dibujo indicando los cuadrados de área x^2, que deberán ser recortados en cada esquina del cartón, y escribe las dimensiones de cada elemento después de recortar los cuadrados.

3. Realiza el dibujo de la caja e indica las dimensiones de cada uno de sus elementos.

4. Escribe la fórmula para calcular el volumen de la caja formada en función de la longitud del lado x de cada uno de cuadrados cortados en cada una de las esquinas.

5. ¿Cuántas variables aparecen en este problema?

6. ¿Indica cuales son, y cuál de ellas depende de la otra?

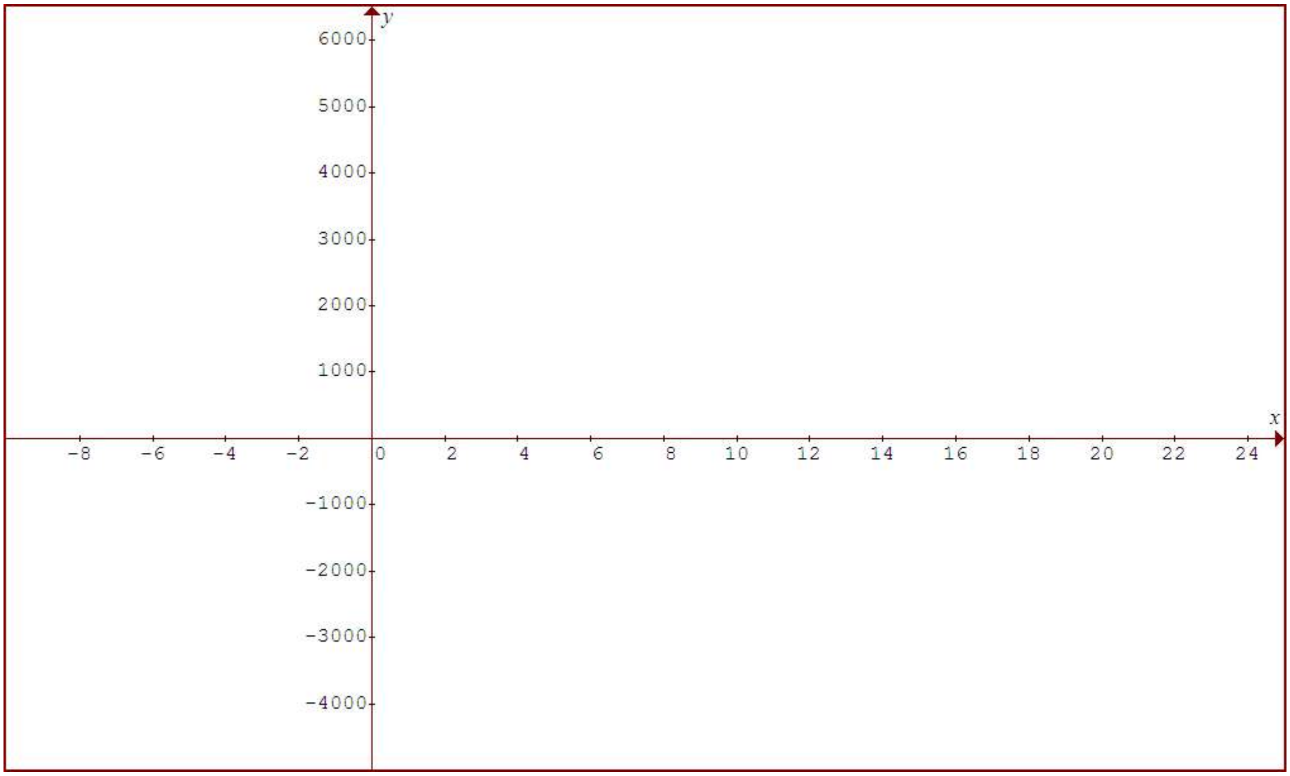
7. Escribe la fórmula del volumen de la caja como una función polinomial

8. De acuerdo a las condiciones del problema indica el intervalo de valores que puede tomar la longitud x del lado de cada uno de los cuadrados recortados al cartón.

9. Completa la siguiente tabla, calculando los volúmenes correspondientes para los valores de x señalados, en caso de que alguno de los valores indicados sea incorrecto, escribe la razón.

x lado del cuadrado	V(x) volumen
-2	
0.5	
1	
3	
6	
10	
11	
13	
15	
18	
19.5	
21	

10. Localiza los puntos de la tabla en el siguiente sistema de coordenadas.



11. Une los puntos graficados con una línea suave.

12. Para que valor de x, el volumen de la caja será 4000 cm^3.

Ejercicios.

a. Se tiene un alambre de 60 cm. de largo, para construir un rectángulo cuya área sea igual a 200 cm^2.

i. Qué propiedades tiene el rectángulo.

ii. Escribe el perímetro del rectángulo en función de las longitudes de los lados del rectángulo.

iii. Escribe el área del rectángulo en función de las longitudes de los lados del rectángulo.

iv. Encuentra la función polinomial que exprese el área del rectángulo en función de la longitud de uno de los lados del rectángulo, (**observación** hay que sustituir el despeje de una de las ecuaciones en la otra).

v. Indica el intervalo de valores que puede tomar la longitud del segmento del punto iv.

vi. Realiza una tabla con al menos 10 valores para lo longitud del segmento.

vii. Localiza los puntos en un sistema de coordenadas.

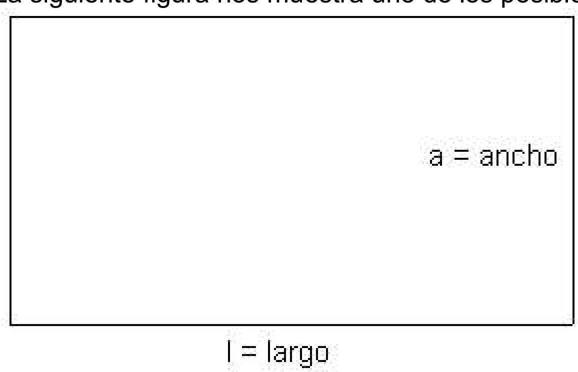
vii. Utiliza la gráfica realizada para encontrar de forma aproximada la solución del problema.

Secuencia Didáctica de Lectura:
Aprendizaje: Modelará situaciones que den lugar a una función polinomial.

Inicio de la secuencia:
En esta práctica se presentarán dos problemas de muestra, anota los puntos que consideres importantes, ya que pueden ser de utilidad al resolver los problemas propuestos.

Problema 1. Se tiene un alambre cuya longitud es de 64 centímetros, con el cual se quiere formar un rectángulo cuya área sea la mayor de todas las áreas posibles. Encuentra la expresión de la función del área del rectángulo en términos del ancho o del largo.

La siguiente figura nos muestra uno de los posibles rectángulos que pueden ser formados con el alambre.

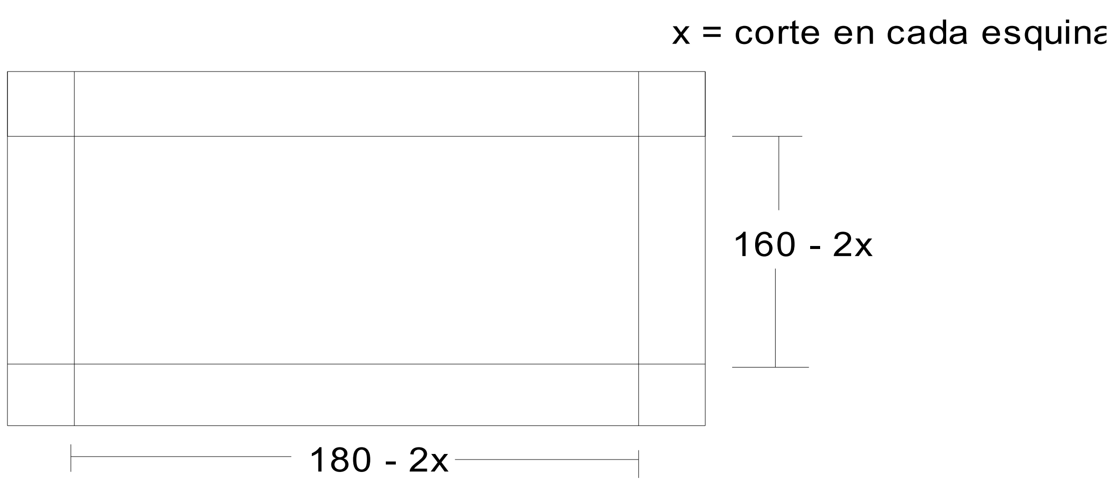


El perímetro del rectángulo es igual a:
$64 = 2a + 2l$
El área del rectángulo es igual a:
$A = a \bullet l$
Para despejar *l* de la fórmula del perímetro tenemos:
$2l = 64 – 2a$
Dividiendo toda la ecuación por 2, queda.
$l = 32 - a$
Sustituyendo la variable l despejada en la fórmula del área se tiene:
$A(a) = a (32 – a)$

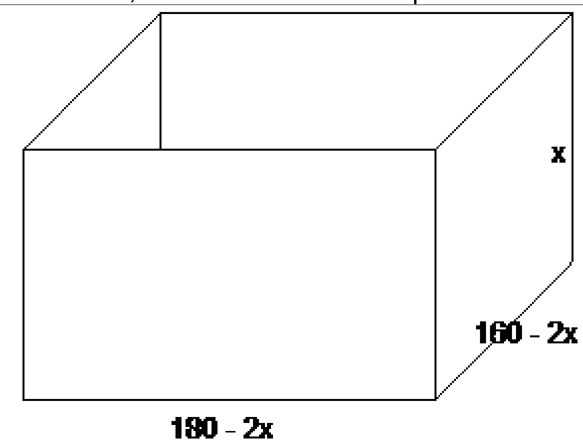
Efectuando la multiplicación indicada se tiene.
$A(a) = -a^2 + 32a$
Que es una función cuadrática en la variable a (el ancho del rectángulo).

Problema 2. Se tiene una lámina rectangular cuyas dimensiones son 160 x 180 centímetros, y se quiere formar una caja rectangular de manera que su volumen sea de 240 cm^3., ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la caja?, Encuentra la función del volumen de la caja formada en función del corte cuadrado que se debe efectuar en cada esquina.

En la siguiente figura vemos la lámina con los cortes que se deben realizar en cada una de las esquinas para poder formar la caja pedida.



La caja que se puede formar se muestra en la siguiente figura, con las dimensiones que corresponden a cada arista de acuerdo al corte de x cm., en cada una de las esquinas de la lámina.



El volumen de la caja esta dado por la siguiente fórmula:

Volumen = (largo)(ancho)(altura)

En este caso tenemos los siguientes valores.

largo = 180 – 2x
ancho = 160 – 2x
altura = x

De manera que el volumen de la caja en función del corte x realizado en cada lado de la lámina es:

$V(x) = x(160 - 2x)(180 - 2x)$

La fórmula anterior representa la función del volumen de la caja, en función del corte realizado en cada esquina, realiza las operaciones indicadas para obtener la función del volumen en forma de polinomio y escribe el resultado a continuación.

$V(X) =$ ____________________

Si damos a x los valores mostrados en la tabla, que representan el corte realizado, realiza los cálculos correspondientes para completar la siguiente tabla.

x	V(x)
1	
1.5	
2	
2.5	
3	
3.5	

Para encontrar las dimensiones de la caja de manera que $V(x) = 240\ dm^3$, se tiene que establecer la ecuación:

$240 = x(160 - 2x)(180 - 2x)$

Si efectúas la multiplicación de la derecha, la expresión resultante es: ________________________

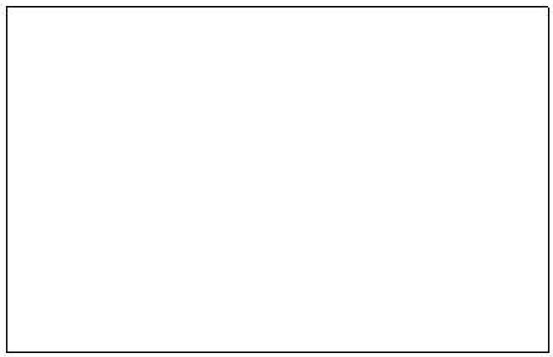
Al igualar dicha expresión a cero, se obtiene la ecuación: ___________________________ que se conoce con el nombre de: __________________________.

Tomando como modelo los problemas anteriores encuentra la función que modele el problema y permita la resolución de cada uno de los siguientes problemas, recuerda que ayuda mucho en la resolución de un problema la construcción de un diagrama del mismo cuando esto sea posible.

Secuencia didáctica de exploración: Construcción de una cerca.
Un hombre desea cercar un terreno rectangular con 160 metros de cerca, qué dimensiones debe tener la cerca si el hombre quiere cubrir un área de 1200 m^2.

Inicio de la secuencia:

1. El siguiente dibujo muestra el terreno rectangular que se quiere cercar, asigna a los lados del rectángulo los nombres de “x”, y “a”.



2. Escribe la fórmula para encontrar el perímetro del rectángulo del problema de acuerdo al punto 1, y los datos del problema.

3. Escribe la función de dos variables para encontrar el área del rectángulo del problema de acuerdo al punto 1

4. de la fórmula del punto 2, despeja la variable “a”, y escribe el resultado a continuación.

5. Sustituye la variable “a” despejada en el punto 4, en la función encontrada en el punto 3, y escríbela.

6. La función del punto 5 es la función para encontrar el área del rectángulo, exprésala como una función polinomial.

7. ¿Cuántas variables aparecen en este problema, cuáles son independientes, cuáles son dependientes?.

8. Indica los extremos dentro de los cuales puede tomar valores la variable x.

9. Encuentra el área del rectángulo para 10 valores de x dentro de los valores permitidos.

10. Localiza los puntos calculados en un sistema de coordenadas.

11. Utiliza la gráfica para obtener una solución aproximada.

Ejercicios.

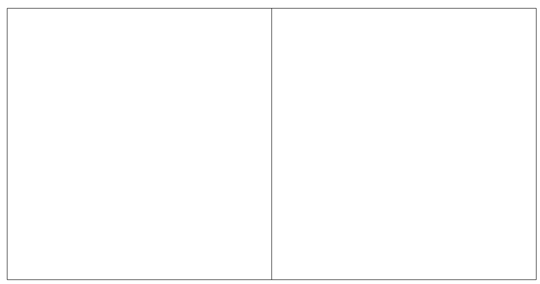
En cada caso encuentra las variables del problema, la relación que hay entre ellas, determina la función polinomial que modela el problema, encuentra los valores extremos dentro de los cuales puede tomar valores la variable independiente de la función polinomial del problema, realiza una tabla con 10 valores de la variable independiente, localízalos en un sistema de coordenadas y encuentra un solución aproximada.

1. Encuentra dos números reales positivos cuya suma sea 40 y cuyo producto sea máximo.

2. Encuentra dos números positivos cuya suma sea 24 y cuyo producto sea 135.

3. Un agricultor tiene 200 metros de malla de alambre para hacer dos corrales rectangulares adyacentes. ¿Qué dimensiones producirán un área máxima de los corrales?

   La siguiente figura nos muestra los corrales.



Secuencia Didáctica de Lectura:
Aprendizaje: Dado un problema construirá el modelo y comprenderá la noción de función sujeta a la condición de expresar una cantidad en términos de otra.

Esta es una secuencia de lectura y debes anotar los puntos que consideres más importantes en el desarrollo ya que te pueden ser útiles en el resto del curso.

Inicio de la secuencia:

Ejemplo 1. Halla dos números reales cuya suma sea 120, de manera que el producto de los números sea el mayor posible. **Encuentra la expresión que relaciona el producto de los números en función de uno de ellos.**

Solución:
Representando con a y b los dos números desconocidos, podemos establecer las siguientes ecuaciones.

La suma de los números es de 120; $a + b = 120$

El producto de los números es; $p = a \bullet b$

De la primera ecuación se despeja la variable a, quedando. $a = 120 - b$

Sustituyendo este despeje en la segunda ecuación se obtiene. $p = (120 - b)b$.

Como puedes observar el valor del producto p, depende de los valores que tome la variable b, por lo que decimos que p esta en función del valor de b, lo cual se escribe como p(b).

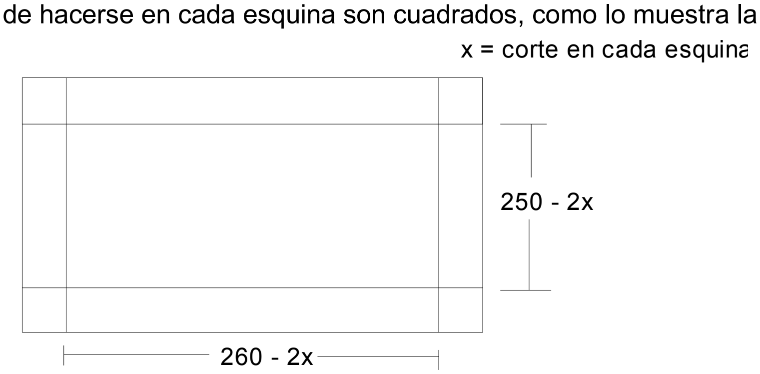
De manera que la expresión del producto se puede escribir como, $p(b) = (120 - b)b$

Si efectúas el producto la expresión es, p(b) = ___________

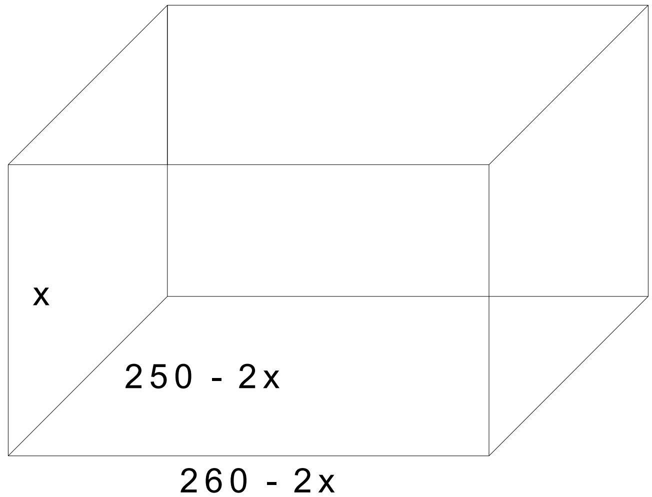
Encuentra algunos de los valores del producto en función de los valores que toma el número b:

b	p(b)
58	
59	
60	
61	
62	

Ejemplo 2. Se tiene una lámina cuyas dimensiones son de 250 x 260 centímetros, con la cual se quiere formar una caja cuyo volumen sea de 504 cm^3., ¿de qué tamaño deben ser los cuadrados que se corten en las esquinas de la lámina para formar la caja?, **encuentra la expresión que relaciona el volumen de la caja en función del corte realizado en cada esquina.**
Solución:
Los cortes que deben de hacerse en cada esquina son cuadrados, como lo muestra la siguiente imagen.



La caja que se puede formar una vez realizados los cortes se muestra en la siguiente imagen.



El volumen de la caja formada esta dado por:
Volumen = largo x ancho x altura

De manera que la expresión que resulta es:
$V(x) = x(260 – 2x)(250 – 2x)$

Donde:
Largo = 260 – 2x
Ancho = 250 – 2x
Altura = x

Desarrollando el producto indicado en la parte derecha de la expresión, tenemos que el volumen es: V(x) = ____________________. **Que es la función que modela el problema.**

Encuentra el volumen correspondiente de la caja para los siguientes valores de x.

x	V(x)
2	
3	
4	
5	

Como se puede observar el volumen de la caja depende del valor de x que se corte.

Como se quiere encontrar el valor de x, para el cual V(x) = 504 cm^3. Se puede establecer la siguiente ecuación:

$504 = x(260 – 2x)(250 – 2x)$

Al hacer la multiplicación indicada, escribe la expresión que resulta: ______________________

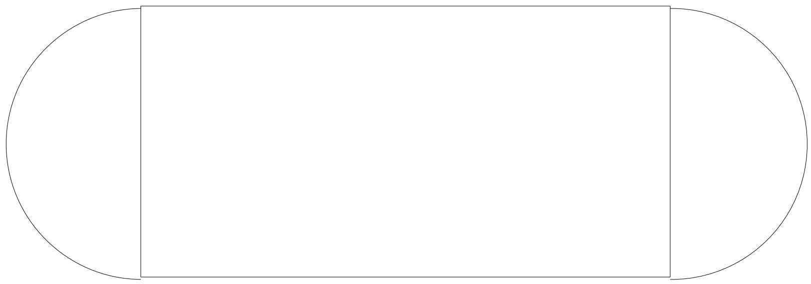
Si igualas a cero la expresión anterior el resultado que obtienes es: ______________________

¿Qué nombre recibe la expresión que se obtiene en el paso anterior?: ____________________

Ejercicios: En cada problema encuentra la función que modela el problema e indica cuál es la variable independiente, cuál es la variable dependiente y obtén algunos valores de esta relación funcional por medio de una tabla de valores.

1. Encuentra dos números cuya diferencia sea 8, y cuyo producto sea mínimo.

2. Un gimnasio techado está formado por una región rectangular con un semicírculo en cada extremo como se muestra en la figura, sí el perímetro del gimnasio debe ser una pista para carreras de 200 metros de longitud. ¿Qué dimensiones darán como resultado un área máxima del rectángulo?



3. ¿Cuáles son las dimensiones de un rectángulo cuyo perímetro es de 58 metros, si queremos que su área sea de 208 m^2?

Si el largo del rectángulo se representa por la letra :	a
Y el ancho se representa por la letra :	b
Escribe la expresión que representa el perímetro, utilizando el dato de que el perímetro del rectángulo es igual a 58 metros.	
Escribe la fórmula para encontrar el área del rectángulo	
Al despejar b de la expresión del perímetro, obtenemos	
Sustituyendo el despeje de b, en la expresión del área se obtiene que el área depende de la variable a, escribe la expresión que resulta.	
Efectúa la multiplicación indicada y escribe la función como una función polinomial.	

4. Se quiere construir una caja de base rectangular con una lámina de 100 x 160 centímetros, si queremos que el volumen de la caja sea de 120 cm^3, ¿cuáles son las dimensiones de la caja.?

Secuencia Didáctica de Consolidación:

Aprendizajes:

Explora en una situación o problema que da lugar a una función polinomial, las condiciones, relacionas o comportamientos, que le permitan obtener información y sean útiles para establecer la representación algebraica.

Modelará situaciones que den lugar a una función polinomial.

Dado un problema construirá el modelo y comprenderá la noción de función sujeta a la condición de expresar una cantidad en términos de otra.

En esta secuencia se tratarán los aprendizajes de las secuencias anteriores para precisar los conceptos que se han tratado hasta el momento.

Inicio de la secuencia:

Ejemplo 1. Arco parabólico: Un arco tiene la forma de la parábola $y = 4 – x^2$. Se escoge un punto (x, y) de la parábola y se coloca un rectángulo bajo el arco.

- Expresa el área A del rectángulo en términos de x.
- Si x = 1, encuentra la base, la altura y el área del rectángulo.
- Encuentra un segundo rectángulo que tenga la misma área del rectángulo anterior.

En primer lugar encontraremos la gráfica de la parábola del problema, para lo cual la ecuación $y = 4 – x^2$ de la parábola la llevamos a su forma estándar.

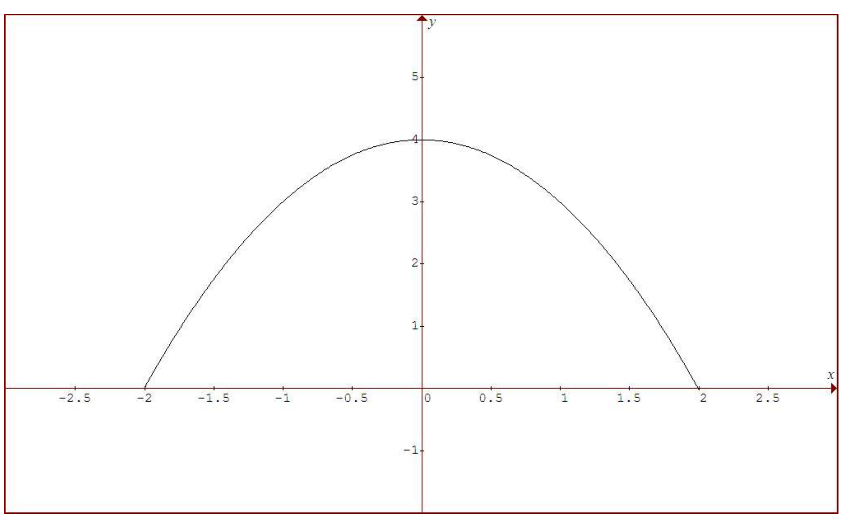
$y – 4 = -x^2$

Como recordaras de la **unidad 5. La parábola y su ecuación cartesiana de Matemáticas III**, el vértice de la parábola es V(0, 4)

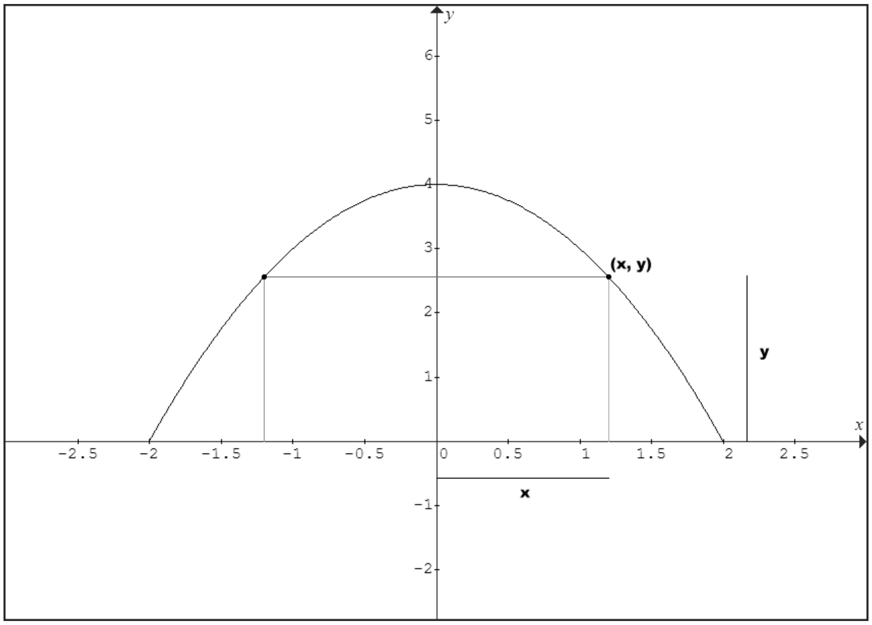
El eje focal de la parábola es la recta vertical x = 4.

Sus puntos de intersección con el eje de las abscisas se encuentran haciendo y = 0 en la ecuación estándar de la parábola, lo que nos da la ecuación. $0 = 4 – x^2$

Las raíces de esta ecuación son $x_1 = 2$, $x_2 = -2$. Y la gráfica de la parábola es la siguiente.



Para el punto (x, y) sobre la parábola, el rectángulo que se puede formar se muestra a continuación.



En este problema tenemos tres variables que son; **x** la mitad de la base del rectángulo, **y** la altura del rectángulo y A el área del rectángulo inscrito en la gráfica de la parábola.

De manera que el área del rectángulo esta dada por la fórmula.

A = Base x Altura.

Donde.

Base = 2x

Altura = y

Y el área del rectángulo esta en función de dos variables, y esta dada por.

A = 2xy

Pero como (x, y) es un punto de la gráfica de la parábola, satisface su ecuación y tenemos.

$y = 4 - x^2$.

Sustituyendo y en la fórmula para el área, ahora se tiene que el área del rectángulo esta en función de una sola variable que es x, y la fórmula de la función es la siguiente.

$A(x) = 2x(4 - x^2)$

Ya que hemos establecido el área como función del valor de x, daremos la definición de una función, de manera que están involucradas dos variables x, y de manera que una de ellas y, toma valores en función de de la otra x, de la siguiente manera.

Definición de una función: Se establece una función **f** de un conjunto **D** a un conjunto **R**, si tenemos una regla de correspondencia que a cada elemento “**x**” del conjunto **D** le asigna uno y solo un elemento “**y**” del conjunto **R**.

Al conjunto D se la llama Dominio de la función f, y al conjunto R se le llama Rango de la función f.

Al efectuar la multiplicación de polinomios indicada en la función del área del rectángulo se obtiene.

$A(x) = 8x - 2x^3$

La función anterior es una función polinomial que modela el problema dado, es de grado 3 en la variable x, a continuación daremos la definición de una función polinomial para evitar futuras confusiones.

Definición de una función polinomial.

Una función f es una función polinomial si f(x) es un polinomio; esto es, si

$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_1x + a_0$

donde los coeficientes $a_0, a_1, \ldots a_n$ son números reales y los exponentes son enteros no negativos.

Como ya hemos establecido el área del rectángulo en función de la variable x, pasemos al siguiente punto del problema.

Para x = 1, el valor de la base es.

Base = 2x = 2(1) = 2 unidades

Altura = $4 - x^2 = 4 - 1^2 = 4 - 1 = 3$ unidades

Y el área del rectángulo es igual a

Área = Base x Altura = 2 x 3 = 6 unidades.

El último punto del problema es encontrar otro rectángulo inscrito de igual área que el anterior, que es equivalente a.

$A(x) = 6$

El valor de la función área del rectángulo inscrito en la gráfica de la parábola debe ser 6, que nos permite establecer la siguiente ecuación.

$6 = 8x - 2x^3$

Para resolver el problema se deben encontrar los valores de x que satisfagan la ecuación anterior, de manera que igualando a cero la ecuación anterior.

$0 = - 2x^3 + 8x - 6$

Como recordaras de los cursos anteriores únicamente podemos resolver ecuaciones lineales, de segundo grado y algunos casos especiales de ecuaciones de cuarto grado, la solución de ecuaciones polinomiales como la anterior se trata en las siguientes secuencias didácticas.

Ejercicios.

1. Se quiere construir un puente para cubrir una barranca de 20 metros de ancho, si queremos que la máxima altura del puente en los extremos de la barranca sea de 10 metros, de manera que su forma sea parabólica, encuentra la ecuación polinomial que permita la construcción del puente, así como la cantidad de cable para los tirantes que lo sostienen si se colocan cada 2 metros a partir del centro del puente colocado a la mitad de la barranca.

Secuencia Didáctica de Lectura y Consolidación:

Aprendizaje: Examinará ecuaciones algebraicas con dos variables o su gráfica para decidir si se trata de una función o no.

Esta es una secuencia de lectura y consolidación, por lo que debes anotar los puntos que consideres más importantes en el desarrollo ya que se aplicaran al final de la secuencia y otras partes del curso.

Inicio de la secuencia:

Recordemos la definición de función que nos será de utilidad posteriormente:

Una función es una regla de correspondencia que a cada elemento x de un conjunto A(el dominio de la función) le asigna uno y solo un elemento y de un conjunto B(el rango de la función).

Ejemplo 1. Decir si la expresión $2x - 3y + 8 = 0$, determina o no una función.

Primero se despeja y de la expresión.

$$2x - 3y + 8 = 0.$$
$$2x + 8 = 3y$$
$$\frac{2x+8}{3} = y$$

Se obtiene la siguiente expresión para y, $y = \frac{2x+8}{3}$ . . . . (1)

Que corresponde a una función lineal, ¿Por qué? ____

Calcula los valores de y, que corresponden a cada valor de x en la siguiente tabla.

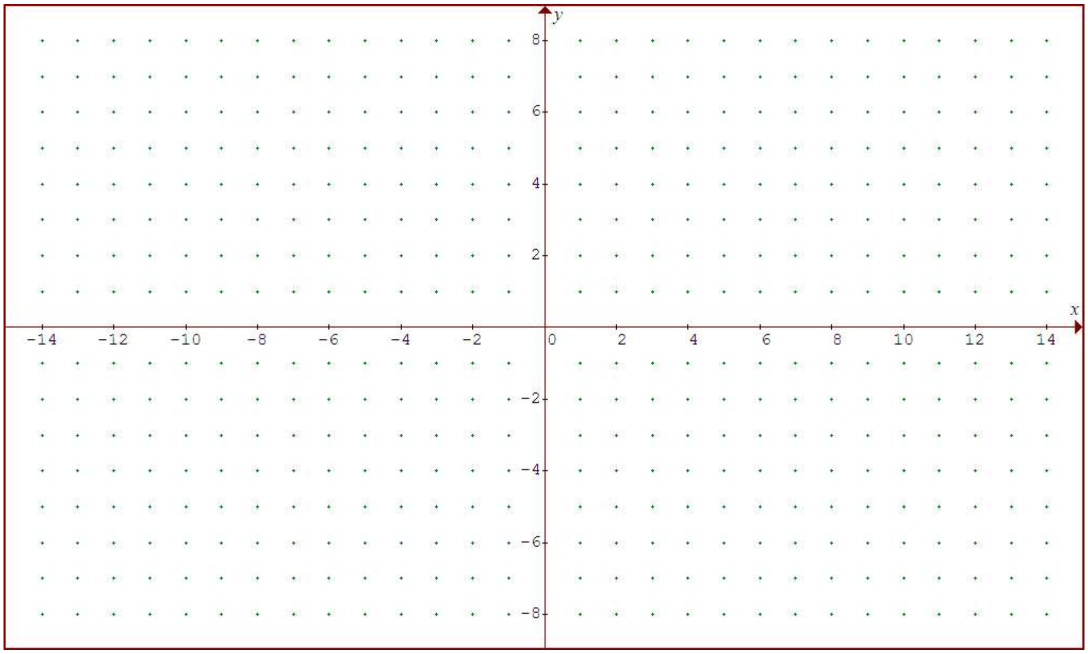
x	y
-10	
-9	
-7	
-5	
-3	
0	
2	
5	
7	
8	
12	

Ahora calcula el valor de x, que corresponde a y = 10: x = ____________

Si y = 0, escribe la ecuación que resulta, _________________________________

Al despejar x de la ecuación resultante, el valor obtenido es, _______________________

En el siguiente sistema de coordenadas dibuja la gráfica correspondiente, considerando los valores de la tabla.



Simplificando la expresión de la función dada en (1) se tiene:

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$$

donde $m = \frac{2}{3}$ es la pendiente de la recta, y $b = \frac{8}{3}$ es la ordenada a el origen, de manera que toda función lineal se puede escribir de la forma $y = mx + b$.

Ahora traza cualquier recta vertical que corte la gráfica, ¿en cuántos puntos corta la gráfica la recta trazada? : ____

¿Qué relación tiene el resultado anterior con la definición de una función? : _________________
____

Ejemplo 2. Si ahora consideramos la expresión $y = 2x^2 - 8x + 6$, determinar si la expresión corresponde a una función o no.

Como recordaras la expresión corresponde a una parábola vertical, o sea una función cuadrática, y para realizar su gráfica pasaremos de la ecuación en su forma general a su forma estándar completando un trinomio cuadrado perfecto.

$y = 2x^2 - 8x + 6$,	restando 6 en ambos miembros de la igualdad.
$y - 6 = 2x^2 - 8x$,	se factoriza el 2 en el miembro derecho.
$y - 6 = 2(x^2 - 4x)$,	se completa el trinomio cuadrado perfecto dentro del paréntesis.
$y - 6 = 2(x^2 - 4x + 4) - 8$,	sumando 8 en ambos miembros de la igualdad.
$y - 6 + 8 = 2(x^2 - 4x + 4)$,	el trinomio cuadrado perfecto se escribe como un binomio al cuadrado.
$y + 2 = 2(x - 2)^2$.	

El vértice de esta parábola es V(2, -2) y la ecuación de su eje focal o eje de simetría es $x = 2$, así que para hacer su gráfica tabulamos del lado derecho de $x = 2$, luego los puntos graficados se reflejan en el eje focal.

Completa la siguiente tabla de valores:

x	y
3	
4	
5	

Tomando en cuenta la simetría de la parábola con respecto al eje focal completa la siguiente tabla.

x	y
-1	
0	
1	

Ahora con todos los valores obtenido realiza la gráfica de la función en el siguiente sistema de coordenadas.

Traza varias rectas verticales que corten la gráfica de la función cuadrática. ¿En cuántos puntos corta cada recta a la gráfica? : ____

Consideras, ¿qué toda expresión de la forma $y = ax^2 + bx + c$, corresponde a una función? :
____

De lo observado con respecto a los cortes que cada recta vertical hace con las gráficas de las dos funciones anteriores, ¿qué puedes decir sobre el numero de puntos que corta una recta vertical a la gráfica de una función? : ____

Ejemplo 3. Ahora consideremos la expresión $x^2 + y^2 = 9$, determinar si la expresión corresponde a una función o no.
Si se despeja y de la expresión.

$x^2 + y^2 = 9$, restando x^2 a ambos miembros de la ecuación.

$y^2 = 9 - x^2$, Sacando raíz cuadrada a ambos miembros de la ecuación.

$y = \pm\sqrt{9 - x^2}$ es la expresión resultante.

Como sabes todo número positivo tiene dos raíces una positiva y una negativa, aplicando esto a la expresión anterior tenemos.

$y_1 = +\sqrt{9 - x^2}$ la raíz positiva

$y_2 = -\sqrt{9 - x^2}$ la raíz negativa.

De manera que para x = 1, se tiene:

$y_1 = +\sqrt{9 - (1)^2} = \sqrt{9 - 1} = \sqrt{8}$, la raíz positiva.

$y_2 = -\sqrt{9 - (1)^2} = -\sqrt{9 - 1} = -\sqrt{8}$, la raíz negativa.

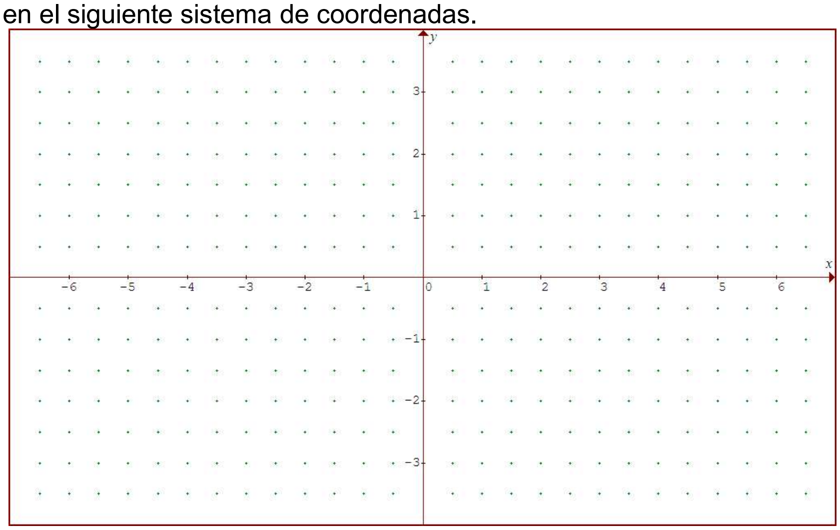
De manera que para x = 1, tenemos dos puntos para la gráfica de la expresión, y son los siguientes puntos, A(1, $\sqrt{8}$), y B(1, - $\sqrt{8}$).

Con estas consideraciones, indica si la expresión corresponde a una función o no : ___________, ahora explica tu respuesta: ____

Completa la siguiente tabla de valores.

x	y_1	Y_2
-3		
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		

Grafica los puntos en el siguiente sistema de coordenadas.



Si unes los puntos por una línea curva continua se obtiene: _______________________________

Ahora traza varias rectas verticales que corten la gráfica, ¿en cuántos puntos cortan las rectas verticales a la gráfica? : ____

Esto coincide con los ejemplos anteriores: _______

De lo observado, la expresión corresponde a una función o no : ____________________________

Ejemplo 4. La ecuación $x^2 + y^2 = 16$, corresponde a una función.

Al despejar y de la ecuación, se tiene.

$$x^2 + y^2 = 16$$
$$y^2 = 16 - x^2$$

Sacando raíz cuadrada a ambos miembros de la ecuación.

$$y = \pm\sqrt{16 - x^2}$$

De manera que para x = 1, tenemos.

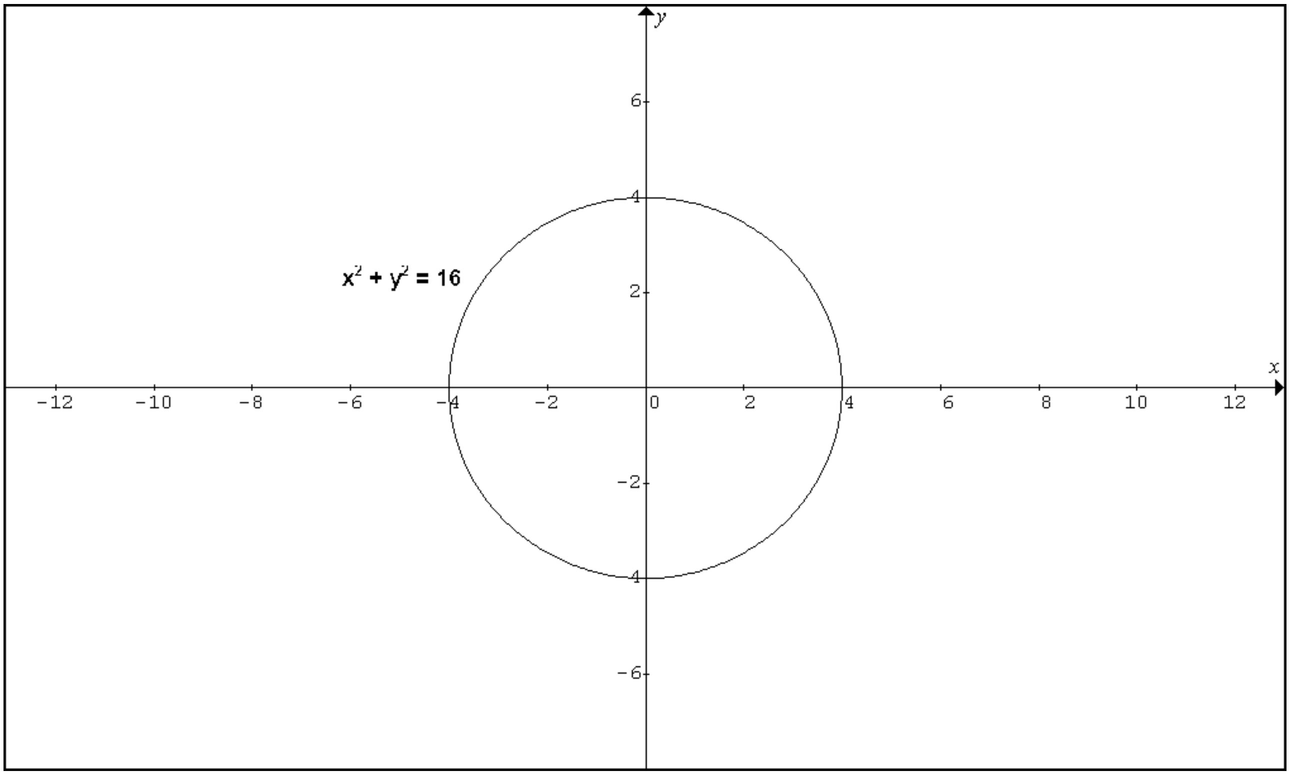
$$y = \pm\sqrt{16 - (1)^2}$$
$$y = \pm\sqrt{16 - 1}$$
$$y = \pm\sqrt{15}$$

Así que para x = 1, tenemos siguientes los valores de y.

$$y_1 = +\sqrt{15}$$
$$y_1 = -\sqrt{15}$$

Por lo que los puntos (1, $+\sqrt{15}$) y (1, $-\sqrt{15}$) pertenecen a la gráfica de la expresión $x^2 + y^2 = 16$.

La gráfica de la expresión como recuerdas del capítulo III de matemáticas III, corresponde a una circunferencia de centro (0, 0) en el origen de coordenadas y radio r = 4, que se muestra a continuación.

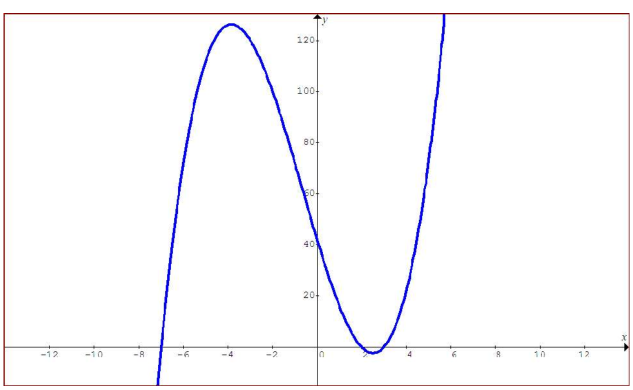


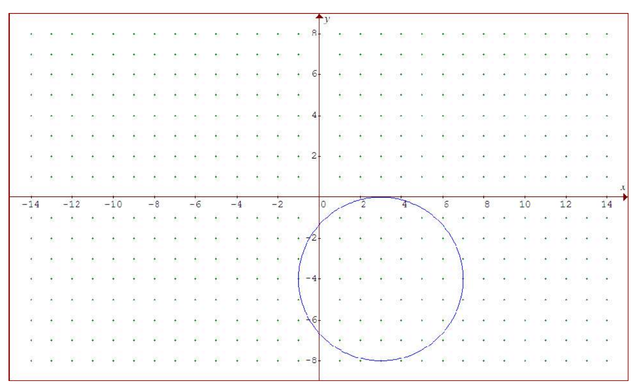
¿la expresión y = $\pm\sqrt{16 - x^2}$ cumple la definición de función? ____________________________________

¿Cumple la gráfica la prueba de la recta vertical? ____

¿Corresponde la expresión $x^2 + y^2 = 1$ a una función? ____

Ejercicio 1. Aplica la observación sobre los cortes de una recta vertical con una gráfica para indicar si las siguientes gráficas corresponden o no a una función.



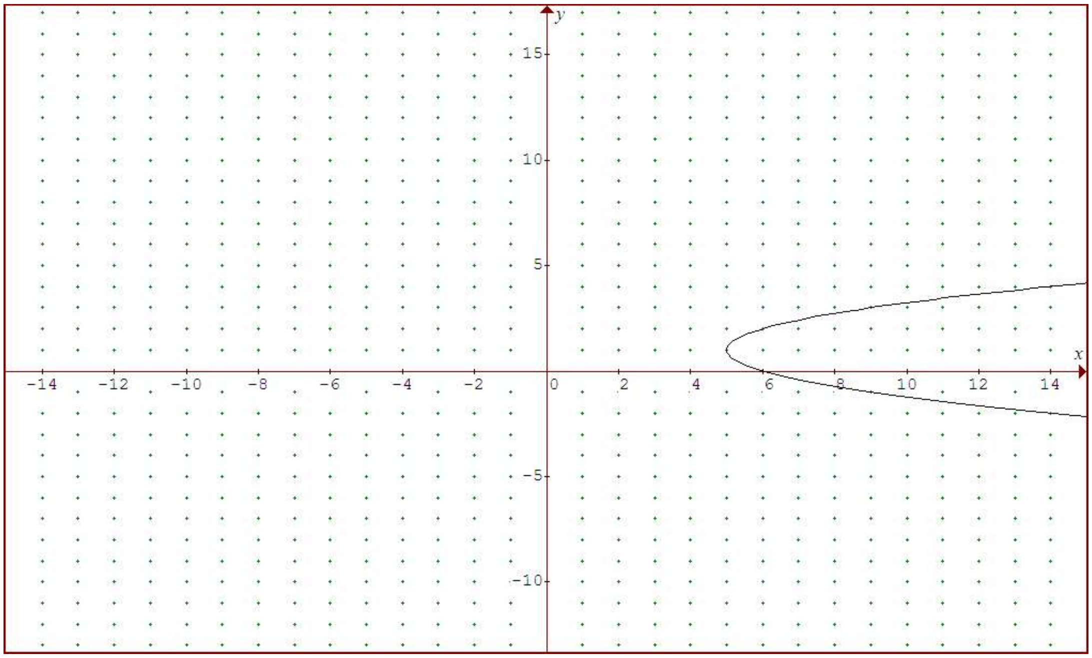


Ejercicio 2. Indica si la expresión $y = \frac{3}{x-2} + 1$, corresponde a una función o no.

Ejercicio 3. Indica si la expresión xy = 4, corresponde a una función o no.

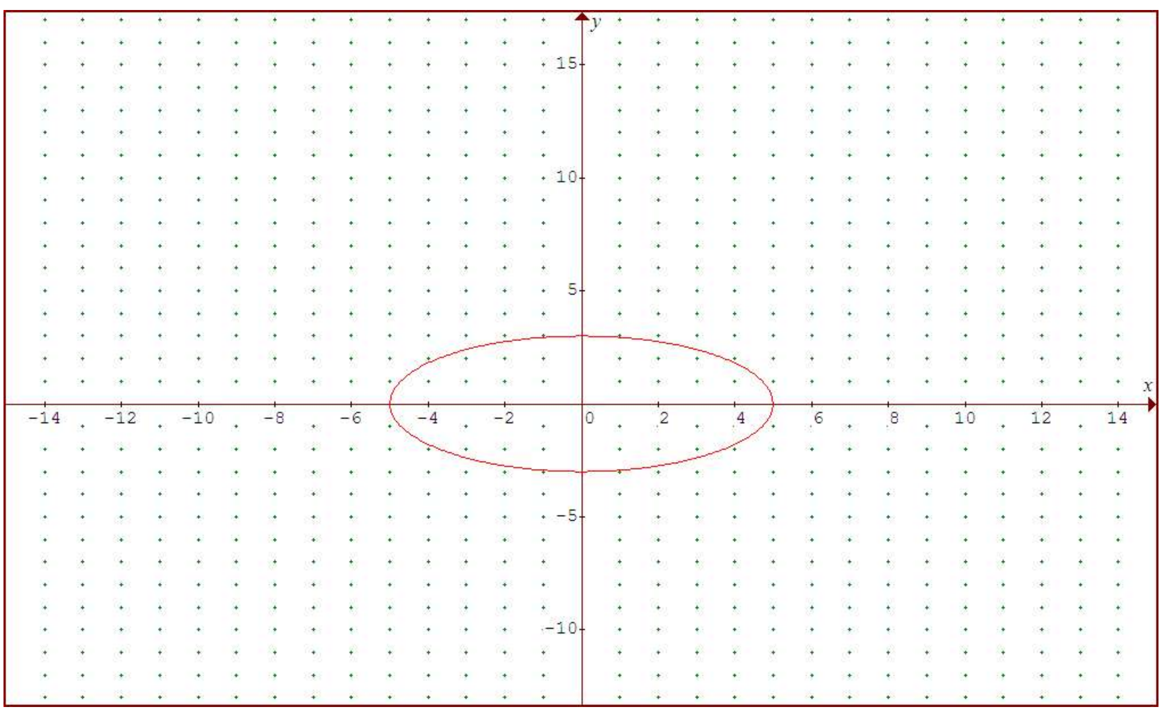
Ejercicio 4. La expresión $4y^2 = x$, ¿corresponde a una función?.

Ejercicio 5. ¿La siguiente gráfica corresponde a una función?, explica tu respuesta.



¿Puedes determinar la ecuación de la expresión?

Ejercicio 7. Indica si la gráfica corresponde a una función o no.



Puedes Encontrar la ecuación de la grafica. ____

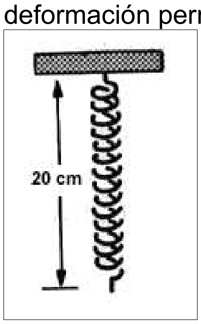
Secuencia Didáctica de Lectura y Consolidación:

Aprendizaje: Proporciona el dominio y el rango de una función polinomial dada.
Comprende el significado de la notación funcional y lo utiliza para representar y evaluar funciones polinomiales.

En esta secuencia algunos conceptos se afirman y aplican a las nuevas situaciones problemáticas que se proponen, en caso de no comprender alguno de los conceptos, pregunta a tu profesor.

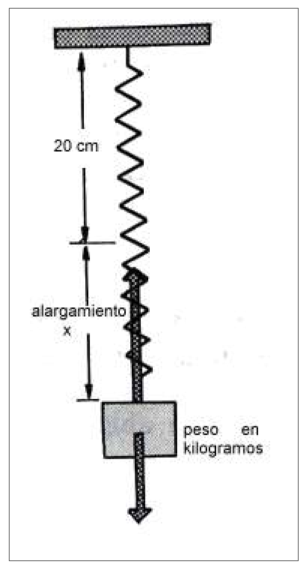
Inicio de la Secuencia:

Problema 1. Resorte: Se tiene un resorte de 20 cm., de longitud, el cual se estira 4 mm. por cada 2 kg. de fuerza aplicados. Si el máximo peso que puede soportar el resorte es de 10 kg. antes de sufrir una deformación permanente.



i. Encuentra la longitud total del resorte cuando se aplican los pesos indicados en la siguiente tabla

peso	Longitud4
10	
16	



ii. Encuentra la función que permite encontrar la longitud total L del resorte cuando se le cuelga un peso de p kilogramos.

____

iii. ¿Cuántas variables aparecen en este problema, y cuáles son?

____

iv. Encuentra el conjunto de valores que puede tomar la variable peso

____

v. Encuentra el conjunto de valores que puede tomar la variable longitud del resorte.

____

vi. ¿Qué nombre recibe el conjunto de valores que puede tomar la variable peso?

____

vii. ¿Qué nombre recibe el conjunto de valores que puede tomar la variable que corresponde al alargamiento total del resorte?

____

La función para obtener la longitud del resorte del problema es, $L(p) = 0.2p + 20$, de manera que para p kilos de peso la longitud del resorte se obtiene multiplicando 0.2 por p (el peso p en kilogramos por el alargamiento que sufre 0.2 cm, el re[illegible]mo) y al resultado se le suman 20 cm. (la longitud inicial del resorte).

Para un peso p = 0 kg. la longitud tot[illegible]a dada por.

$L(0) = 0.2(0) + 20 = 0 + 20 = 20$ c[illegible]l del resorte.

Si p = 3 kg. la longitud es.

$L(3) = 0.2(3) + 20 = 0.6 + 20 = 20.6$ cm., para 3 kg. la longitud del resorte es 20.6 cm.

Si p = 7 kg. la longitud del resorte es.

$L(7) = 0.2(7) + 20 = 1.4 + 20 = 21.4$ cm., para 7 kg. la longitud del resorte es 21.4 cm.

Para p = 9.5 kg. el resorte alcanza una longitud de.

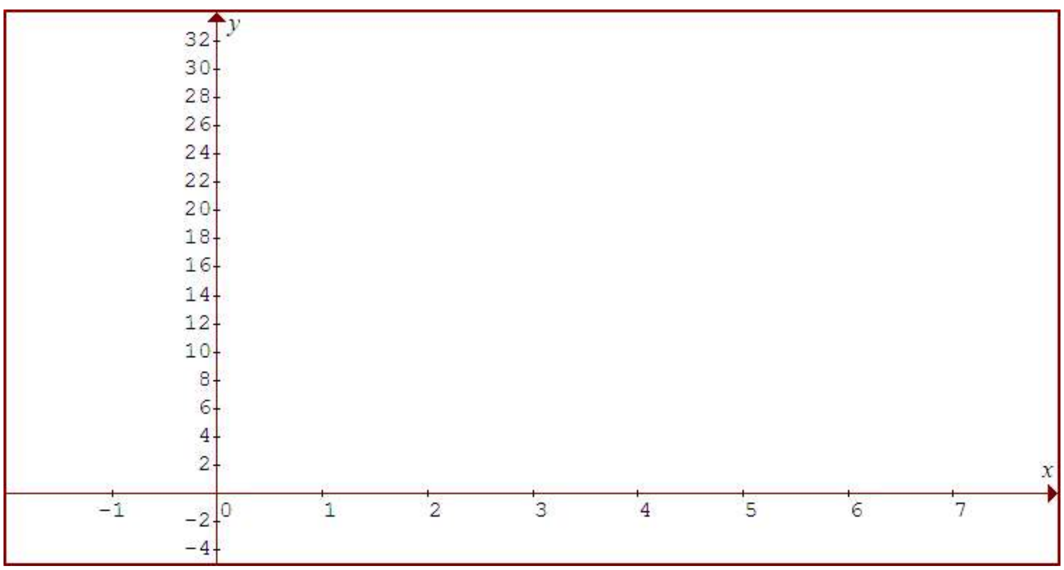
$L(9.5) = 0.2(9.5) + 20 = 1.90 + 20 = 21.9$ cm., para 9.5 kg. la longitud del resorte es 21.9 cm.

Si p = 10 kg. la longitud del resorte es.

$L(10) = .2(10) + 20 = 2 + 20 = 22$ cm., para 10 kg. la longitud del resorte es 22 cm.

Valores mayores a 10 kg. no se consideran, ya que producen una deformación permanente en el resorte.

viii. Dibuja la gráfica de la función que describe la longitud total del alambre L, tomando en cuenta todos los valores que puede tomar la variable p que corresponde al peso que se cuelga del resorte en el siguiente sistema de coordenadas.



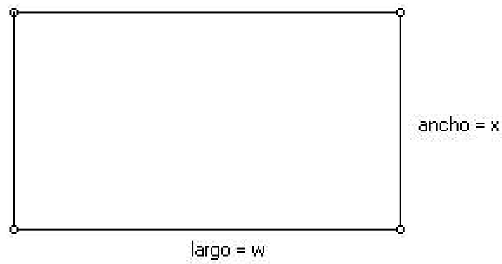
Observaciones:

La función obtenida en este problema es una función polinomial de grado 1, que recibe el nombre especial de función lineal, el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente se llama Dominio de la función, el conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente se llama rango de la función.

Si consideramos la función lineal $y(x) = mx + b$ con $m \neq 0$ en general, como se vio en matemáticas I, su dominio es el conjunto de los números reales, y su rango también es el conjunto de los números reales.

Problema 2, Construcción de un corral. Un granjero tiene 80 metros de tela de alambre para construir un corral de manera que el área del corral sea la mayor posible, encuentra las dimensiones que debe tener el corral.

El siguiente dibujo ilustra el corral que se quiere construir.



Escribe la fórmula para encontrar el perímetro de un rectángulo.

____

Escribe la ecuación que se puede establecer utilizando el hecho de que la tela de alambre mide 80 metros, las variables w y x de la figura anterior, y la fórmula del perímetro.

____

Despeja la variable w en función de la variable x, de la ecuación anterior y simplifica la ecuación resultante en caso de que sea posible.

____

Escribe la fórmula para encontrar el área de un rectángulo cualquiera.

____

Escribe la fórmula para encontrar el área del rectángulo en función de la variable x (el ancho del rectángulo)

____

La función polinomial obtenida finalmente al hacer la multiplicación indicada para resolver este problema, debe ser la siguiente.

$A(x) = 40x - x^2$

Como recordaras de matemáticas III, la ecuación anterior corresponde a la ecuación de una parábola vertical, que de acuerdo a matemáticas II es una función cuadrática.

El conjunto de valores que puede tomar la variable x es.

____

Para determinar el rango de valores de la función, considerando que es la función de una parábola, la llevaremos a la forma.

$\mathbf{y - k = 4p(x - h)^2}$

Donde V(h, k) son las coordenadas del vértice.

Si $p > 0$ la parábola abre hacia arriba y las coordenadas del vértice corresponden al punto más bajo de la parábola.
Si $p < 0$ la parábola abre hacia abajo y las coordenadas del vértice corresponden al punto más alto de la parábola.

$A(x) = 40x - x^2$

Ordenando la parte derecha de la expresión anterior, de manera que los exponentes estén en orden decreciente.

$A(x) = - x^2 + 40x$

Factorizando -1 en la expresión resultante.

$A(x) = -(x^2 - 40x)$

Se completa un trinomio cuadrado perfecto del lado derecho restando 400 a ambos miembros de la igualdad.

$A(x) - 400 = -(x^2 - 40x + 400)$

El trinomio cuadrado perfecto se puede expresar como un binomio al cuadrado.

$A(x) - 400 = -(x - 20)^2$

Las coordenadas del vértice de la parábola son V(20, 400), que significa que para x = 20 (el ancho del corral igual a 20 metros) se tiene la mayor área posible de 400 metros cuadrados, al sustituir x = 20 metros en la fórmula para determinar el largo del corral, w = 40 – x, se obtiene que w = 20 metros, y se llega a la conclusión de que el corral debe de ser cuadrado.

El domino de la función que debes haber obtenido es (0, 40) que corresponde a un intervalo abierto, dado que ambos extremos no pertenecen al intervalo.

Como el valor máximo de la función corresponde al vértice de la parábola V(20, 400) el mayor valor de la función es 400, y **el rango de la función** es el intervalo semicerrado (0, 400].
El valor de 0 no es parte del rango ya que A(0) = A(40) = 0, y los valores 0 y 40 no pertenecen al dominio de la función $A(x) = 40x - x^2$.

La determinación del rango de una función para polinomios de grado igual o mayor que tres no siempre es fácil de determinar, así que nos ayudaremos del uso de la computadora en la mayor parte de los problemas a resolver, para explorar y hacer conjeturas sobre diversas situaciones, para comprobar los resultados obtenidos, para hacer la gráfica de las funciones a tratar, o para obtener resultados que no se puedan obtener con los conocimientos actuales del alumno.

Problema 3. Construcción de una caja. Se va a fabricar una caja sin tapa a partir de una lamina de cartón de 30 x 40 centímetros, cortando cuadrados idénticos de área x^2 en cada esquina y doblando hacia arriba los lados.

1. De manera que el volumen de la caja sea igual a 3024 cm^3.

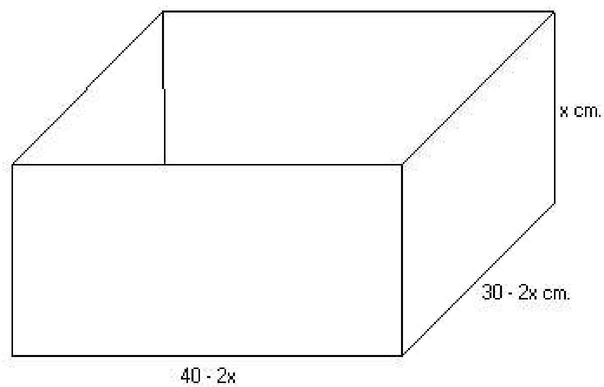
En una de las secuencias anteriores se obtuvo la siguiente función para encontrar el volumen de la caja.

$$V(x) = (30 - 2x)(40 - 2x)x.$$

Después de hacer la multiplicación de polinomios se obtiene la siguiente función polinomial.

$$V(x) = 4x^3 - 140x^2 + 1200x$$

Y la siguiente figura ilustra el modelo de la caja.



El domino de la función se obtiene considerando el lado de menor longitud de la caja que mide 30 centímetros.

El valor de 0 no se puede tomar, ya que no se forma una caja.

El valor de 15 no se puede tomar, ya que tendríamos dos laminas de 15 x 40 centímetros, y tampoco tenemos una caja.

Así que el dominio de la función es el intervalo abierto (0, 15).

Para encontrar el valor de x que cumple con V(x) = 3024 cm^3, se tiene que establecer la siguiente igualdad.

$$3024 = 4x^3 - 140x^2 + 1200x$$

Que equivale a resolver la ecuación igualada a cero.

$$0 = 4x^3 - 140x^2 + 1200x - 3024$$

Pero los métodos tratados solo nos permiten resolver hasta ecuaciones de segundo grado, y algunas ecuaciones de tercer y cuarto grado como las siguientes.

$2x^3 - 7x^2 - 15x = 0$, que se resuelve factorizando el factor común x, y luego resolviendo la ecuación cuadrática que resulta.

$x^4 - 25x^2 + 144 = 0$, que se puede resolver haciendo el cambio de variable $u = x^2$.

A continuación propondremos algunas funciones y daremos algunas sugerencias que se pueden aplicar para ese tipo de funciones.

Determinar el Dominio y Rango de las siguientes funciones polinomiales, bosquejar su gráfica haciendo una tabla de valores.

Problema 4, Para $f(x) = 2x^6$.

El dominio de la función $f(x) = 2x^6$ es el conjunto de números reales para los cuales se pueden realizar las operaciones indicadas en la fórmula que determina la función.

Para la función las operaciones indicadas en la fórmula son multiplicaciones, las cuales se pueden realizar para cualquier valor de x que se considere, por este motivo el dominio de la función son todos los números reales, lo cual se expresa de la siguiente manera $D_f = R$, (R representa los números reales).

Para determinar el rango, primero completa la siguiente tabla de valores.

x	f(x)
-2	
-1	
0	
1	
2	

¿el valor de la función en cada caso es?, negativo, cero o positivo.

Antes de calcular los valores de la función de la siguiente tabla utilizando la calculadora, contesta la siguiente pregunta.

¿El signo del valor de la función en cada caso, tendrá el mismo signo que los valores de la función de la tabla anterior?

____

Justifica tu respuesta.

____

Utiliza la calculadora para encontrar los valores que se piden en la siguiente tabla.

x	f(x)
-3	
-2.5	
-1.5	
-.5	
.5	
1.5	
2.5	
3	

Para cada valor de x que se tome el valor de la función, será del mismo signo que los valores anteriores de la función? ____

Considerando lo anterior, ¿cuál será el rango de la función $f(x) = 2x^6$**.**

Para hacer la gráfica de la función localiza aquellos puntos de la gráfica calculados que estén dentro del siguiente sistema de coordenadas.

Ejercicios.

1. Para la función $f(x) = 3x^2$.

i. ¿Cómo es el signo del valor de la función para cualquier valor x_0 dado?

Antes de contestar propón algunos valores de x, y realiza los cálculos correspondientes para obtener los valores de la función, analiza los resultados y luego da tu respuesta.

ii. ¿Cuál es el dominio de la función?

____

iii. ¿Cuál es el rango de la función?

____

iv. Realiza una tabla con al menos 10 valores para la función.

____

v. Tomando en cuenta la tabla de valores obtenida, haz un bosquejo de la gráfica.

vi. ¿Es simétrica la gráfica de la función?

____

vii. En caso de ser afirmativa tu respuesta, ¿cuál es el eje de simetría?

____

viii. La gráfica de la función $f(x) = 2x^6$ es simétrica?

____

ix. La gráfica de cualquier función de la forma **$f(x) = 2x^n$** con n par, ¿será simétrica?

____

x. En caso de ser afirmativa la respuesta anterior, ¿facilita esta propiedad el trabajo de obtener el dominio, el rango, una tabla de valores y la gráfica de la función?

____

2. Para la función $f(x) = -0.5x^2$.

i. ¿Cómo es el signo del valor de la función para cualquier valor x_0 dado?

____

ii. ¿Cuál es el dominio de la función?

____

iii. ¿Cuál es el rango de la función?

____

iv. Realiza una tabla con al menos 10 valores de la función dada.

____

v. Gráfica los puntos obtenidos en la tabla anterior en un sistema de coordenadas.

vi. ¿Es simétrica la gráfica de la función?

____

vii. En caso de ser afirmativa tu respuesta, ¿cuál es el eje de simetría?

____

ix. La gráfica de cualquier función de la forma **$f(x) = -2x^n$** con n par, ¿será simétrica?

____

x. En caso de ser afirmativa la respuesta anterior, ¿facilita esta propiedad el trabajo de obtener el dominio, el rango, una tabla de valores y la gráfica de la función?

____

Dada la función $f(x) = ax^n$, con "**a**" un número real y "**n**" un numero natural par.

xi. ¿Si $a < 0$, el rango de la función será?

____

xii. ¿Si a > 0, el rango de la función será?

____

3. Para la función $f(x) = 2x^3$.

i. ¿Cómo es el signo del valor de la función para cualquier valor x_0 que sea positivo?

Evalúa la función para varios valores positivos y luego da tu respuesta.

____

ii. ¿Cómo es el signo del valor de la función para cualquier valor x_0 que sea negativo?

Evalúa la función con varios valores negativos y luego da la respuesta.

____

iii. ¿Si $x_0 = 0$, el valor de la función es?, y el signo de la función es?

____

iv. ¿Cuál es el dominio de la función?

____

v. Considerando las preguntas anteriores, ¿Cuál es el rango de la función?

____

vi. Realiza una tabla con al menos 10 valores, para la función dada.

____

vii. Bosqueja la gráfica de la función, localizando los puntos obtenidos en la tabla anterior.

viii. ¿Es simétrica la gráfica de la función?

____

ix. En caso de ser afirmativa tu respuesta, ¿cuál es el eje de simetría?

____

Tomando en cuenta tus respuestas anteriores, contesta lo siguiente

x. La gráfica de cualquier función de la forma $\mathbf{f(x) = 2x^n}$ con n impar, ¿será parecida a la anterior?

Realiza las operaciones que consideres necesarias, antes de dar tu respuesta.

____

xi. En base al trabajo realizado, contesta lo siguiente, el dominio, el rango, y la gráfica de la función $\mathbf{f(x) = 2x^n}$ con n impar son?

____

4. Para la función $f(x) = -0.2x^3$.

i. ¿Cómo es el signo del valor de la función para cualquier valor x_0 negativo?

____

ii. ¿Cómo es el signo del valor de la función para cualquier valor x_0 positivo?

____

iii. ¿Cuál es el dominio de la función?

____

iv. ¿Cuál es el rango de la función?

____

v. Realiza una tabla con al menos 10 valores, para la función dada.

____

vi. Bosqueja la gráfica de la función, localizando los puntos obtenidos en la tabla anterior.

Dada la función **$f(x) = ax^n$**, con "**a**" un número real y "**n**" un numero natural impar.

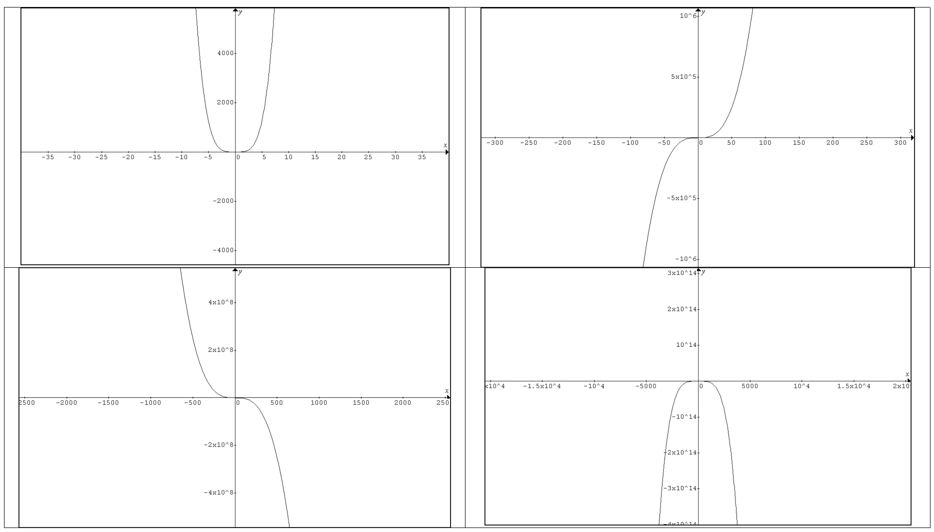
i. ¿Si a < 0, el rango de la función será?

____

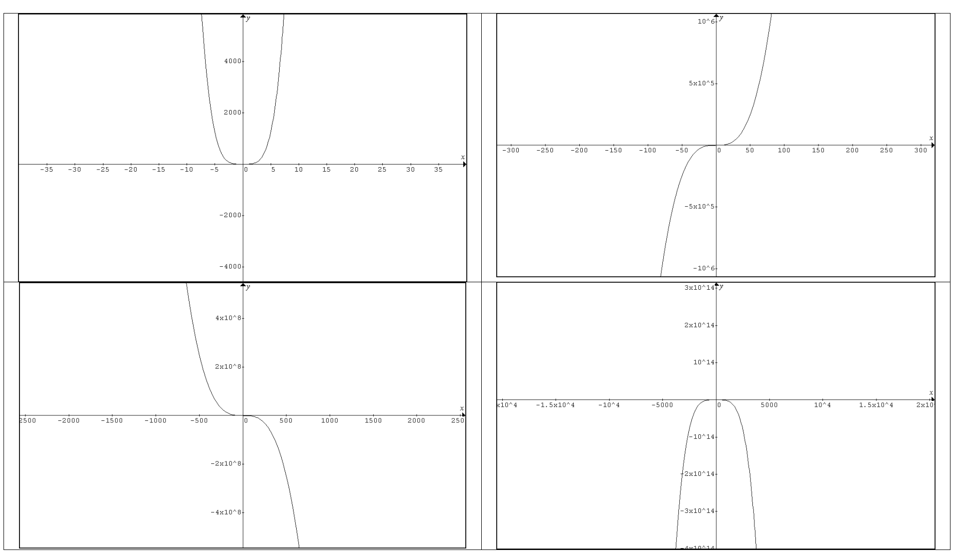
ii. ¿Si a > 0, el rango de la función será?

____

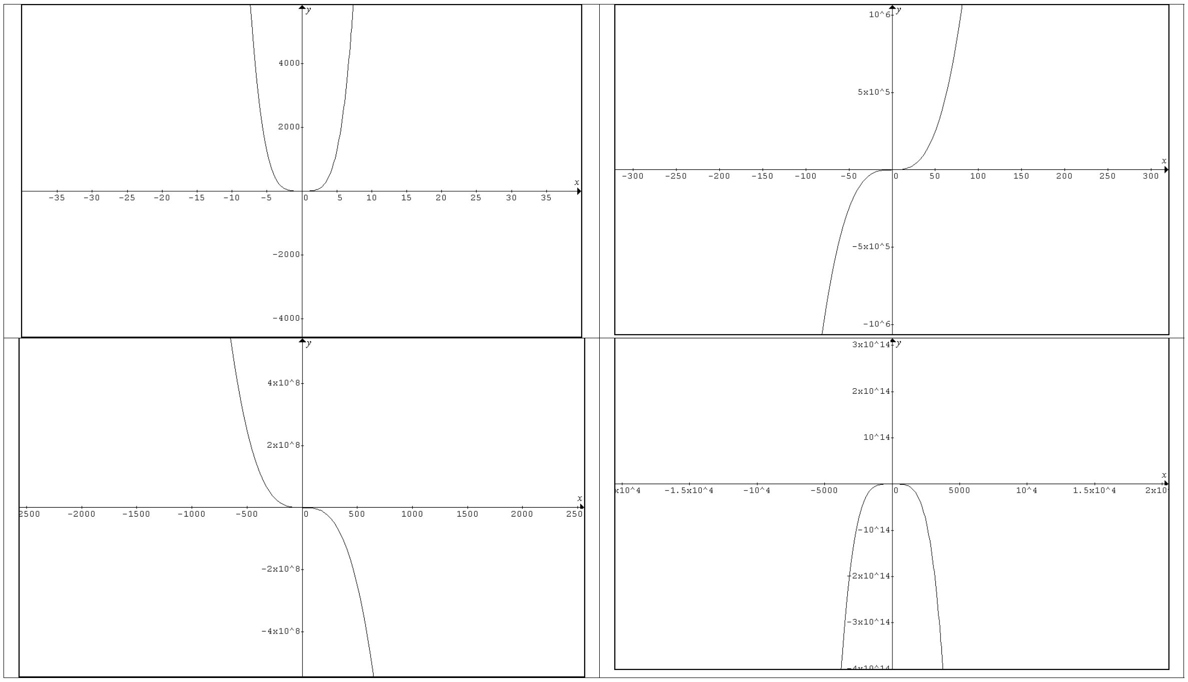
5. ¿Cuál de las siguientes gráficas tiene las características de la función $f(x) = 2x^4$.



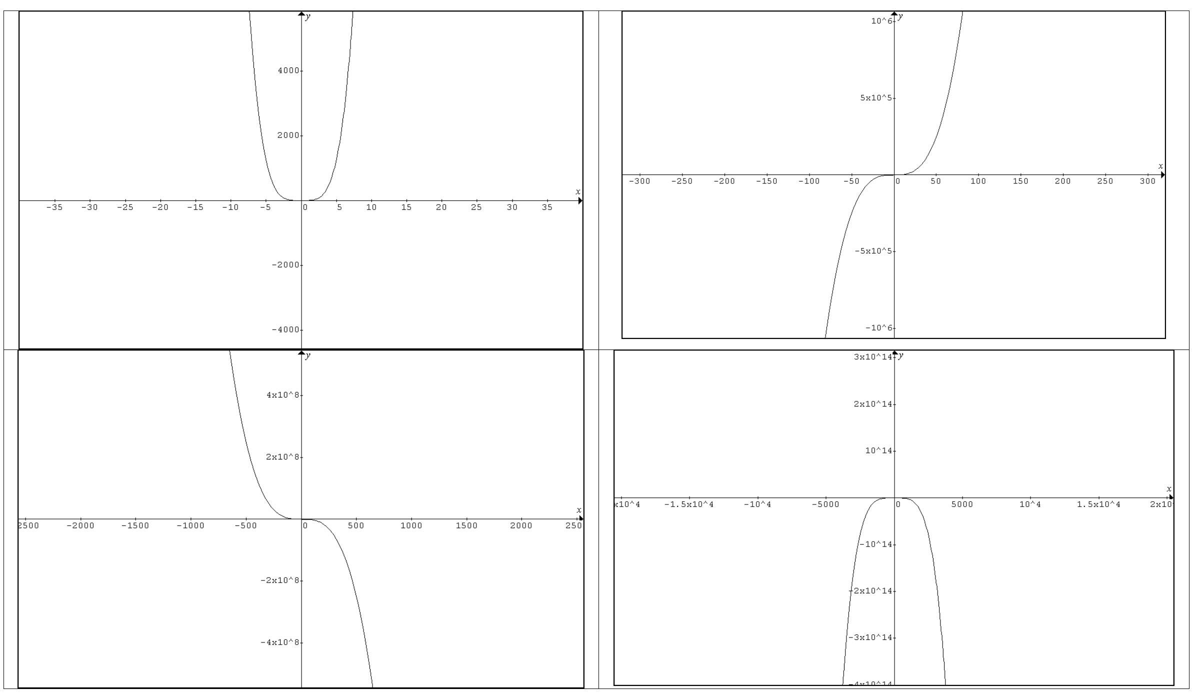
6. ¿Cuál de las siguientes gráficas tiene las características de la función $f(x) = -2x^5$.



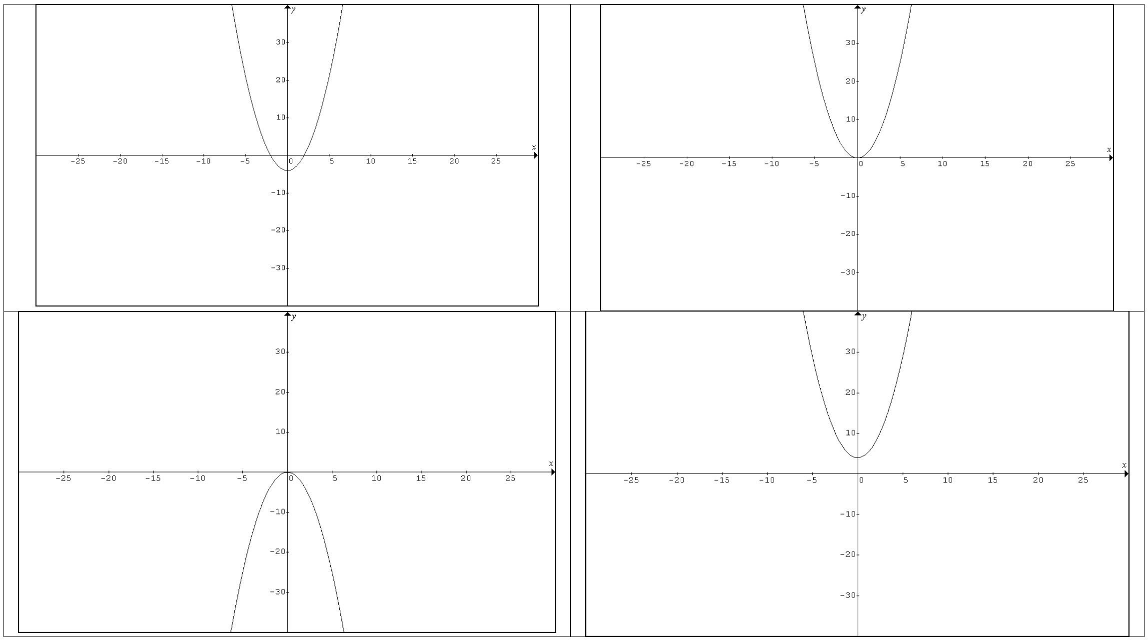
7. ¿Cuál de las siguientes gráficas tiene las características de la función $f(x) = -2x^6$.



8. ¿Cuál de las siguientes gráficas tiene las características de la función $f(x) = 2x^7$.



9. Cuál de las siguientes gráficas tiene las características de la función $f(x) = x^2 + 4$.



10. Para la función $f(x) = 2x^3 – x^2 + 3x + 5$, encuentra el valor de la función en $x = -1$, explicando paso a paso las operaciones realizadas.

____

____

____

____

11. Encontrar dos números enteros positivos consecutivos tales que la suma de sus cuadrados sea 113.

i. Si representamos por x el primer número entero, el siguiente número entero será: ____________

ii. Si x^2 es el cuadrado del primer numero entero, el cuadrado del siguiente será: _______________

iii. La función que representa la suma de los cuadrados es, f(x) = ___________________________

iv. Desarrollando la multiplicación de polinomios indicada en la función de la suma de cuadrados y simplificando los términos semejantes, la función polinomial resultante es, f(x) = _____________________

v. Usando la condición f(x) = 113, la ecuación que se puede establecer es, ____________________

vi. igualando a cero la ecuación anterior, se obtiene la ecuación equivalente, ___________________

vii. La función polinomial asociada a la ecuación del punto anterior es, g(x) = ___________________

viii. Encuentra los valores de la función g(x) para los números enteros de 1 hasta 9 con incrementos de 1 y construye una tabla de valores.

ix. Localiza los puntos encontrados en un sistema de coordenadas.

x. Alguno de ellos satisface la condición g(x) = 0

xi. En caso de ser afirmativa la respuesta anterior, el valor encontrado satisface el problema.

Aprendizaje: Relacionará a la ecuación $a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0 = 0$, como un caso particular de la función polinomial asociada.

Problema 1. Se quiere encontrar el valor de dos números cuya suma sea 29 y cuyo producto sea 208.

Sean ***a*** y ***b*** los números buscados.

De la condición, la suma de los dos números es 29, se obtiene la ecuación.

$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = 29 \qquad \ldots (1)$

Y del enunciado, el producto de los dos números es 208, se puede establecer la ecuación.

$\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b} = 208 \qquad \ldots (2)$

Despejando la variable ***b*** de la ecuación (1).

$\boldsymbol{b} = 29 – \boldsymbol{a} \qquad \ldots (3)$

La ecuación (3) establece una función, ya que los valores de la variable ***b***, dependen de los valores dados a la variable ***a***.

Considerando la función (3) se puede establecer una función P para el producto de los dos números buscados al sustituir la ecuación (3) en la expresión del producto de los dos números.

$P = \boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b}$

como se muestra en la ecuación (4).

$P(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}\bullet(29 – \boldsymbol{a}) \qquad \ldots (4)$

De manera que para diferentes valores de la variable a, se pueden obtener diferentes valores para el producto, por ejemplo para a = 5,

$b = 29 – 5 = 24$

Y el producto de los dos números es,

$P(5) = 5\bullet 24 = 120$

De manera que la solución del problema se da cuando.

$P(a) = 208 \qquad \ldots (5)$

Al restar 208 a ambos miembros de la ecuación (5) se puede establecer la siguiente función polinomial.

$M(a) = P(a) – 208 = a(29 – a) – 208 = 29a – a^2 – 208 = – a^2 + 29a – 208$

$M(a) = – a^2 + 29a – 208$

El valor de M(a) depende del valor de la variable a, completa la siguiente tabla para obtener algunos de los de la función M(a).

A	M(a)
0	
2	
5	
8	
10	

De acuerdo a las condiciones del problema planteado.

La solución del problema ahora se encuentra cuando M(a) = 0, por lo cual se puede establecer la siguiente ecuación polinomial de segundo grado.

$$-a^2 + 29a - 208 = 0 \quad ...(6)$$

Para resolver la ecuación polinomial (6) se utiliza la siguiente fórmula.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad ...(7)$$

De acuerdo con (6) los valores de las constantes son los siguientes, a = -1, b = 29, c = -208, sustituyendo valores en la ecuación (7) se tiene.

$$x_{1,2} = \frac{-29 \pm \sqrt{(29)^2 - 4(-1)(-208)}}{2(-1)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-29 \pm \sqrt{841 - 832}}{-2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-29 \pm \sqrt{9}}{-2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-29 \pm 3}{-2}$$

El valor del número a_1 es,

$$a_1 = \frac{-29 + 3}{-2} = \frac{-26}{-2} = 13, \; a_1 = 13.$$

El valor de a_2 es,

$$a_{1,2} = \frac{-29 - 3}{-2} = \frac{-32}{-2} = 16, \; a_2 = 16$$

Para encontrar el valor de b_1, se utiliza la ecuación (3)

$b_1 = 29 - a_1$, $\quad b_1 = 29 - 13 = 16$, el valor de $b_1 = 16$.

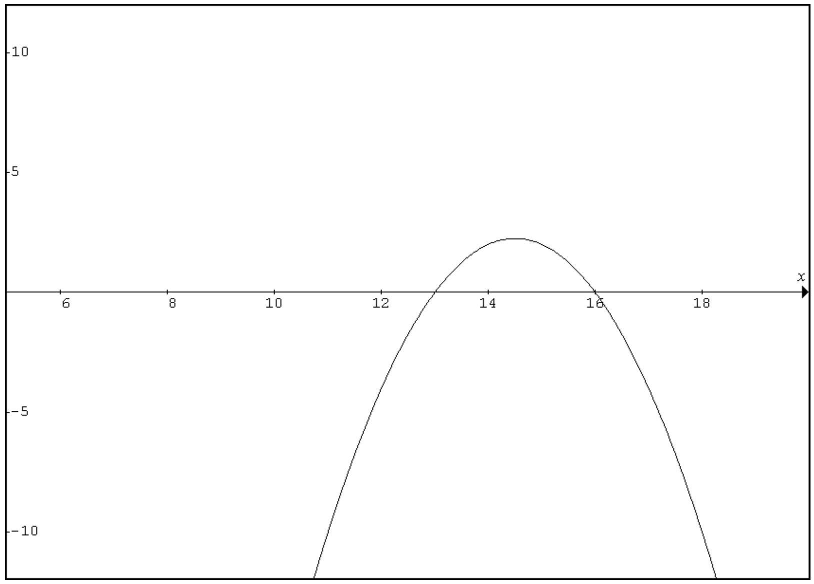
El valor de b_2, es,

$b_2 = 29 - a_2$, $\quad b_2 = 29 - 16 = 13$, el valor de $b_2 = 13$.

Así que los números buscados son, a = 13 y b = 16.

Otra forma de obtener la solución del problema es considerar la gráfica de la función polinomial.

$M(a) = -a^2 + 29a - 208$, la cual se muestra en la siguiente imagen.



Las raíces del polinomio son a = 13 y a = 16, que coinciden con las soluciones obtenidas.

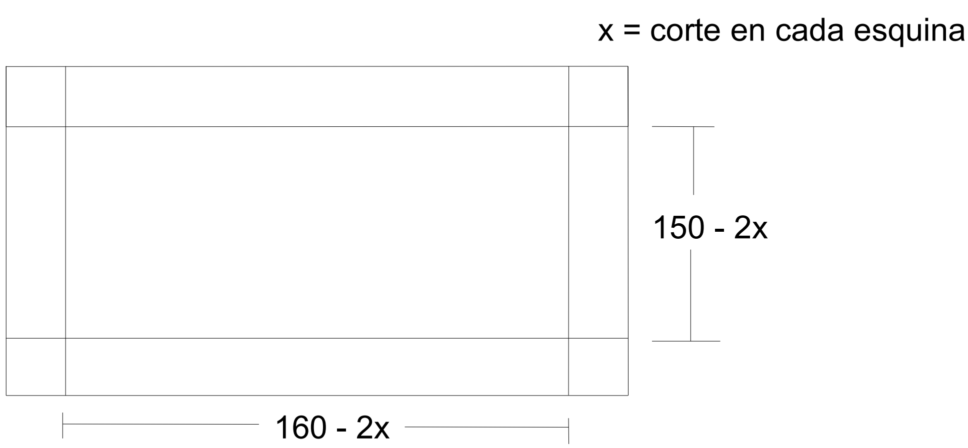
Ejercicio 1. Encuentra los valores de x, para los cuales la función $f(x) = x^2 – 2x – 24$, cumple con $f(x) = 0$.

Ejercicio 2. Para que valores de x se cumple que $f(x) = x^3 + 7x^2 – 8x$, es igual a cero.

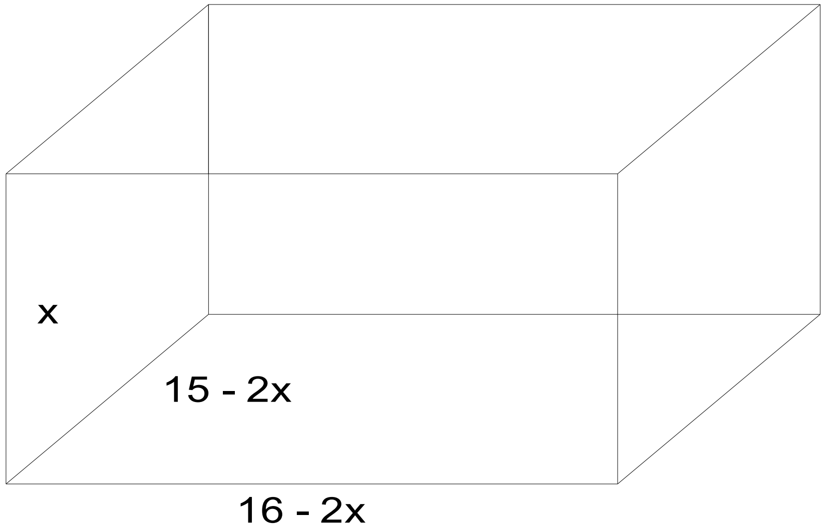
Ejercicio 3. Si $f(x) = 2x^2 + 11x – 6$, encuentra los valores de x para los cuales $f(x) = 0$.

Problema 2. Se tiene una lámina de 160 x 150 centímetros, con la cual se quiere construir una caja abierta cuyo volumen sea de 224 decímetros cúbicos, ¿cuáles deben ser las dimensiones del corte en cada esquina para poder construir la caja?

La siguiente imagen muestra el corte que debe ser realizado en cada esquina, y las medidas en función del corte.



La siguiente imagen nos muestra la caja armada y las dimensiones de cada arista en función del corte realizado, **con el cambio de unidades a decímetros**.



La función para determinar el volumen en función del corte x, es la siguiente:

$$V(x) = x(16 - 2x)(15 - 2x) = x(4x^2 - 62x + 240)$$

Haciendo la multiplicación de polinomios, se tiene la siguiente expresión:

$$V(x) = 4x^3 - 62x^2 + 240x$$

Como el problema indica que $V(x) = 224$, se establece la siguiente ecuación.

$$224 = 4x^3 - 62x^2 + 240x$$

Igualando a cero la expresión se obtiene: ______________________________

Que recibe el nombre de: _______________________

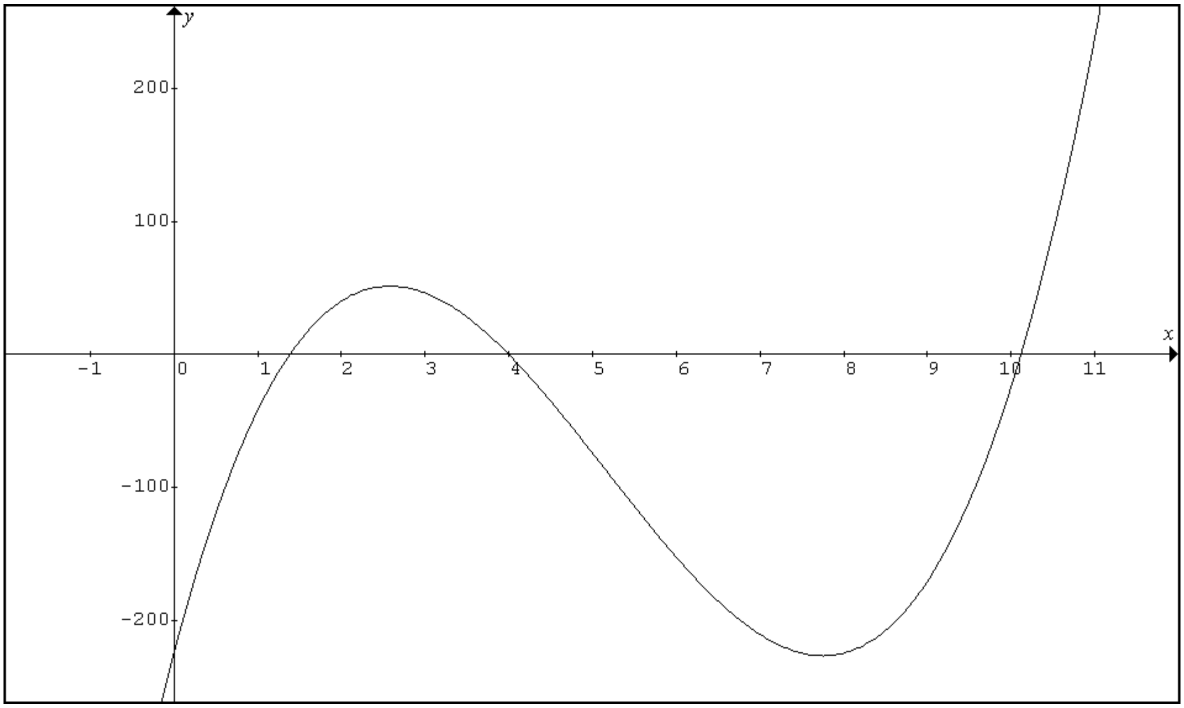
La última ecuación nos permite establecer la siguiente función polinomial, al restar 224 a ambos miembros de la ecuación.

$$T(x) = 4x^3 - 62x^2 + 240x - 224$$

Completa la siguiente tabla con la ayuda de tu calculadora para obtener algunos de los valores de la función T(x) y trata de encontrar el valor aproximado de los valores de x que hacen que T(x) = 0.

x	T(x)
-2	
-1.5	
-1	
0	
0.5	
1	
1.5	
2	

Para encontrar de manera aproximada los valores de x para los cuales T(x) = 0, usaremos la gráfica de la función que se muestra a continuación.



Para que valores de x aproximados, la función T(x) = 0, __________________________

____

____

Cuál de los valores encontrados cumple las condiciones del problema.

____

Ejercicios:

1. El producto de dos números enteros consecutivos pares es 288. Determina los números.
   a. Encuentra la función que da el producto de dos números pares consecutivos.
   b. A que valor debe ser igual la función, para este problema en particular.
   c. Establece la función polinomial para encontrar la solución del problema.
   d. Escribe la ecuación polinomial que hay que resolver para encontrar la solución.

2. Se tiene una lamina de 18 dm. x 13 dm. Para formar una caja sin tapa de manera que tenga un volumen de 20 dm^3.
   a. Encuentra la función para determinar el volumen de la caja en función del corte x en cada una de las esquinas.
   b. Para resolver el problema, a qué valor debe ser igual la función del volumen.
   c. Al igualar la función al valor que debe tomar para resolver el problema, se obtiene una ecuación polinomial, escríbela.

3. Un meteorólogo concluye que la temperatura T (en ºF) para cierto periodo de 24 horas en invierno esta dada por la fórmula.

   $T(t) = \frac{t}{20}(t-12)(t-24)$.

   Donde t es el tiempo en horas y t = 0 corresponde a las 6:00 a. m.

a. ¿A qué hora la temperatura es > 0?

b. ¿A que hora la temperatura es < 0?

c. ¿A que hora la temperatura es = 0 ?

d. ¿Cuál es la ecuación que se debe resolver para encontrar $T(t) = 0$?

e. Si realizas la multiplicación indicada, escribe la función polinomial que resulta.

Aprendizaje: El alumno resolverá ecuaciones polinomiales que se puedan factorizar utilizando los distintos métodos de exploración señalados en la temática.

a) División de polinomios:

Indicando el proceso de la división del número 46 entre el número 8, tenemos.

$$\begin{array}{r|l} & \;\;5 \\ \hline 8 & 4\;6 \\ & \;\;6 \end{array}$$

Donde 46 es el dividendo, el 8 es el divisor, el 5 es el cociente y el 6 es el residuo, el proceso anterior se puede escribir como.

$$\frac{46}{8}=5+\frac{6}{8}$$

Al multiplicar toda la igualdad por 8 se obtiene.

46 = 5•8 + 6

Para la operación de 72 entre 9, tenemos.

$$\begin{array}{r|l} & \;\;8 \\ \hline 9 & 7\;2 \\ & \;\;0 \end{array}$$

Como el residuo es 0, se dice que 72 es divisible entre 9, o que 9 es un factor de 72, que se puede expresar como.

72 = 9•8 + 0

En el caso de los polinomios se puede hacer una descripción similar como vemos al efectuar la división del polinomio $x^3 + x^2 - 11x + 12$ entre el polinomio $x - 2$.

$$\begin{array}{rl}
 & x^2 + 3x - 5 \quad \longleftarrow \text{Cociente} \\
\text{Divisor} \longrightarrow x - 2 & \overline{)\,x^3 + x^2 - 11x + 12} \quad \longleftarrow \text{Dividendo} \\
 & \underline{x^3 - 2x^2} \\
 & +3x^2 - 11x \\
 & \underline{+3x^2 - 6x} \\
 & -5x + 12 \\
 & \underline{-5x + 10} \\
 & +2 \quad \longleftarrow \text{Residuo}
\end{array}$$

Como el residuo es 2, podemos escribir.

$$\frac{x^3+x^2-11x+12}{x-2}=x^2+3x-5+\frac{2}{x-2}$$

Y al multiplicar toda la ecuación por x – 2, se tiene

$$x^3 + x^2 - 11x + 12 = (x^2 + 3x - 5)(x - 2) + 2$$

Al dividir el polinomio $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ por el polinomio $x^2 + 5x + 6$, se tiene.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x - 2 \\ \cline{2-2}
x^2 + 5x + 6 & x^3 + 3x^2 - 4x - 12 \\
 & x^3 + 5x^2 + 6x \\ \cline{2-2}
 & - 2x^2 - 10x - 12 \\
 & - 2x^2 - 10x - 12 \\ \cline{2-2}
 & \quad 0 \quad 0 \quad 0
\end{array}
$$

En este caso el residuo es el polinomio cero, r(x) = 0, y podemos escribir.

$$\frac{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}{x^2 + 5x + 6} = x - 2$$

al multiplicar toda la ecuación por $x^2 + 5x + 6$, se obtiene.

$$x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = (x^2 + 5x + 6)(x - 2)$$

Al dividir el polinomio $x^3 - x^2 - 24x - 36$ entre el polinomio $x^2 + 3x - 4$, se tiene.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x - 4 \\ \cline{2-2}
x^2 + 3x - 4 & x^3 - x^2 - 24x - 36 \\
 & x^3 + 3x^2 - 4x \\ \cline{2-2}
 & - 4x^2 - 20x - 36 \\
 & - 4x^2 - 12x + 16 \\ \cline{2-2}
 & \quad 0 - 8x - 52
\end{array}
$$

El resultado obtenido se puede escribir como se muestra.

$$\frac{x^3 - x^2 - 24x - 36}{x^2 + 3x - 4} = x - 4 + \frac{-8x - 52}{x^2 + 3x - 4}$$

Al multiplicar toda la igualdad por $x^2 + 3x - 4$, tenemos.

$$x^3 - x^2 - 24x - 36 = (x - 4)(x^2 + 3x - 4) + (-8x - 52)$$

Ahora explicaremos paso a paso el proceso de la división de polinomios.

Ejemplo 1. Dividir $f(x) = 6x^4 + x^3 - 3x + 5$ entre $d(x) = 3x^2 + 5x + 6$.

Para efectuar la división, como el coeficiente de x^2 en el dividendo f(x), es cero, dejamos un espacio para escribir los términos de x^2 que aparezcan durante el proceso de la división.

El proceso en sí consiste en dos pasos consecutivos de “multiplicar y restar”, que se repite *hasta que el grado del residuo sea menor que el grado del divisor, d(x)*.

El cociente de los términos principales en el dividendo y el divisor nos da el primer término del cociente, $\frac{6x^4}{3x^2} = 2x^2$.

$$\begin{array}{r|l} & 2x^2 \\ \hline 3x^2 + 5x + 6 & 6x^4 + x^3 - 3x + 5 \end{array}$$

Ahora, se multiplica $2x^2$ por el divisor, y luego se resta el producto del dividendo.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2x^2 & & & & \\ \hline 3x^2 + 5x + 6 & 6x^4 + & x^3 & & -3x & +5 \\ & -(6x^4 + & 10x^3 & + 12x^2) & & \\ \cline{2-4} & & -9x^3 & -12x^2 & -3x & +5 \end{array}$$

Ahora se divide $\frac{-\mathbf{9x^3}}{\mathbf{3x^2}} = -\mathbf{3x}$; se suma -3x al cociente; luego se multiplica el divisor por –3x; y se resta el resultado del residuo actual.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2x^2 & -3x & & & \\ \hline 3x^2 + 5x + 6 & 6x^4 + & x^3 & & -3x & +5 \\ & -(6x^4 + & 10x^3 & + 12x^2) & & \\ \cline{2-4} & & -9x^3 & -12x^2 & -3x & +5 \\ & & -(-9x^3 & -15x^2 & -18x) & \\ \cline{3-5} & & & 3x^2 & +15x & +5 \end{array}$$

Se divide $\frac{3x^2}{3x^2} = 1$; el 1 se suma al cociente; luego se multiplica 1 por el divisor y el resultado se resta del residuo actual.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2x^2 & -3x & +1 & & \\ \hline 3x^2 + 5x + 6 & 6x^4 + & x^3 & & -3x & +5 \\ & -(6x^4 + & 10x^3 & + 12x^2) & & \\ \cline{2-4} & & -9x^3 & -12x^2 & -3x & +5 \\ & & -(-9x^3 & -15x^2 & -18x) & \\ \cline{3-5} & & & 3x^2 & +15x & +5 \\ & & & -(3x^2 & +5x & +6) \\ \cline{4-6} & & & & 10x & -1 \end{array}$$

Como el residuo actual es de grado menor que el divisor el proceso termina, el cociente es c(x) = $2x^3 - 3x + 1$, y el residuo es r(x) = $10x - 1$, y podemos escribir.

$$6x^4 + x^3 - 3x + 5 = (3x^2 + 5x + 6)(2x^3 - 3x + 1) + (10x - 1)$$

Ejemplo 2. Dividir f(x) = $6x^3 - 19x^2 + 16x - 4$ entre d(x) = x - 2.

Como ya se explico el proceso en sí consiste en dos pasos consecutivos de "multiplicar y restar", que se repite *hasta que el grado del residuo sea menor que el grado del divisor, d(x)*.
El cociente de los términos principales en el dividendo y el divisor nos da el primer término del

cociente $\frac{6x^3}{x} = 6x^2$.

$$\begin{array}{r|l} & 6x^2 \\ \hline x - 2 & 6x^3 - 19x^2 + 16x - 4 \end{array}$$

Ahora, se multiplica $6x^2$ por el divisor, y luego se resta el producto del dividendo.

$$\begin{array}{r|l} & 6x^2 - 7x + 2 \\ \hline x - 2 & 6x^3 - 19x^2 + 16x - 4 \\ & \underline{-(6x^3 - 12x^2)} \\ & \qquad -7x^2 + 16x - 4 \end{array}$$

Ahora se divide $\frac{-7x^2}{x} = -7x$; se suma -7x al cociente; luego se multiplica el divisor por –7x; y se resta el resultado del residuo actual.

$$\begin{array}{r|l} & 6x^2 - 7x \\ \hline x - 2 & 6x^3 - 19x^2 + 16x - 4 \\ & \underline{6x^3 - 12x^2} \\ & \qquad -7x^2 + 16x - 4 \\ & \qquad \underline{-(-7x^2 + 14x)} \\ & \qquad\qquad\qquad 2x - 4 \end{array}$$

Ahora efectuamos la división $\frac{2x}{x} = 2$, el resultado 2 se suma al cociente; se multiplica el divisor por 2; y el resultado se resta del residuo actual.

$$
\begin{array}{r}
6x^2 - \ \ 7x \ + \ 2 \qquad\qquad \\
x-2\,\overline{)\,6x^3 - 19x^2 + 16x - 4} \\
\underline{6x^3 - 12x^2} \qquad\qquad\quad \\
-7x^2 + 16x - 4 \\
\underline{-7x^2 + 14x} \quad\ \ \\
2x - 4 \\
-\,(\underline{2x - 4}) \\
0
\end{array}
$$

En este caso tenemos que el residuo es el polinomio 0, por lo que x – 2, es un factor del polinomio $6x^3 - 19x^2 + 16x - 4$. Y el proceso de la división termina, el residuo r(x) = 0, el cociente $c(x) = 6x^2 - 7x + 2$, analizando ambas divisiones y utilizando los nombres de las funciones, tenemos.

$$f(x) = d(x) \bullet c(x) + r(x) \ . \ . \ . \ (1)$$

Ejercicios: En cada caso realiza la división de polinomios indicada $\frac{d(x)}{w(x)}$.

$d(x) = x^3 + x^2 - 16x + 20$ $w(x) = x^2 - x - 6$	$d(x) = x^3 + 4x^2 - 27x - 90$ $w(x) = x^2 - x - 6$	$d(x) = 2x^3 - 7x^2 - 24x + 45$ $w(x) = x^2 + 2x - 4$
$d(x) = 5x^4 - 17x^3 - 7x^2 + 33x + 18$ $w(x) = x^2 + 2x - 3$	$d(x) = 2x^5 + 11x^4 + 3x^3 - 44x^2 - 20x + 48$ $w(x) = x^3 + x^2 - 2x$	$d(x) = 3x^3 - 5x^2 - 16x + 12$ $w(x) = x - 2$
$d(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ $w(x) = x - 3$	$d(x) = x^3 - x^2 - 17x - 15$ $w(x) = x + 3$	$d(x) = x^3 - 4x^2 - 17x + 60$ $w(x) = x + 4$

Ejercicios. Realiza las divisiones indicadas y expresa el resultado en la forma de (1).

$f(x) = x^3 - 6x^2 - x + 30$ $d(x) = x + 1$	$f(x) = x^3 - 4x^2 - 17x - 60$ $d(x) = x^2 + x - 2$	$f(x) = x^3 + 4x^2 - 17x - 60$ $d(x) = x^2 - 3x - 2$

Aprendizaje: El alumno resolverá ecuaciones polinomiales que se puedan factorizar utilizando los distintos métodos de exploración señalados en la temática.

Cuando la división de un polinomio es entre un binomio hay un proceso llamado **división sintética** que simplifica la operación como se muestra a continuación.

Ejemplo 1. En el ejemplo 2 de la secuencia anterior se realizo la siguiente operación, dividir la función polinomial $f(x) = 6x^3 - 19x^2 + 16x - 4$ entre la función $d(x) = x – 2$.

Se escriben los coeficientes de la función f(x) como se muestra a continuación, en caso de haber potencias que no aparecen en la función se deja un espacio en blanco para dicha potencia.

$$\begin{array}{c|cccc} & 6 & -19 & 16 & -4 \end{array}$$

A la izquierda del coeficiente principal se escribe el término independiente de la función d(x) con signo contrario al que tiene en la función.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 6 & -19 & 16 & -4 \end{array}$$

Ahora se escribe el coeficiente principal de la función f(x) como se muestra a continuación.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 6 & -19 & 16 & -4 \\ & & & & \\ \hline & 6 & & & \end{array}$$

Se efectúa la multiplicación (2)(6) el resultado se escribe debajo del -19 y los números se suman, el resultado de la suma se escribe a la derecha del 6.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 6 & -19 & 16 & -4 \\ & & 12 & & \\ \hline & 6 & -7 & & \end{array}$$

Se repite el proceso anterior, se efectúa la multiplicación (2)(-7) el resultado se escribe debajo del 16, los números se suman y el resultado se escribe a la derecha del -7.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 6 & -19 & 16 & -4 \\ & & 12 & -14 & \\ \hline & 6 & -7 & 2 & \end{array}$$

Nuevamente se tiene el producto de (2)(2) el resultado se escribe debajo del 4, se suman los números y el resultado se escribe a la derecha del 2.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 6 & -19 & 16 & -4 \\ & & 12 & -14 & 4 \\ \hline & 6 & -7 & 2 & 0 \end{array}$$

El cociente es la función $c(x) = 6x^2 – 7x + 2$ y el residuo es la función $r(x) = 0$, que corresponde al polinomio nulo.

Ejemplo 2. Divide la función $f(x) = x^4 – x^3 – 19x^2 – 11x + 30$, entre la función $d(x) = x + 3$.

De acuerdo al ejemplo anterior tenemos.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -3 & 1 & -1 & -19 & -11 & 30 \\ & & -3 & 12 & 21 & -30 \\ \hline & 1 & -4 & -7 & 10 & 0 \end{array}$$

Comprueba que se realizaron los pasos indicados en el ejemplo anterior, el cociente es la función polinomial $c(x) = x^3 – 4x^2 – 7x + 10$ y el residuo es la función $r(x) = 0$, puedes comprobar el resultado haciendo la operación de manera normal.

Ejemplo 3. Divide la función $f(x) = x^4 – 1$, entre la función $x + 1$.

Comprueba que se han realizado todos los pasos indicados en el ejemplo 1.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ & & -1 & 1 & -1 & 1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

El cociente es $c(x) = x^3 – x^2 + x – 1$, el residuo es la función $r(x) = 0$.

Ejemplo 4. Divide la función $f(x) = x^4 – x^3 – 19x^2 – 11x + 30$, entre la función $d(x) = x – 6$.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 6 & 1 & -1 & -19 & -11 & 30 \\ & & 6 & 30 & 66 & 330 \\ \hline & 1 & 5 & 11 & 55 & 360 \end{array}$$

Comprueba que el cociente es $c(x) = x^3 + 5x^2 + 11x + 55$ y el residuo es $r(x) = 360$.

Realiza las siguientes divisiones.

Dividendo f(x)	Divisor d(x)	Cociente c(x)	Residuo r(x)
$x^3 – 8x^2 + 21x - 18$	$x + 7$		
$x^5 - 1$	$x + 3$		
$x^2 – 2x - 63$	$x + 9$		
$x^3 – 8x^2 + 21x - 18$	$x – 3$		
$x^5 - 1$	$x – 1$		
$x^2 – 2x - 63$	$x – 9$		
$x^4 - 1$	$x + 1$		
$x^3 + 3x^2 – x – 3$	$x + 3$		
$x^4 – 13x^2 + 36$	$x + 2$		
$x^4 – 13x^2 + 36$	$x – 3$		

Aprendizaje: El alumno resolverá ecuaciones polinomiales que se puedan factorizar utilizando los distintos métodos de exploración señalados en la temática.

Como recordatorio, se muestra la división del polinomio f(x) = $x^3 - x^2 - 14x + 24$ entre el polinomio c(x) = x + 3, para mostrar el proceso que se realizo en la práctica anterior.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 4x - 2 \\
\hline
x+3 & x^3 - x^2 - 14x + 24 \\
 & -(x^3 + 3x^2) \\
 & \quad -4x^2 - 14x \\
 & \quad -(-4x^2 - 12x) \\
 & \qquad -2x + 24 \\
 & \qquad -(-2x - 6) \\
 & \qquad\quad 30
\end{array}
$$

Ahora realiza las siguientes divisiones de polinomios y en cada caso escribe los polinomios cociente y residuo correspondientes.

Dividendo f(x)	Divisor d(x)	Cociente c(x)	Residuo r(x)
$x^3 + 5x^2 - 12x - 36$	$x - 1$		
$x^2 - x - 12$	$x + 1$		
$x^2 + 7x + 18$	$x + 4$		
$x^3 + 3x^2 - 10x - 24$	$x - 1$		
$2x^3 + 4x^2 - 58x - 60$	$x + 5$		
$3x^3 - 5x^2 + 6x - 10$	$x - 2$		
$5x^3 - 4x^2 + 3x - 12$	$x^2 - 2x + 3$		
$5x^3 - 4x^2 + 3x - 16$	$x^2 - 2x + 3$		

Antes de continuar recordemos la manera de evaluar una función polinomial f(x) para un valor determinado de la variable independiente x.

Encontrar el valor de $f(x) = 4x^2 - 5x + 12$, para x = 3.

Tenemos que sustituir el valor de x en la fórmula y hacer las operaciones indicadas para encontrar el valor f(3) de la función polinomial.

$f(3) = 4(3)^2 - 5(3) + 12$

$f(3) = 4(9) - 15 + 12$

$f(3) = 36 - 15 + 12$

$f(3) = 33$

El valor de f(x) para x = 3 es, f(3) = 33.

Encontrar el valor de $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x + 3$, para $x = -4$.

$f(-4) = 2(-4)^3 + 3(-4)^2 - 5(-4) + 3$

$f(-4) = 2(-64) + 3(16) - 5(-4) + 3$

$f(-4) = -128 + 48 - (-20) + 3$

$f(-4) = -128 + 48 + 20 + 3$

$f(-4) = -57$

El valor de f(x) para x = -4 es, f(-4) = -57.

Ya que hemos recordado la forma de evaluar una función polinomial f(x) para un valor determinado $x = x_0$ de la variable independiente, encuentra el valor de cada una de las siguientes funciones polinomiales, para el valor indicado.

f(x)	$x = x_0$	$f(x_0)$
$x^3 + 5x^2 - 12x - 36$	x = 1	
$x^2 - x - 12$	x = -1	
$x^2 + 7x + 18$	x = -4	
$x^3 + 3x^2 - 10x - 24$	x = 1	
$2x^3 + 4x^2 - 58x - 60$	x = -5	
$3x^3 - 5x^2 + 6x - 10$	x = 2	

Como puedes observar la primera función $f(x) = x^3 + 5x^2 - 12x - 36$ de esta tabla corresponde a la misma función de la tabla anterior que fue dividida por x – 1, así que en la siguiente tabla escribe el residuo de la división y el valor de f(1) y compáralos.

Función	Residuo r(x) de dividir por x - 1	Valor de f(1)
$x^3 + 5x^2 - 12x - 36$		

¿Cómo son entre sí el residuo r(x) y f(1)?: ____

Vamos a repetir este procedimiento de comparación para las siguientes 5 funciones de la tabla.

Función	Residuo r(x) de dividir por x + 1	Valor de f(-1)
$x^2 - x - 12$		

Función	Residuo r(x) de dividir por x + 4	Valor de f(-4)
$x^2 + 7x + 18$		

Función	Residuo r(x) de dividir por $x - 1$	Valor de f(1)
$x^3 + 3x^2 - 10x - 24$		

Función	Residuo r(x) de dividir por $x + 5$	Valor de f(-5)
$2x^3 + 4x^2 - 58x - 60$		

Función	Residuo r(x) de dividir por $x - 2$	Valor de f(2)
$3x^3 - 5x^2 + 6x - 10$		

En cada caso, ¿cómo son, el residuo de la división por $x - x_0$ y el valor de la función $f(x_0)$?

____

____

Consideras que tu observación es valida al dividir cualquier polinomio f(x) por $x - x_0$, y el valor $f(x_0)$.

____

En caso de considerar que tu observación es cierta para cualquier polinomio, vamos a probarla para los siguientes polinomios.

Para cada uno de los siguientes polinomios f(x) encuentra el residuo al dividirlo por $x - x_0$, y luego encuentra $f(x_0)$.

Función polinomial f(x)	Residuo de la división por $x - x_0$	Valor de $f(x_0)$
$f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 31x + 84$	$x - 3$, r(x) =	f(3) =
$f(x) = 12x^3 + 55x^2 - 96x + 36$	$x - 5$, r(x) =	f(5) =
$f(x) = 15x^3 + 32x^2 - 4x - 16$	$x + 8$, r(x) =	f(-8) =
$f(x) = x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 2x + 5$	$x + 4$, r(x) =	f(-4) =

Busca en un libro de los recomendados en la bibliografía para este capítulo y busca el teorema que se ilustra en esta secuencia didáctica, escríbelo a continuación y compáralo con tu inferencia.

____

____

____

Aprendizaje: El alumno resolverá ecuaciones polinomiales que se puedan factorizar utilizando los distintos métodos de exploración señalados en la temática.

En la secuencia anterior los alumnos investigaron el teorema del residuo que indica lo siguiente, **Si un polinomio f(x) se divide entre x – c, el residuo de la operación es f(c)**, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1. Sea $f(x) = 2x^3 - 7x^2 - 24x + 45$ entre $x - 2$, y luego evalúa f(2).

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 - 3x - 30 \\
\hline
x - 2 & 2x^3 - 7x^2 - 24x + 45 \\
 & -(2x^3 - 4x^2) \\
 & \qquad -3x^2 - 24x + 45 \\
 & \qquad -(-3x^2 + 6x) \\
 & \qquad\qquad -30x + 45 \\
 & \qquad\qquad -(-30x + 60) \\
 & \qquad\qquad\qquad -15
\end{array}
$$

El residuo de la operación es r(x) = - 15.

Ahora se obtiene f(2).

$f(2) = 2(2)^3 - 7(2)^2 - 24(2) + 45$

$f(2) = 2(8) - 7(4) - 24(2) + 45$

$f(2) = 16 - 28 - 48 + 45$

$f(2) = 61 - 76$

$f(2) = -15$

Y se observa que ambos resultados son iguales, como lo indica el teorema del residuo.

Si aplicamos el teorema del residuo al siguiente ejemplo.

Ejemplo 1. Realiza la siguiente división de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 17x + 30$ entre $x - 2$

Al evaluar f(x) para x = 2, tenemos.

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 17x + 30$

$f(2) = 2(2)^3 - 3(2)^2 - 17(2) + 30$

$f(2) = 2(8) - 3(4) - 17(2) + 30$

$f(2) = 16 - 12 - 34 + 30$

$f(2) = 36 - 36$

$f(2) = 0$

Así que al hacer la división de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 17x + 30$ entre $x - 2$ el residuo r(x) debe ser el polinomio cero como se muestra a continuación.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 + x - 15 \\
\hline
x - 2 & 2x^3 - 3x^2 - 17x + 30 \\
 & -(2x^3 - 4x^2) \\
 & \quad x^2 - 17x + 30 \\
 & \quad -(x^2 - 2x) \\
 & \quad\quad -15x + 30 \\
 & \quad\quad -(-15x + 30) \\
 & \quad\quad\quad 0x + 0
\end{array}
$$

Así que podemos escribir.

$f(x) = 2x^3 – 3x^2 – 17x + 30 = (2x^2 + x – 15)(x – 2)$.

Que nos indica que $x – 2$ es un factor del polinomio $f(x) = 2x^3 – 3x^2 – 17x + 30$. Este ejemplo ilustra el teorema del Factor que es de gran importancia en la factorización de las funciones polinomiales.

Teorem**a del Factor:** Toda función polinomial **f(x)** tiene un factor **x – c,** si y sólo si **f(c) = 0.**

Aplica el teorema del Residuo a los siguientes problemas y escribe en forma de producto los que cumplan el teorema del factor.

Dividendo	divisor	residuo	
f(x)	x – c	r(x)	f(x) = c(x)(x – c) + r(x)
$3x^2 – 7x - 20$	x - 4		
$x^2 – 15x + 56$	x + 4		
$x^3 + 6x^2 – 13x – 42$	x + 2		
$4x^3 + 15x^2 – 24x + 5$	x – 1		
$2x^3 – 7x^2 – 19x + 60$	x – 3		
$5x^3 – 8x^2 – 27x + 18$	x + 2		
$5x^4 – 8x^3 – 37x^2 + 84x – 36$	x + 3		
$x^4 + 2x^3 – 14x^2 + 2x – 15$	x – 1		

Si P(x) es un polinomio y r es un número real que cumple con P(r) = 0, entonces r se denomina cero del polinomio y es una solución o raíz de la ecuación polinómica P(x) = 0.

Secuencia didáctica de exploración.

Aprendizaje: El alumno resolverá ecuaciones polinomiales que se puedan factorizar utilizando los distintos métodos de exploración señalados en la temática.

En la resolución de los siguientes problemas se aplicaran los resultados obtenidos en la unidad, así como algunos resultados obtenidos en los cursos anteriores de matemáticas.

Problema 1. Encontrar los ceros de la función polinomial $P(x) = x^2 – 2x – 15$.

Recordaras que los ceros o raíces de una función P(x), son los números x_0 tales que $P(x) = 0$.

Así que para encontrar los ceros de la función polinomial P(x), tenemos que resolver la siguiente ecuación.

$$x^2 – 2x – 15 = 0$$

Se pueden encontrar las raíces de la ecuación completando cuadrados.

$x^2 – 2x – 15 + 15 = 0 + 15$	Sumando 15 en ambos miembros de la ecuación.
$x^2 – 2x = 15$	Para completar el trinomio cuadrado perfecto, se obtiene la mitad del coeficiente lineal, y se suma su cuadrado en ambos miembros de la igualdad.
$x^2 – 2x + 1 = 15 + 1$	El trinomio cuadrado perfecto se puede escribir como un binomio al cuadrado.
$(x – 1)^2 = 16$	Sacando la raíz cuadrada en ambos miembros de la igualdad.
$\sqrt{(\mathbf{x}-\mathbf{1})^2} = \pm\sqrt{\mathbf{16}}$	Simplificando
$x – 1 = \pm 4$	Sumando 1 en ambos miembros de la igualdad.
$x = \pm 4 + 1$	Tomando el signo + se obtiene la primera raíz.
$x_1 = 4 + 1 = 5$, $x_1 = 5$	La segunda raíz se obtiene tomando el signo -.
$x_2 = -4 + 1 = -3$, $x_2 = -3$	

¿Encuentras alguna relación entre los valores de las raíces $x_1 = 5$, $x_2 = -3$ y alguno de los coeficientes de la función polinomial $P(x) = x^2 – 2x – 15$?

____

____

____

Problema 2. Encontrar los ceros de la función polinómica $P(x) = x^2 + 5x - 36$.

Para encontrar las raíces de la función polinomial P(x) tenemos que resolver la siguiente ecuación de segundo grado.

$$x^2 + 5x - 36 = 0$$

Utilizando la fórmula general $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, donde a = 1, b = 5, c = -36, de manera que sustituyendo valores en la fórmula.

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4(1)(-36)}}{2(1)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 144}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{169}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm 13}{2}$$

La primera raíz se obtiene tomando el signo positivo, x_1 = _______.

La segunda raíz se obtiene al considerar el signo negativo, x_2 = _______.

¿Existe alguna relación entre los valores obtenidos y alguno de los coeficientes de la función polinomial $P(x) = x^2 + 5x - 36$.

____

____

____

¿Es la misma relación que en el problema anterior?

____

Aplica tus conjeturas para encontrar las raíces de las siguientes funciones polinomiales de segundo grado.

$P(x) = x^2 - 9x + 14$, x_1 = _____, x_2 = _____

$P(x) = x^2 + 11x + 24$, x_1 = _____, x_2 = _____

$P(x) = x^2 - x - 20$, x_1 = _____, x_2 = _____

Veamos ahora que pasa con las raíces de una función polinomial de tercer grado.

Problema 3. Encuentra las raíces de la función polinomial $P(x) = x^3 – 2x^2 – 11x + 12$.

Usando la inferencia que debes haber obtenido al analizar las funciones polinomiales, que dice lo siguiente:

Las raíces de una función polinomial $P(x) = a_nx^n + . . . a_1x + a_0$, donde los coeficientes $a_n, . . . a_1, a_0$ son números enteros, y el coeficiente principal $a_n = 1$, son divisores del término independiente.

Tomando en cuenta este resultado, las posibles raíces de la ecuación $x^3 – 2x^2 – 11x + 12 = 0$ que se obtiene al hacer $P(x) = 0$, son los divisores del término independiente 12 y son.

$\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12$

De acuerdo al teorema del factor, para $x = -1$, y utilizando la división sintética.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -2 & -11 & 12 \\ & & -1 & 3 & 8 \\ \hline & 1 & -3 & -8 & 20 \end{array}$$

Como $r(x) = 20$, $x = -1$ no es una raíz de la función $f(x)$ y $(x + 1)$ no es un factor de la función.

Para $x = 1$.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -2 & -11 & 12 \\ & & 1 & -1 & -12 \\ \hline & 1 & -1 & -12 & 0 \end{array}$$

En este caso $r(x) = 0$, $x_1 = 1$ es una raíz de la función y $(x – 1)$ es un factor de la función y podemos escribir.

$x^3 – 2x^2 – 11x + 12 = (x^2 – x – 12)(x – 1)$

Para encontrar las otras dos raíces que falta se resuelve la ecuación $x^2 – x – 12 = 0$, verifica que las otras dos raíces son $x_2 = 4$ y $x_3 = -3$, de manera que los dos factores restantes de la función son $(x – 4)$ y $(x +3)$, la función polinomial se puede escribir de la siguiente manera.

$P(x) = x^3 – 2x^2 – 11x + 12 = (x – 1)(x – 4)(x + 3)$

Comprueba lo anterior realizando la multiplicación de polinomios indicada.

Problema 4. Encontrar las raíces de la función $f(x) = x^4 + 2x^3 -14x^2 + 2x – 15$.

Como se indico, las raíces son divisores del término independiente, y los posibles valores son.

$\pm1, \pm3, \pm5, \pm15$

Para $x = -1$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 2 & -14 & 2 & -15 \\ & & -1 & -1 & 15 & -17 \\ \hline & 1 & 1 & -15 & 17 & -32 \end{array}$$

$x = -1$ no es raíz de la función.

Para x = 1

1	1	2	-14	2	-15
		1	3	-11	-9
	1	3	-11	-9	-24

x = 1 no es raíz de la función.

Para x = -3

-3	1	2	-14	2	-15
		-3	3	33	-105
	1	-1	-11	35	-120

x = -3 no es una raíz de la función.

Para x = 3

3	1	2	-14	2	-15
		3	15	3	15
	1	5	1	5	0

x = 3 es una raíz de la función y (x – 3) es un factor por lo que la función se puede escribir como se muestra.

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - 14x^2 + 2x - 15 = (x - 3)(x^3 + 5x^2 + x + 5).$$

La búsqueda de las raíces que faltan se continua con la función $c(x) = x^3 + 5x^2 + x + 5$.

Para x = -5

-5	1	5	1	5
		-5	0	-5
	1	0	1	0

x = -5 es una raíz, y (x + 5) es un factor de $c(x) = x^3 + 5x^2 + x + 5$, y la función se puede escribir como se muestra.

$$c(x) = x^3 + 5x^2 + x + 5 = (x + 5)(x^2 + 1).$$

Y el polinomio original se puede escribir de la siguiente manera.

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - 14x^2 + 2x - 15 = (x - 3)(x^3 + 5x^2 + x + 5) = (x - 3)(x + 5)(x^2 + 1).$$

Comprueba que $x^2 + 1$, no tiene raíces reales.

Encuentra las raíces reales de los siguientes polinomios, y escríbelos como producto de factores.

1. $x^3 - 6x^2 - x + 30 = 0$
2. $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 3 = 0$
3. $x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 4x - 12 = 0$
4. $x^4 - 6x^3 + 22x + 15 = 0$
5. $x^2 + 5x - 24 = 0$
6. $x^2 + 5x - 14 = 0$
7. $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$
8. $x^3 + 2x^2 - 19x - 20 = 0$

Secuencia didáctica de exploración.

Aprendizaje: El alumno resolverá ecuaciones polinomiales que se puedan factorizar utilizando los distintos métodos de exploración señalados en la temática. Y aplicará dichos métodos para encontrar las raíces de una función polinomial.

En esta secuencia veremos la forma de obtener las raíces de una ecuación polinomial cuando el coeficiente principal es diferente de 1.

Problema 1. Encuentra las raíces de la ecuación polinomial $2x^2 - 7x + 3 = 0$.

Utilizando la ecuación general, $\mathbf{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$ con, a = 2, b = -7, c = 3.

$$\mathbf{x_{1,2} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(2)(3)}}{2(2)}}$$

$$\mathbf{x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4}}$$

$$\mathbf{x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4}}$$

$$\mathbf{x_{1,2} = \frac{7 \pm 5}{4}}$$

La primera raíz de la ecuación es $\mathbf{x_1 = \frac{7+5}{4} = \frac{12}{4} = 3}$, $x_1 = 3$.

La segunda raíz es, $\mathbf{x_2 = \frac{7-5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}}$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

Escribiendo la raíz $x_1 = 3$, como $\mathbf{x_1 = \frac{3}{1}}$, separando los numeradores y los denominadores, tenemos los siguientes grupos.

Numeradores = 3, 1

Denominadores = 2, 1

Busca si existe alguna relación entre los numeradores y alguno de los coeficientes del polinomio.

____

Busca si existe alguna relación entre los denominadores y alguno de los coeficientes del polinomio.

____

Problema 2. Encuentra las raíces del polinomio $6x^2 - 14x + 4 = 0$.

Empleando nuevamente la fórmula general $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, con a = 6, b = -14, c = 4.

Sustituyendo valores en la fórmula.

$$x_{1,2} = \frac{-(-14) \pm \sqrt{(-14)^2 - 4(6)(4)}}{2(6)}$$

$$x_{1,2} = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 96}}{12}$$

$$x_{1,2} = \frac{14 \pm \sqrt{100}}{12}$$

$$x_{1,2} = \frac{14 \pm 10}{12}$$

La primera raíz es x_1 = $\frac{14 + 10}{12} = \frac{24}{12} = \mathbf{2}$, $x_1 = 2$.

La segunda raíz es x_2 = $\frac{14 - 10}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

Los numeradores son, 2, 1

Los denominadores son, 1, 3

Busca si existe alguna relación entre los numeradores y alguno de los coeficientes del polinomio.

____

Busca si existe alguna relación entre los denominadores y alguno de los coeficientes del polinomio.

¿Las relaciones encontradas en ambos problemas es la misma? __________________________

Problema 3. Aplica tus observaciones para obtener las raíces de los siguientes polinomios:

$2x^2 + 11x - 6 = 0$

$3x^2 - 10x - 8 = 0$

$3x^3 + 2x^2 - 7x + 2 = 0$

$2x^3 - 5x^2 - 2x + 5 = 0$

La conjetura que debes de haber obtenido es la siguiente:

Para una función polinomial f(x) con coeficientes enteros, si $\frac{p}{q}$ es una raíz racional de la función de manera que no hay factores comunes entre p y q, p es un divisor del término independiente a_0 y q es un factor del coeficiente del término principal a_n.

Problema 4. Aplica la conjetura anterior para encontrar las raíces de la función polinomial f(x) = $5x^2 + 16x + 3$.

Usando el resultado anterior las posibles raíces de f(x) son de la forma $\frac{p}{q}$, donde **p** es un divisor de 3, y **q** es un divisor de 5, y los posibles valores de **p** y **q** son los siguientes.

p = ±1, ±3

q = ±1, ±5

La primera posibilidad es para p = -1, q = -1, que da $\frac{p}{q} = 1$.

$$\begin{array}{r|rrr} 1 & 5 & 16 & 3 \\ & & 5 & 21 \\ \hline & 5 & 21 & 24 \end{array}$$

Como el residuo es diferente de 0, x = 1 no es raíz del polinomio.

Para p = -1, q = 1 tenemos $\frac{p}{q} = -1$

$$\begin{array}{r|rrr} -1 & 5 & 16 & 3 \\ & & -5 & 11 \\ \hline & 5 & -11 & 14 \end{array}$$

x = -1 no es raíz del polinomio.

Para p = -1, q = 5 se tiene $\frac{p}{q} = -\frac{1}{5}$

$$\begin{array}{r|rrr} -\frac{1}{5} & 5 & 16 & 3 \\ & & -1 & -3 \\ \hline & 5 & 15 & 0 \end{array}$$

x = $-\frac{1}{5}$ es raíz del polinomio.

La función polinomial se puede escribir como.

$f(x) = 5x^2 + 16x + 3 = (5x + 15)(x + \frac{1}{5}) = 5(x + 3)(x + \frac{1}{5}) = (x + 3)(5x + 1)$, explica los pasos realizados para llegar al resultado final.

Problema 5. Encontrar las raíces de la función polinomial $f(x) = 2x^2 – x – 3$.

Por el resultado anterior las posibles raíces de f(x) son de la forma $\frac{p}{q}$, donde **p** es un divisor de -3, y **q** es un divisor de 2, y los posibles valores de **p** y **q** son los siguientes.

$p = \pm 1, \pm 3$

$q = \pm 1, \pm 2$

Para p = -1, q = -1 se tiene $\frac{p}{q} = 1$

$$\begin{array}{r|rrr} 1 & 2 & -1 & -3 \\ & & 2 & 1 \\ \hline & 2 & 1 & -2 \end{array}$$

x = 1 no es una raíz de la función polinomial.

Para p = -1, q = 1 se tiene $\frac{p}{q} = -1$

$$\begin{array}{r|rrr} -1 & 2 & -1 & -3 \\ & & -2 & 3 \\ \hline & 2 & -3 & 0 \end{array}$$

x = -1 es una raíz de la función polinomial y (x + 1) es un factor de la función polinomial el otro factor es (2x – 3), de manera que la otra raíz es.

$2x – 3 = 0, \qquad 2x = 3, \qquad x = \frac{3}{2}$

Encuentra las raíces de las siguientes funciones polinomiales.

1. $3x^3 + 2x^2 – 7x + 2$

2. $5x^3 + 6x^2 – 29x – 6$

3. $3x^3 – 2x^2 – 12x + 8$

4. $5x^3 – x^2 – 5x + 1$

5. $x^4 – 8x^2 – 9$

Secuencia didáctica de exploración.

Aprendizaje: El alumno resolverá ecuaciones polinomiales que se puedan factorizar utilizando los distintos métodos de exploración señalados en la temática.

Una cuestión importante es tener una idea de la cantidad de raíces positivas o negativas que puede tener una función polinomial con coeficientes reales,

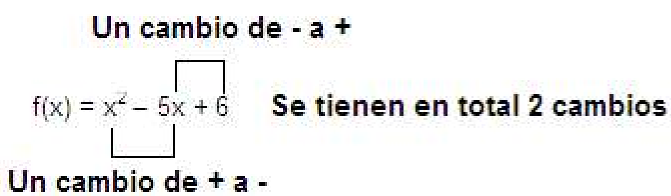
$$f(x) = a_nx^n + . . . + a_1x + a_0$$

Examinemos los siguientes problemas para llegar a una conclusión.

Problema 1. Si $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$ son las raíces reales positivas de un polinomio, entonces $x – 2$ y $x – 3$ son factores de la función, y la función la podemos obtener al efectuar la siguiente multiplicación.

$$f(x) = (x – 2)(x – 3) = x^2 – 5x + 6$$

Ahora consideramos la variación de signos que hay en la función f(x).



La función tiene dos raíces reales positivas.

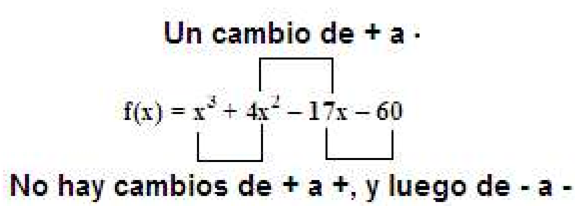
Ahora consideremos f(-x).

$$f(-x) = (-x)^2 – 5(-)x + 6 = x^2 + 5x + 6$$

No hay cambios de signos en la función polinomial f(-x) y la función original no tiene raíces reales negativas,

Problema 2. Consideremos ahora la función f(x) cuyas raíces son, $x_1 = -3$, $x_2 = -5$ y $x_3 = 4$, dos raíces reales negativas y una positiva. Así que $(x + 3)$, $(x + 5)$ y $(x – 4)$ son factores de la función y la forma polinomial de f(x) es la siguiente.

$$f(x) = (x + 3)(x + 5)(x – 4) = x^3 + 4x^2 – 17x – 60$$

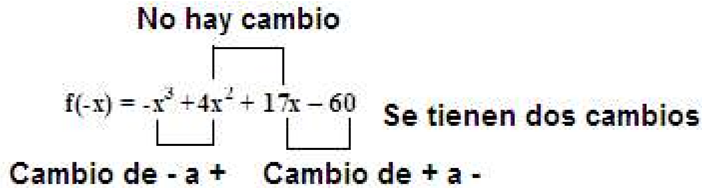


La función tiene un cambio de signo y tiene una raíz positiva real.

Si ahora consideramos f(-x)

$$f(-x) = (-x)^3 + 4(-x)^2 - 17(-x) - 60 = -x^3 + 4x^2 + 17x - 60$$

tenemos



Y la función f(x) tiene 2 raíces reales negativas.

Problema 3. Consideremos ahora la función f(x) que tiene por factores (x – 1), (x + 3) y (x^2 + 1), por lo que la función polinomial tendrá una raíz real positiva y una raíz real negativa. ¿cuáles son? La función en su forma polinomial se obtiene al efectuar el siguiente producto.

$$f(x) = (x - 1)(x + 3)(x^2 + 1) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3$$

La función $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3$, tiene tres cambios de signo y una raíz real positiva.

Al considerar la función f(-x).

$f(-x) = (-x)^4 + 2(-x)^3 - 2(-x)^2 + 2(-x) - 3 = x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 3$, tiene un cambio de signo y la función f(x) tiene una raíz real negativa.

Problema 4. Sea f(x) la función que tiene por factores (x^2 + 4), (x + 1) y (x + 2), la función polinomial que resulta de efectuar la multiplicación de los factores tiene 2 raíces reales negativas.

$$f(x) = (x^2 + 4)(x + 1)(x + 2) = x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

No presenta cambios de signo, y la función no tiene raíces reales positivas.

La función f(-x).

$$f(-x) = (-x)^4 + 3(-x)^3 + 6(-x)^2 + 12(-x) + 8 = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 12x + 8$$

Tiene cuatro cambios de signo, y la función f(x) tiene dos raíces reales negativas.

Observa los problemas desarrollados y enuncia la regla de los signos de Descartes que relaciona los cambios de signo de la función polinomial y el posible número de raíces.

____

Busca la regla en un libro y compárala con tu resultado.

Encuentra las raíces de las siguientes funciones polinomiales, aplicando todos los conceptos tratados.

1. $f(x) = x^4 - 1$
2. $f(x) = x^3 - 1$
3. $f(x) = x^4 + x^3 - 11x^2 + x - 12$
4. $f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$
5. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 3$

Secuencia didáctica de exploración.

Aprendizaje: El alumno resolverá ecuaciones polinomiales que se puedan factorizar utilizando los distintos métodos de exploración señalados en la temática.

El último procedimiento que vamos a tratar en esta sección es el acotamiento de las raíces reales de una función polinomial con coeficientes reales, analizando los siguientes problemas.

Problema 1. Consideremos la función polinomial f(x) cuyos factores son los siguientes binomios, (x – 4) y (x + 3).

$$f(x) = (x - 4)(x + 3) = x^2 - x - 12$$

Decimos que un número real "**a**", es cota inferior de las raíces reales de una función polinomial f (x) si se cumple que: $\mathbf{a \leq x_i}$ para cualquier raíz $\mathbf{x_i}$ de la función polinomial.

Por ejemplo **a = -4**, es una cota inferior de las raíces $x_1 = -3$ y $x_2 = 4$ de la función polinomial f(x).

Un número real "**b**", es una cota superior de las raíces reales de una función polinomial f(x) si se cumple que: $\mathbf{x_i \leq b}$ para cualquier raíz $\mathbf{x_i}$ de la función polinomial.

Se tiene que **b = 5** es una cota superior de las raíces $x_1 = -3$ y $x_2 = 4$ de la función polinomial f(x).

Consideremos ahora el binomio (x – 5) y realicemos la división de la función f(x) entre el binomio dado utilizando la división sintética.

$$\begin{array}{r|rrr} 5 & 1 & -1 & -12 \\ & & 5 & 20 \\ \hline & 1 & 4 & 8 \end{array}$$

Ahora consideremos cualquier número mayor que 5, por ejemplo x = 6, que también es una cota superior de las raíces, y realicemos la división sintética.

$$\begin{array}{r|rrr} 6 & 1 & -1 & -12 \\ & & 6 & 30 \\ \hline & 1 & 5 & 18 \end{array}$$

Considera otro número que sea mayor a 6, y efectúa la división sintética, observas algún comportamiento parecido en la fila del cociente, ____

Sea ahora a = -4, una cota inferior, que nos da el binomio a + 4, y realicemos la división de la función f(x) entre el binomio dado utilizando la división sintética.

$$\begin{array}{r|rrr} -4 & 1 & -1 & -12 \\ & & -4 & 20 \\ \hline & 1 & -5 & 8 \end{array}$$

Consideremos ahora otra cota inferior a = -5 inferior a la anterior, y realicemos la división sintética de f(x) entre el binomio a + 5.

-5	1	-1	-12
		-5	30
	1	-6	18

Toma otra cota inferior a -5, efectúa la división sintética y observa si hay alguna regularidad en la fila del cociente ____.

Problema 2. Consideremos la función polinomial f(x) producto de los siguientes binomios, (x + 3), (x + 5) y (x – 3).

$$f(x) = x^3 + 5x^2 - 9x - 45$$

Una cota inferior de las raíces es el número a = -7, así que realizando la división sintética se tiene.

-7	1	5	-9	-45
		-7	14	-35
	1	-2	5	-80

Otra cota inferior es el número a = -8, y al realizar la división sintética tenemos.

-8	1	5	-9	-45
		-8	24	-120
	1	-3	15	-165

Observas alguna regularidad en la fila del cociente, ¿se parece a la regularidad del problema anterior para las cotas inferiores?

Sea b = 4 una cota superior.

4	1	5	-9	-45
		4	36	108
	1	9	27	63

Ahora consideremos b = 5 otra cota superior.

5	1	5	-9	-45
		5	50	205
	1	10	41	160

Observa la fila de los cocientes para encontrar alguna regularidad y compárala con la obtenida en el problema anterior para las cotas superiores.

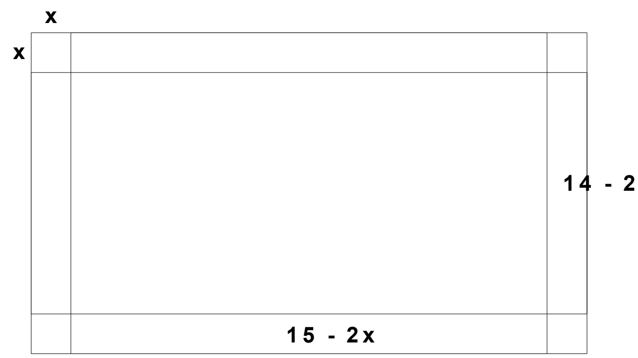
Busca en un libro el teorema de la cota inferior y superior para las raíces reales de un polinomio y compáralo con tus conjeturas.

Ejercicios. Encuentra las raíces reales de las siguientes funciones polinomiales usando todas las herramientas vistas.

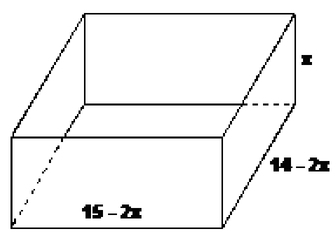
1. $f(x) = x^4 + x^3 - 11x^2 + x - 12$
2. $f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$

Aprendizaje: Identificará los ceros de una función polinomial como las raíces de la ecuación polinomial correspondiente.

Problema 1. Se tiene una lámina cuyas dimensiones son 15 x 14 decímetros, para construir una caja rectangular abierta cuyo volumen sea 216 decímetros cúbicos se tienen que cortar cuadrados de lados igual a x decímetros como se muestra en la siguiente figura, determinar el valor de x de acuerdo a las condiciones del problema.



La caja que se construye después de haber hecho los cortes se muestra en la siguiente imagen.



El volumen de la caja esta dado por la siguiente función:

$$C(x) = x\,(14 - 2x)\,(15 - 2x)$$

La función polinomial para resolver el problema de que el volumen de la caja sea de 216 dm^3, es la siguiente.

$$V(x) = x\,(14 - 2x)\,(15 - 2x) - 216$$

Explica por qué se establece esta nueva función: ____
____

El valor de x que satisface las condiciones del problema, es el que hace que V(x) = 0, lo que permite establecer la siguiente ecuación polinomial.

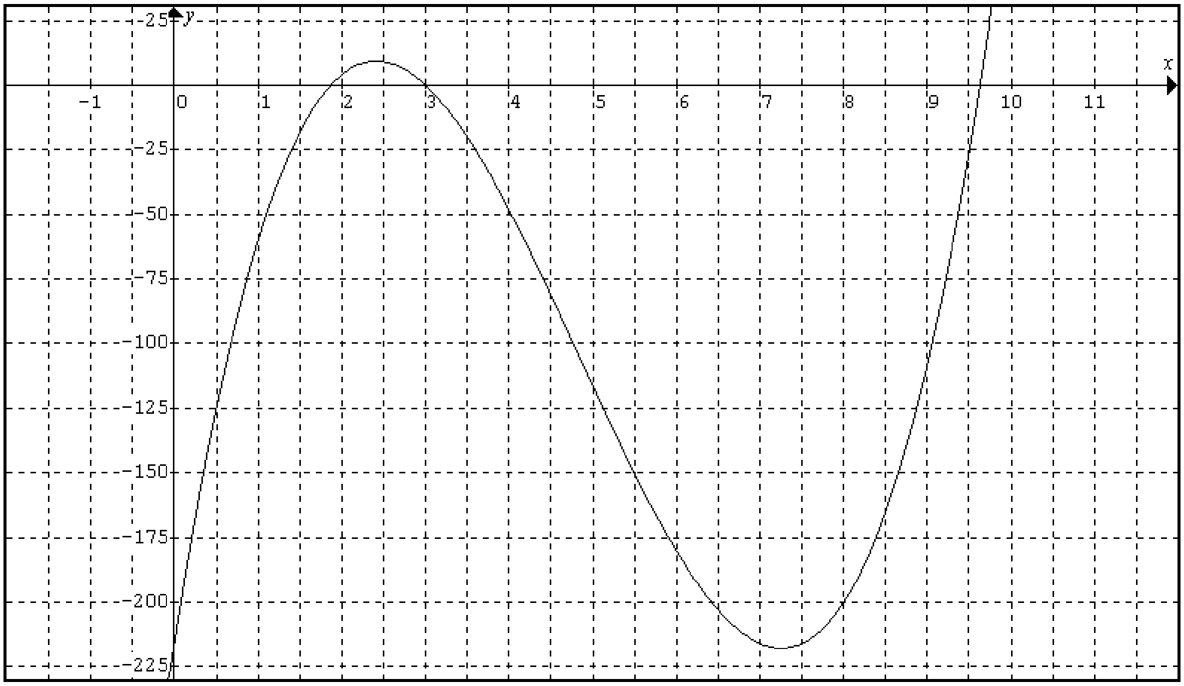
$$0 = x\,(14 - 2x)\,(15 - 2x) - 216$$

Desarrollando la multiplicación de polinomios indicada.

$$4x^3 - 58x^2 + 210x - 216 = 0$$

Que es el polinomio asociado a la función V(x), cuando V(x) = 0.

Si analizamos la gráfica de la función que se presenta en la siguiente imagen.



Podemos observar que, hay tres raíces que aproximadamente son:

$x_1 = 1.87$
$x_2 = 3$
$x_3 = 9.7$

Analiza de acuerdo a las condiciones del problema, ¿cuáles valores son parte de la solución?

Problema 2. Encuentra dos números cuya diferencia sea 4, y cuyo producto sea 96.
Sean a y b los números que buscamos.

La diferencia de los números debe ser 4, nos da la expresión. $a - b = 4$

El producto de los dos números se puede escribir como: $p = ab$

Al despejar a de la primera expresión tenemos. $a = 4 + b$

Al sustituir el despeje en la expresión para el producto, se tiene. $p(b) = (4 + b)b$ el producto es una función del valor que tome el número b.

$$p(b) = b^2 + 4b$$

Por las condiciones del problema tenemos que $p(b) = 96$, lo que nos lleva a la siguiente igualdad.

$$96 = b^2 + 4b$$

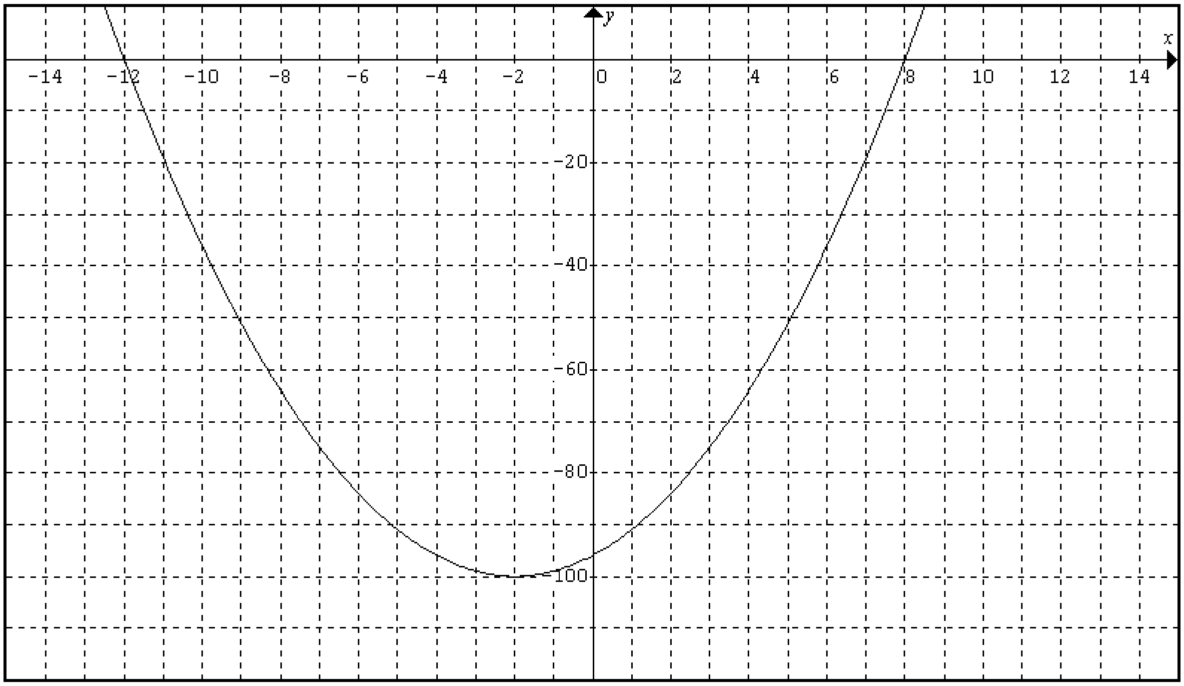
De la cual podemos establecer la siguiente función polinomial para el problema.

$$P(b) = b^2 + 4b - 96$$

De manera que los valores de b que satisfacen al problema, son los ceros de la función P(b), o sea los valores de b, tal que $P(b) = 0$, lo que nos lleva a la ecuación cuadrática asociada a la función P(b) obtenida.

$$0 = b^2 + 4b - 96$$

Analizando la función de la función $P(b) = b^2 + 4b - 96$, que se muestra en la siguiente figura.



Vemos que $x_1 = 8$ y $x_2 = -12$ son los las raíces de la ecuación asociada, además son los ceros de la función polinomial del problema.

Analiza los valores obtenidos para ver cuál satisface las condiciones del problema.

Ejercicios:

Resuelve los siguientes ejercicios, encontrando la función polinomial del problema y la ecuación polinomial correspondiente.

1. Encuentra dos números reales cuya suma sea 20 y cuyo producto sea 99.

2. Sea la función polinomial $m(x) = x^3 - 7x^2 + 36$, encontrar el valor de x, que hace que $m(x) = 30$.

3. Se tiene una lámina de 9 x 13 decímetros cuadrados, con la cual se quiere formar una caja de base rectangular de manera que su volumen sea de 90 decímetros cúbicos. Encuentra el valor de x que se debe cortar en cada esquina.

Secuencia Didáctica de Consolidación:

Aprendizaje: A partir de las raíces de una ecuación polinomial construye una función polinomial y bosqueja la gráfica asociada a ella.

Inicio de la secuencia:

Problema 1. Las raíces de una ecuación polinomial son $x = 4$, $x = 3$ y $x = -2$, encuentra la función polinomial correspondiente y bosqueja la gráfica asociada a la función.

Como $x = 4$, $x = 3$ y $x = -2$ son raíces de la ecuación polinomial, $x - 4$, $x - 3$ y $x + 2$ son factores de la función polinomial correspondiente, y se puede expresar como un producto.

$$f(x) = (x - 4)(x - 3)(x + 2)$$

Al realizar el producto indicado, se obtiene la función polinomial correspondiente.

$$f(x) = x^3 + x^2 - 14x - 24$$

Para realizar el bosquejo de la gráfica se consideran los siguientes intervalos.

A la izquierda de la primera raíz negativa, $(-\infty, -2)$.

Entre la primera y la segunda raíz, $(-2, 3)$.

Entre la segunda y la tercera raíz, $(3, 4)$.

A la derecha de la última raíz, $(4, \infty)$.

Para ver el comportamiento de la función en el intervalo $(-\infty, -2)$ completa la siguiente tabla de valores.

x	f(x)
-10	
-50	
-100	
-1000	
-10000	

Los valores de la función ¿están arriba o abajo del eje de las x´s?, ________________________

Y, ¿se alejan o se acercan al eje de las x´s?, ____

Para ver el comportamiento de la función en el intervalo $(-2, 3)$ completa la siguiente tabla de valores.

X	f(x)
-1.4	
2.8	

Los valores de la función, ¿están arriba o abajo del eje de las abscisas?, ___________________ Para el comportamiento de la función en el intervalo (3, 4), realiza la siguiente tabla de valores.

X	f(x)
3.4	
3.8	

Los valores de la función, ¿están arriba o debajo del eje de las abscisas?, ___________________

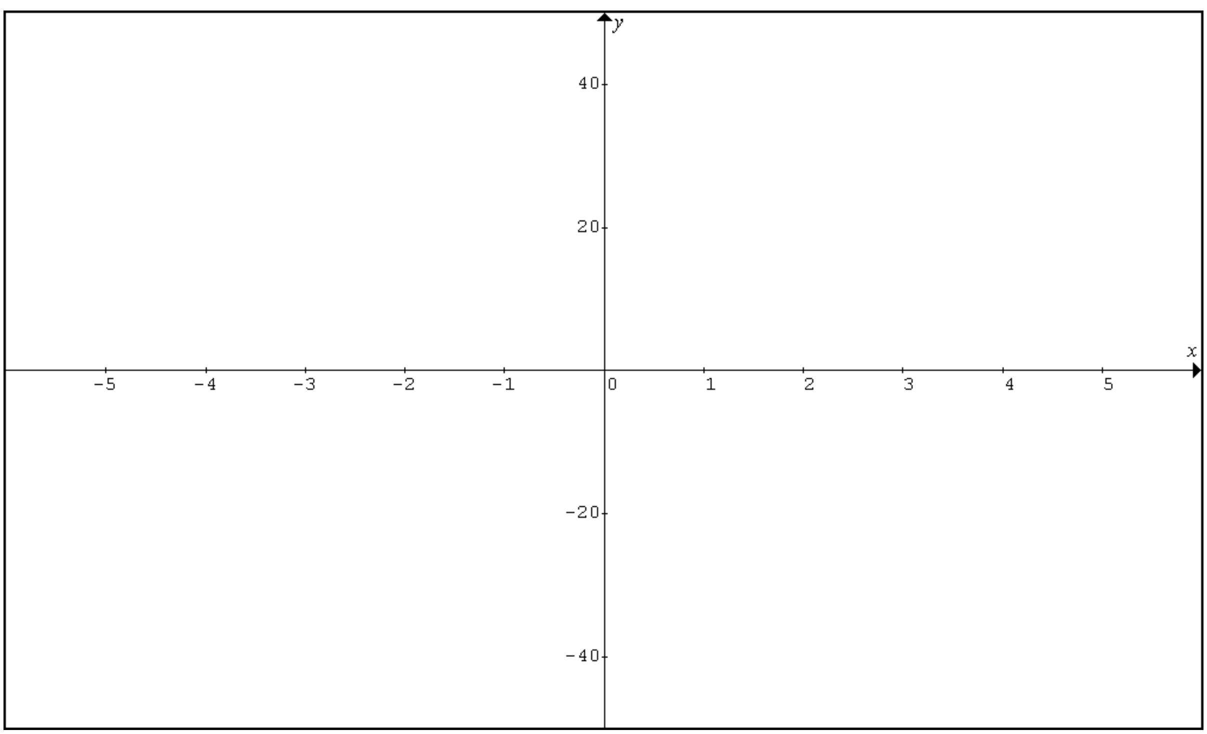
Finalmente para ver el comportamiento de la función en el intervalo (4, ∞), completa la siguiente tabla de valores.

x	f(x)
10	
50	
100	
1000	
10000	

Los valores de la función, ¿están arriba o debajo del eje x?, _______________________________

Los valores de la función, ¿se alejan o se acercan al eje x?, _______________________________

Considerando que el valor de la función en cada raíz es cero, realiza un bosquejo de la gráfica.



Ejercicios. Dadas las raíces de la función polinomial, elabora su gráfica y encuentra la función.

1. x = 1, x = 1, x = -4
2. x = -5, x = -1, x = -1, x = 3, x = 5

Secuencia de Consolidación y Aplicación.

Aprendizaje. Bosqueja la gráfica de funciones polinomiales a partir del comportamiento que presentan, tanto local como al infinito.

Determina las concavidades de la gráfica en base al signo y al exponente del término de mayor grado de la función polinomial y los ceros de la misma

Problema 1. Encuentra las raíces, la gráfica y las concavidades de la siguiente función polinomial.

$$f(x) = x^5 - 14x^3 + 12x^2 + 13x - 12$$

Usando la regla de Descartes, podemos determinar el número de raíces reales de la función polinomial.

Se tienen 3 cambios de signo en la función f(x).

Un cambio de - a +

$$\mathbf{f(x) = x^5 - 14x^3 + 12x^2 + 13x - 12}$$

Dos cambios de + a -

Así que la función tiene 3 o 1, raíces reales positivas.

Veamos ahora los cambios de f(-x).

$$f(-x) = (-x)^5 - 14(-x)^3 + 12(-x)^2 + 13(-x) - 12 = -x^5 + 14x^3 + 12x^2 - 13x - 12$$

$$f(-x) = -x^5 + 14x^3 + 12x^2 - 13x - 12$$

Se tienen dos cambios en la función f(-x).

$$\mathbf{f(-x) = -x^5 + 14x^3 + 12x^2 - 13x - 12}$$

De - a + **De + a -**

La función tiene 2 o 0 raíces reales negativas.

Como el coeficiente principal $a_n = 1$, las posibles raíces son los divisores del término independiente y son los siguientes.

± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 12

Aplicando la división sintética para -12, -6, -4, -3, -2, -1 tenemos.

-12	1	0	-14	12	13	-12
		-12	144	-1560	18576	-223068
	1	-12	130	-1548	18589	-223080

x = -12 es una cota inferior para las raíces reales negativas de la función.

-6	1	0	-14	12	13	-12
		-6	36	-132	720	-4398
	1	-6	22	-120	733	-4410

x = -6 es una cota inferior.

-4	1	0	-14	12	13	-12
		-4	16	-8	-16	12
	1	-4	2	4	-3	0

x = -4 no es una cota inferior de la función, pero es una raíz o cero de la función y la podemos escribir como se muestra.

$$f(x) = x^5 - 14x^3 + 12x^2 + 13x - 12 = (x + 4)(x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 3).$$

Aplicamos de nuevo la división sintética para x = -4, para si es una raíz de la nueva función.

-4	1	-4	2	4	-3
		-4	32	-136	528
	1	-8	34	-132	525

x = -4 no es raíz del nuevo polinomio.

Ahora veremos si alguno de los valores restantes -3, -2, y -1 es una raíz de la función polinomial que se obtuvo como cociente, $g(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 3$, utilizando la división sintética.

Para x = -3.

-3	1	-4	2	4	-3
		-3	21	-69	195
	1	-7	23	-65	192

x = - 3 no es una raíz de la función polinomial g(x).

Para x = -2.

-2	1	-4	2	4	-3
		-2	12	-28	48
	1	-6	14	-24	45

x = -2 no es una raíz.

Para x = -1.

-1	1	-4	2	4	-3
		-1	5	-7	3
	1	-5	7	-3	0

x = -1 es una raíz, y la función polinomial f(x) se puede escribir como se muestra.

$$f(x) = x^5 - 14x^3 + 12x^2 + 13x - 12 = (x + 4)(x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 3).$$

$$f(x) = x^5 - 14x^3 + 12x^2 + 13x - 12 = (x + 4)(x + 1)(x^3 - 5x^2 + 7x - 3).$$

Ahora veamos si $x = -1$ es una raíz de $w(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$ utilizando la división sintética.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -5 & 7 & -3 \\ & & -1 & 6 & -13 \\ \hline & 1 & -6 & 13 & -16 \end{array}$$

$x = -1$ no es raíz de la función $w(x)$, ahora veamos los valores restantes de x, 1, 2, 3, 4, 6, 12.

Para $x = 1$.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -5 & 7 & -3 \\ & & 1 & -4 & 3 \\ \hline & 1 & -4 & 3 & 0 \end{array}$$

$x = 1$ es una raíz de $w(x)$ y el polinomio $f(x)$ se puede escribir de la siguiente manera.

$$f(x) = x^5 - 14x^3 + 12x^2 + 13x - 12 = (x + 4)(x + 1)(x^3 - 5x^2 + 7x - 3).$$

$$f(x) = x^5 - 14x^3 + 12x^2 + 13x - 12 = (x + 4)(x + 1)(x - 1)(x^2 - 4x + 3).$$

Finalmente el polinomio $h(x) = x^2 - 4x + 3$, se puede resolver completando cuadrados.

$x^2 - 4x + 3 = 0$	Sumando -3 en ambos miembros de la igualdad.
$x^2 - 4x = -3$	Se obtiene la mitad del coeficiente lineal, se eleva al cuadrado y el resultado se suma a ambos miembros de la igualdad.
$x^2 - 4x + 4 = -3 + 4$	El trinomio cuadrado perfecto se puede escribir como un binomio al cuadrado.
$(x - 2)^2 = 1$	Sacando raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación
$x - 2 = \pm 1$	Sumando 2 a ambos miembros de la igualdad.
$x = 2 \pm 1$	La primera raíz se obtiene con el signo más.
$x_1 = 3$	La segunda raíz se obtiene con el signo negativo.
$X_2 = 1$	

Las raíces de la función $f(x) = x^5 - 14x^3 + 12x^2 + 13x - 12$ son $x_1 = -4$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 3$.

Las raíces de la función dividen al dominio de la función, que son los números reales en los siguientes intervalos.

$$(-\infty, -4), (-4, -1), (-1, 1), (1, 3), (3, +\infty)$$

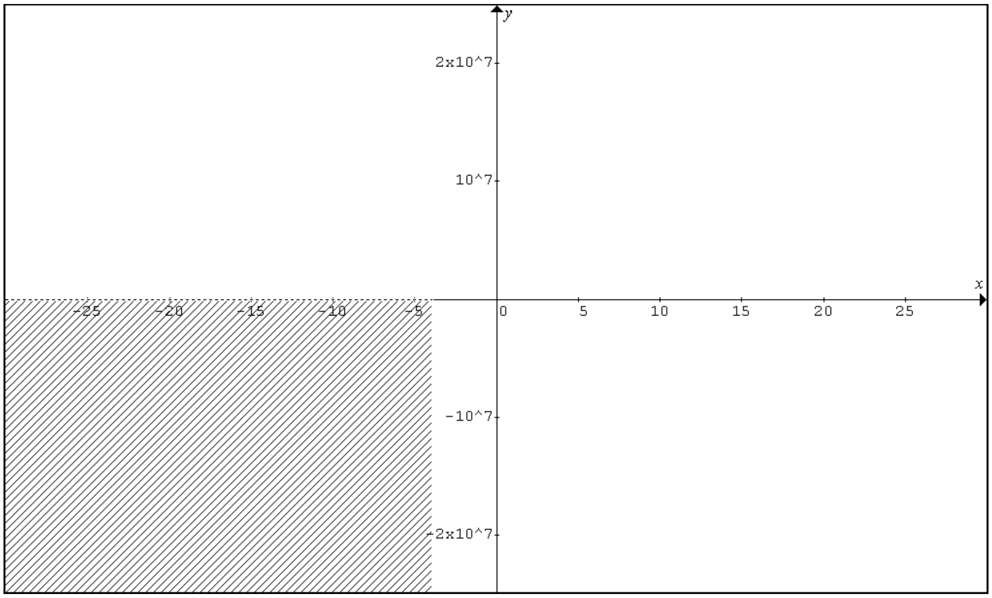
Ahora se toman valores de prueba en cada uno de los intervalos para saber si la gráfica de la función esta sobre o por debajo del eje de las abscisas en cada uno de ellos.

Para $x = -5$ en $(-\infty, -4)$, el valor de $f(-5) = (-5)^5 - 14(-5)^3 + 12(-5)^2 + 13(-5) - 12 = -1152$

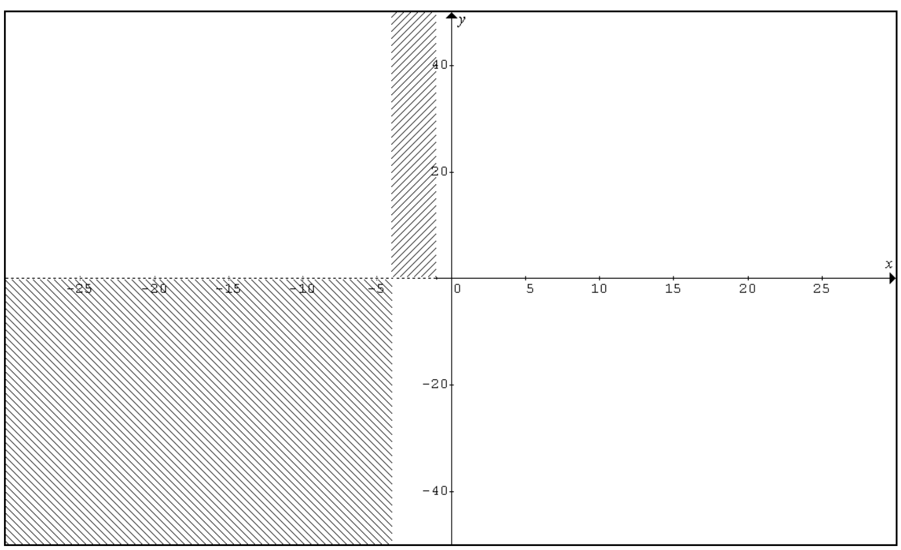
Completa la siguiente tabla de valores para que compruebes que para cualquier valor de x en el intervalo indicado el valor de la función es negativo.

x	f(x)
-10	
-8	
-6	

Así que la gráfica de la función polinomial f(x) esta debajo del eje de las abscisas en dicho intervalo.



Para x = 4, la función f(x) = 0, ahora sea x = -2 en el intervalo (-4, -1) el valor de la función polinómica es, $f(-2) = (-2)^5 - 14(-2)^3 + 12(-2)^2 + 13(-2) - 12 = 90$, por lo que la gráfica de la función f(x) esta sobre el eje de las abscisas.



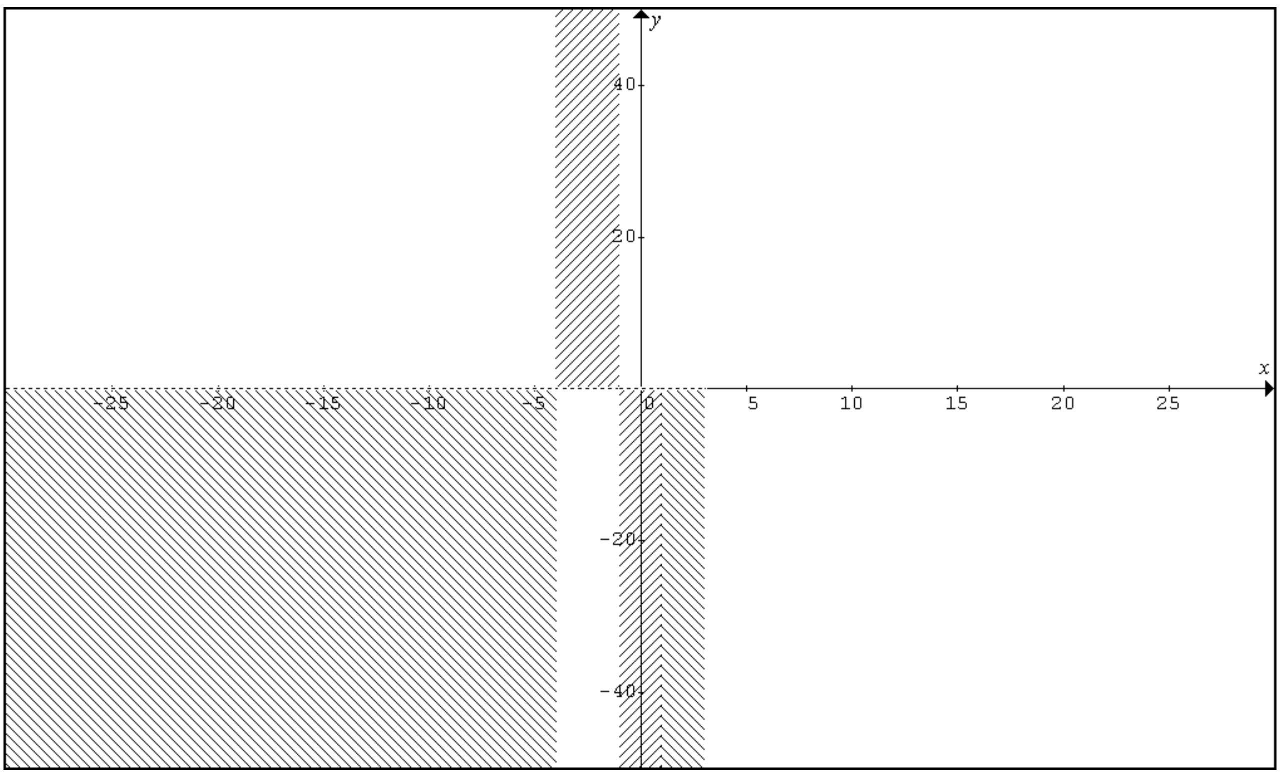
Completa la siguiente tabla de valores para que compruebes que para cualquier valor en el intervalo (-4, -1), f(x) > 0.

x	f(x)
-3.5	
-2	
-1.5	

Para x= -1 la función f(x) = 0, ahora examinemos que pasa en el intervalo, (-1, 1), sea x = -0.9 el valor de la función es, $f(-0.9) = (-0.9)^5 - 14(-0.9)^3 + 12(-0.9)^2 + 13(-0.9) - 12 = -4.36$, por lo que la gráfica de la función ahora esta debajo del eje de las abscisas.

Sea ahora x = 1.2 en el intervalo (1, 3), el valor de la función es.

$f(1.2) = (1.2)^5 - 14(1.2)^3 + 12(1.2)^2 + 13(1.2) - 12 = -0.82$, la gráfica de la función esta debajo del eje de las abscisas.



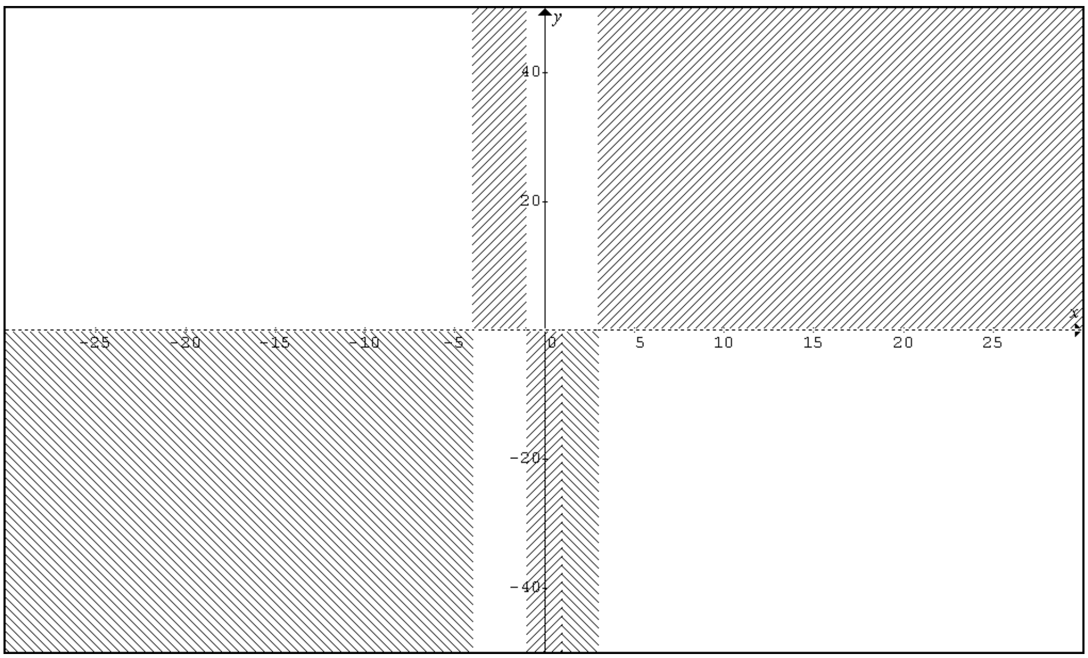
completa la siguiente tabla de valores que muestra que los valores de la función son negativos en este intervalo.

x	f(x)
1.5	
2	
2.5	

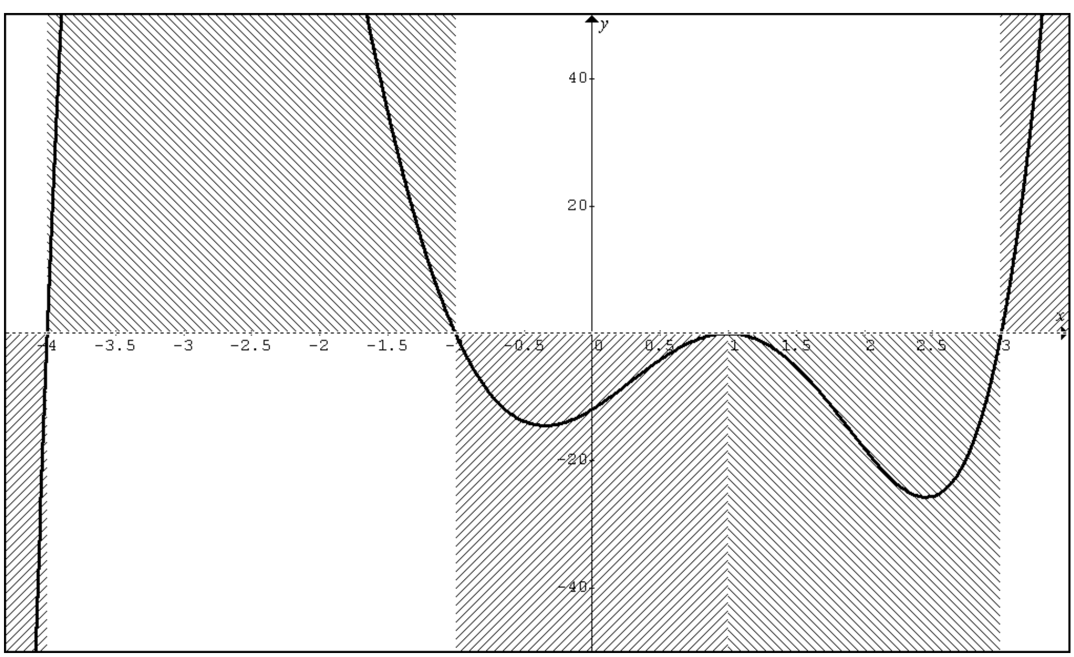
Por último veamos el signo de los valores de la función en el intervalo (3, +∞), para lo cual sea x = 4, el valor de la función f(x) para el valor indicado es el siguiente.

$f(4) = (4)^5 - 14(4)^3 + 12(4)^2 + 13(4) - 12 = 360$ lo que indica que la gráfica de la función esta sobre el eje de las abscisas, cosa que podemos comprobar al completar la siguiente tabla.

x	f(x)
5	
10	
11	



La gráfica de la función se muestra a continuación.



Veamos ahora la concavidad de la función, en el intervalo (-4, -1), como f(-4) = f(-1) = 0 y f(x) > 0 en el intervalo la función es cóncava hacia abajo, como se puede observar en la gráfica anterior.
En el intervalo (-1, 1) como f(x) < 0, la función es cóncava hacia arriba.
En el intervalo (1, 3) dado que f(x) < 0, la función es cóncava hacia arriba.

Problemas de Aplicación.

Para resolver los siguientes problemas tienes que aplicar los conceptos tratados en esta unidad, si tienes alguna duda pregunta a tu maestro.

1. ¿La gráfica de una función polinomial puede tener picos? ______________________________

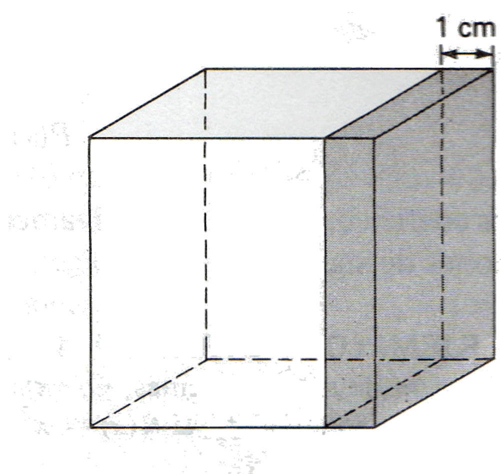
2. ¿La gráfica de una función polinomial puede constar de varios pedazos?__________________

Explica tus respuestas en base a los ejercicios resueltos.

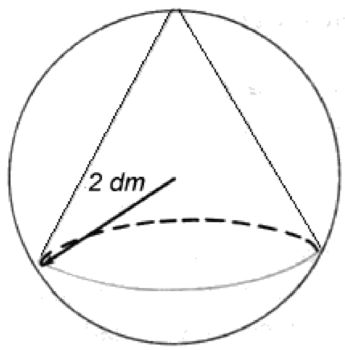
3. Considera que la función polinomial f(x) en el intervalo [a, b] cumple con f(a) <0, y f(b) > 0, ¿podrá existir un valor x_0 dentro del intervalo [a, b] para el cual se cumple que f(x) = 0?

4. Se desea construir una caja rectangular con un trozo de cartón de 6 cm de anchura y 14 cm de largo, recortando cuadrados del mismo tamaño de las cuatro esquinas y doblando los lados. Si el volumen de la caja debe ser 40 cm^3, ¿cuál deberá ser el lado de los cuadrados recortados?
Recuerda que debes obtener una función polinomial que se adapte a las condiciones del problema.

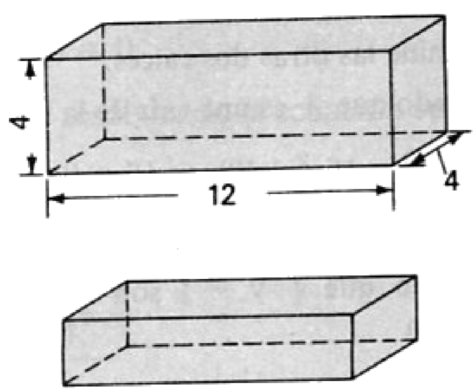
5. De uno de los lados de un cubo se recorta una rebanada de 1 cm de grosor. Si el volumen del cuerpo restante es de 180 cm^3, ¿cuál tendrá que ser la longitud del lado del cubo original?.



6. Un cono circular recto está inscrito en una esfera y 32 veces su volumen es igual a 9 veces el volumen de la esfera. Si el radio de la esfera es de 2 dm, ¿cuál será la altura del cono? Existen dos respuestas posibles. La fórmula para el cono es $\mathbf{V} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \Pi \mathbf{r}^{\mathbf{2}} \mathbf{h}$, y el volumen de la esfera es $\mathbf{V} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}} \Pi \mathbf{r}^{\mathbf{3}}$.



7. Una caja rectangular tiene dimensiones de 12 dm, 4 dm y 4 dm. Si las dos primeras dimensiones disminuyen y la otra se aumenta en la misma proporción, se obtiene una segunda caja, cuyo volumen es cinco octavos del volumen de la primera. Determina las dimensiones de la segunda caja.



8. Prueba que 3 es un cero doble (de multiplicidad 2) de la función polinomial definida por

$$P(x) = 2x^4 – 11x^3 + 11x^2 + 15x – 9$$

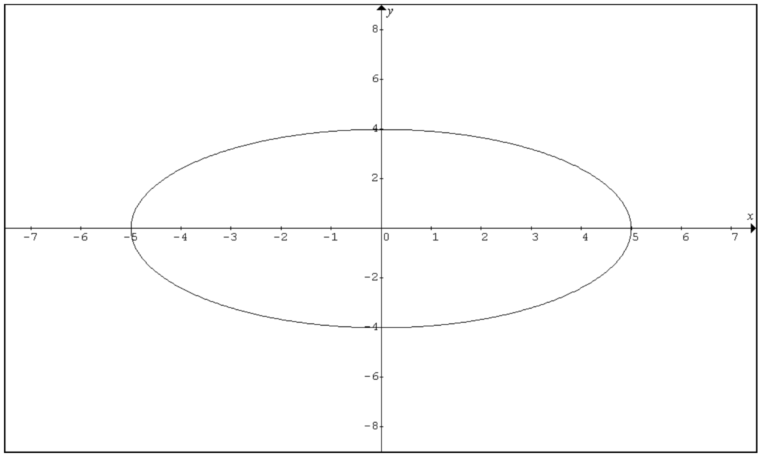
Obtén las otras dos raíces y la gráfica de la función.

9. Para la función polinomial definida por

$$P(x) = 3x^3 – 2x^2 – 7x – 2$$

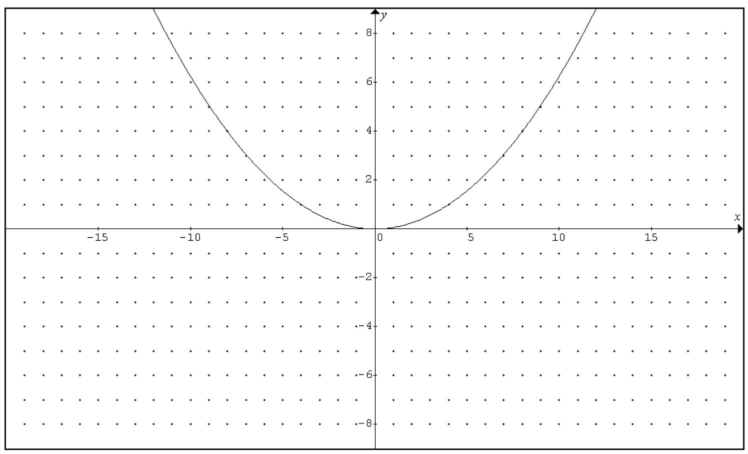
Encuentra las raíces y la gráfica de la función.

10. Indica si la siguiente gráfica corresponde a una función o no.



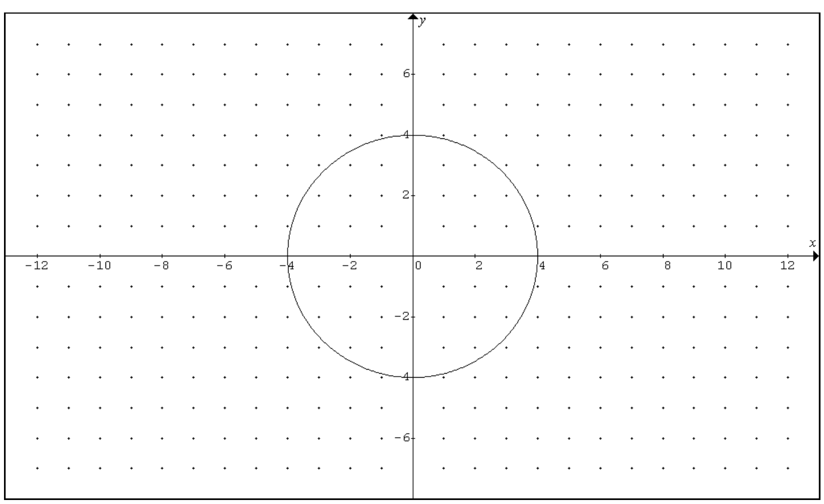
En cualquier caso encuentra la ecuación de la gráfica.

11. Indica si la siguiente gráfica corresponde o no a la gráfica de una función.



Para obtener la ecuación determina varios por donde pasa la gráfica.

12. Indica si la gráfica corresponde o no la gráfica de una función.



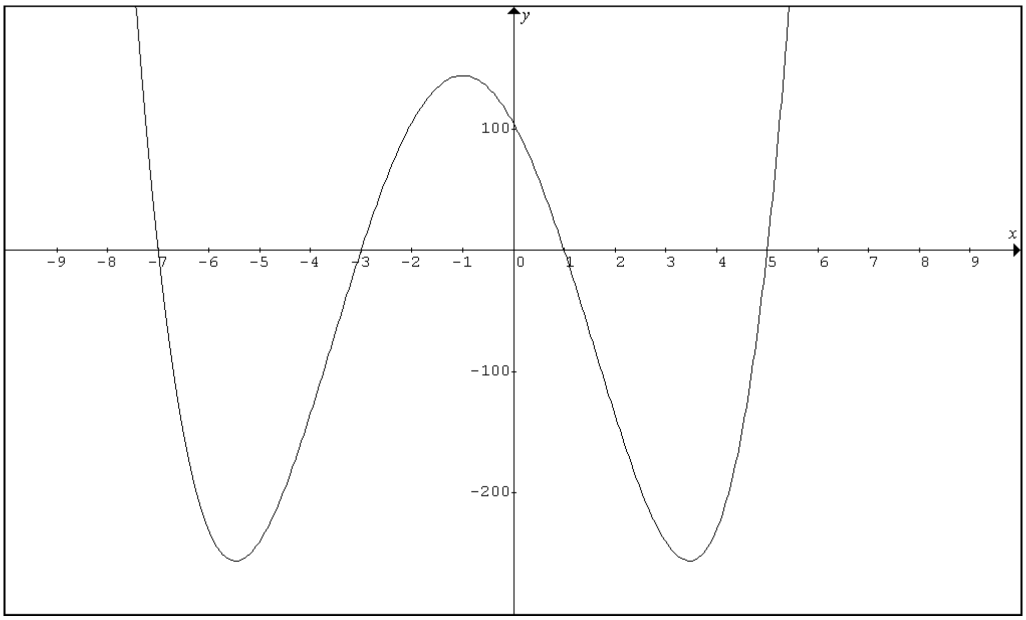
Obtén en cualquier caso la ecuación.

13. Obtener todas las raíces de la función polinomial definida por

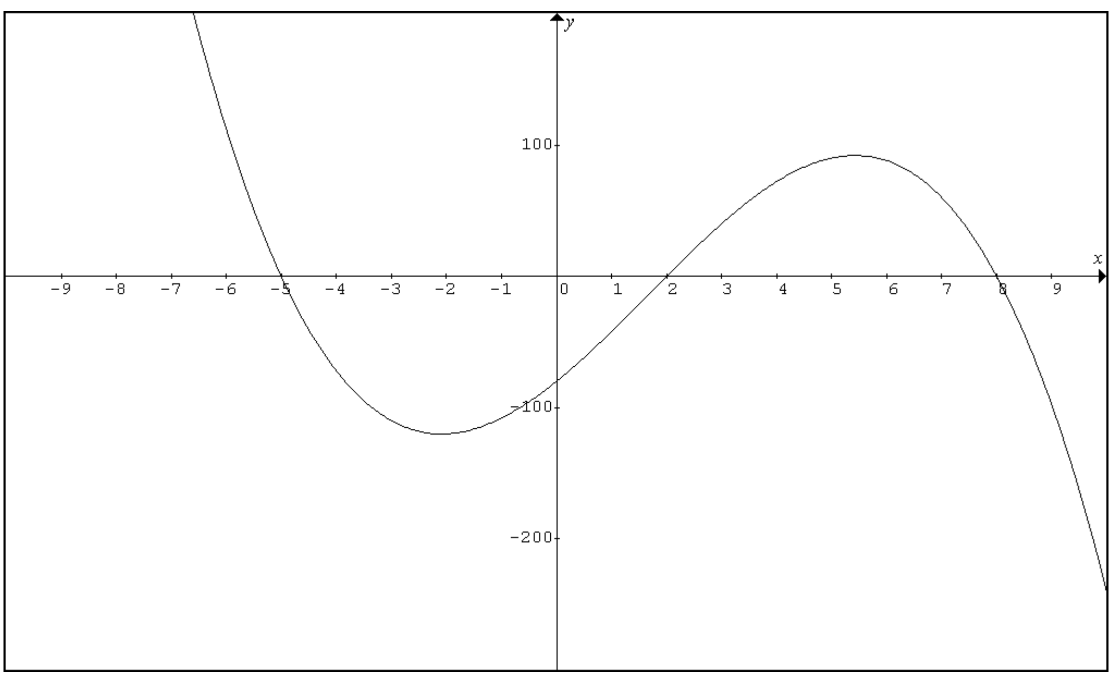
$$P(x) = x^5 + 4x^4 - 4x^3 - 34x^2 - 45x - 18$$

La gráfica, e indica la concavidad de la gráfica en cada intervalo.

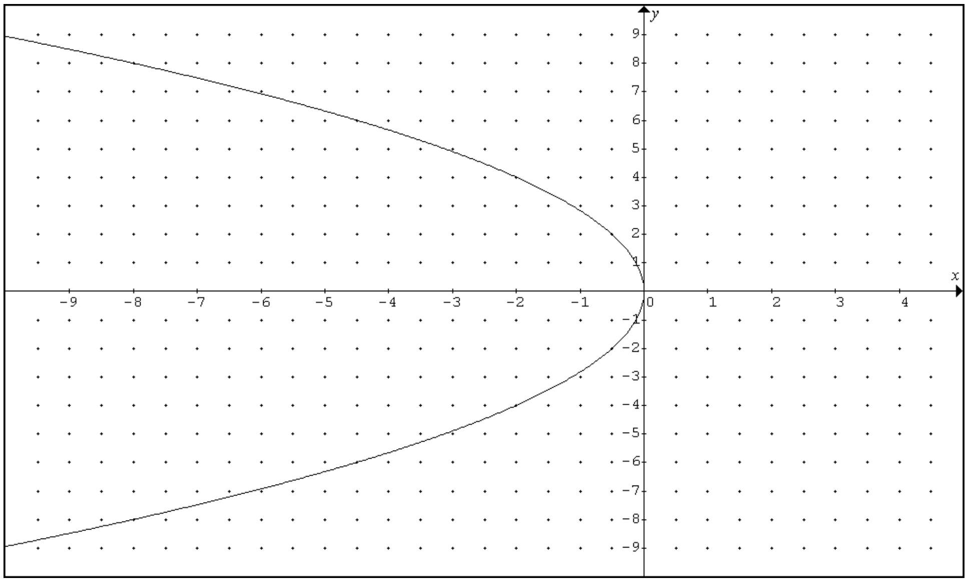
14. Encuentra la función polinomial si la gráfica correspondiente se muestra a continuación y sabemos que la función solo tiene las raíces que se muestran.



15. Encuentra la función polinomial si cada raíz de la función es real y la función tiene únicamente las raíces que se muestran.



15. Indica si la gráfica corresponde a una función o no.



En cualquier caso encuentra la ecuación correspondiente.

16. Usando el teorema del factor prueba que x – 4 es un factor de $2x^3 - 6x^2 - 5x - 12$.

17. Se desea cercar un terreno rectangular con 240 metros de cerca.

a. Sea x metros la longitud del terreno, expresa el número de metros cuadrados del área del terreno en función de x.

b. ¿Cuál es el dominio de la función?

c. ¿Cuál es el rango de la función?

d. Encuentra la gráfica de la función.

e. ¿Qué dimensiones dan la mayor área posible?

Bibliografía.

Para el alumno.

1. Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica.
Louis Leithold
Oxford University Press
Primera Edición, febrero de 2005.

Para el profesor.

2. Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica.
Earl W. Swokowski
Internacional Thomson Editores
Novena Edición, 1998.

Examen 1 de la unidad:

1. Se tiene una malla de alambre de 900 cm de longitud para construir un corral, cuales son las dimensiones de dicho corral para tener el área máxima del corral y la gráfica de la función.

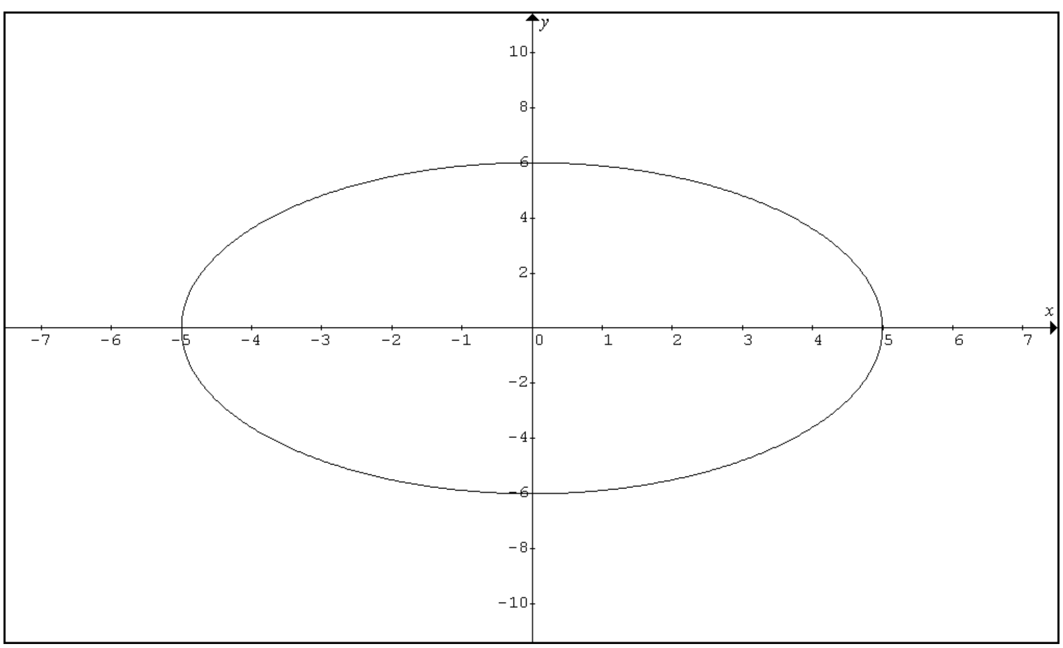
Sugerencia. Establece la función polinomial del problema, lleva la función a su forma estándar para obtener las coordenadas del vértice que corresponden a la respuesta del problema.

2. **Construcción de una caja:** Se va a fabricar una caja sin tapa a partir de una lámina de cartón de 50 x 40 centímetros, cortando cuadrados idénticos de área x^2 en cada esquina y doblando hacia arriba los lados, de manera que el volumen de la caja sea igual a 6000 centímetros cúbicos. Determina las dimensiones de la caja y la gráfica de la función.

Sugerencia. Encuentra la función polinomial que modela al problema, determina las raíces de la función, verifica cuál de ellas cumple las condiciones del problema, y realiza la gráfica de la función.

3. Indica si la ecuación $x^2 - 16y + 32 = 0$, corresponde o no a una función, en cualquier caso encuentra la gráfica correspondiente.

4. Indica si la gráfica corresponde o no a la gráfica de una función, en cualquier caso determina la ecuación correspondiente.



5. Encuentra las raíces, la concavidad y la gráfica de la función $f(x) = x^4 - 22x^2 + 24x + 45$

Examen 2 de la unidad:

1. Se tiene una malla de alambre de 1200 cm de longitud para construir un corral, cuales son las dimensiones de dicho corral para tener el área máxima del corral y la gráfica de la función.

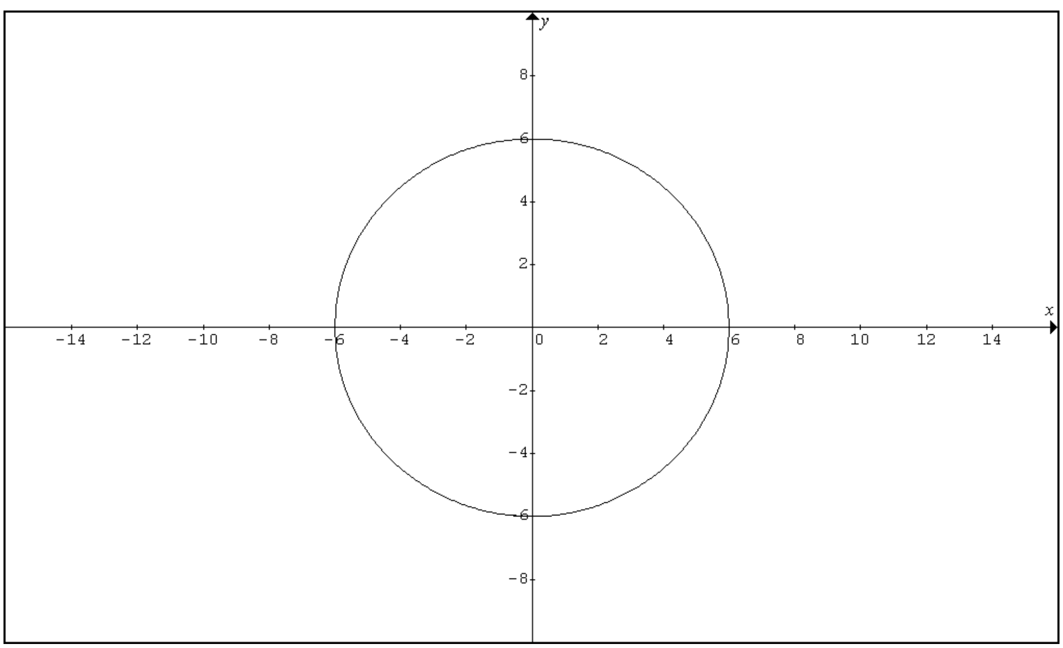
Sugerencia. Establece la función polinomial del problema, lleva la función a su forma estándar para obtener las coordenadas del vértice que corresponden a la respuesta del problema.

2. **Construcción de una caja:** Se va a fabricar una caja sin tapa a partir de una lámina de cartón de 60 x 40 centímetros, cortando cuadrados idénticos de área x^2 en cada esquina y doblando hacia arriba los lados, de manera que el volumen de la caja sea igual a 8064 centímetros cúbicos. Determina las dimensiones de la caja y la gráfica de la función.

Sugerencia. Encuentra la función polinomial que modela al problema, determina las raíces de la función, verifica cuál de ellas cumple las condiciones del problema, y realiza la gráfica de la función.

3. Indica si la ecuación $y^2 - 16x + 32 = 0$, corresponde o no a una función, en cualquier caso encuentra la gráfica correspondiente.

4. Indica si la gráfica corresponde o no a la gráfica de una función, en cualquier caso determina la ecuación correspondiente.



5. Encuentra las raíces, la concavidad y la gráfica de la función $f(x) = x^4 - 26x^2 + 25$

Propósitos de la unidad: Continuar con el estudio de las funciones, a través de las funciones racionales y con radicales, Analizar su comportamiento en el que cobra relevancia su dominio de definición, su rango y los puntos de ruptura.

Al finalizar el capítulo, el alumno:

Secuencia didáctica de lectura y exploración.

Aprendizaje: Explora situaciones o problemas que dan lugar a una función racional; en particular las que involucran variación inversa o inversamente proporcional al cuadrado de la variable. Analiza las relaciones y comportamientos que le permiten obtener información para establecer su representación algebraica.

Inicio de la secuencia.

Problema 1. La intensidad de la luz proveniente de una fuente lumínica es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia hasta dicha fuente.

a. Expresar el número de candelas (cd) (unidad de fotometría) de la intensidad de luz, en función del número de metros de distancia a la fuente, cuando la intensidad es de 225 cd a una distancia de 5 m.

b. Obtener la intensidad en un punto de acuerdo a su distancia a la fuente, indicada en la siguiente tabla.

Distancia	15	13	12	10	7	4	3	2	0.5
Intensidad									

c. Grafica los puntos obtenidos en el siguiente sistema de coordenadas.

Solución de la secuencia:

a) Si f(x) son las candelas de intensidad de la luz de una fuente que está a x metros, entonces.

$$f(x) = \frac{k}{x^2}$$

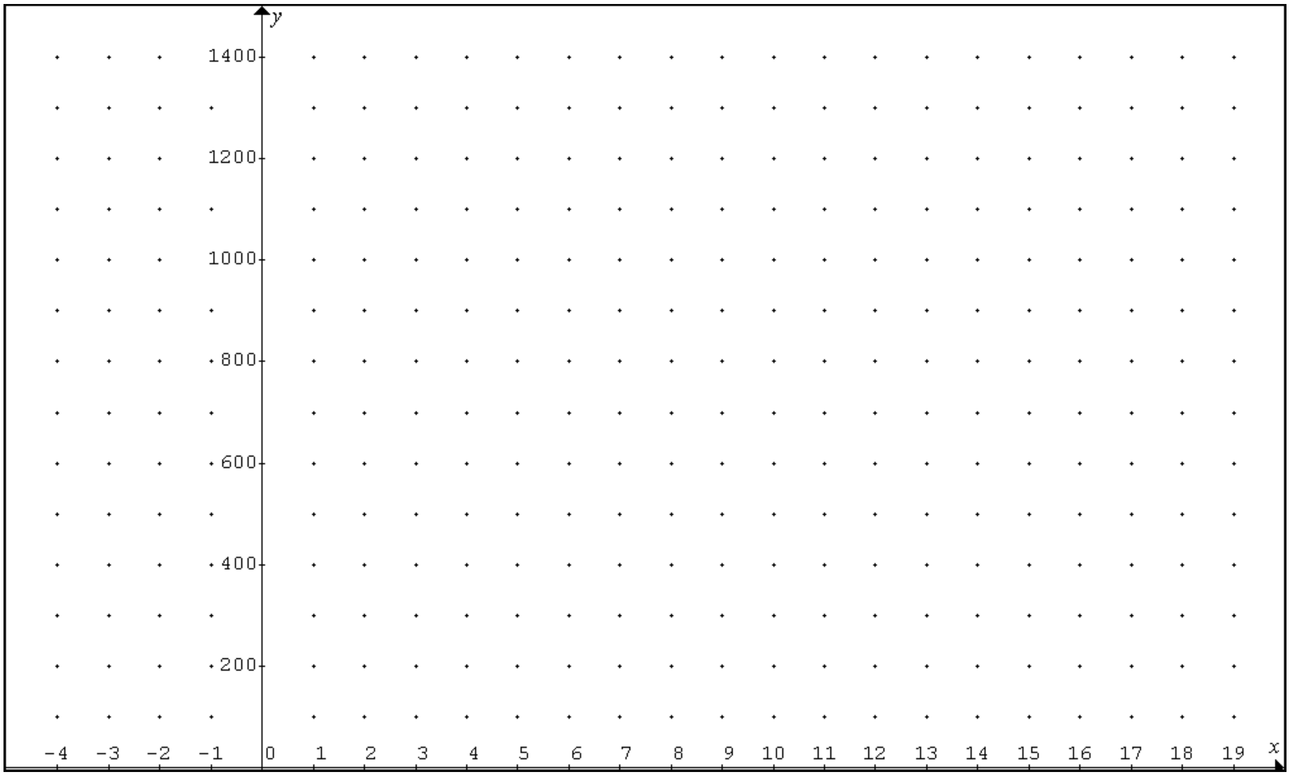
La función es igual al cociente de una constante k entre x^2 (el cuadrado de la distancia a la fuente), y como el valor de la función es 225 cd para x = 5 metros, tenemos, f(5) = 225, de manera que sustituyendo valores en la fórmula tenemos.

$225 = \frac{k}{5^2}$, que nos da, $225 = \frac{k}{25}$, de manera que el valor de k es, k = 5625, y la función de luminosidad es.

$$f(x) = \frac{5625}{x^2}.$$

b) Con esta información completa la tabla de valores.

c) Localiza los puntos obtenidos en el siguiente sistema de coordenadas.



¿Qué pasa con los valores de la función de la intensidad de la luz, cuando la distancia se acerca a cero? ____

Si x = 0, el valor de la función es: ____

El dominio de valores de la función es: ____

El rango de valores de la función es: ____

Define lo que consideras una función racional: ____________________________________

Problema 2. Sebastián y sus amigos tienen que ir a la casa de Elizabeth a una fiesta, si la distancia de la escuela a la casa de Elizabeth es de 250 kilómetros.

a) Escribe la fórmula para encontrar la velocidad de un objeto que recorre d kilómetros en un tiempo de t horas. ____

b) Despeja de la fórmula anterior la variable t tiempo. ____________________________

c) Completa la siguiente tabla, para encontrar los distintos tiempos que emplearon Sebastián y sus amigos en llegar a la casa de Elizabeth, de acuerdo a la función f(x) obtenida.

Velocidad	60	80	100	120	140	150	155	160
tiempo								

d) Considera, ¿Cuáles pueden ser la velocidad máxima y mínima permitidas en carretera para obtener el dominio de la función? ____

e) En función de los valores investigados, ¿cuál es el rango de la función? _________________

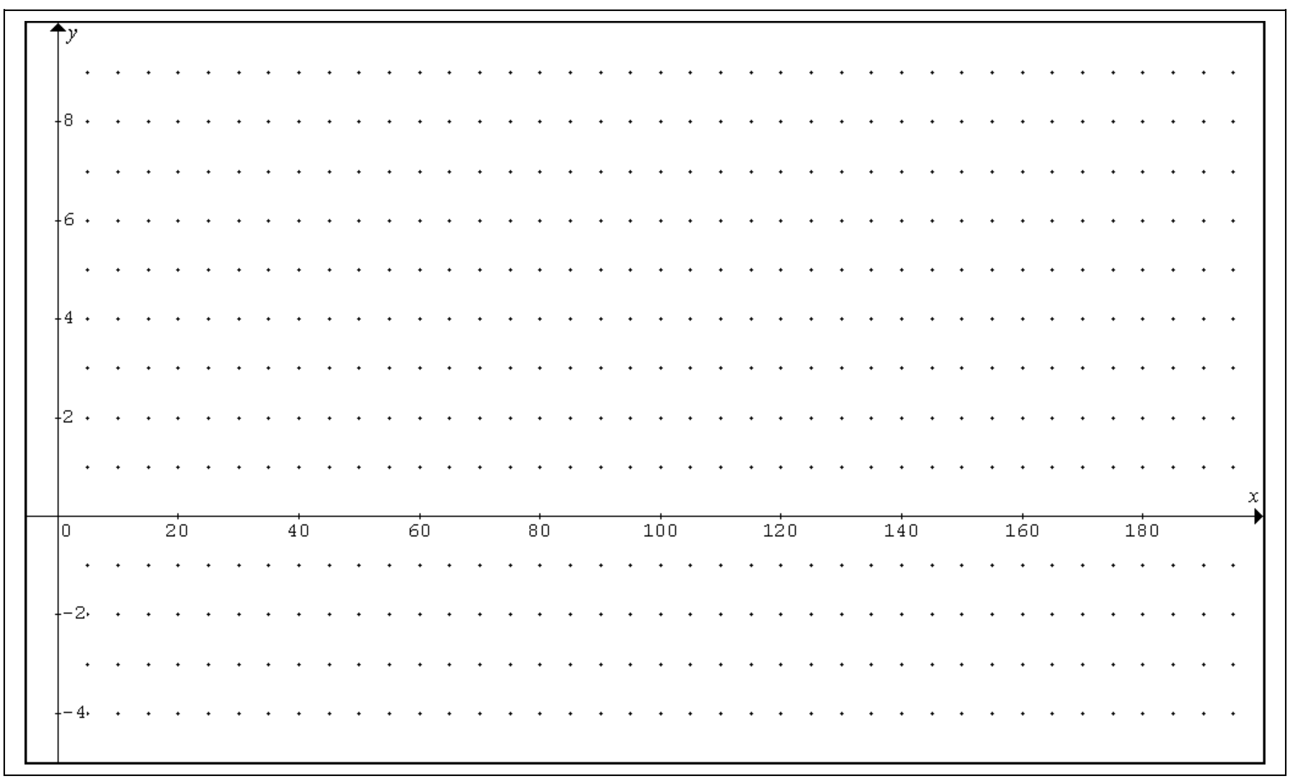
f) ¿Qué pasa con los valores del tiempo que lleva recorrer la distancia, si pudiéramos incrementar la velocidad del auto sin límite? ____

g) ¿Qué pasa con la gráfica de la función para los puntos obtenidos en el inciso f? ___________
____

h) ¿Qué pasa con los valores del tiempo que lleva recorrer la distancia, sí el valor de la velocidad puede ir disminuyendo gradualmente? ____

i) ¿Qué pasa con los puntos de la función obtenidos en el inciso h?
____

j) Dibuja la gráfica de la función en el siguiente sistema de coordenadas.



k) ¿Para qué valor de x, se tiene que f(x) = 0?

Ejercicios.

1. En el problema 1, el tipo de función racional que se obtuvo es de la forma $f(x) = \frac{k}{x^2}$.

a. Para la función $f(x)=\frac{k}{x^2}$ Investiga el dominio, o sea el conjunto de valores de x, para los cuales esta definida la operación y se puede encontrar el valor de la función ___________

b. Completa la siguiente tabla de valores, para ver el comportamiento de la función f(x), cuando los valores de x se acercan a 0, con x > 0.

x	5	4	3	2	1	0.5	0.1	0.01
f(x)								

c. Completa la siguiente tabla de valores, para ver el comportamiento de la función f(x), cuando los valores de x se acercan a 0, con x < 0.

x	-5	-4	-3	-2	-1	-0.5	-0.1	-0.01
f(x)								

d. ¿Qué pasa con $f(x_0)$, cuando $x_0 = 0$? ____

e. El comportamiento de la función cuando x se aleja del origen, con x > 0 se obtiene al completar la siguiente tabla de valores.

x	10	20	30	40	50	100	500	1000
f(x)								

¿Qué pasa con los valores de la función? ____

f. Para tener el comportamiento de la función cuando x se aleja del origen, con x < 0, completa la siguiente tabla de valores.

X	-10	-20	-30	-40	-50	-100	-500	-1000
f(x)								

¿Qué pasa con los valores de la función? ____

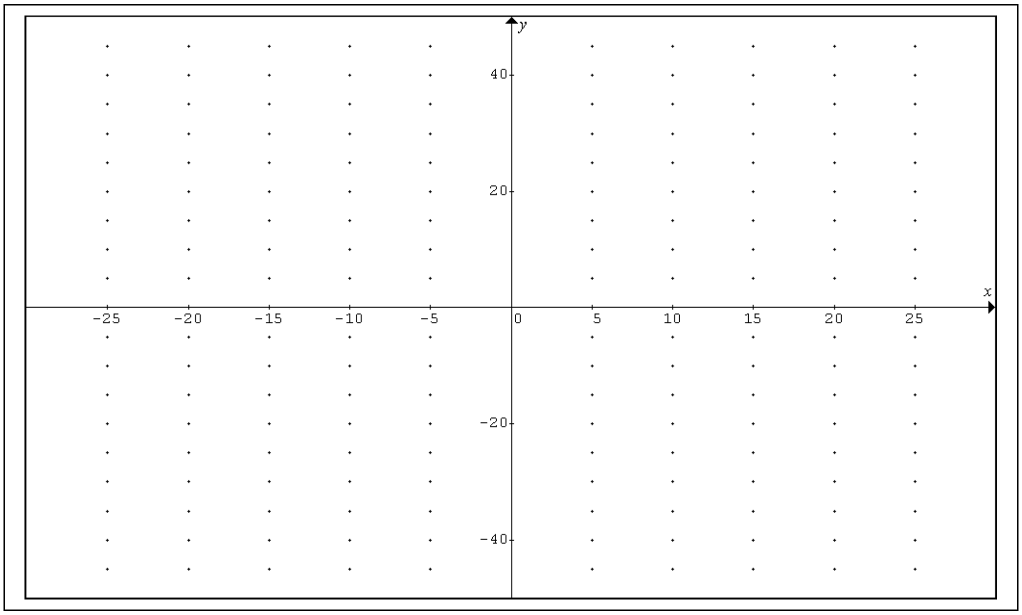
g. ¿Tiene raíces la función f(x)? los valores de x, tal que f(x) = 0 ________________________

h. Investiga el nombre que recibe la recta que se acerca a la gráfica de una función de manera indefinida pero nunca la corta? ____

i. ¿Cuáles son las asíntotas de la función f(x)? ____________________________________

j. ¿Para que valor de x, la gráfica de f(x) tiene un punto de ruptura? ___________________

k. Grafica todos los puntos obtenidos en el siguiente sistema de coordenadas.



2. En un cable conductor de longitud fija, la resistencia eléctrica es inversamente proporcional al cuadrado del diámetro del cable.

a. Suponiendo que un cable de longitud constante tenga 1 cm de diámetro y su resistencia sea de 0.1 Ω (ohm) , expresa el número de ohms de resistencia en función del número de centímetros de diámetro.
b. ¿Cuál es la resistencia del cable de longitud fija, si el diámetro tiene alguno de los valores que se indican en la siguiente tabla?

Diámetro	0.2	0.4	0.6	0.8	1.2	1.4	1.8
Resistencia							

c. ¿Cuál es el dominio de la función? ____
d. ¿Qué pasa con el valor de la resistencia, si el diámetro del cable se acerca a 0? ________

e. ¿Qué pasa con el valor de la resistencia, si el diámetro del cable aumenta? ____________
f. ¿Cuál es el rango de la función? ____
g. Con la información obtenida, traza la gráfica de la función en un sistema de coordenadas.

Sugerencia: La función para obtener la resistencia es de la forma, $\mathbf{R(d)=\frac{K}{d^2}}$.

Secuencia de lectura y exploración.

Aprendizajes:

Establece la regla de correspondencia de una función racional asociada a un problema.

A partir de la regla de correspondencia de una función racional, elabora una tabla de valores que le permite construir su gráfica e identifica su(s) punto(s) de ruptura y asíntotas.

Inicio de la secuencia.

Problema 1. Sebastián y sus amigos tienen que ir a la casa de Adriana a una fiesta, si la distancia de la escuela a la casa de Adriana es de 300 kilómetros.

a) Escribe la fórmula para encontrar la velocidad de un auto que recorre d kilómetros en un tiempo de t horas. ____

b) Despeja de la fórmula anterior la variable t tiempo. ______________________________

c) Completa la siguiente tabla, para encontrar los distintos tiempos que emplearon Sebastián y sus amigos en llegar a la casa de Adriana.

Velocidad	75	90	95	100	110	115	120	130
tiempo								

Si el dominio de la función es el intervalo [50, 160]

d) ¿Cuál es el rango de la función? _______________

e) ¿Qué pasa con los valores del tiempo que lleva recorrer la distancia, si pudiéramos incrementar la velocidad del auto sin límite? ____________________________________

f) ¿Qué pasa con la gráfica de la función para los puntos obtenidos en el inciso e, con respecto al eje de las abscisas? ____

g) Investiga que nombre recibe la recta que se aproxima a la gráfica de la función a medida que los valores de x se hacen cada vez más grandes, y x > 0.

____

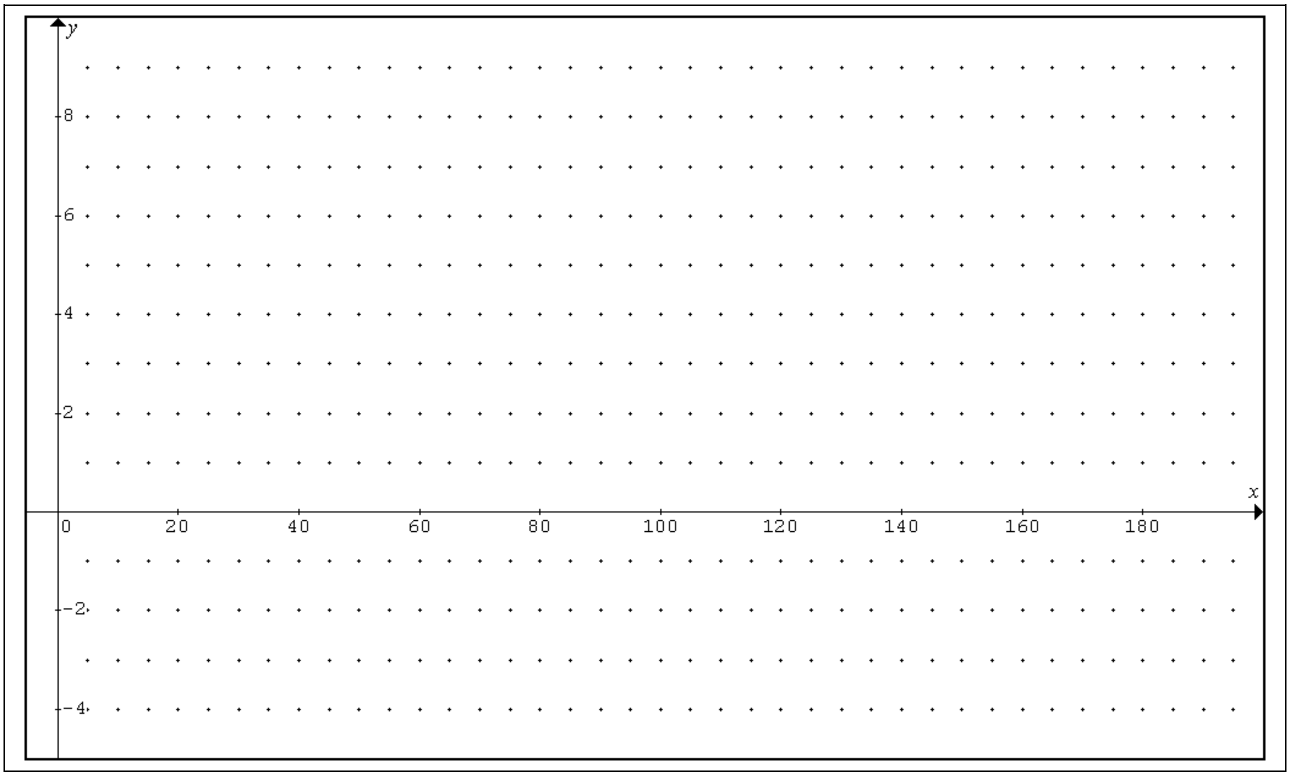
h) ¿Qué pasa con los valores del tiempo que lleva recorrer la distancia, sí el valor de la velocidad puede ir disminuyendo gradualmente? ________________________________

i) ¿Qué pasa con los puntos de la función obtenidos en el inciso h, con respecto al eje de las ordenadas? ____

j) Investiga como se llama la recta que se aproxima a la gráfica de la función sin tocarla, cuando los valores de la variable x, se aproximan a un valor determinado $x_0 = a$.

____

Con la información obtenida dibuja la gráfica de la función en el siguiente sistema de coordenadas.



Problema 2. Sea f(x) = $\frac{4}{x} - 2$ una función.

a) Escribe la expresión de la función que resulta después de hacer la operación indicada.
____

b) ¿Tiene alguna raíz la función f(x)? ______________________________

c) ¿Tiene puntos de ruptura la función f(x)? ______________________________

d) En caso de ser afirmativa tu respuesta, ¿cuáles son los puntos de ruptura?
____

e) Escribe el dominio de la función f(x). ______________________________

f) Escribe el rango de la función. ______________________________

g) Completa la siguiente tabla de valores para la función f(x).

X	2.5	5	10	100	1000	10000	15000	20000
f(x)								

h) ¿A qué número se aproximan los valores de la función, cuando los valores de la variable x se alejan del 0, con signo positivo? ____

i) Completa la siguiente tabla de valores para la función f(x).

X	1.5	1	0.8	0.6	0.4	0.2	0.1	0.01
f(x)								

j) ¿A qué número se aproximan los valores de la función, cuando los valores de la variable se acercan al 0, con signo positivo? ____

k) Completa la siguiente tabla de valores para la función f(x).

X	-1.5	-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	-0.1	-0.01
f(x)								

l) ¿A qué número se aproximan los valores de la función, cuando los valores de la variable se acercan al 0, con signo negativo? ____

m) ¿Tiene la gráfica de la función una asíntota vertical? _____________________________

n) En caso afirmativo de la respuesta, indica la ecuación de la recta. __________________

o) Completa la siguiente tabla de valores para la función f(x).

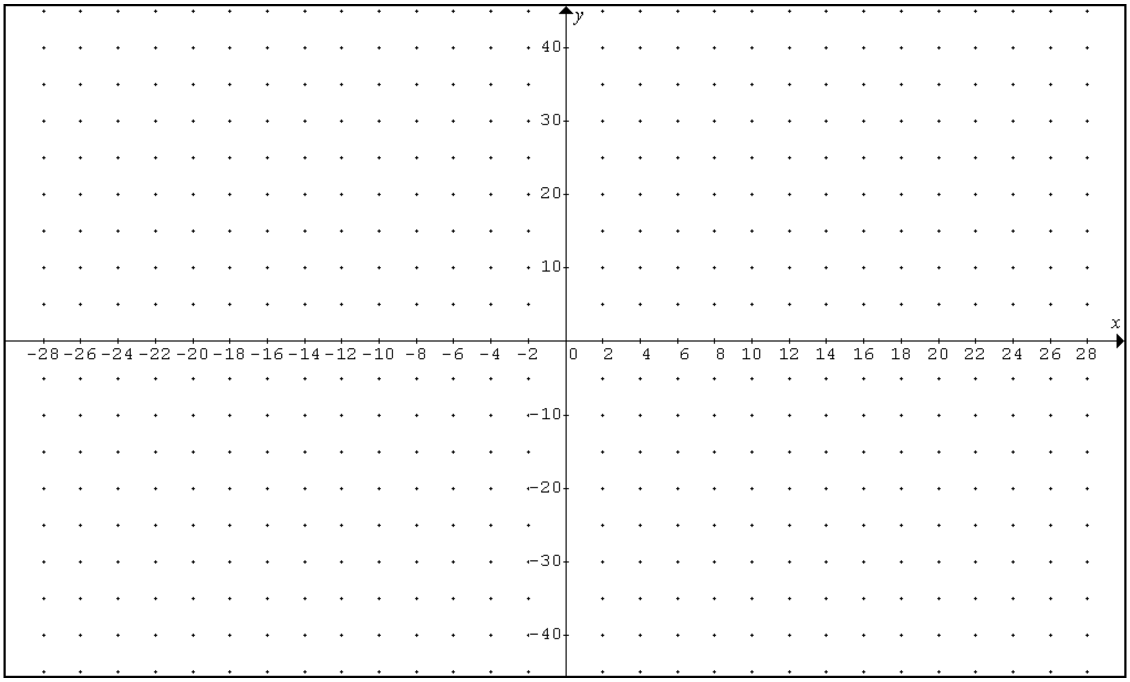
X	-2.5	-5	-10	-100	-1000	-10000	-15000	-20000
f(x)								

p) ¿A qué número se aproximan los valores de la función, cuando los valores de la variable x se alejan del 0, con signo negativo? ____

q) ¿Tiene la gráfica de la función una asíntota horizontal? ____________________________

r) En caso afirmativo, escribe la ecuación de la recta. _______________________________

s) Esboza la gráfica de la función en el siguiente sistema de coordenadas.



Problema 3. Encuentra la gráfica de la función $\mathbf{f(x)=\frac{4}{x-8}}$.

Solución del problema. Sabemos que la división por 0 no esta definida, así que veamos para que valores de x el denominador de la función f(x) es igual a 0, resolviendo la siguiente ecuación

$x - 8 = 0.$

Cuya solución es $x = 8$.

Así que la función f(x) esta definida para cualquier valor de x, que cumpla con $x \neq 8$.

Para hacer la gráfica veamos primero que pasa con los valores de la función, cuando los valores de x se acercan al valor de 8, con $x > 8$, así que completa la siguiente tabla de valores.

x	9	8.5	8.3	8.2	8.1	8.01	8.001	8.0001
f(x)								

¿Qué pasa con los valores de la función? ______________________________

Ahora veamos el comportamiento de la función, cuando los valores de x se acercan a 8, con $x < 8$, completando la siguiente tabla de valores.

x	7	7.5	7.6	7.7	7.8	7.9	7.99	7.999
f(x)								

¿Qué pasa con los valores de la función? ____

Completa la siguiente tabla de valores para ver el comportamiento de la función cuando los valores de x se alejan del origen de coordenadas, con x > 0.

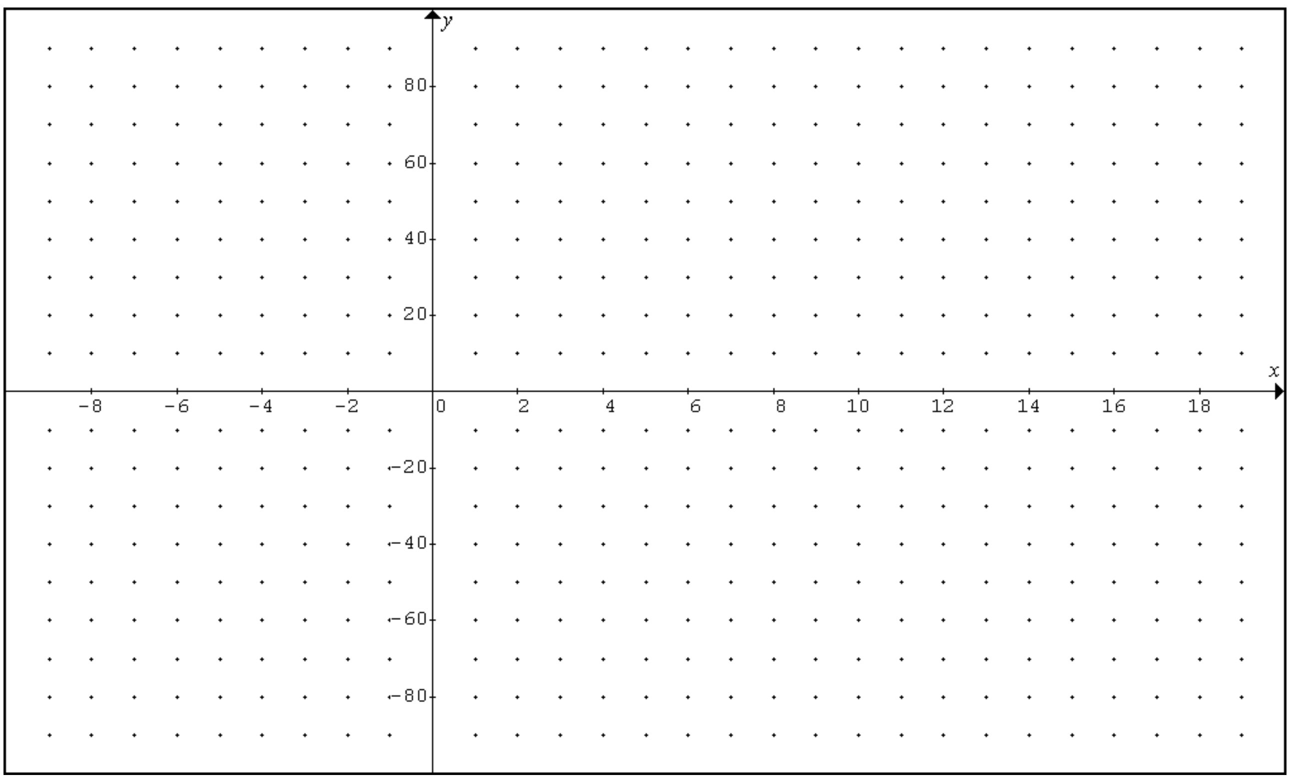
x	10	20	50	100	200	500	10000	100000
f(x)								

¿Qué pasa con los valores de la función? ____

Finalmente veamos el comportamiento de la función, si los valores de x se alejan del origen de coordenadas con x < 0, completando la siguiente tabla.

x	-10	-20	-50	-100	-200	-500	-10000	-100000
f(x)								

Localiza los puntos obtenidos en el siguiente sistema de coordenadas.



¿Tiene raíces la función, valores de x de manera que f(x) = 0? ____________________________

Secuencia de lectura y exploración.

Aprendizajes:

Identifica el dominio de definición y el rango de una función racional. A partir de su regla de correspondencia y de las condiciones del problema.

Inicio de la Secuencia:

Problema 1. El peso de un cuerpo es inversamente proporcional al cuadrado de su distancia al centro de la tierra.

a) Suponiendo que un cuerpo pese 200 kg en la superficie terrestre, expresar el número de kilogramos de peso en función del número de kilómetros al centro de la tierra, suponiendo que el radio de la tierra es de 6.4 x 10^3 kilómetros.

b) Completa la siguiente tabla de valores para calcular el peso del cuerpo, cuando esta a las distancias indicadas del centro de la tierra.

Distancia	1 x 10^3	2.5 x 10^3	4.2 x 10^3	8 x 10^3	10 x 10^3	12.5 x 10^3	14 x 10^3
peso							

c) Determina el dominio de la función que se obtiene para el problema. ____________________

d) ¿Qué pasa con el peso del cuerpo, cuándo los valores del radio se acercan a cero? ________

e) ¿Qué pasa con el peso del cuerpo, cuando su distancia al centro de la tierra se hace cada vez más grande? ____

f) ¿Cuál es el rango de la función? ____

Solución de algunos puntos de la secuencia.

a) Supongamos que la fórmula es del tipo:

$$\mathbf{f(r)=\frac{k}{r^2}}$$

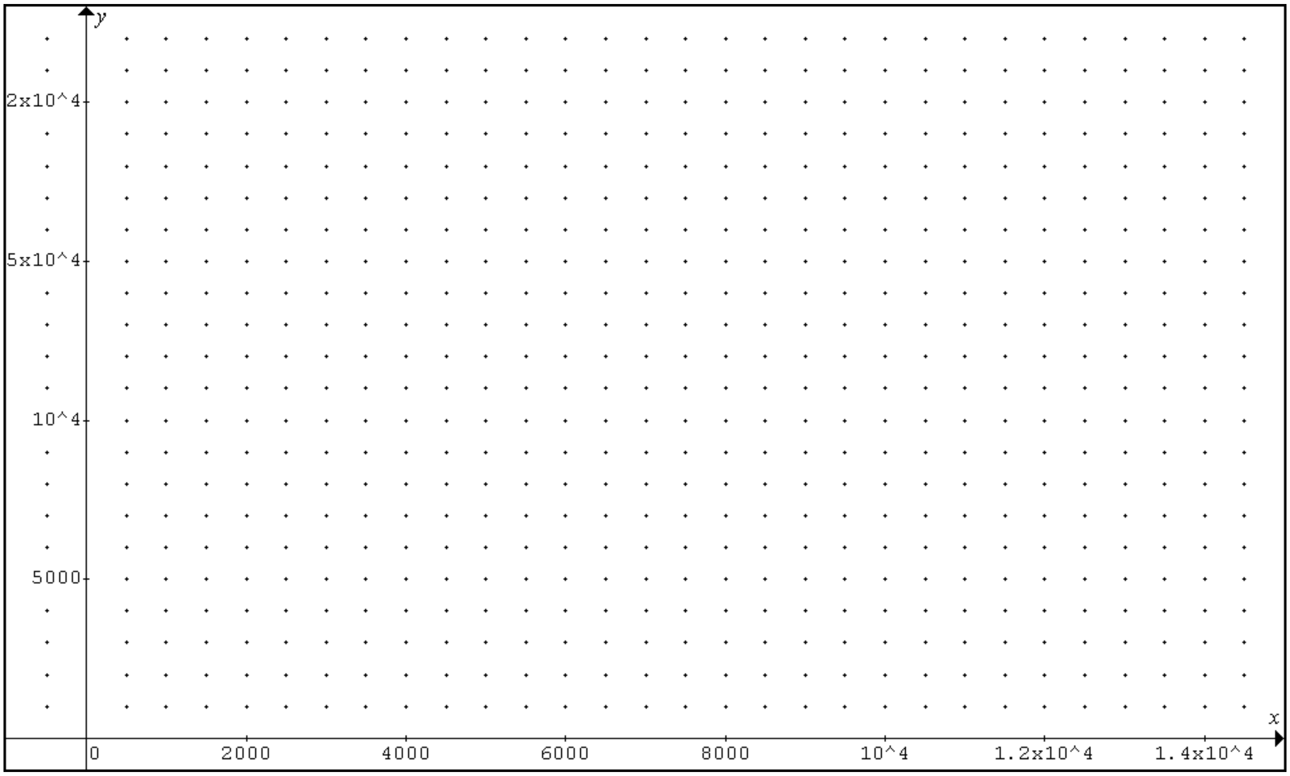
Como f(r) = 200 kilogramos, cuando r = 6.4 x 10^3 kilómetros, se tiene.

$\mathbf{200=\frac{k}{(6.4\,x\,10^3)^2}}$, queda $\mathbf{k=(2\,x\,10^2)(40.96\,x\,10^6)=81.92\,x\,10^8}$, y la función del peso del objeto en función a la distancia que esta del centro de la tierra es.

$\mathbf{f(r)=\frac{81.92\,x\,10^8}{r^2}}$, donde las unidades de la constante k son, $\mathbf{(kg)(m^2)}$.

Completa el resto de la secuencia.

g) Con la información obtenida, dibuja la gráfica de la función en el siguiente sistema de coordenadas.



Problema 2. La resistencia R de un alambre a temperatura constante varía directamente con la longitud ℓ del alambre, e inversamente con el cuadrado del diámetro d, Una sección de alambre con un diámetro de 0.01 cm y una longitud de 1 metro tiene una resistencia de 8.2 ohms.

a) Escribe la resistencia del alambre en función del diámetro del alambre.

b) Encontrar la resistencia del siguiente conjunto de alambres, si todos ellos tienen 1 metro de largo, y los siguientes diámetros.

Diámetro	0.05	0.1	0.5	1	1.5	2	2.5
Resistencia							

c) El dominio de la función resistencia del alambre es. ___________________________________

d) El rango de la función resistencia del alambre es. _____________________________________

e) ¿Qué pasa con la resistencia del alambre si el diámetro del alambre se aproxima a cero?

____

Solución de la secuencia.

a) Si la función tiene la forma.

$f(d)=\frac{cI}{d^2}$, donde c es una constante de proporcionalidad.

Considerando los valores dados tenemos.

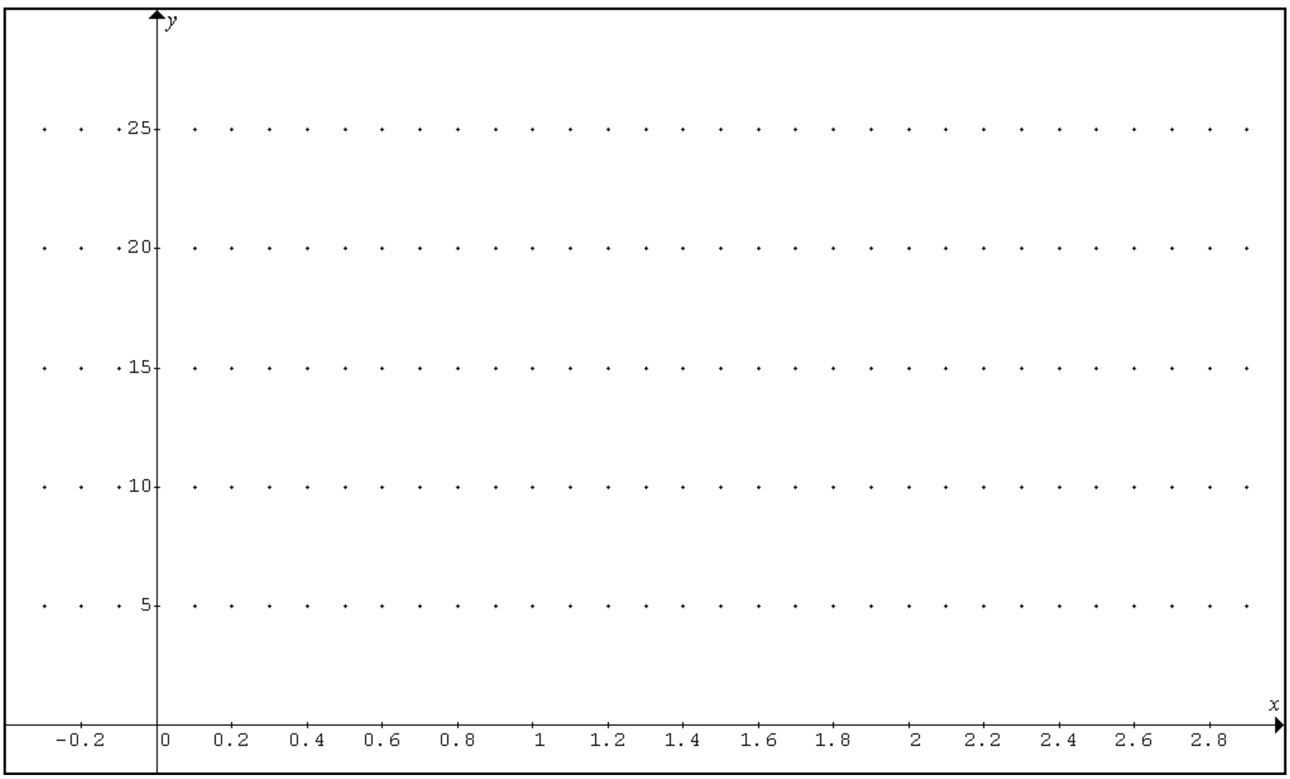
$$8.2=\frac{c(1)}{(0.01)^2}$$

$$8.2=\frac{c}{0.0001}$$

$$c=8.2\,x\,10^{-4}$$

La función buscada es: $f(d)=\frac{8.2\,x\,10^{-4}}{d^2}$.

Continua con el desarrollo de la secuencia y dibuja la gráfica de la función en el siguiente sistema de coordenadas.



Secuencia de lectura y exploración.

Aprendizaje. Interpreta los resultados de la tabla o de la gráfica de una función racional, y obtiene conclusiones sobre la situación o problema correspondiente.

Inicio de la secuencia.

Problema 1. Se tiene la función racional $f(x) = \frac{x}{x-4}$, completa la siguiente tabla de valores donde la variable independiente x se acerca al valor de x = 4, con x en el intervalo (4, +∞)

x	6	5	4.5	4.2	4.1	4.01	4.001
f(x)							

¿Qué pasa con los valores de f(x)? ____

¿Qué pasa con los puntos de la gráfica de f(x), cuando x se acerca a 4? ____________________

Completa la siguiente tabla de valores.

x	2	3	3.5	3.8	3.9	3.99	3.999
f(x)							

¿A qué valor de x se acercan los valores de la variable independiente? _____________________

¿A qué valor se acercan los valores de la función? ____________________________________

¿Qué pasa con el valor de la función f(x) cuando x = 4? ________________________________

Ahora veremos que pasa con los valores de la función cuando los valores de la variable independiente se alejan del origen con valores positivos, completando la siguiente tabla de valores.

x	10	100	10000	20000	40000	50000	60000
f(x)							

¿A qué valor se aproximan los valores de la función? __________________________________

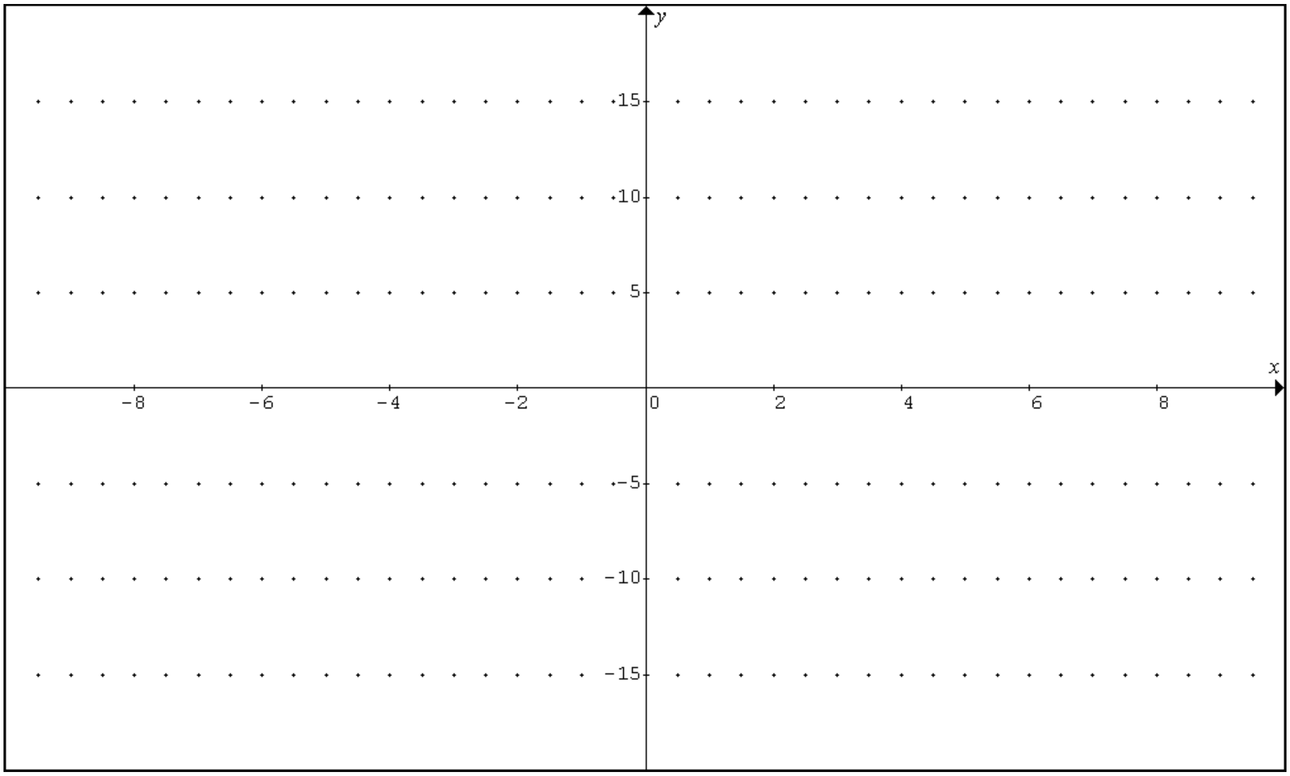
Si los valores de x se alejan del origen con valores negativos, el comportamiento de los valores de la función se puede observar al completar la siguiente tabla de valores.

x	-10	-100	-10000	-20000	-40000	-50000	-60000
f(x)							

¿A qué valor se aproximan los valores de la función? __________________________________

En ambos casos los valores de la función se aproximan al mismo valor: ____________________

Realiza un bosquejo de la gráfica de la función en el siguiente sistema de coordenadas.



Traza en el sistema de coordenadas anterior la gráfica de las recta "**y = 1**", y la recta "**x = 4**".

Ambas rectas reciben el nombre de Asíntotas de la gráfica, busca la definición correspondiente en un libro de la bibliografía recomendada, y escríbela a continuación. ________________________

____

Como puedes ver la variable x puede tomar cualquier valor, excepto el valor x = 4, por lo que el dominio de la función es el conjunto de los números reales menos el valor de 4, lo cual se puede expresar como: R – {4}.

Respecto a los valores que toma la función, vemos que la función toma cualquier valor real, menos el valor de 1, cosa que se puede comprobar de la siguiente manera, dado cualquier valor y, por ejemplo y = 32, diferente de 1, se resuelve la ecuación.

$\mathbf{32 = \dfrac{x}{x-4}}$ para encontrar el valor de x que bajo la función f(x) nos da que f(x) = 32.

El rango de valores de la función es el conjunto de los números reales menos el valor de 1, que se puede expresar como: R – {1}.

Ejercicios. Encuentra la gráfica, el dominio, el rango y las asíntotas de cada función.

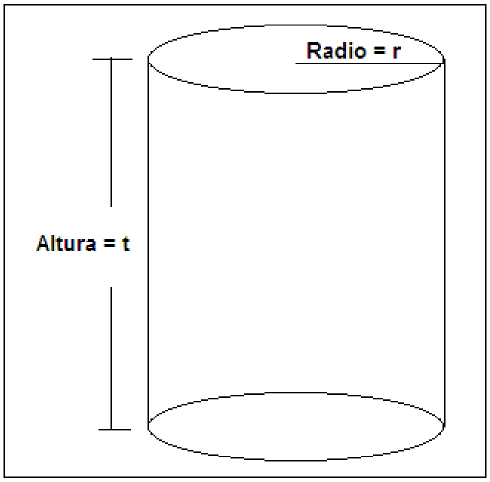
$\mathbf{f(x) = \dfrac{2x}{x+2}}$	$\mathbf{f(x) = \dfrac{3x}{3x-12}}$	$\mathbf{f(x) = \dfrac{x}{x+6} + 1}$	$\mathbf{f(x) = \dfrac{x-2}{x+4}}$

Secuencia de lectura y Exploración.

Aprendizaje. Resuelve problemas sobre valores extremos en una función racional, por medio de una aproximación numérica.

Inicio de la secuencia.

Determinar las dimensiones de una lata cilíndrica cuyo volumen es de 64 cm^3. Si queremos usar la menor cantidad de material en su construcción.



La fórmula para encontrar el volumen del cilindro es:

$$V = \Pi r^2 t$$

Donde V representa el volumen, Π es una constante cuyo valor aproximado es 3.1416, r es el radio de la base y t es la altura del cilindro.

La fórmula para encontrar el área total del cilindro es:

$$A_t = 2\Pi r^2 + 2\Pi rt$$

A_t representa el área total, Π es una constante, r es el radio de la base y t es la altura del cilindro.

Como el volumen es 64 se puede establecer la igualdad.

$$64 = \Pi r^2 t$$

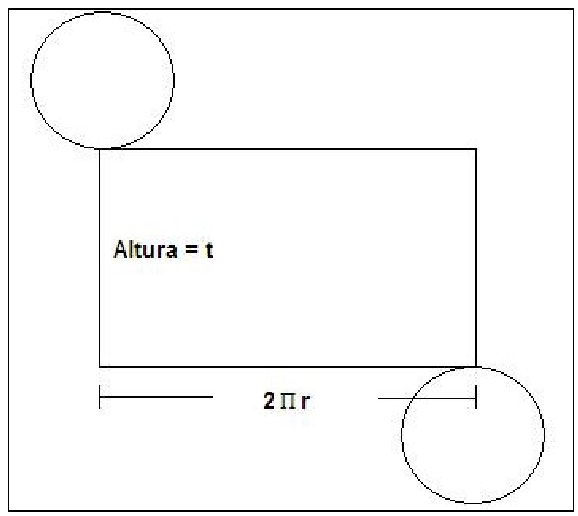
Despejando t se obtiene.

$$t = \frac{64}{\Pi r^2}$$

Sustituyendo t en la ecuación del área total, tenemos

$$A_t = 2\Pi r^2 + 2\Pi r\left(\frac{64}{\Pi r^2}\right)$$

Simplificando, se tiene que el área total esta en función del valor del radio.



$$A_t(r) = 2\Pi r^2 + \frac{128}{r}$$

a) Efectúa la suma de fracciones indicada, y escribe la función resultante, A(r) =

b) De acuerdo a las condiciones del problema el dominio de la función es: ___________________

c) Encuentra las raíces de la función: ____

d) De acuerdo a las condiciones del problema, ¿las raíces pertenecen al dominio de la función:

____

e) ¿tiene puntos de ruptura la función? _____________, ¿cuáles son? ____________________

f) Escribe la ecuación de la asíntota a la gráfica de la función: ___________________________

g) Para encontrar la solución al problema, completa la siguiente tabla de valores para explorar el valor aproximado.

x	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5
f(x)							

h) ¿Consideras de acuerdo a los resultados obtenidos, que la solución del problema esta entre algunos de los valores de x? _____________________

i) En caso afirmativo, escribe dentro de que valores: _______________ y ______________

j) Si consideraste un par de valores, vamos a dividir ese intervalo usando 5 valores que sean equidistantes, _____, _____, _____, _____, _____.

k) En la siguiente tabla escribe los valores extremos los puntos de división y completa la tabla de valores usando una calculadora.

x							
f(x)							

l) Escribe el valor de x que consideras nos da el mejor valor para la solución del problema.

____

m) Escribe el valor de la función correspondiente al valor de x seleccionado.

____

n) Si el m^2 de material cuesta \$100.00, el valor del material empleado en la construcción del cilindro es: ____________________

Ejercicios:

Para cada una de las siguientes funciones identifica, El dominio, los puntos de ruptura, el comportamiento de la función alrededor de los puntos de ruptura, el rango de la función, el comportamiento de la función cuando la variable independiente se aleja del origen con valores positivos, el comportamiento de la función cuando la variable independiente se aleja del origen con valores negativos, las ecuaciones de las asíntotas a la gráfica de la función y la gráfica de la función.

1. $f(x)=\frac{1}{x}$	**2.** $f(x)=\frac{-1}{x}$	**3.** $f(x)=\frac{1}{x}-4$	**4.** $f(x)=\frac{1}{x}+6$
5. $f(x)=\frac{-2}{x-3}+3$	**6.** $f(x)=\frac{3}{x+1}-5$	**7.** $f(x)=\frac{2}{(x-1)^2}$	**8.** $f(x)=\frac{-3}{(x+4)^2}$
9. $f(x)=\frac{x^3-1}{x^2}$	**10.** $f(x)=\frac{x^3}{(x+2)^2}$	**11.** $f(x)=\frac{(x-1)(x+2)}{(x+5)(x-3)}$	**12.** $f(x)=\frac{x^2+x-12}{x^2-x-12}$

13. Una lata cilíndrica debe contener 10π pulgadas cúbicas. Escribe una función para S(r), el área total del cilindro en términos del radio r. Realiza una gráfica de la función S y utiliza la gráfica para determinar el valor del radio r de la lata para el cual se necesita la menor cantidad de material para producirla.

14. Encontrar una función racional f(x) cuya gráfica pase por el punto (2, 5) y tiene exactamente dos asíntotas, $y = 2x + 3$, y $x = 3$.

15. Realiza la gráfica de la función $f(x) = \frac{8}{4+x^2}$.

16. Según la ley de Boyle, a temperatura constante la presión P de un gas comprimido es inversamente proporcional al volumen, V. Supongamos que la presión es 25 libras por pulgada cuadrada cuando el volumen del gas es 400 pulgadas cúbicas. Encuentra una función que exprese la presión del gas en términos del volumen que ocupa si se mantiene la temperatura constante, además encuentra el dominio de la función, el rango, los puntos de ruptura, las asíntotas y la gráfica.

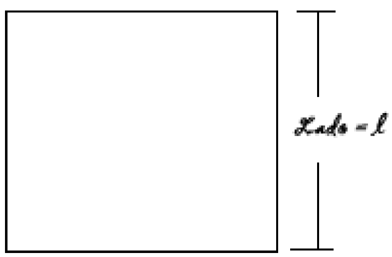
17. Un fabricante de juguetes tiene gastos fijos de \$20 000 y costos directos (mano de obra y materia prima) de \$50.00 por juguete. Escribir una función P(x), de costo promedio por unidad, si la compañía produce x juguetes, además encuentra el dominio de la función, el rango, los puntos de ruptura, las asíntotas y la gráfica.

Secuencia didáctica de lectura y exploración.

Aprendizaje. Explora en una situación o problema que da lugar a una función con radicales, las relaciones y comportamientos que le permiten obtener información para establecer su representación algebraica.

Inicio de la secuencia:

Problema 1. Se tiene un cuadrado cuya área es conocida, establecer una función para encontrar el perímetro del cuadrado en términos del área.



El área del cuadrado esta dado por la fórmula:

$\mathcal{A} = \ell^2 \ldots (1)$

De donde sacando raíz cuadrada en ambos miembros de la igualdad tenemos.

$\pm\sqrt{A} = \ell \ldots (2)$

De las condiciones del problema, solo se considera la raíz positiva.

El perímetro del cuadrado esta dado por la fórmula:

$P = 4\ell \ldots (3)$

Sustituyendo (2) en (3) tenemos.

$P(A) = 4\sqrt{A} \ldots (4)$

La relación (4) establece una función para obtener el perímetro del cuadrado en términos del área del cuadrado.

Si el área del cuadrado puede tomar los valores que se muestran en la siguiente tabla, calcula el perímetro correspondiente en cada caso.

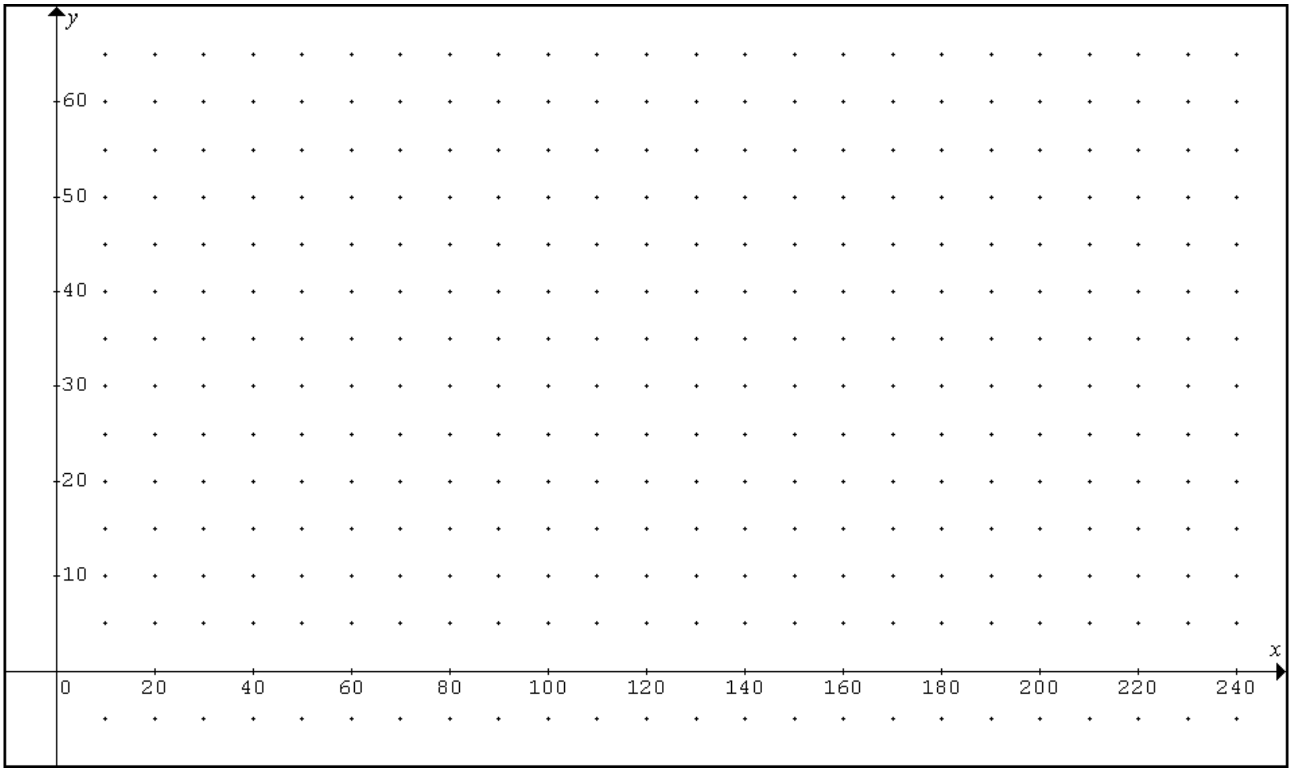
Área	0.1	0.3	0.5	0.8	1	1.5	2.4
P(a)							

Ahora los valores que puede tomar el área son los siguientes, encuentra los valores correspondientes para el perímetro.

Área	5	10	50	80	100	150	200
P(a)							

Encuentra la raíz de la función P(a): ____________________________

Localiza todos los puntos obtenidos en el siguiente sistema de coordenadas para tener un bosquejo de la función p(a).



Problema 2. Ahora considera la función f(x) = $\sqrt{x-10}$.

a) Para que valor de x, el valor de la función es 0: ______________________________

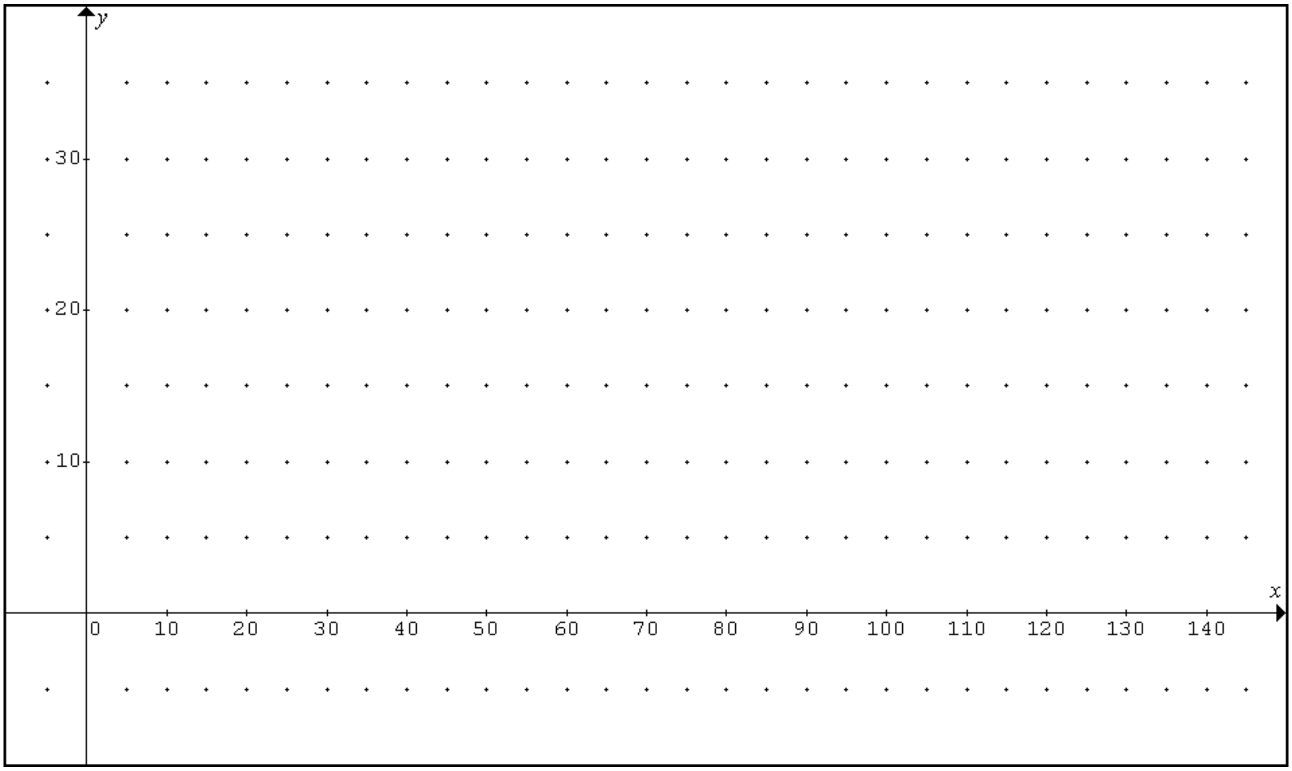
b) Como solo se pueden calcular las raíces de números x, tales que x $\geq$ 0, resuelve la siguiente desigualdad para obtener el dominio de la función, x – 10 $\geq$ 0: __________________________

c) Considerando la solución obtenida, completa la siguiente tabla de valores, dando primero los valores que consideres adecuados para x, la variable independiente, y después calcula los correspondientes para f(x).

x							
f(x)							

d) ¿Qué pasa con los valores de la función, cuando los valores de x, la variable independiente se aleja del origen con valores positivos?, si es necesario elabora una tabla de valores que corresponda a las condiciones: ____

e) Con la información obtenida, bosqueja la función f(x) en el siguiente sistema de coordenadas.



Problema 3. Considera la función f(x) = $-\sqrt{4-x}$, para la cual hay que encontrar el dominio, el rango, las raíces y la gráfica.

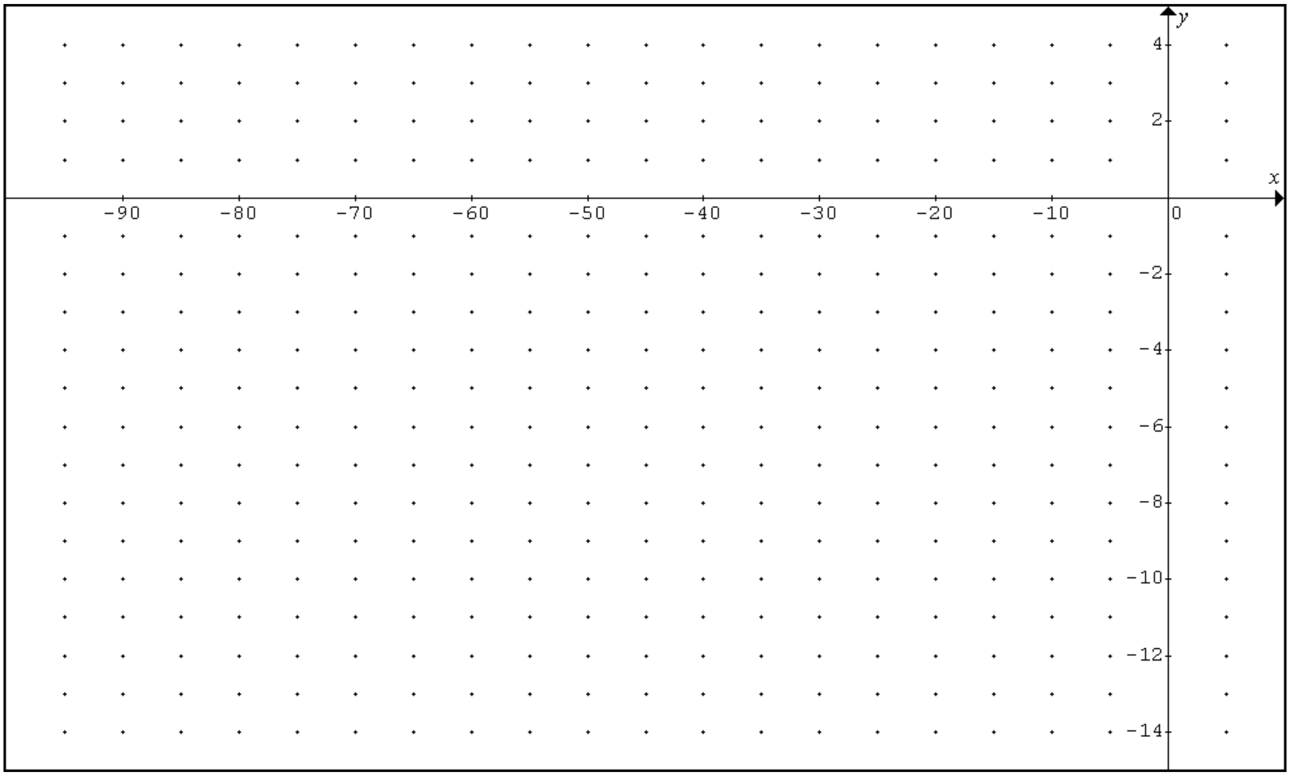
a) Primero encuentra las raíces haciendo f(x) = 0, que es equivalente a, $-\sqrt{4-x}$ = 0, el valor de las raíces de la función son: ____

b) El dominio de la función se encuentra resolviendo la desigualdad 4 – x > 0, el dominio de la función es: ____

c) Para hacer un bosquejo de la función completa la siguiente tabla de valores, para aquellos valores de x que estén en el dominio de la función.

x	-96	-77	-70	-50	-30	-20	-10
f(x)							
x	-5	-1	4	6	7	8	0
f(x)							

d) Realiza un bosquejo de la función en el siguiente sistema de coordenadas, tomando en cuenta los puntos encontrados.



e) ¿El rango de la función es? ____

Ejercicios. Para cada función encuentra el dominio, el rango, las raíces y la gráfica.

a) $\mathbf{f(x)=\sqrt{x}-5}$

b) $\mathbf{f(x)=-\sqrt{x}+4}$

c) $\mathbf{f(x)=4\sqrt{x}-4}$.

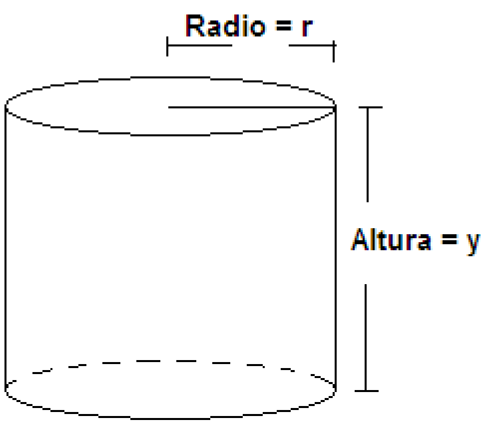
Secuencia didáctica de lectura y exploración.

Aprendizaje. Establece la regla de correspondencia de una función con radicales, asociada a un problema.

A partir de la regla de correspondencia de una función con radicales, elabora una tabla de valores que le permite construir su gráfica.

Inicio de la secuencia.

Problema 1. Se tiene un cilindro cuya altura es constante con valor igual a y = 5, se quiere calcular el valor del radio si el volumen del cilindro es variable.



La fórmula para encontrar el volumen de un cilindro dado es:

$V=\pi r^2 y$ . . . (1)

Donde V es el volumen, Π es una constante, r es el radio, y es la altura del cilindro.

Despejando r de la expresión (1) se tiene.

$\frac{V}{\pi y}=r^2$, de donde r es igual a:

$r=\sqrt{\frac{V}{\pi y}}$ como y = 5, la función buscada es la siguiente, considerando que $\Pi \cong 3.14$.

$r=\sqrt{\frac{V}{(3.14)(5)}}=\sqrt{\frac{V}{15.70}}$, la función es, $r(v)=\sqrt{\frac{V}{15.70}}$.

a) ¿El dominio de la función es? ______________________________

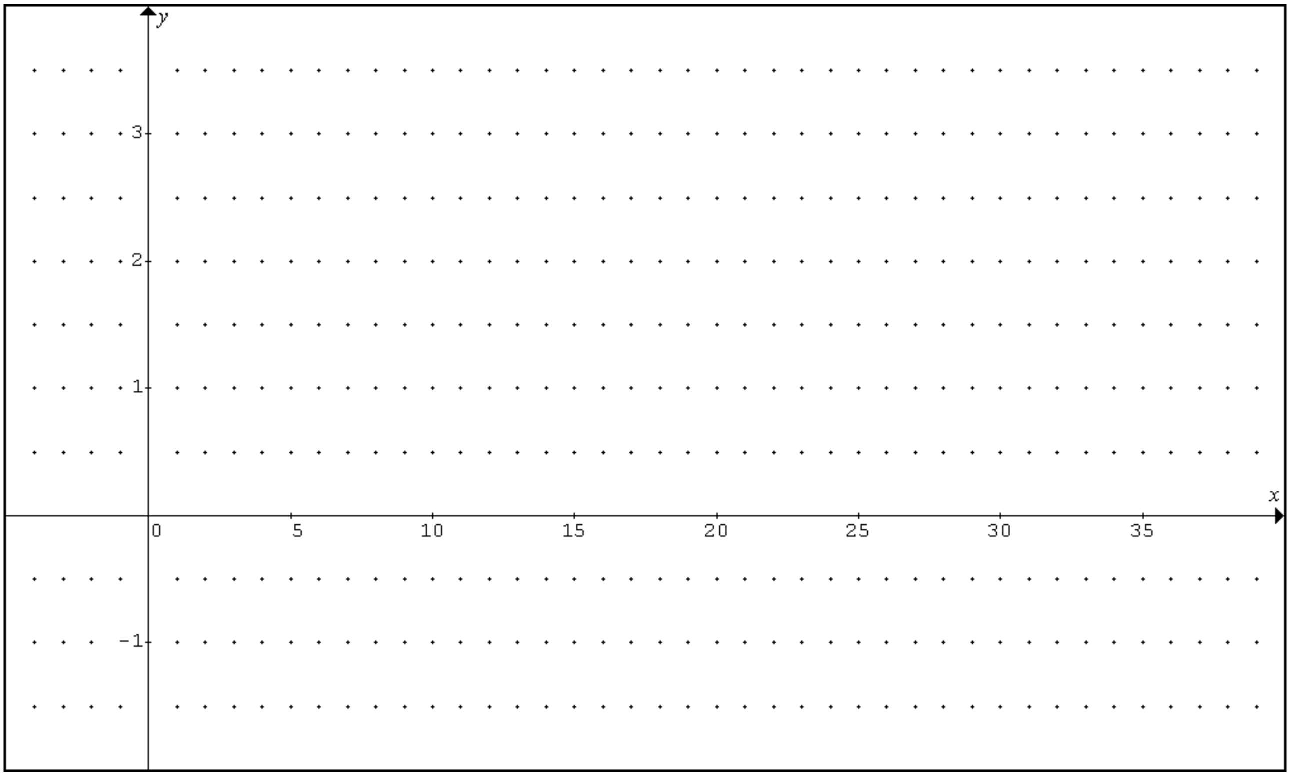
b) Tomando en cuenta tu respuesta, completa la siguiente tabla de valores, dando valores para la variable independiente V dentro de su dominio de definición.

v							
r(v)							
v							
r(v)							

c) ¿Tiene raíces la función propuesta? _________________________

d) Considerando los valores obtenidos el rango de la función r(x) es: _______________________

e) Realiza un bosquejo de la función tomando en cuenta la información obtenida en el siguiente sistema de coordenadas.



Problema 2. Encuentra el dominio, rango, raíces y grafica de la función f(x) = $\sqrt{6-x}-4$.

a) El dominio se determina encontrando la solución de la desigualdad 6 – x ≥ 0, ¿El dominio de la función es? ________________________

b) Las raíces de la función se encuentran al resolver la ecuación que resulta de hacer f(x) = 0.

Que nos lleva a, $\sqrt{6-x}-4=0$.

Sumando 4 a ambos miembros de la ecuación, $\sqrt{6-x}=4$.

Elevando ambos miembros al cuadrado, 6 – x = 14

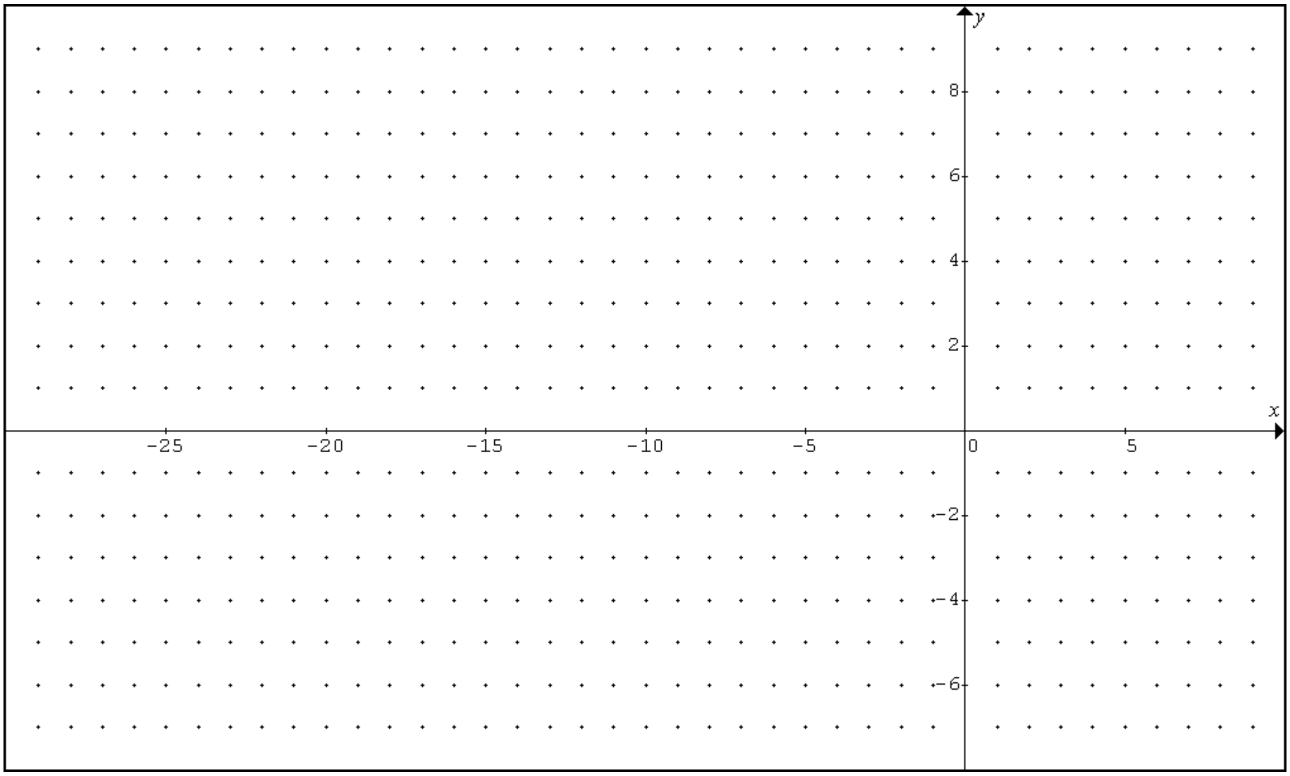
El valor de la raíz de la función es: _____________

c) Completa la siguiente tabla de valores, tomando valores en el dominio de la función.

v							
f(v)							
v							
f(v)							

d) El rango de la función es: ______________________

e) Realiza un bosquejo de la función con la información obtenida en el siguiente sistema de coordenadas.



Ejercicios. Para cada función encuentra el dominio, el rango, las raíces y la gráfica.

a) $f(x) = -\sqrt{4+x}$.

b) $f(x) = -\sqrt{x-4}$.

c) $f(x) = \sqrt{5-x} + 3$

d) $f(x) = 3 - \sqrt{x-3}$.

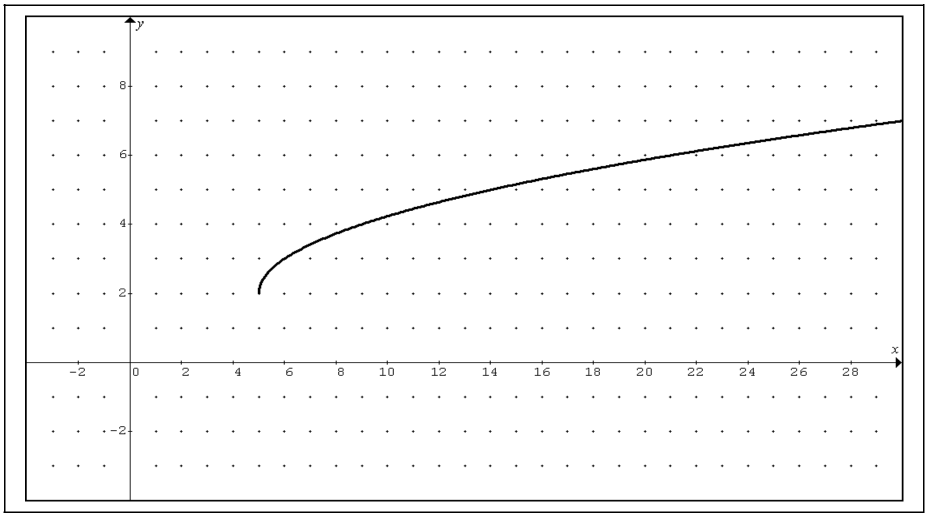
Secuencia didáctica de lectura y exploración.

Aprendizaje. Interpreta los resultados de la tabla o de la gráfica, de una función con radicales, y obtiene conclusiones sobre el problema correspondiente.

Resuelve problemas sobre valores extremos en los que se utilizan funciones con radicales, por medio de aproximaciones numéricas.

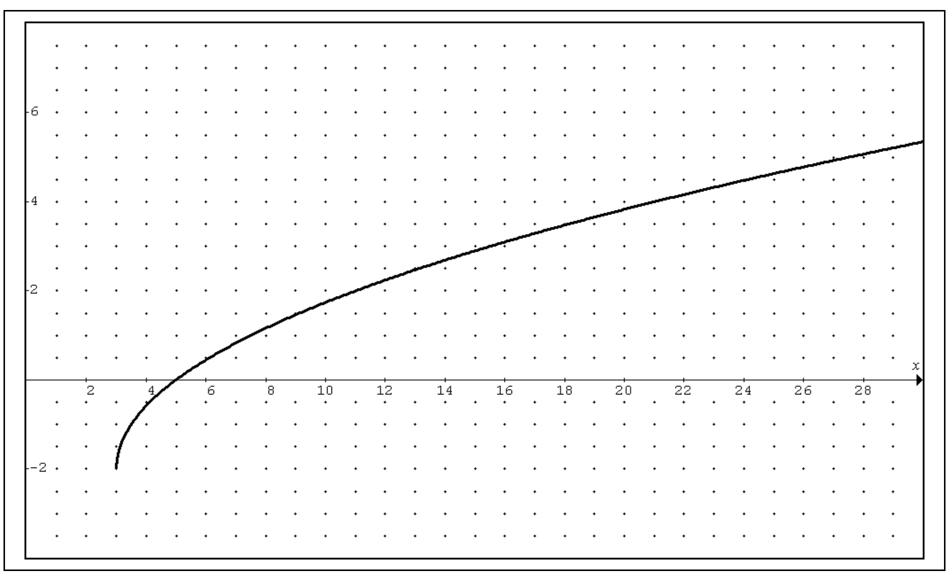
Inicio de la secuencia.

Problema 1. Considerando la gráfica de la función $\mathbf{f(x) = \sqrt{x-5}+2}$ que se muestra a continuación.



Encuentra de manera aproximada el valor de x, que satisface f(x) = 5, y justifica tu respuesta.

Problema 2. Considerando la gráfica de $\mathbf{f(x) = \sqrt{2x-6}-2}$, que se muestra a continuación.



Encuentra el valor de f(13) usando la gráfica y la calculadora, justifica tu respuesta.

Problema 3. Completa la tabla de valores para la función $\mathbf{f(x)=\sqrt{x-2}}$.

x	2.7	2.9	2.99	3.01	3.1	3.2	3.3
f(x)							

Tomando en cuenta los valores observados, encuentra el valor de f(3) de manera aproximada.

Problema 3. Completa la siguiente tabla de valores para la función $\mathbf{f(x)=\sqrt{3x-5}-4}$.

x	2	4	6	9	10	13	14
f(x)							

Determina entre que valores esta la raíz de la función. ________________________________

Divide el intervalo que contiene la raíz en cuatro intervalos de igual longitud, elabora la tabla de valores para los puntos de división.

x							
f(x)							

Entre qué valores esta la raíz de la función. _______________________________

Divide el intervalo que contiene la raíz en cuatro intervalos de igual longitud, elabora la tabla de valores para los puntos de división.

x							
f(x)							

Da el valor de la raíz con una aproximación de 2 decimales, usando los valores obtenidos.

Resuelve la ecuación que se establece al hacer f(x) = 0, y compara el resultado con la aproximación obtenida usando las tablas.

Secuencia didáctica de lectura y exploración.

Aprendizaje. Resuelve problemas sobre valores extremos en los que se utilizan funciones con radicales, por medio de aproximaciones numéricas.

Inicio de la secuencia:

Problema 1. Encuentra la función para calcular la distancia del punto A(2, 5) al punto B(x, 8), su dominio, el rango, el valor de x para el cual la distancia entre A y B es la menor posible, así como el valor de x para el cual la distancia toma los siguientes valores 5, y 4.

Solución del problema.

Del curso de matemáticas III, la distancia entre los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ esta dada por.

$$\mathbf{d(A,B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}} \; .$$

De manera que sustituyendo los valores dados, se tiene la siguiente función que depende del valor que demos a la variable x.

$$\mathbf{d(x)=\sqrt{(x-2)^2+(8-5)^2}}$$

Haciendo las operaciones indicadas se obtiene.

$$\mathbf{d(x)=\sqrt{(x-2)^2+9}}$$

El dominio de la función es el conjunto de los números reales, ya que para cualquier valor de x, $(x-2)^2 \geq 0$, por lo que la expresión $(x-2)^2 + 9 > 0$, y la operación de obtener la raíz cuadrada siempre se puede obtener.

Para hacer un bosquejo de la gráfica completa la siguiente tabla de valores.

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
f(x)							

x	1	2	3	4	5	6	7
f(x)							

¿Tiene la función f(x) raíces? _____, justifica tu respuesta ________________________________

____

¿Cuál es la condición para obtener la menor distancia entre los puntos A y B? ________________

Encuentra el valor de x, que satisface la condición de que la distancia es la menor posible. _____

Tomando en cuenta las condiciones anteriores, el rango de la función es. ___________________

Para qué valor de x, f(x) = 5, ____ Observando las tablas de valores anteriores indica entre que valores se encuentra el valor de x, que satisface la condición f(x) = 4, ____

Toma en dicho intervalo 5 valores de x equidistantes entre si, y encuentra el valor de la función en dichos puntos incluyendo los extremos del intervalo, y completa la siguiente tabla de valores.

x							
f(x)							

Observa la tabla anterior e indica entre que valores de x, esta el valor de la función más cercano a f(x) = 4.

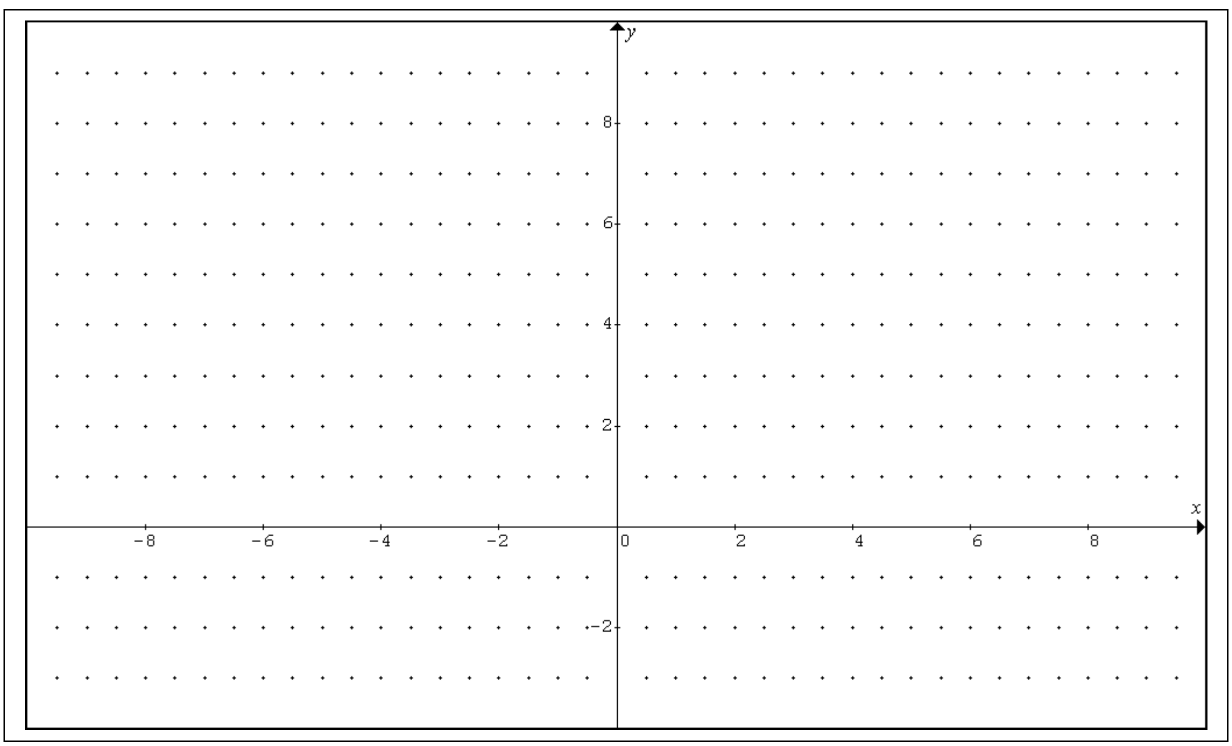
Repite el proceso anterior, dividiendo el nuevo intervalo con 5 valores de x equidistantes entre sí, y evalúa la función en dichos puntos incluyendo los extremos, y completa la siguiente tabla de valores.

x							
f(x)							

Observa que con este proceso se puede aproximar el valor de x, de manera que f(x) = 4, así que nuevamente observa la tabla e indica entre que par de valores de x, esta el que cumple la condición y repite el proceso anterior para completar la siguiente tabla de valores.

x							
f(x)							

Realiza un bosquejo de la gráfica en el siguiente sistema de coordenadas.



Problema 2. Para la función $f(x) = \sqrt{4-x^2}$, determina el dominio, el rango, las raíces, la gráfica y los valores de x para los cuales la función tiene su mayor valor, y su menor valor.

Solución del problema.

El dominio de la función se encuentra resolviendo la desigualdad. $4 - x^2 \geq 0$.

Expresando el primer miembro como un producto de binomios conjugados. $(2 - x)(2 + x) \geq 0$.

Para que el producto **ab** de dos números sea positivo, ambos deben tener el mismo signo, lo que nos da.

- $(2 - x) \geq 0$ y $(2 + x) \geq 0$
- $(2 - x) \leq 0$ y $(2 + x) \leq 0$

De la primera opción tenemos.

$2 \geq x$ y $x \geq -2$, juntando ambas desigualdades tenemos, $2 \geq x \geq -2$.

Que equivale a que x este en el intervalo cerrado [-2, 2]

De la segunda opción se tiene.

$2 \leq x$ y $x \leq -2$, al juntar ambas desigualdades se tiene $2 \leq x \leq -2$, lo cual es imposible.

Así que el dominio de la función f(x) es el intervalo $D_f = [-2, 2]$.

Las raíces de la función se obtienen haciendo f(x) = 0, lo que nos lleva a la ecuación, $\sqrt{4-x^2} = 0$.

Elevando ambos miembros de la ecuación al cuadrado, $4 - x^2 = 0$

Sumando x^2 en ambos miembros de la ecuación. $4 = x^2$

Sacando raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación. $\pm 2 = x$

Las raíces de la función son $x_1 = -2$, y $x_2 = 2$.

Como estamos considerando la raíz positiva, el menor valor que toma la función es 0.

Y el mayor valor que alcanza la función se da para x = 0, y f(0) = 2.

El rango de la función es el intervalo $R_f = [0, 2]$.

Para hacer la gráfica de la función se toma en cuenta la propiedad de ser una función **par**, ya que.

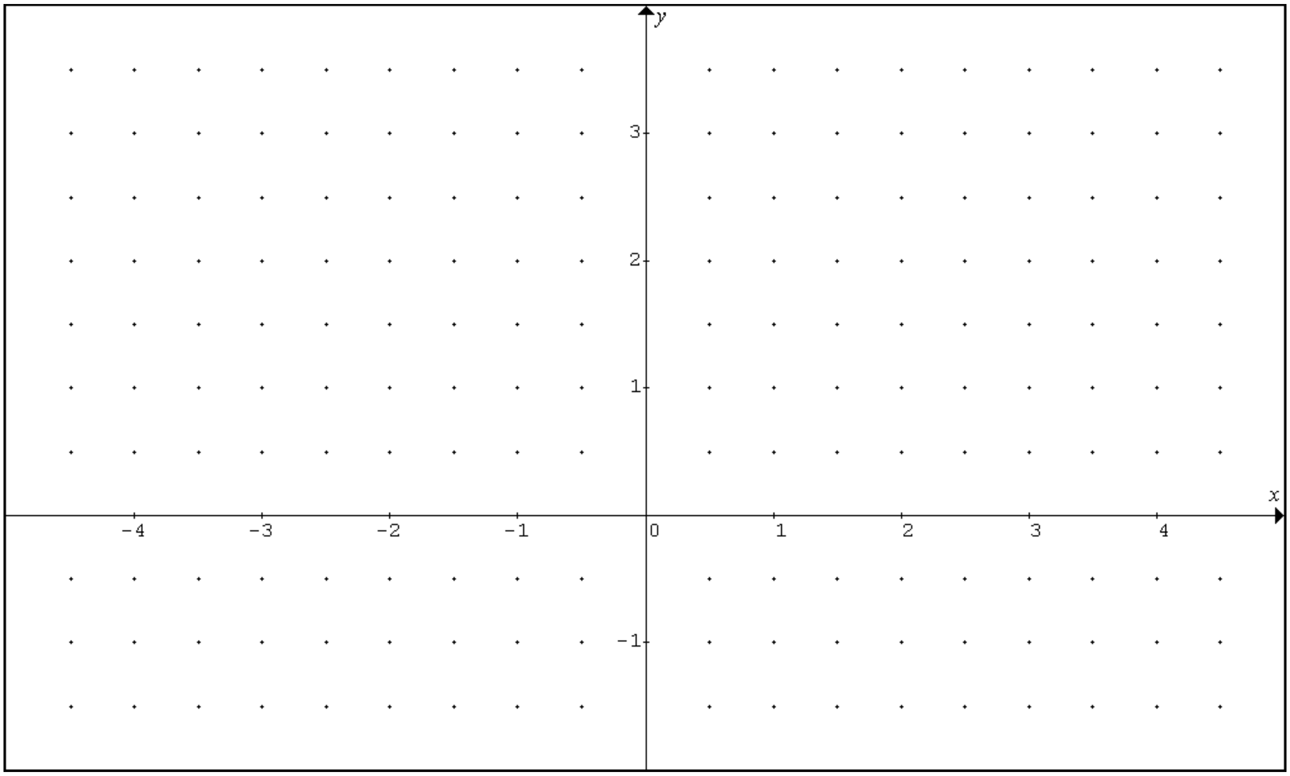
$$f(-x) = \sqrt{4-(-x)^2} = \sqrt{4-x^2} = f(x).$$

Y la gráfica de la función es simétrica con respecto al eje de las ordenadas, la recta x = 0, es el eje de simetría.

Para hacer la gráfica de la función completa la siguiente tabla de valores.

x	-4	-3.5	-3	-2.5	-2	-1.5	1
f(x)							

Realiza un esbozo de la grafica en el siguiente sistema de coordenadas.



Como puedes observar es la parte superior de una circunferencia, cuya ecuación es.

$$x^2 + y^2 = 4 .$$

La cual no es una función, ya que al despejar y, tenemos.

$$y^2 = 4 - x^2$$

Y sacando raíz cuadrada en ambos miembros, queda.

$$\mathbf{y = \pm \sqrt{4 - x^2}} .$$

Para cada valor de x, le podemos asignar dos valores a la variable dependiente y, por ejemplo para x = 0,

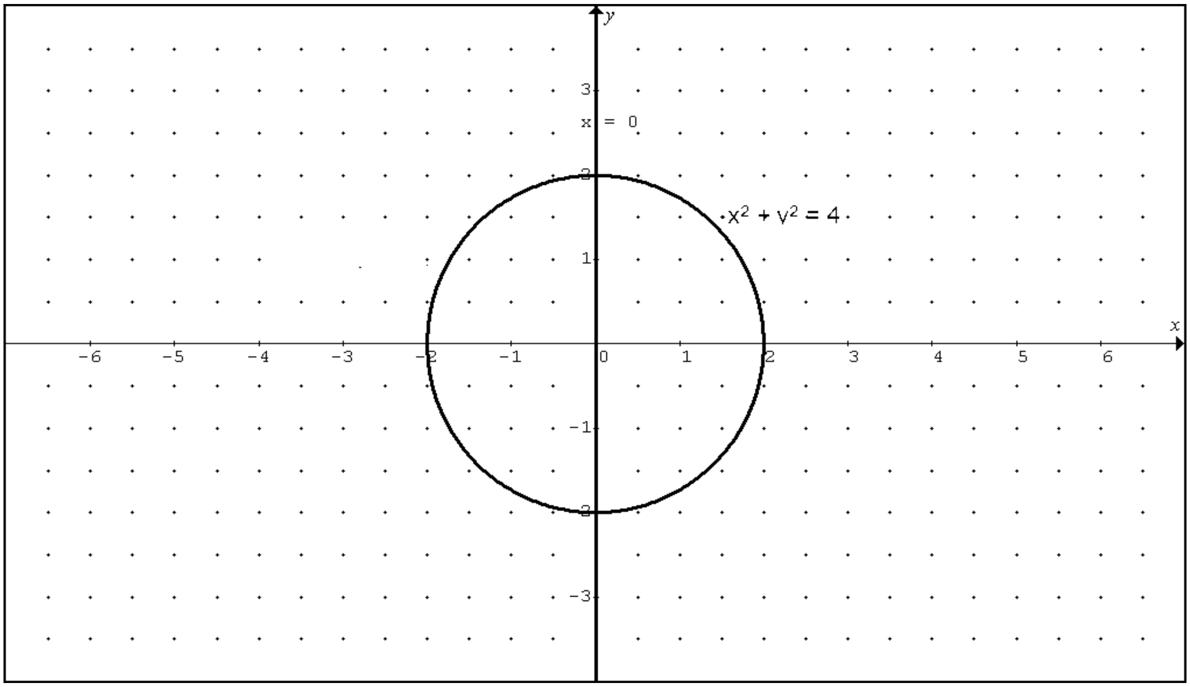
$$\mathbf{y(0) = \pm \sqrt{4 - (0)^2}}$$

$$\mathbf{y(0) = \pm \sqrt{4 - 0}}$$

$$\mathbf{y(0) = \pm \sqrt{4}}$$

$$\mathbf{y(0) = \pm 2}$$

Así que los puntos (0, -2) y (0, 2) pertenecen a la gráfica de la circunferencia, y la recta x = 0, corta en los dos puntos a la gráfica, como se puede observar en la siguiente gráfica.



Ejercicios: Para cada función encuentra el dominio, el rango, los puntos para los cuales la función alcanza sus valores mínimo y máximo, las raíces y la gráfica correspondiente.

- $\mathbf{f(x)=\sqrt{25-x^2}-3}$
- $\mathbf{f(x)=-\sqrt{25-x^2}+3}$
- $\mathbf{f(x)=\sqrt{16-x^2}}$
- $\mathbf{f(x)=-\sqrt{9-x^2}}$

Problema 3. Encuentra el dominio, el rango, las raíces, la gráfica y el valor de x para el cual se cumple $\mathbf{f(x)=3}$. Si $\mathbf{f(x)=\sqrt{x^2-9}}$.

Para encontrar el dominio de la función tenemos que resolver la desigualdad $x^2 - 9 \geq 0$.
La diferencia de cuadrados se puede escribir como un producto de binomios conjugados.

$$(x-3)(x+3) \geq 0$$

Para que el producto ab de dos números sea positivo, ambos deben tener el mismo signo, por lo que tenemos.

- $(x-3) \geq 0$ y $(x+3) \geq 0$, ó
- $(x-3) \leq 0$ y $(x+3) \leq 0$.

De la primera condición.

- De $(x - 3) \geq 0$

  Sumando 3 en ambos miembros de la desigualdad, $x \geq 3$
- De $(x + 3) \geq 0$

  Restando 3 en ambos miembros de la desigualdad, $x \geq -3$

Ambas desigualdades se cumplen para $x \geq 3$, ya que para $x = 6$, $6 \geq 3$, y $6 \geq -3$.

De la segunda condición.

- De $(x - 3) \leq 0$

  Sumando 3 en ambos miembros de la desigualdad, $x \leq 3$
- De $(x + 3) \leq 0$.

  Restando 3 en ambos miembros de la desigualdad, $x \leq -3$

Ambas desigualdades se cumplen si $x \leq -3$, ya que para $x = -4$, tenemos $-4 \leq -3$ y $-4 \leq -3$.

Así que considerando que la desigualdad es cierta si.

$(x - 3) \geq 0$ y $(x + 3) \geq 0$,

ó $(x - 3) \leq 0$ y $(x + 3) \leq 0$

La desigualdad es cierta si $x \leq -3$, que equivale a $(-\infty, -3]$.

Ó, si $x \geq 3$, que nos da el intervalo $[3, +\infty)$.

Así que el dominio de la función esta compuesto por los intervalos:

$D_f = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$, el símbolo U pertenece a la teoría de conjuntos, y simboliza la unión de conjuntos, que significa que si x pertenece al dominio D_f significa que x pertenece al intervalo $(-\infty, -3]$, o que pertenece al intervalo $[3, +\infty)$.

Para encontrar la gráfica de la función se hacen dos tablas de valores, una con los valores de x en el intervalo $(-\infty, -3]$.

x	-10	-8	-6	-5	-4.5	-4	-3
f(x)							

La otra tabla de valores de manera que x tome valores en el intervalo $[3, +\infty)$.

x	3	4	4.5	5	6	8	10
f(x)							

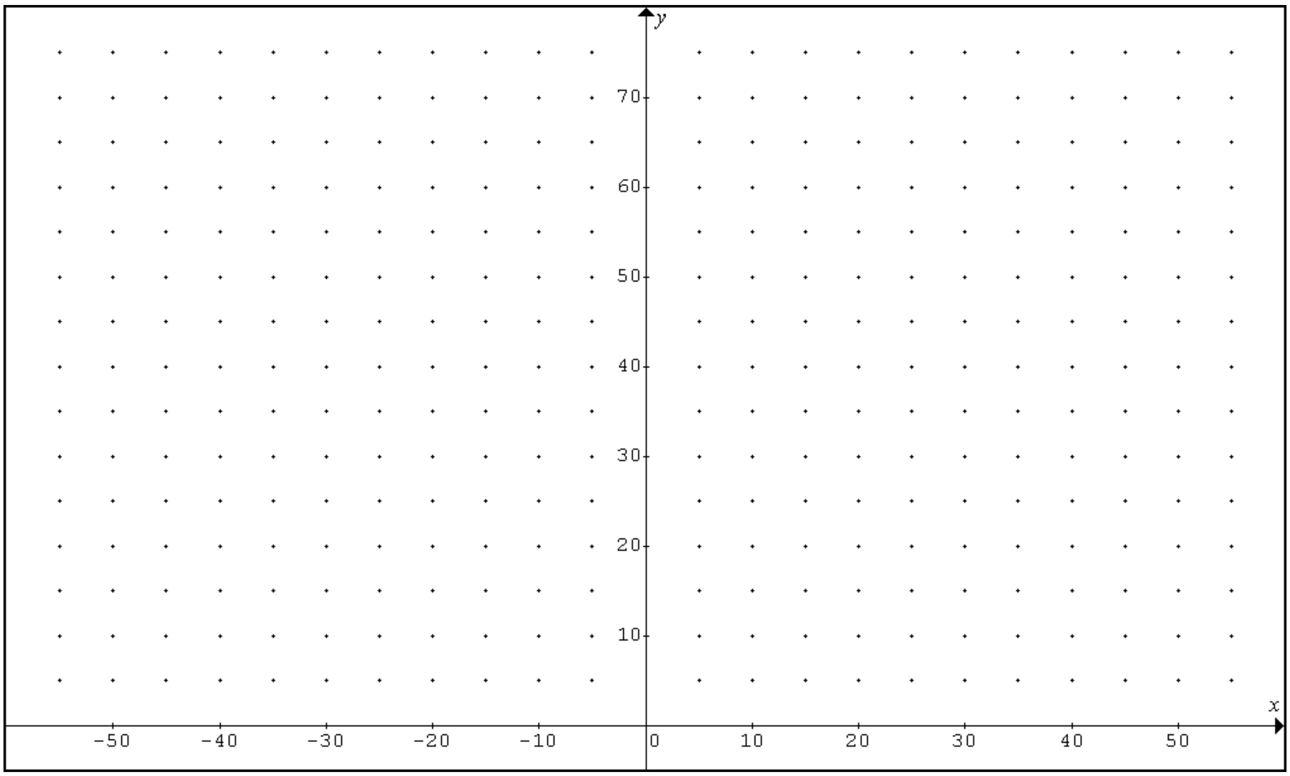
Como puedes observar se tiene que $f(-x) = f(x)$, ya que es una función par, y es simétrica con respecto al eje de las ordenadas.

Ahora veamos el comportamiento de la función cuando los valores de x se alejan del origen con signo positivo, para lo cual completa la siguiente tabla de valores.

x	10	100	1000	5000	10000	15000	20000
f(x)							

Como la función es par, el comportamiento de la función para valores negativos cuando x se aleja del origen es similar, de lo observado en el comportamiento de la función escribe el rango de la función. _______________________________

Realiza un bosquejo de la función en el siguiente sistema de coordenadas.



Finalmente las raíces de la función son. ____

Ejercicios: Para cada función encuentra el dominio, el rango, los puntos para los cuales la función alcanza sus valores mínimo y máximo, las raíces y la gráfica correspondiente.

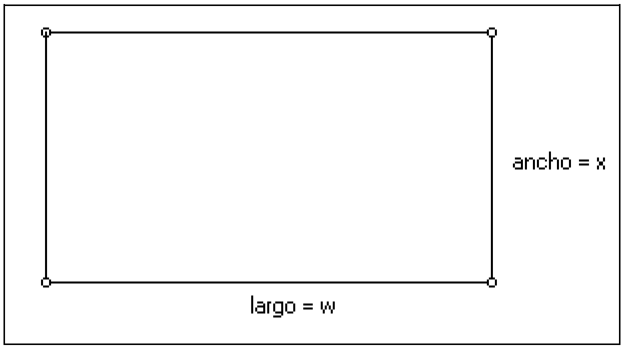
- $f(x)=\sqrt{x^2-25}$
- $f(x)=\sqrt{x^2-16}$
- $f(x)=-\sqrt{x^2-4}$
- $f(x)=-\sqrt{x^2-1}$
- $f(x)=\sqrt{x^2+4}$

Problemas de Aplicación:

1. Se quiere construir un corral que tenga un área de 16 metros cuadrados, ¿Cuáles deben ser las dimensiones del corral, si queremos emplear la menor cantidad de material posible?

Solución del problema.

El siguiente diagrama muestra el corral que se quiere construir.



a) De la fórmula para el perímetro del rectángulo se tiene.

A = x • w

b) Como A = 16 se puede establecer la siguiente ecuación.

16 = x • w

c) De la cual se puede despejar la variable w para obtener.

$$w = \frac{16}{x}$$

d) De la fórmula para el perímetro tenemos.

P = 2x + 2w

e) Sustituyendo la variable despejada, se obtiene que el perímetro esta en función de la variable x, que representa el ancho del rectángulo.

$$P(x) = 2x + \frac{32}{x}$$

f) Efectúa la suma indicada para obtener una función racional y escríbela a continuación.

____

g) Las raíces de la función son: ______________________________

h) Las indeterminaciones de la función son: ___________________

i) El dominio de la función de acuerdo a las condiciones del problema es: __________________

j) Para encontrar las dimensiones del rectángulo con las menores dimensiones posibles, se tiene que hacer una tabla de valores y encontrar por observación un intervalo que pueda contener la respuesta al problema, así que completa la siguiente tabla de valores.

x	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5
f(x)							

k) Entre que valores se encuentra la respuesta del problema. ______________________________

l) Localiza 5 puntos entre los extremos observados, que estén aproximadamente a la misma distancia entre sí (con dos decimales), y completa la siguiente tabla de valores que incluye los extremos del intervalo.

x							
f(x)							

m) Nuevamente observa los valores obtenidos, e indica entre que par de ellos esta la respuesta del problema. ___________________________________

n) Nuevamente 5 puntos estén aproximadamente a la misma distancia entre sí, (con 3 decimales), y completa la siguiente tabla de valores que incluye los extremos del intervalo.

x							
f(x)							

o) La respuesta al problema de manera aproximada es. ______________________

p) El rango de la función es. ____

2. Dada la función $f(x)=\frac{x^3-4x}{x^2-16}$, encuentra su dominio, su rango, sus raíces, las indeterminaciones, las asíntotas y la gráfica de la función.

a) Las raíces de la función se encuentran igualando el numerador a 0, para obtener la siguiente ecuación, ___________________________, cuyas raíces son, ___________________________

b) Las indeterminaciones de la función se encuentran igualando el denominador a 0, para obtener la ecuación, ______________________, cuyas raíces son, ___________________________

c) El dominio de una función racional es igual a todos los números reales menos los puntos de indeterminación, así que el dominio de la función es, ___________________________________

d) Las asíntotas verticales de la función son, ____

e) Para obtener la asíntota oblicua se realiza la división de polinomios indicada en la función racional, de manera que el cociente es, _________________ y el residuo es, ________________ la ecuación de la asíntota oblicua corresponde a la recta y = cociente, así que la ecuación de la asíntota buscada es, ____________________

f) Finalmente para obtener la gráfica tienes que observar el comportamiento de la función cuando la variable x se aleja del origen con signo positivo, al completar la siguiente tabla.

x	10	50	100	500	1000	5000	10000
f(x)							

La gráfica de la función se acerca a la asíntota oblicua.

g) Ahora se observa el comportamiento de la función, cuando los valores de x se alejan del origen con signo negativo, al completar la siguiente tabla.

x	-10	-50	-100	-500	-1000	-5000	-10000
f(x)							

h) También se debe observar el comportamiento de la función cuando los valores de la variable x se acercan a las discontinuidades, para lo cual debes de dar los valores que consideres apropiados y luego completa las tablas correspondientes.

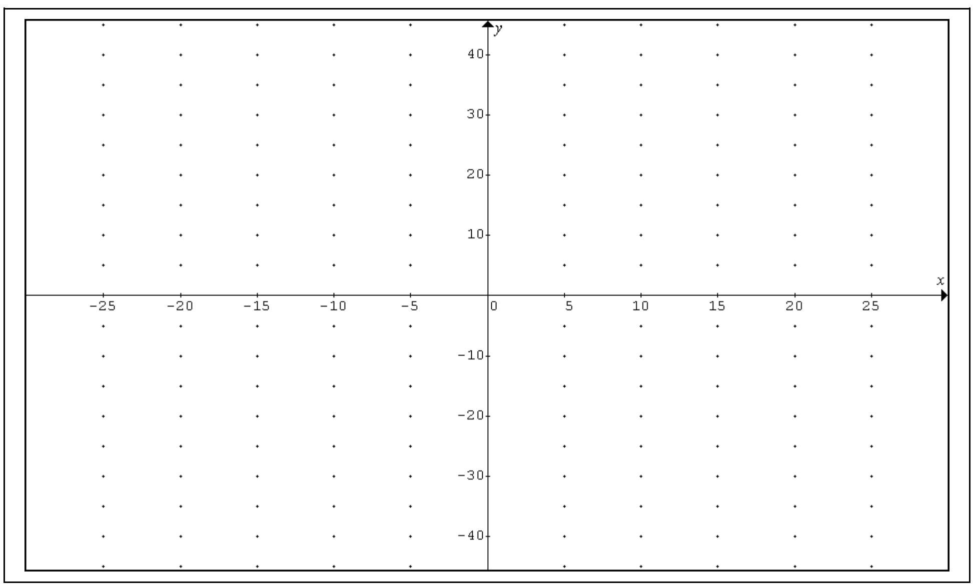
x							
f(x)							

x							
f(x)							

x							
f(x)							

x							
f(x)							

Realiza la gráfica de la función considerando la información obtenida.



i) ¿El rango de la función es? ____

Ejercicios. Encuentra el dominio, rango, raíces, indeterminaciones, asíntotas y la gráfica de cada una de las siguientes funciones.

a) $\mathbf{f(x)=\dfrac{x^2-5x-24}{x-1}}$

b) $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-9}$

c) $f(x)=\dfrac{x^3-4x^2}{x^2-16}$

d) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+1}$

e) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+1}$

f) $f(x)=\dfrac{9-x^2}{4+x^2}$

g) $f(x)=\sqrt{x+9}$

h) $f(x)=\sqrt{36-x^2}$

i) $f(x)=\sqrt{x^2-25}$

Bibliografía:

Para los alumnos.

1. Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica.
   Earl W. Swokowski
   International Thomson Editores
   Novena Edición.

Para los profesores.

2. Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica.
   Walter Fleming
   Prentice Hall Hispanoamericana.
   Tercera Edición.

Matemáticas IV	**Funciones Racionales y con Radicales**
Unidad II	**Examen de la Unidad**

Nombre del alumno: ______________________________ Grupo: _________

1. Encuentra el dominio, el rango, los puntos de discontinuidad, y la gráfica de la función f(x) = $\frac{x-4}{x+6}$.

2. Encuentra el dominio, el rango, los puntos de discontinuidad, y la gráfica de la función f(x) = $\frac{1}{x^2}$.

3. Para la siguiente función $f(x)=\frac{2-x}{x}$, completa la siguiente tabla de valores.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)								

4. Encuentra el dominio, el rango y la gráfica de la función $f(x)=\sqrt{x-5}$

Matemáticas IV	Funciones Racionales y con Radicales
Unidad II	Examen de la Unidad

Nombre del alumno: ______________________________ Grupo: _________

1. ¿Es una función racional, la siguiente función $f(x)=\frac{4}{x}-8$?, en caso de que tu respuesta sea afirmativa, escribe la función en forma racional.

2. Encuentra el dominio, el rango, la gráfica, y los puntos de discontinuidad de la función $f(x)=\frac{x+2}{4-x}$.

3. Completa la siguiente tabla de valores para la función $f(x)=\sqrt{4-x^2}$.

4. Encuentra el dominio, el rango, la gráfica, y los puntos de discontinuidad de la función $f(x)=\frac{2}{(-x)^2}$.

Propósitos de la unidad: Extender el concepto de razones trigonométricas e iniciar el estudio de las funciones trascendentes a través de las funciones circulares, cuya variación periódica permite modelar fenómenos cíclicos muy diversos. Reforzar el análisis de las relaciones entre gráfica y parámetros que se ha venido realizando, resaltando la importancia de ajustar los parámetros para construir el modelo que se ciña a un fenómeno determinado.

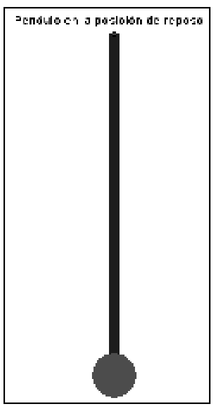
Al finalizar el capítulo, el alumno:

Secuencia didáctica de lectura y exploración.

Aprendizaje: Explora, en una situación o fenómeno de variación periódica valores, condiciones, relaciones o comportamientos, a través de diagramas, tablas y expresiones algebraicas. que le permitan obtener información, como un paso previo al establecimiento de conceptos, y al manejo de las representaciones pertinentes.

Inicio de la secuencia.

Existe una clase especial de problemas que se presentan con frecuencia en la práctica en los cuales un cuerpo tiene una *posición de equilibrio* y cuando se le desplaza del punto de equilibrio experimenta una fuerza restauradora que le hace experimentar un movimiento de vaivén respecto al punto de equilibrio, un ejemplo conocido es el péndulo, la siguiente imagen nos muestra el péndulo en la posición de reposo.



En la posición de equilibrio, la masa está suspendida verticalmente hacia abajo; Cuando la masa se desplaza de esta posición, la masa no vuelve simplemente a ella, sino que oscila de un lado a otro de forma regular y repetitiva.

Este movimiento repetitivo se denomina *oscilatorio o periódico*, se pueden citar otros como los pistones de un motor de combustión interna.

Escribe tres movimientos que sean oscilatorios o periódicos: a) ______________________________

b) ______________________________________

c) ______________________________________

¿Es el movimiento del corazón periódico? ________

Explica tu respuesta: _________________________

Ejercicio 1: amarra a un extremo de un cordel una rondana, luego desplaza la rondana a una posición que no sea la de reposo, como la que se muestra en la figura anterior, suelta la rondana.

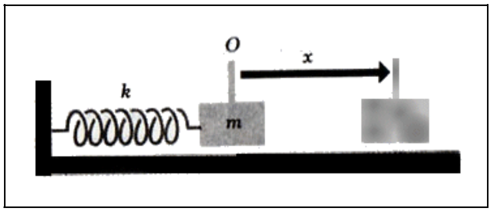
¿Describe el movimiento del péndulo? ____

¿Se conserva la amplitud del movimiento? ____

¿Qué puede afectar el movimiento? ____

Conceptos Fundamentales:

Con el fin de ilustrar los conceptos del movimiento oscilatorio, consideremos el sistema representado en la siguiente figura.



Un cuerpo de masa m puede moverse sin rozamiento a lo largo de una línea recta, el cuerpo está unido al extremo de un resorte, cuyo otro extremo se mantiene fijo como se ilustra.

Designando la posición del cuerpo con la coordenada x, y considerando que x = 0 es la posición de equilibrio, para la cual el resorte no esta estirado ni comprimido, cuando el cuerpo se desplaza a la derecha, x es positiva, el resorte se estira y ejerce una fuerza sobre el cuerpo hacia la izquierda (en la dirección negativa de x), hacia la posición de equilibrio.

Cuando se desplaza hacia la izquierda, x es negativa, el resorte se comprime y ejerce una fuerza sobre el cuerpo hacia la derecha (en la dirección positiva de x), también hacia la posición de equilibrio.

Así que supongamos que desplazamos el cuerpo una cierta distancia x hacia la derecha y lo abandonamos. El resorte ejerce una fuerza restauradora; el cuerpo se acelera en la dirección de esta fuerza y se mueve a la posición de equilibrio con velocidad creciente.

Sin embargo, el incremento de velocidad por unidad de tiempo (es decir la aceleración) no es constante, pues la fuerza causante de la misma disminuye a medida que el cuerpo se aproxima a su posición de equilibrio.

Cuando el cuerpo alcanza su posición de equilibrio, la fuerza de restauración a disminuido hasta cero; pero, debido a la velocidad adquirida, el cuerpo *rebasa la posición de equilibrio* y continua moviéndose hacia la izquierda.

Pero tan pronto el cuerpo rebasa la posición de equilibrio, la fuerza de restauración entra en acción, pero ahora dirigida hacia la derecha.

Entonces la aceleración del cuerpo disminuye en una proporción que aumenta conforme aumenta la distancia del cuerpo con respecto al punto de equilibrio, por lo que el cuerpo se detiene en un punto a la izquierda de 0, y repite su movimiento en dirección opuesta.

El movimiento esta restringido al intervalo [-A, A] estando el punto de equilibrio en 0, de manera que cada vaivén se realiza en el mismo intervalo de tiempo, como hemos considerado que no hay rozamiento el movimiento debe continuar una vez iniciado.

¿En la realidad, qué pasa con el movimiento del cuerpo? ________________________________

Un movimiento como este, bajo la acción de una fuerza restauradora elástica que es proporcional al desplazamiento, en el cual no hay rozamiento, se denomina ***movimiento armónico simple*.**

El movimiento que realiza el cuerpo hasta volver al punto de partida se llama ***oscilación o vibración*** completa, es decir el movimiento de A hasta la posición –A, y luego de vuelta al punto A.

El tiempo necesario para que el cuerpo realice una vibración completa se llama ***periodo del movimiento*** y se designa por la letra τ.

El número de vibraciones completas por unidad de tiempo se llama ***frecuencia*** f.

La distancia desde el punto de equilibrio del cuerpo hasta la posición de su máximo desplazamiento **A** se llama ***amplitud***, de manera que el intervalo total de movimiento del cuerpo es de **2A**.

Las funciones que tienen la propiedad para describir el movimiento armónico simple son:

$X = \mathbf{A}$ sen (wt)

$X = \mathbf{A}$ cos (wt)

$X = \mathbf{A}$ cos $(wt + \Theta_0)$

Las cuales serán estudiadas en esta unidad.

Ejemplo 1. Analizar la tabla de valores de la función f(x) = 3 sen(x) donde x esta en grados, para encontrar el periodo y la amplitud de la función.

x	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135
f(x)	0	0.77	1.5	2.12	2.59	2.89	3	2.89	2.59	2.12
x	150	165	180	195	210	225	240	255	270	285
F(x)	1.5	0.77	0	-0.77	-1.5	-2.12	-2.59	-2.89	-3	-2.89
x	300	315	330	345	360	375	390	405	420	435
f(x)	-2.59	-2.12	-1.5	-0.77	0	0.77	1.5	2.12	2.59	2.89

Al observar la tabla de valores vemos que el valor de f(0º) es igual al valor de f(360º) y a partir de este valor se empiezan a repetir los valores ya que:

f(15º) = f(375º) = f(360º + 15º)

o sea que tenemos en general:

f(xº) = f(360º + xº), donde 360º es el periodo de la función.

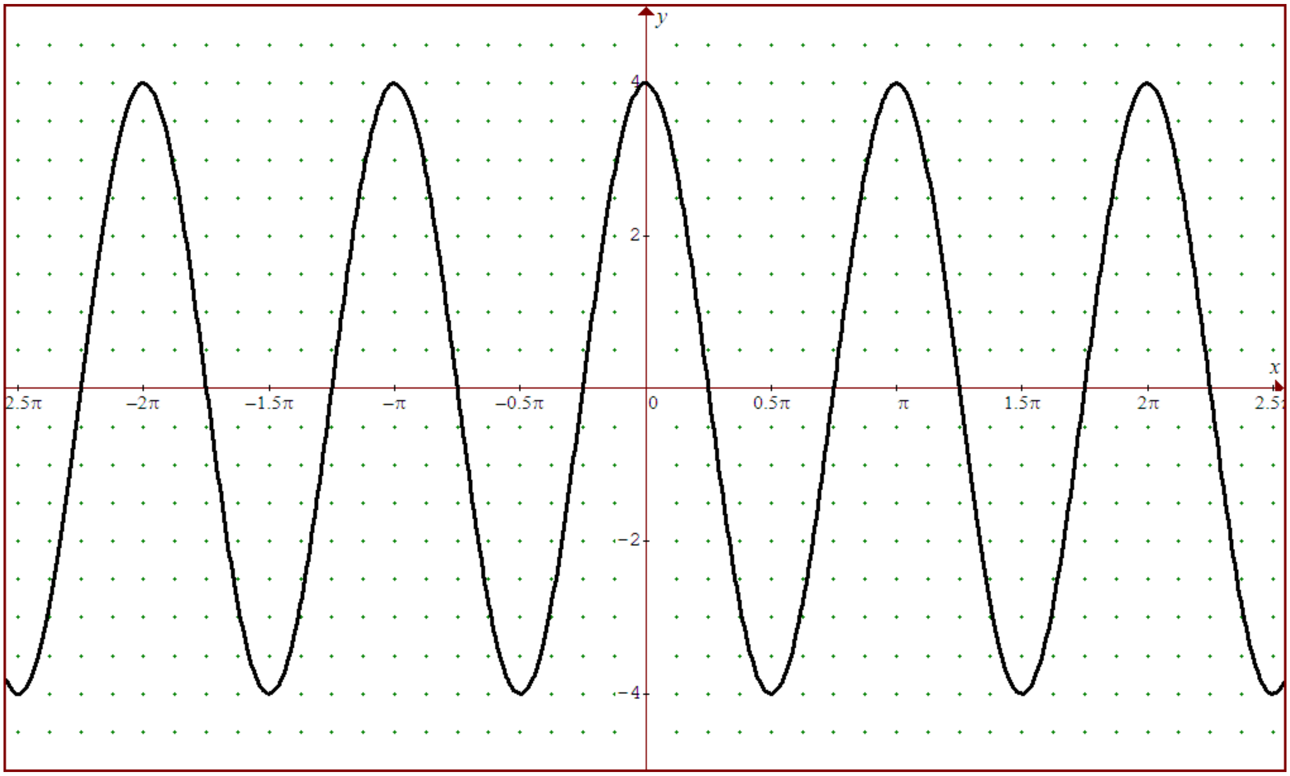
Se observa también en la tabla que el mayor valor que alcanza la función es 3, y el menor valor que alcanza la función es -3, el punto medio del intervalo [-3, 3] es 0, y tenemos que:

f(0º) = f(180º) = f(360º) = 0

es el punto de equilibrio de la función.

La amplitud de la función es 3, que corresponde al coeficiente de la función dada.

Ejemplo 2. Examinar la gráfica de la función f(x) = 4cos(2x) para obtener el periodo, la amplitud y el punto de reposo de la función.



Se puede observar que los ángulos están dados en radianes, y que para f(0) = 4. Y dicho valor se repite para Π, ya que f(Π) = 4 y es el mayor valor que alcanza la función para cualquier valor del ángulo.

Después de Π, los valores de la función empiezan a repetirse de nuevo, así que el periodo de la función es Π, y tenemos que la función cumple con:

f(x) = f(Π + x), donde x esta en radianes.

Además se tiene que f(0.5Π) = $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ = -4, lo mismo que para f(1.5Π) = $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ = -4, el menor que toma la función para cualquier valor de x (en radianes) es -4, así que el rango de valores de la función es el intervalo [-4, 4], y el punto medio de dicho intervalo es el punto de reposo de la función, que de acuerdo a la gráfica se alcanza para x = 0.25Π = $\frac{\pi}{4}$, y tenemos que $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ = 0, que también corresponde a una raíz de la función.

El dominio de la función es el conjunto de los números reales.

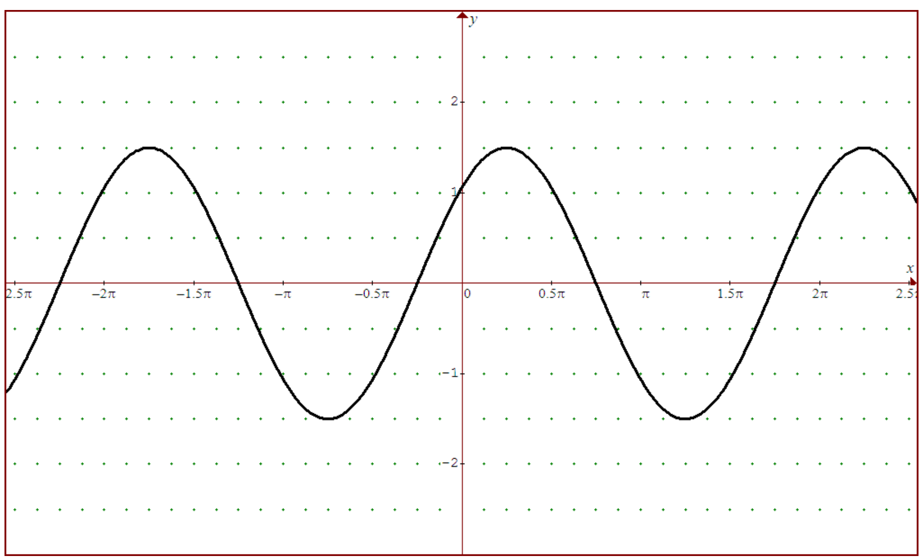
La amplitud de la función es 4.

Ejercicio 2. Examina la siguiente tabla de valores que corresponde a la función f(x) = 0.8cos(3x) de manera que x esta en grados.

X	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
f(x)	0.8	0.77	0.62	0.56	0.4	0.2	0	-0.20	-0.4	-0.56
X	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95
f(x)	-0.62	-0.77	-0.8	-0.77	-0.62	-0.56	-0.4	-0.2	0	0.2
X	100	105	110	115	120	125	130	135	140	150
f(x)	0.4	0.56	0.62	0.77	0.8	0.77	0.62	0.56	0.4	0.2

a) La amplitud de la función es: _____________
b) El punto de equilibrio es: ________________
c) El periodo de la función es: ______________
d) El rango de la función es: _______________
e) El dominio de la función es: ______________
f) Las raíces de la función son: _____________
g) Encuentra el equivalente en radianes para los siguientes ángulos:
   I. 5º : _______
   II. 20º : _______
   III. 45º : _______

Ejemplo 3: Examina la gráfica de la función f(x) = 1.5 sen(x + $\frac{\pi}{4}$) con x en radianes.



a) La amplitud de la función es: ______________
b) El periodo de la función es : ______________
c) El punto de equilibrio de la función se da para x = ________

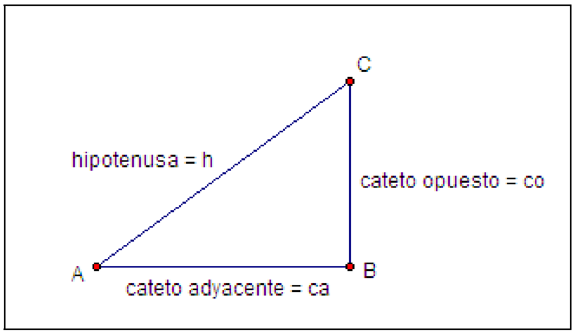
Secuencia didáctica de lectura y exploración.

Aprendizajes:

Recuerda el significado de las razones trigonométricas para ángulos agudos, en particular seno, coseno y tangente. Identifica el ángulo, como una rotación de un radio de un círculo, lado inicial y lado final.

Inicio de la secuencia:

En la unidad 5 del programa de matemáticas II, Elementos de Trigonometría se trataron las razones trigonométricas seno, coseno y tangente para un triángulo rectángulo como se muestran a continuación.



En el triángulo rectángulo que se muestra, con respecto al ángulo A, el cateto adyacente = ca, es el segmento AB, el cateto opuesto = co, es el segmento BC, y la hipotenusa = h, es el segmento AC.

Y la definición de las razones trigonométricas es la siguiente:

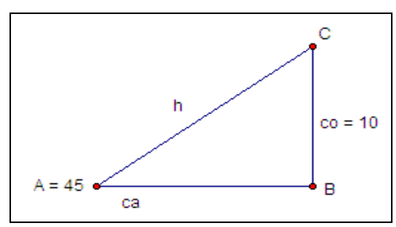
Seno A = $\dfrac{\textbf{cateto opuesto}}{\textbf{hipotenusa}} = \dfrac{\textbf{co}}{\textbf{h}}$.

Coseno A = $\dfrac{\textbf{cateto adyacente}}{\textbf{hipotenusa}} = \dfrac{\textbf{ca}}{\textbf{h}}$.

Tangente A = $\dfrac{\textbf{cateto opuesto}}{\textbf{cateto adyacente}} = \dfrac{\textbf{co}}{\textbf{ca}}$.

Ejemplo 1. Encontrar los elementos que faltan en el siguiente triángulo rectángulo.

Solución:



Para encontrar el valor de h, necesitamos una razón trigonométrica que involucre la incógnita y los datos del problema, para este caso podemos utilizar la razón seno del ángulo A.

$\textbf{sen A} = \dfrac{\textbf{co}}{\textbf{h}}$, donde A = 45º, co = 10u, de manera que sustituyendo valores tenemos.

$\textbf{sen}\,\textbf{45}^{0} = \dfrac{\textbf{10}}{\textbf{h}}$, despejando la variable h, se tiene.

h (sen 45º) = 10, $\textbf{h} = \dfrac{\textbf{10}}{\textbf{sen}\,\textbf{45}^{0}}$

Como sen 45º = 0.70, sustituyendo este valor en la ecuación queda. $h=\frac{10}{0.7}=14.28u$.

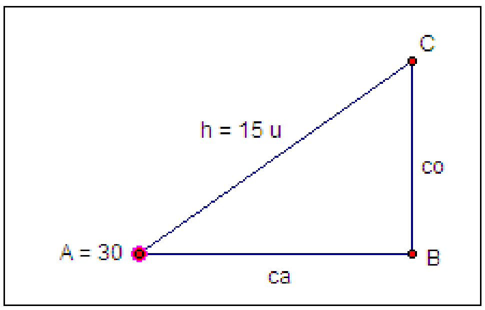
Para encontrar el valor del cateto adyacente, se utiliza una razón donde intervenga la incógnita y los datos que se tienen actualmente, la razón puede ser la tangente del ángulo A.

tan A = $\frac{co}{ca}$, donde co = 10 u, y tan A = 1, sustituyendo valores en la fórmula tenemos.

$1=\frac{10}{ca}$, de manera que despejando ca queda, ca = 10 u.

¿Dado que co = ca, qué nombre recibe el triángulo ∆ABC? ________________________________

Ejemplo 2. Encontrar los elementos que faltan en el siguiente triángulo.



Para encontrar la longitud del cateto adyacente, se utiliza la razón trigonométrica coseno del ángulo A, ya que en su definición intervienen la longitud de la hipotenusa, el sen 30º y la incógnita ca.

$\cos A=\frac{ca}{h}$, como h = 15 u, y sen 30º = 0.86, sustituyendo valores en la fórmula.

$0.86=\frac{ca}{15}$, despejando la incógnita ca se tiene. ca = 15(0.86) = 12.9 u.

Para encontrar el valor de la variable co hay varias opciones como veremos a continuación, el valor de la incógnita se puede encontrar con la razón trigonométrica sen A.

$\text{sen}\,A=\frac{co}{h}$, despejando co tenemos, co = h (sen A), donde h = 15 u y sen (30º) = 0.5, sustituyendo valores tenemos. co = 15(0.5) = 7.5 u.

Otra forma de encontrar el valor de co, es utilizar la razón trigonométrica tan A, como se muestra.

tan A = $\frac{co}{ca}$, donde tan 30º = 0.57, y ca = 12.9 u, sustituyendo valores. co = ca(tan A) = 0.57(12.9) = 7.35 u.

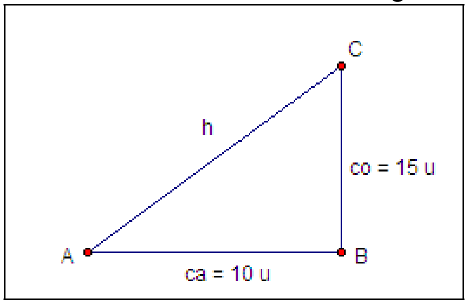
Otra forma es utilizar el teorema de Pitágoras, $co^2 + ca^2 = h^2$, donde h = 15 u, y ca = 12.9 u. Sustituyendo valores.

$co^2 + 12.9^2 = 15^2$, haciendo operaciones $co^2 + 166.41 = 225$, despejando co.

$co^2 = 225 – 166.41$, $co^2 = 58.59$, sacando raíz cuadrada en ambos miembros co = 7.65

Ejemplo 3. Encontrar los elementos que faltan en la siguiente figura.

Para encontrar el valor del ángulo A utilizamos la razón trigonométrica tangente.



$\tan A = \frac{co}{ca}$, donde co = 15, y ca = 10, sustituyendo los valores en la ecuación. $\tan A = \frac{15}{10} = 1.5$. Para encontrar el valor del ángulo A se debe buscar en la siguiente tabla de valores el valor de 1.5 o la mejor aproximación a dicho valor, en la columna correspondiente a la tangente, de arriba hacia abajo la columna de la tangente que va del grado 30º hasta el 36º , y de abajo hacia arriba va de 54º hasta 60º, el valor más próximo es 1.501 que corresponde a un ángulo de:

A = 56º 20´.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS EN GRADOS (*cont.*)

θ	θ (rad)	sen θ	csc θ	tan θ	cot θ	sec θ	cos θ		
30° 00′	.5236	.5000	2.000	.5774	1.732	1.155	.8660	1.0472	60° 00′
10	.5265	.5025	1.990	.5812	1.720	1.157	.8646	1.0443	50
20	.5294	.5050	1.980	.5851	1.709	1.159	.8631	1.0414	40
30	.5323	.5075	1.970	.5890	1.698	1.161	.8616	1.0385	30
40	.5352	.5100	1.961	.5930	1.686	1.163	.8601	1.0356	20
50	.5381	.5125	1.951	.5969	1.675	1.165	.8587	1.0327	10
31° 00′	.5411	.5150	1.942	.6009	1.664	1.167	.8572	1.0297	59° 00′
10	.5440	.5175	1.932	.6048	1.653	1.169	.8557	1.0268	50
20	.5469	.5200	1.923	.6088	1.643	1.171	.8542	1.0239	40
30	.5498	.5225	1.914	.6128	1.632	1.173	.8526	1.0210	30
40	.5527	.5250	1.905	.6168	1.621	1.175	.8511	1.0181	20
50	.5556	.5275	1.896	.6208	1.611	1.177	.8496	1.0152	10
32° 00′	.5585	.5299	1.887	.6249	1.600	1.179	.8480	1.0123	58° 00′
10	.5614	.5324	1.878	.6289	1.590	1.181	.8465	1.0094	50
20	.5643	.5348	1.870	.6330	1.580	1.184	.8450	1.0065	40
30	.5672	.5373	1.861	.6371	1.570	1.186	.8434	1.0036	30
40	.5701	.5398	1.853	.6412	1.560	1.188	.8418	1.0007	20
50	.5730	.5422	1.844	.6453	1.550	1.190	.8403	.9977	10
33° 00′	.5760	.5446	1.836	.6494	1.540	1.192	.8387	.9948	57° 00′
10	.5789	.5471	1.828	.6536	1.530	1.195	.8371	.9919	50
20	.5818	.5495	1.820	.6577	1.520	1.197	.8355	.9890	40
30	.5847	.5519	1.812	.6619	1.511	1.199	.8339	.9861	30
40	.5876	.5544	1.804	.6661	1.501	1.202	.8323	.9832	20
50	.5905	.5568	1.796	.6703	1.492	1.204	.8307	.9803	10
34° 00′	.5934	.5592	1.788	.6745	1.483	1.206	.8290	.9774	56° 00′
10	.5963	.5616	1.781	.6787	1.473	1.209	.8274	.9745	50
20	.5992	.5640	1.773	.6830	1.464	1.211	.8258	.9716	40
30	.6021	.5664	1.766	.6873	1.455	1.213	.8241	.9687	30
40	.6050	.5688	1.758	.6916	1.446	1.216	.8225	.9657	20
50	.6080	.5712	1.751	.6959	1.437	1.218	.8208	.9628	10
35° 00′	.6109	.5736	1.743	.7002	1.428	1.221	.8192	.9599	55° 00′
10	.6138	.5760	1.736	.7046	1.419	1.223	.8175	.9570	50
20	.6167	.5783	1.729	.7089	1.411	1.226	.8158	.9541	40
30	.6196	.5807	1.722	.7133	1.402	1.228	.8141	.9512	30
40	.6225	.5831	1.715	.7177	1.393	1.231	.8124	.9483	20
50	.6254	.5854	1.708	.7221	1.385	1.233	.8107	.9454	10
36° 00′	.6283	.5878	1.701	.7265	1.376	1.236	.8090	.9425	54° 00′
		cos θ	sec θ	cot θ	tan θ	csc θ	sen θ	θ radianes	θ grados

Para encontrar el ángulo con la calculadora, se presiona la tecla SHIFT, luego la tecla TAN que corresponde a la tangente, después se escribe el valor de 1.5 y por último se presiona la tecla = para obtener el resultado, que es el siguiente.

A = 56º 18´.

Para encontrar la hipotenusa se utiliza el teorema de Pitágoras.

$15^2 + 10^2 = h^2$

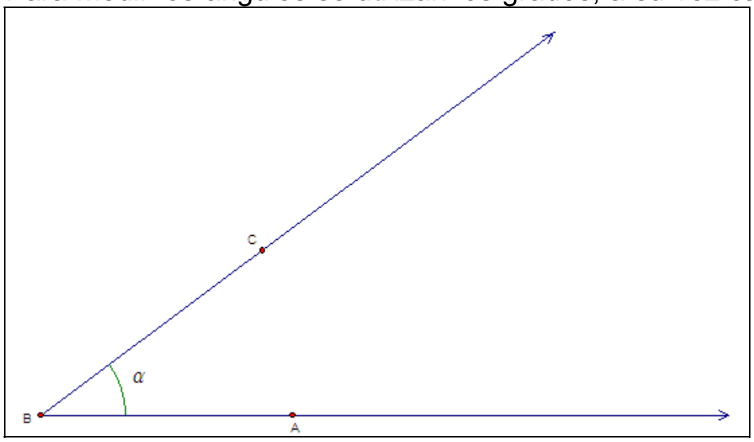
$225 + 100 = h^2$, $325 = h^2$

Sacando raíz cuadrada en ambos miembros.

h = 18.02 u.

En la geometría Euclidiana un ángulo es la unión de dos rayos que tienen el mismo punto extremo, como se muestra en la siguiente figura.

Para medir los ángulos se utilizan los grados, a su vez cada grado se divide en 60´, y cada minuto se divide en 60´´.



Para efectuar la suma de dos ángulos, (28º 30´ 55´´) + (57º 58´ 38´´).

Primero se suman los segundos:

55´´ + 38´´ = 94´´ = 1´34´´

Luego se suman los minutos:

30´ + 58´ = 88´ = 1º 28´.

Después se suman los grados:

28º + 57º = 85º .

Ahora se agrupan los resultados:

85º 88´ 94´´ = 85º (1º 28´) (1´ 34´´) = 86º 29´ 34´´.

Además se pueden restar y multiplicar o dividir por un número real.

Ejemplo 4. Encuentra la suma de los siguientes ángulos, α = 56º 45´ 44´´ con β = 96º 38´ 47´´.

α =	56º	45´	44´´
+			
β =	96º	38´	47´´
$\alpha+\beta$ =	151º	83´	91´´

Pero 60´´ = 1´, por lo que 91´´ = 1´ 31´´, y la suma queda como, $\alpha+\beta$ = 151º 84´ 31´´

Pero 60´ = 1º , de manera que 84´ = 1º 24´ y el resultado final es, $\alpha+\beta$ = 152º 24´ 31´´

Ejemplo 5. Efectúa la siguiente resta de ángulos, α = 136º 24´ 48´´ con β = 96º 58´ 27´´.

α =	136º	24´	48´´
-			
β =	96º	58´	27´´

Primero efectuamos la resta de los segundos, 48´´ - 27´´ = 21´´.

Luego la resta de los minutos, 24´- 58´, como el sustraendo es mayor que el minuendo, se toma un grado de 136º, se transforma en minutos de manera que la resta a realizar es la siguiente:

84´ - 58´ = 26´

Por último se restan los grados.

135º - 96º = 39º

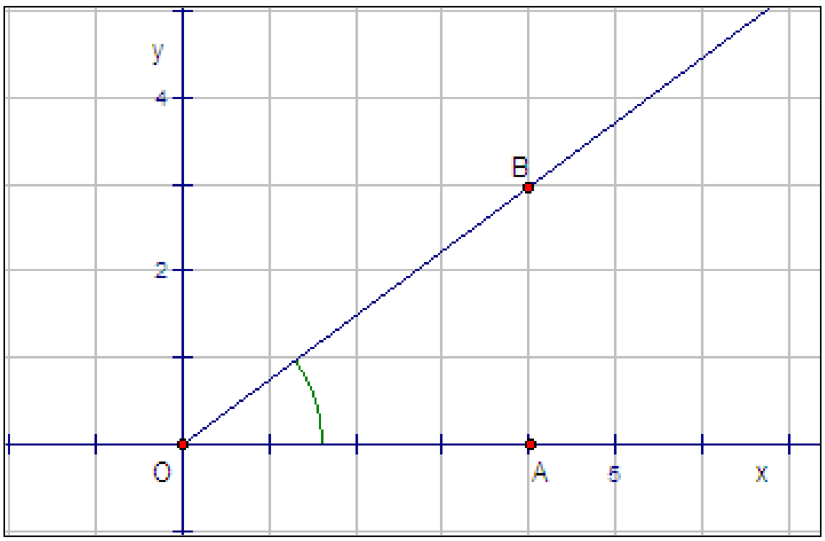
Y el resultado de la operación es:

39º 26´ 21´´.

Ejercicios. Realiza las siguientes operaciones.

54º 33´ 45´´ + 27º 34´ 53´´ 56º 42´ 38´´	244º 53´ 25´´ + 57º 32´ 23´´ 123º 58´ 19´´	123º 45´ 18´´ - 54º 55´ 33´´	90º - 34º 45´ 55´´

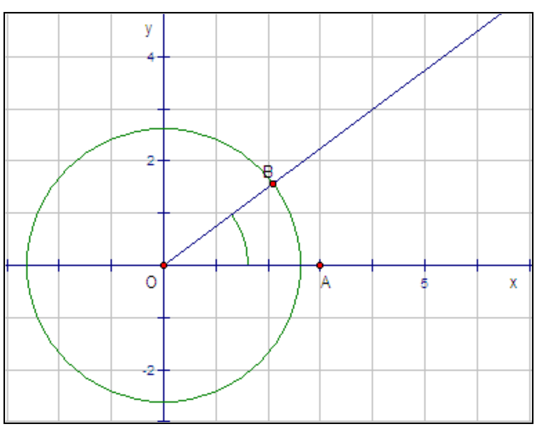
Ahora ampliaremos el concepto de ángulo, para lo cual consideramos un sistema de coordenadas de manera que todo ángulo con su vértice en el origen y con uno de sus lados, denominado ***lado inicial***, situado en el lado positivo del eje x, está en su ***posición normal***. Como se muestra en la siguiente figura.



Y se tiene que todo ángulo es congruente con algún otro ángulo en posición normal.

El lado **OB** recibe el nombre de lado Terminal del ángulo.

Para generar un ángulo ∠AOB como el que se muestra en la figura, se hace girar el lado OB sobre el lado OA, de manera que con esta rotación se obtiene el ángulo ∠AOB cuando sus magnitudes son iguales, el punto B se mueve a lo largo de la circunferencia de centro O y radio OB, como se muestra en la siguiente figura.

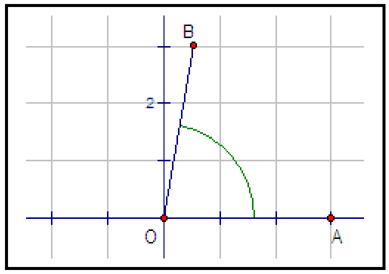


El ángulo es positivo si OB gira en el sentido contrario a las manecillas del reloj hasta llegar a la magnitud deseada.

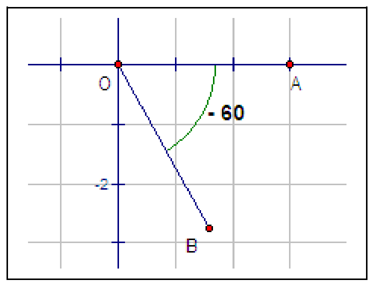
Y el ángulo es negativo si OB gira en el sentido de las manecillas del reloj hasta llegar a la magnitud deseada.

Además ahora podemos tener ángulos de cualquier medida, por ejemplo 210º y -60º, como se muestra a continuación.

La siguiente figura ilustra un ángulo de +210º.

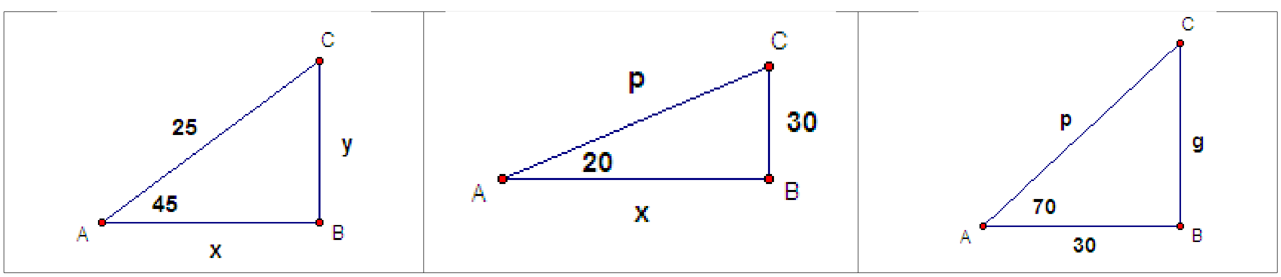


A continuación tenemos un ángulo de -60º.



Ejercicios:

1. Encuentra los elementos que faltan en cada triángulo.



Cada uno de los siguientes ángulos dibújalos en su posición normal.

2. De +120º.
3. De -210º.
4. De +30º.
5. De -60º.

Secuencia didáctica de lectura y exploración.

Aprendizajes:

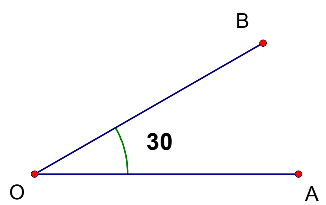
Convierte medidas angulares de grados a radianes y viceversa.

Generaliza el concepto de razón trigonométrica de un ángulo agudo a un ángulo arbitrario.

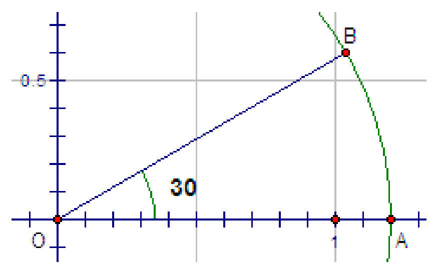
Calcula los valores de las razones seno y coseno para cualquier ángulo, utilizando el círculo unitario.

Inicio de la secuencia.

Hasta el momento se han descrito en grados la medida de los ángulos. Pero no es necesario considerar únicamente esta unidad, ya que es posible especificar el tamaño del ángulo $\angle$AOB describiendo la longitud del arco recorrido por el punto B si el ángulo es colocado en su posición normal o sea el vértice del ángulo en el origen de coordenadas, y uno de sus lados sobre la parte positiva del eje x, y se dibuja la circunferencia de centro en el origen y radio OB, como se muestra a continuación.



Ángulo de 30º arbitrario



Ángulo en su posición normal

Supongamos pues que estamos de acuerdo en utilizar la longitud del arco recorrido por B como medida del ángulo $\angle$AOB. ¿Cómo expresaremos en esta nueva unidad, un ángulo de, digamos, 90º.? Cuando A es de 90º, B ha recorrido la **cuarta parte** de toda la circunferencia.

Pero como la circunferencia completa de radio unitario es 2π. Luego, el tamaño del ángulo $\angle$AOB con respecto a esta unidad es, $\angle$AOB = $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}=1.57$, si damos el nombre de radián a esta nueva unidad, el ángulo $\angle$AOB = 90º, mide también $\frac{\pi}{2}$ radianes o 1.57 radianes.

La equivalencia. 360º = 2π radianes

Nos permite transformar las unidades de un ángulo de un sistema a otro de medición, para encontrar el equivalente de un radián tenemos:

360º = 2π rad.

xº = 1 rad.

$$x^{o} = \frac{(1rad)(360^{o})}{2\pi\ rad} = \frac{360^{o}}{2\pi} = 57.29^{o}.$$

Tenemos pues que, **1 rad. = 57.29º**

Para encontrar el equivalente de 1º tenemos:

360º = 2π rad.

1º = x rad.

$$x\,rad. = \frac{(1^{o})(2\pi\,rad)}{360^{o}} = \frac{2\pi}{360}\,rad = 0.0174\,rad.$$

El equivalente de **1º = 0.0174 rad.**

Por lo que tenemos las siguientes relaciones entre grados y radianes.

1. 360º = 2π rad.
2. 1º = $\frac{\pi}{180}$ **rad.** = 0.0174 rad.
3. 1 rad. = $\left(\frac{180^{0}}{\pi}\right)$ = 57.29º

Cuando un ángulo se mide en radianes se indica la unidad, de manera que si tenemos un ángulo que mide 5 radianes, escribimos, θ = 5 rad. Y si el ángulo se mide en grados se indica la unidad, en este caso si θ mide 5 grados se escribe θ = 5º en lugar de escribir θ = 5.

Para realizar el cambio de una unidad a otra consideramos lo siguiente.

Para cambiar	Multiplica por	Ejemplo
Grados a radianes	$\frac{\pi}{180^{0}}$	$150^{0} = 150^{0}\left(\frac{\pi}{180^{0}}\right) = \frac{5\pi}{6}\,rad$
Radianes a grados	$\frac{180^{0}}{\pi}$	$\frac{\pi}{3}\,rad. = \frac{\pi}{3}\left(\frac{180^{0}}{\pi}\right) = 60^{0}$

Ejemplo 1. Encuentra el equivalente a 30º en radianes.

$$30^{o} = 30^{o}\left(\frac{\pi}{180^{0}}\right) = \frac{\pi}{6}\ \text{radianes.}$$

Ejemplo 2. Encuentra el equivalente de $\frac{3\pi}{4}$ radianes en grados.

$$\frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}\left(\frac{180^{0}}{\pi}\right) = 135^{0}.$$

Ejercicios.

1. Encuentra el equivalente en grados de los siguientes ángulos en radianes.

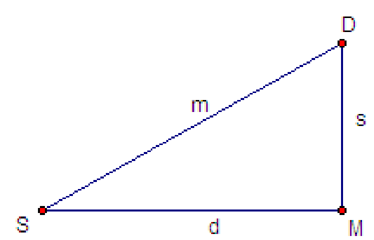
Radianes	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
Grados								

2. Encuentra el equivalente en radianes de los siguientes ángulos en grados.

Grados	210º	225º	240º	270º	300º	315º	330º	360º
Radianes								

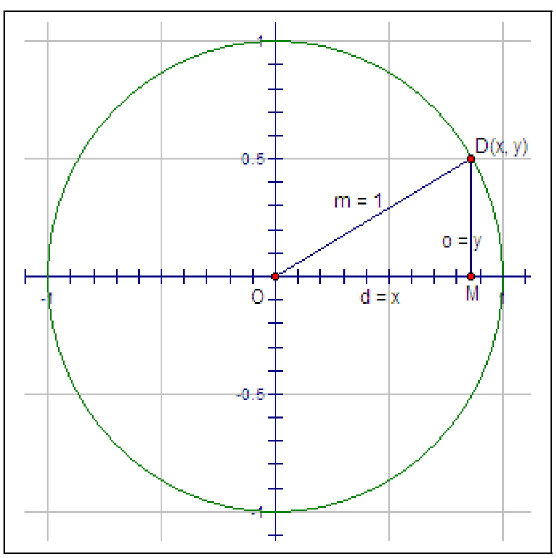
Ahora veamos la generalización de las razones trigonométricas de un ángulo agudo a una función trigonométrica de un ángulo arbitrario.

Como recordaras las razones trigonométricas se definieron para triángulos rectángulos como se muestra a continuación.



$\text{sen}\, S = \frac{s}{m}$	$\csc S = \frac{m}{s}$
$\cos S = \frac{d}{m}$	$\sec S = \frac{m}{d}$
$\tan S = \frac{s}{d}$	$\cot S = \frac{d}{s}$

Si ahora colocamos el ángulo S en su posición normal de manera que el punto S coincide con el origen de coordenadas y el radio de la circunferencia OD sea 1, como se muestra.



Como puedes observar el ángulo queda en el primer cuadrante y se forma el triángulo rectángulo Δ OMD, así que aplicando las definiciones anteriores.

$\mathbf{sen\angle MOD = \frac{y}{m}}$, como m = 1, tenemos, $\mathbf{sen\angle MOD = y}$

$\mathbf{cos\angle MOD = \frac{x}{m}}$, dado que m = 1, queda, $\mathbf{cos\angle MOD = x}$

$\mathbf{tan\angle MOD = \frac{y}{x}}$

$\mathbf{cot\angle MOD = \frac{x}{y}}$

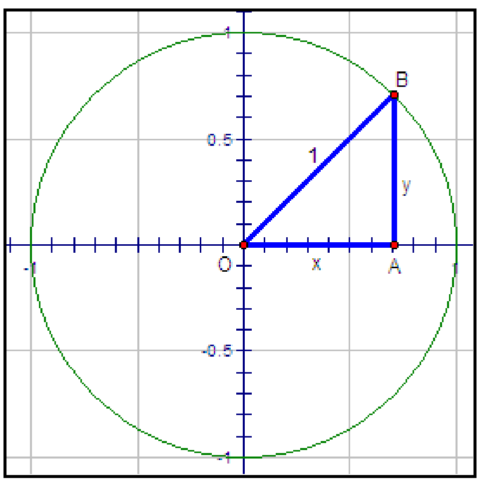
$\mathbf{sec\angle MOD = \frac{m}{x} = \frac{1}{x}}$, de manera que, $\mathbf{sec\angle MOD = \frac{1}{x}}$

$\mathbf{csc\angle MOD = \frac{m}{y} = \frac{1}{y}}$, y finalmente tenemos, $\mathbf{csc\angle MOD = \frac{1}{y}}$.

Las definiciones se pueden aplicar a todo ángulo, ya sea positivo, negativo.

Ejemplo 3. Encontrar el cos (45º) utilizando la ampliación de la definición de razón trigonométrica.

Se coloca un ángulo de 45º en posición normal, de manera que la hipotenusa OB = 1, como se muestra.



Considerando que cos (45º) = x, podemos medir de manera aproximada el valor buscado, de manera que:

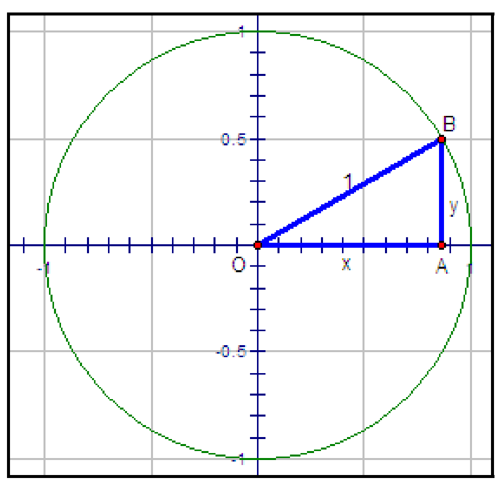
cos (45º) ≅ 0.70

Si utilizas la calculadora, se obtiene lo siguiente:

cos (45º) = 0.7071

La aproximación obtenida se considera que es buena.

Como puedes observar hemos establecido de esta manera seis funciones trigonométrica, donde la variable independiente es el ángulo que puede estar medido en grados o radianes, y la variable dependiente que puede ser cualquiera de las seis que hemos definido, por ejemplo seno, tangente, o la secante.



Ejemplo 3. Encontrar la tan (30º).

En este caso se dibuja un ángulo de 30º en su posición normal de manera que OB = 1, se traza el círculo unitario (de radio 1), se miden los segmentos OA = x = 0.86

AB = y = 0.5, y recordando que:

$$\tan(30^0) = \frac{y}{x} = \frac{0.5}{0.86} = 0.58$$

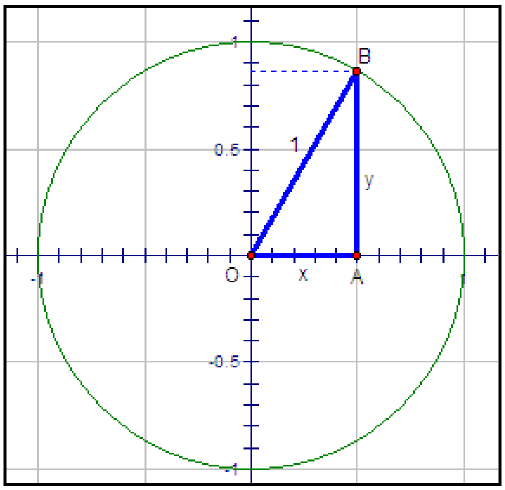
Utilizando la calculadora se obtiene:

Tan (30º) = 0.57

Nuevamente podemos considerar que la aproximación es buena.

Ejemplo 4. Calcular la sec (60º).

Se dibuja un ángulo de 60º en posición normal, de manera que OB = 1, y se traza la circunferencia con centro en el origen, con radio = 1.



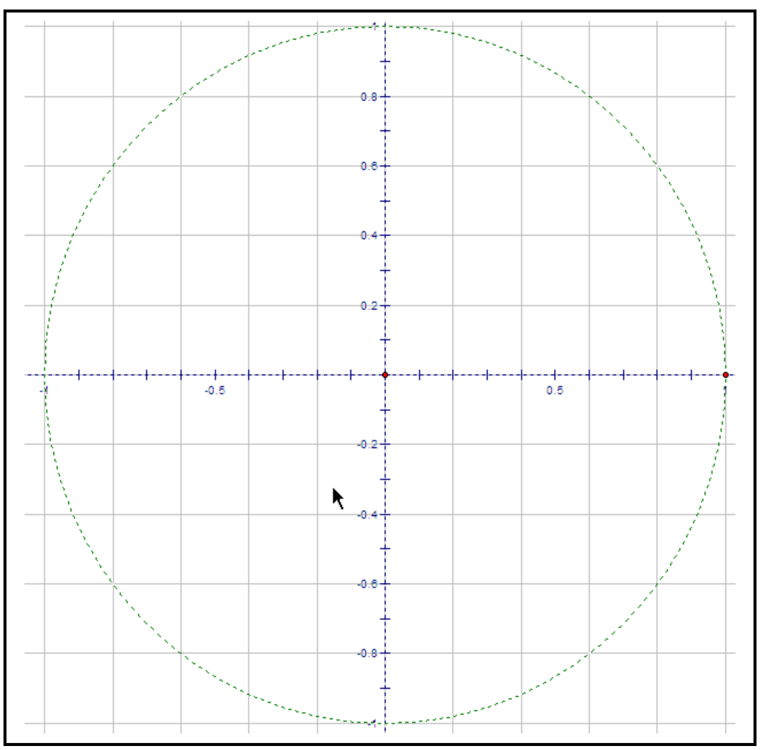
Como $\sec(60^0) = \frac{1}{\cos(60^0)}$, y cos (60º) = x ≅ 0.5, sustituyendo valores en la fórmula.

$$\sec(60^0) = \frac{1}{\cos(60^0)} = \frac{1}{0.5} = 2.$$

Se tiene que sec (60º) = 2

Los ejemplos anteriores sugieren que construyendo un círculo unitario podemos determinar el valor de cualquiera de las funciones trigonométricas.

El círculo trigonométrico se muestra en la siguiente figura.

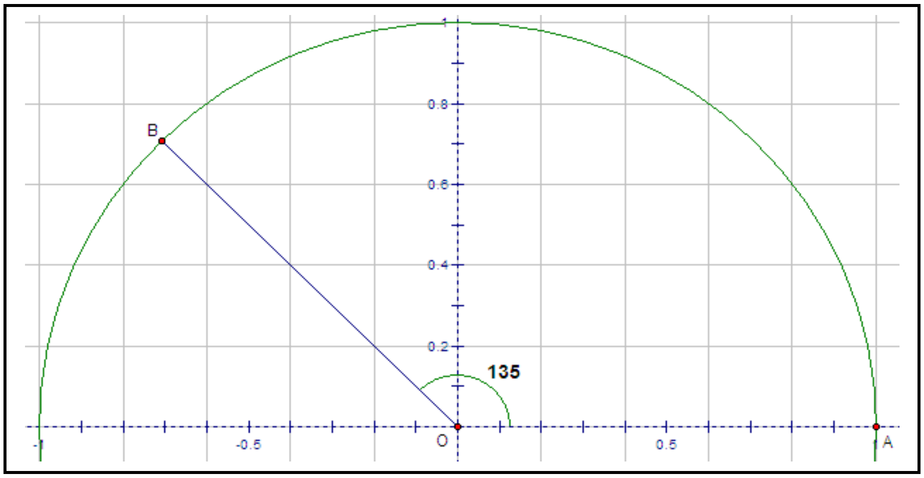


De manera que para encontrar el valor de cualquiera de las funciones para un ángulo determinado

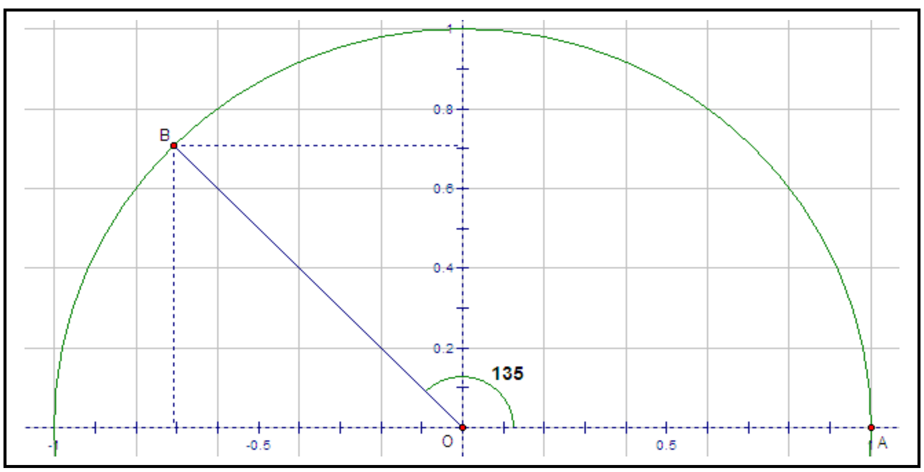
- primero se traza un ángulo congruente en posición normal.
- luego se determinan los valores de los catetos, trazando perpendiculares desde el punto B a los ejes de coordenadas.
- Finalmente se determina el valor de la función usando alguna de las definiciones dadas.

Ejemplo 5. Determinar los valores de las razones trigonométricas para un ángulo de 135º.

1. Se traza un ángulo de 135º en posición normal.



2. Se trazan los segmentos perpendiculares desde B a los ejes de coordenadas.

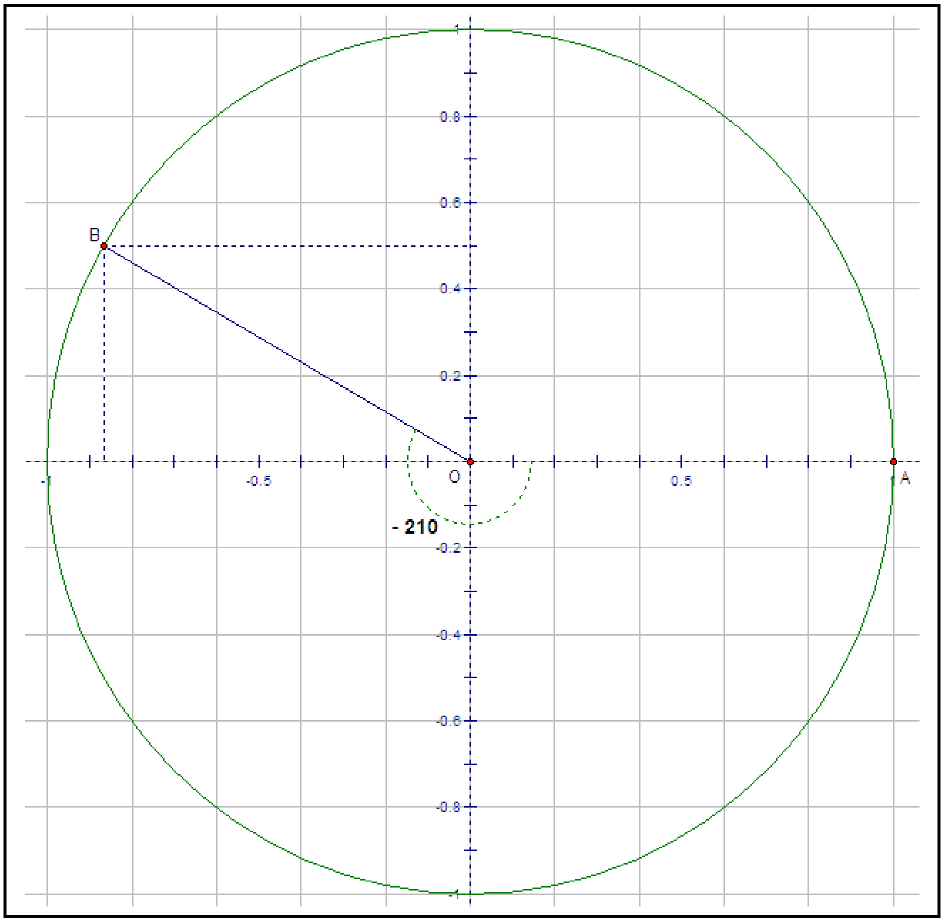


3. El valor de x = - 0.70, y = 0.70, los valores de las funciones son.

$$\textbf{sen}(135^0) = 0.70 \qquad \cos(135^0) = -0.70 \qquad \tan(135^0) = \frac{y}{x} = \frac{0.70}{-0.70} = -1$$

$$\cot(135^0) = \frac{x}{y} = \frac{-0.70}{0.70} = -1 \qquad \sec(135^0) = \frac{1}{x} = \frac{1}{-0.70} = -1.42 \qquad \csc(135^0) = \frac{1}{y} = \frac{1}{0.70} = 1.42$$

Ejemplo 6. Determinar las funciones trigonométricas de -210º.



Los valores son x = -0.86, y = 0.5

Los valores de las funciones son:

$$\mathbf{sen(-210^0) = 0.5} \qquad \mathbf{cos(-210^0) = -0.86}$$

$$\mathbf{tan(-210^0) = \frac{y}{x} = \frac{0.5}{-0.86} = -0.58} \qquad \mathbf{cot(-210^0) = \frac{x}{y} = \frac{-0.86}{0.5} = -1.72}$$

$$\mathbf{sec(135^0) = \frac{1}{x} = \frac{1}{-0.86} = -1.16} \qquad \mathbf{csc(135^0) = \frac{1}{y} = \frac{1}{0.5} = 2}$$

Ejercicios. Determina el valor de las funciones trigonométricas para los siguientes valores.

a. 45º	b. 90º	c. 150
d. 270º	e. 420º	f. 720º
g. -45º	h. -120º	i. -240º
j. -80º	k. -405º	h. -420º

Secuencia didáctica de lectura y exploración.

Aprendizajes:

Expresa las razones trigonométricas como funciones, con los ángulos medidos en radianes

Identifica en las funciones del tipo:

- f(x) = a sen(bx + c) + d
- f(x) = a cos(bx + c) + d

La frecuencia, la amplitud, el periodo y el ángulo de desfasamiento. Los utiliza para dibujar directamente la gráfica. De igual manera, es capaz de identificar en la gráfica estos parámetros para proporcionar la expresión algebraica correspondiente.

Inicio de la secuencia.

Ejemplo 1. Encuentra el dominio, rango, raíces y la gráfica de la función f(x) = sen (x) con x en radianes.

Como ya se vio la función seno esta definida para cualquier ángulo ya sea positivo o negativo, por lo cual el dominio de la función son los números reales, R.

En este caso haremos la gráfica de la función en el intervalo cerrado [-2π, 2π], y recordando la definición para sen(x) = y, sobre el circulo unitario y con el ángulo x en su posición normal, empezando en -2π y con incrementos de $30^0 = \frac{\pi}{6}$.

Radianes	-2π	$-\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{7\pi}{6}$	$-\pi$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$
Grados	-360º	-330º	-300º	-270º	-240º	-210º	-180º	-150º	-120º	-90
Seno	0	0.5	0.86	1	0.86	0.5	0	-0.5	-0.86	-1
Radianes	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$
Grados	-60º	-30º	0º	30º	60º	90º	120º	150º	180º	210º
Seno	-0.86	-0.5	0	0.5	0.86	1	0.86	0.5	0	-0.5
Radianes	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{8\pi}{3}$	$\frac{17\pi}{6}$
Grados	240º	270º	300º	330º	360º	390º	420º	450º	480º	510º
Seno	-0.86	-1	-0.86	-0.5	0	0.5	0.86	1	0.86	0.5

Observando los valores de la función, la amplitud es: ________________

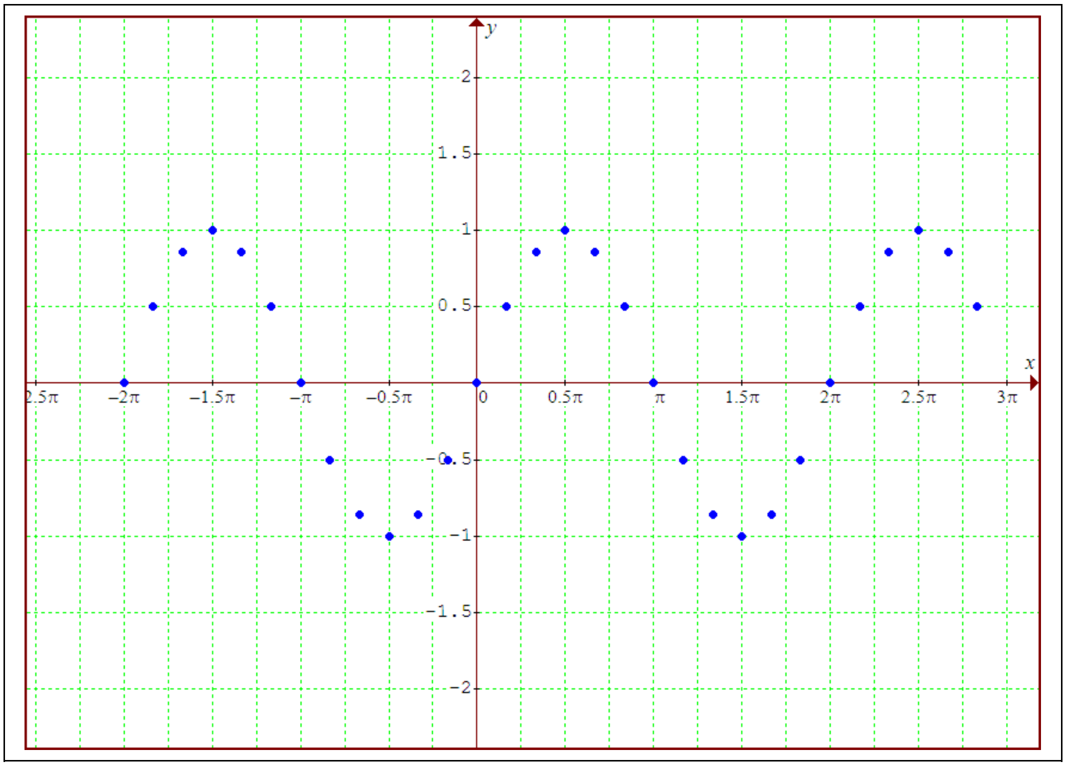
El valor máximo de la función es: _________________, y el valor mínimo es: ________________

El periodo de la función es: ______________________

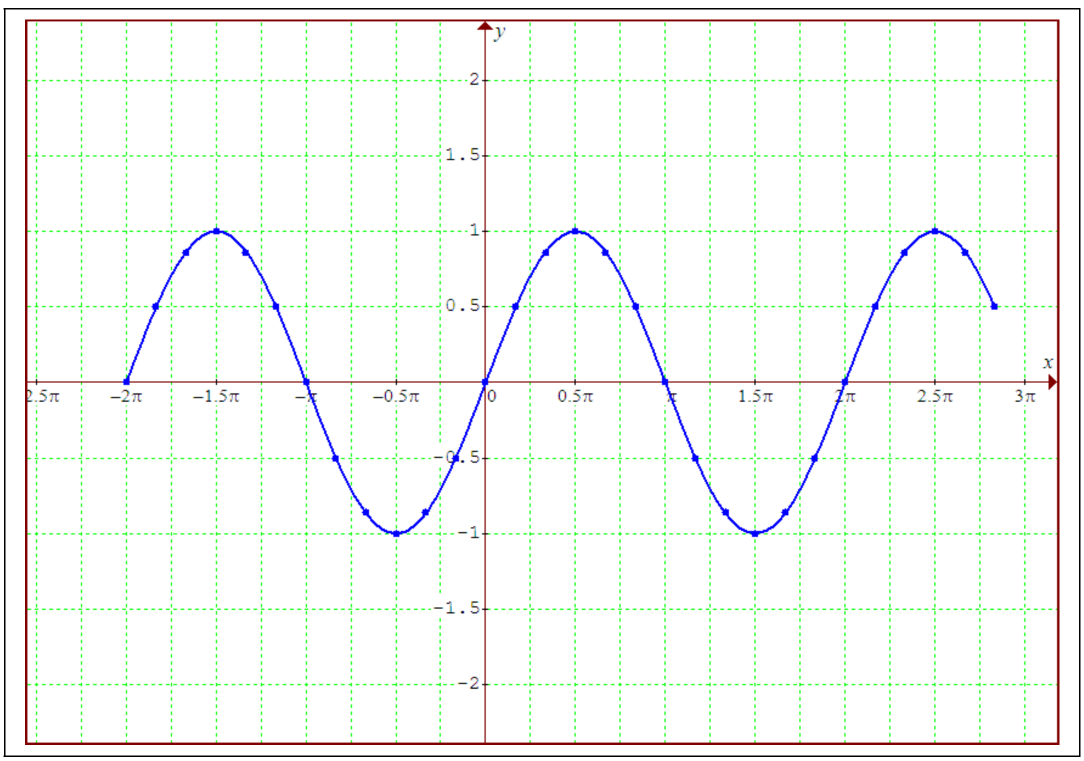
Las raíces de la función son: _______________________________________

Encuentra una fórmula que nos de todas las raíces: _____________________

La gráfica de los puntos tabulados se muestra a continuación.



Si trazamos una línea continua suave por los puntos trazados, la grafica final es.



Ejemplo 2. Encuentra el dominio, rango, raíces, la amplitud, el periodo y la gráfica de la función f(x) = 1.5 sen (x) con x en radianes.

El dominio de la función es el conjunto de los números reales R. Para la gráfica de la función consideramos el intervalo [-2π, 2π], con incrementos de 30º = $\frac{\pi}{3}$, para lo cual primero se completa la siguiente tabla de valores.

Radianes	-2π	$-\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{7\pi}{6}$	$-\pi$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$
Grados	-360º	-330º	-300º	-270º	-240º	-210º	-180º	-150º	-120º	-90
Seno	0	.75	1.29	1.5	1.29	.75	0	-.75	-1.29	-1.5
Radianes	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$
Grados	-60º	-30º	0º	30º	60º	90º	120º	150º	180º	210º
Seno	-1.29	-.75	0	.75	1.29	1.5	1.29	.75	0	-.75
Radianes	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π					
Grados	240º	270º	300º	330º	360º					
Seno	-1.29	-1.5	-1.29	-.75	0					

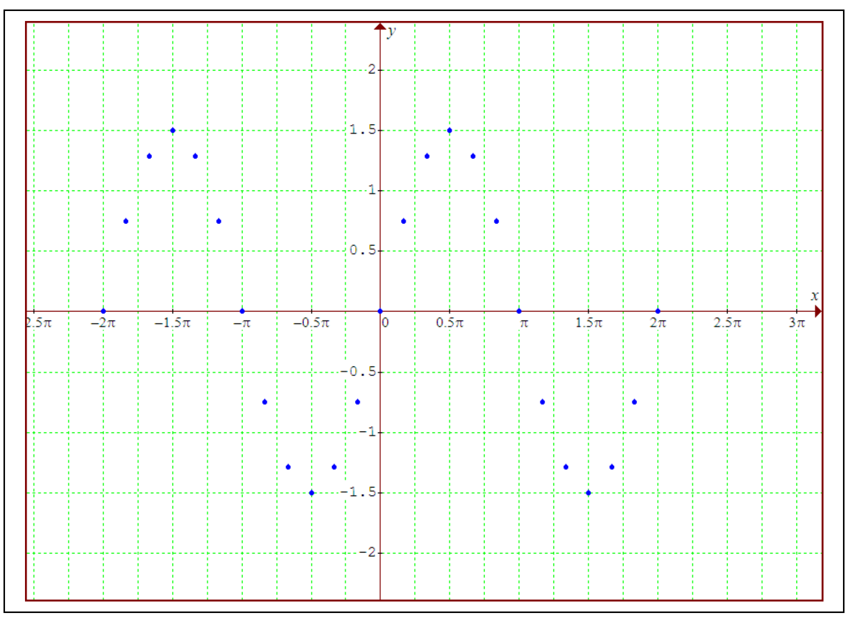
Las raíces de la función son: ____

Escribe una fórmula que nos de todas las raíces de la función: ______________________

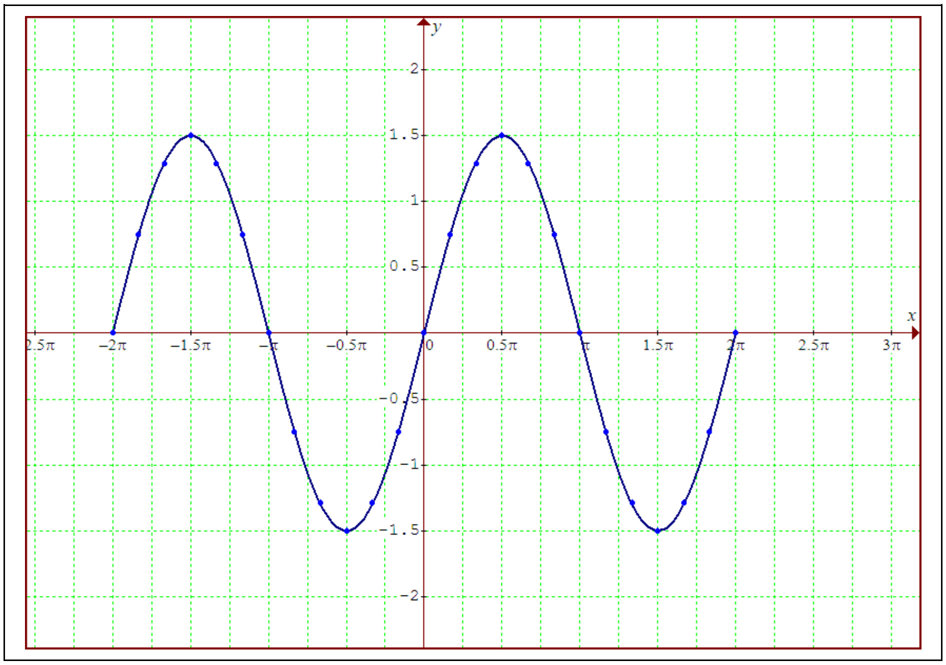
El valor máximo de la función es: ________________, y el valor mínimo es: _______________

La amplitud de la función es: ________________, El periodo de la función es: ____________

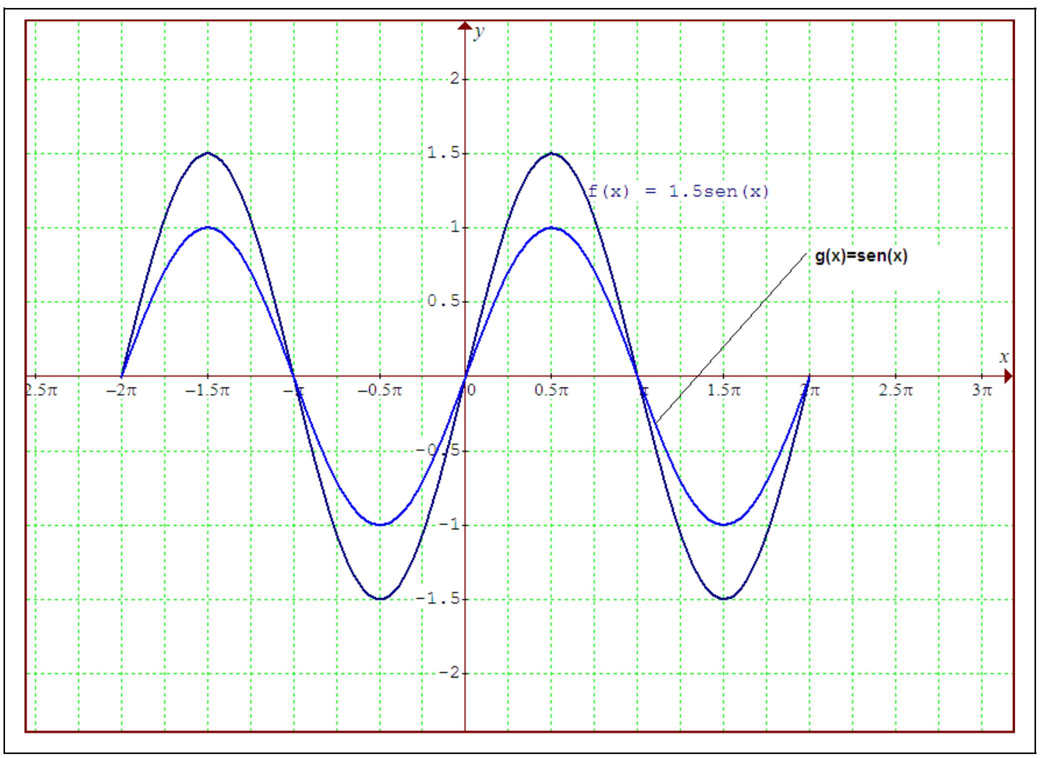
La gráfica correspondiente a los puntos tabulados es.



Si trazamos una curva suave uniendo los puntos, la gráfica que resulta es.



Si hacemos las gráficas de g(x) = sen(x) y f(x) = 1.5 sen(x) sobre el mismo sistema de coordenadas.



Si consideramos la función f(x) = A sen(x). ¿Cuál es el efecto sobre la gráfica del parámetro A?

____

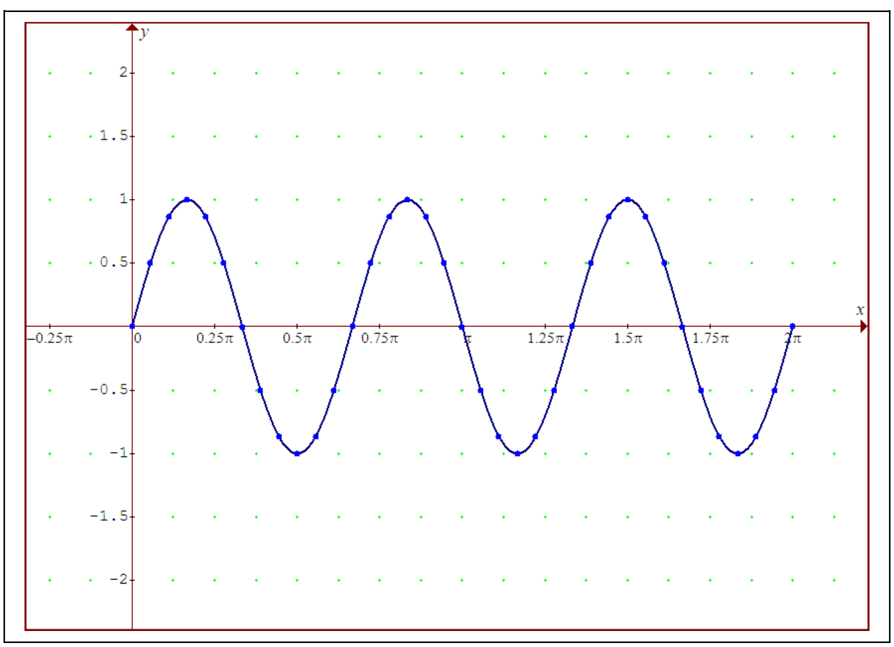
Ejemplo 3. Encontrar el dominio, rango, la amplitud, el periodo, las raíces, y gráfica de la función f(x) = sen(3x).

El dominio de la función seno son todos los números reales ya que esta definida para cualquier ángulo positivo o negativo, así que nada más consideramos el intervalo [0, 2π] que corresponde a un periodo de la función seno, con incrementos de $\frac{\pi}{18} \cong 10^0$.

Para lo cual se considera la siguiente tabla de valores.

Radianes	0	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{9}$	$\frac{5\pi}{18}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{18}$	$\frac{4\pi}{9}$	$\frac{\pi}{2}$
Grados	0º	10º	20º	30º	40º	50º	60º	70º	80º	90º
Seno	0	.5	.86	1	.86	.5	0	-.5	-.86	-1
Radianes	$\frac{5\pi}{9}$	$\frac{11\pi}{18}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{13\pi}{18}$	$\frac{7\pi}{9}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{8\pi}{9}$	$\frac{17\pi}{18}$	π	$\frac{19\pi}{18}$
Grados	100º	110º	120º	130º	140º	150º	160º	170º	180º	190º
Seno	-.86	-.5	0	.5	.86	1	.86	.5	0	-.5
Radianes	$\frac{10\pi}{9}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{9}$	$\frac{23\pi}{18}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{25\pi}{18}$	$\frac{13\pi}{9}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{14\pi}{9}$	$\frac{29\pi}{18}$
Grados	200º	210º	220º	230º	240º	250º	260º	270º	280º	290º
Seno	-.86	-1	-.86	-.5	0	.5	.86	1	.86	.5
Radianes	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{31\pi}{18}$	$\frac{16\pi}{9}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{17\pi}{9}$	$\frac{35\pi}{18}$	2π			
Grados	300º	310º	320º	330º	340º	350º	360º			
Seno	0	-.5	-.86	-1	-.86	-.5	0			

Y la gráfica correspondiente es:



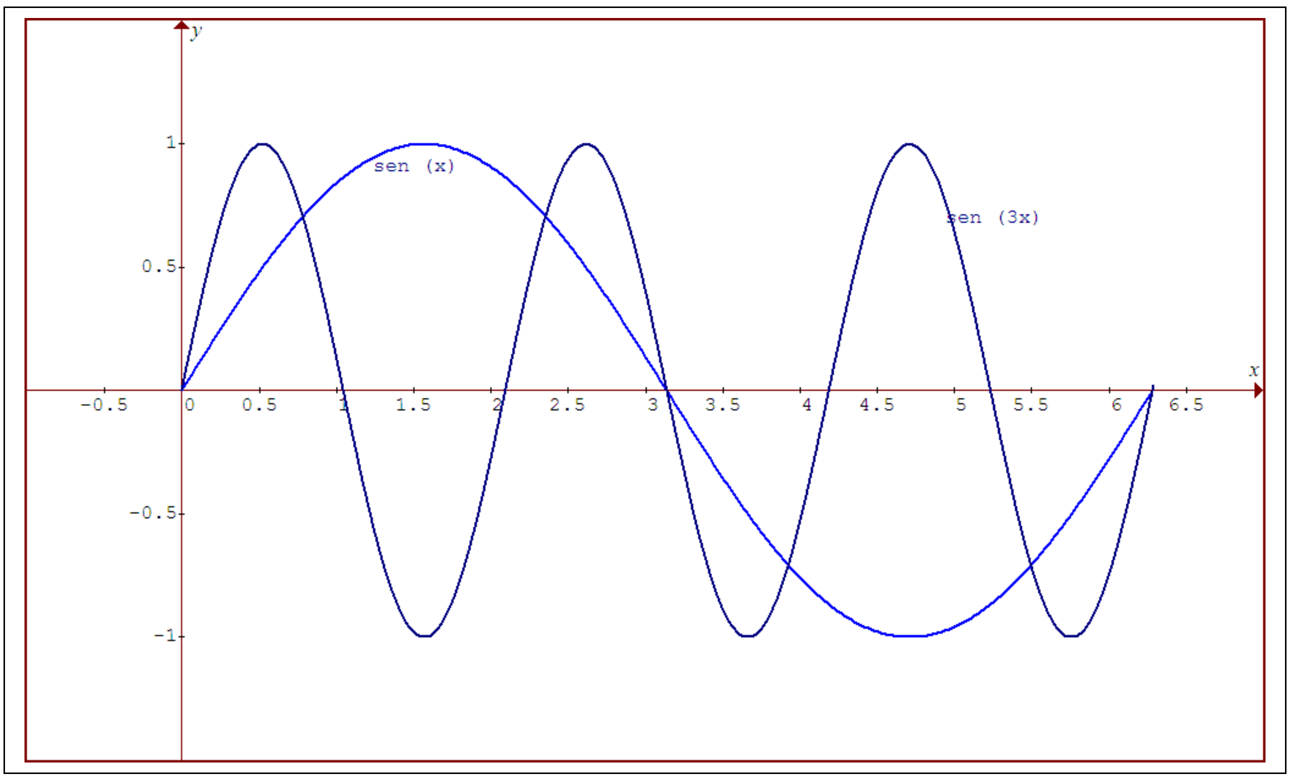
El rango de la función es el intervalo cerrado [-1, 1].

La amplitud de la función es 1.

El periodo de la función f(x) = sen(3x) es, $\frac{2\pi}{3}=120^0$, de manera que en el intervalo de [0, 2π] la función completa tres periodos.

Examinando la gráfica encuentra los ceros de la función: ____________________________ y escribe una fórmula que nos permita encontrar todos los ceros de la función en su dominio que son los números reales R. ____.

Si hacemos las gráficas de las funciones, f(x) = sen (x) y g(x) = sen (3x) sobre el mismo sistema de coordenadas considerando el intervalo [0, 2π] como se muestra a continuación.



¿Cuántos periodos completas tiene la función f(x) = sen(x) en el intervalo [0, 2π]? _____________

¿Cuántos periodos completas tiene la función g(x) = sen(3x) en el intervalo [0, 2π]? ___________

¿Cuál será el efecto del parámetro 3 que multiplica a la variable independiente? ______________

Si la función es d(x) = sen (5x), ¿Cuántos periodos completos tendrá la función en [0, 2π]? ______

Si ahora consideramos la función $m(x)=\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$, ¿Cuántos periodos completos tendrá en el intervalo [0, 2π]? ______

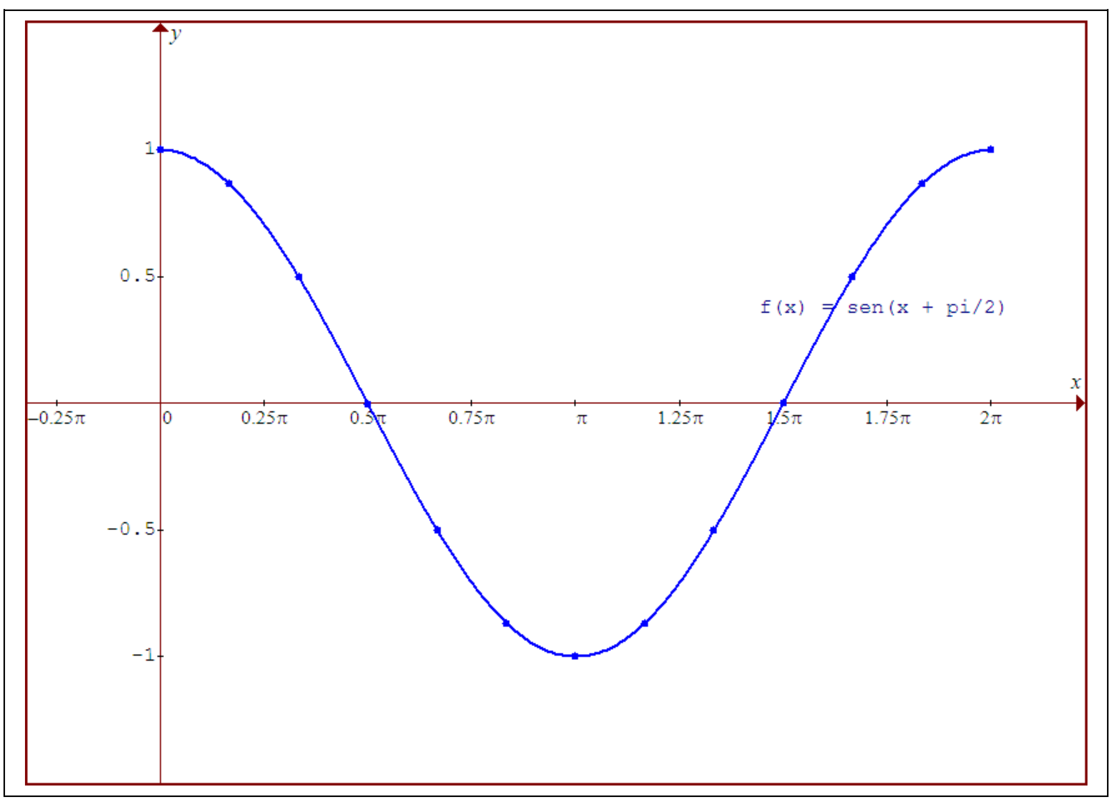
Ejemplo 4. Encontrar el dominio, rango, la amplitud, el periodo, las raíces, y gráfica de la función f(x) = sen(x + $\frac{\pi}{2}$).

Como ya se estableció el dominio de la función f(x) es R.

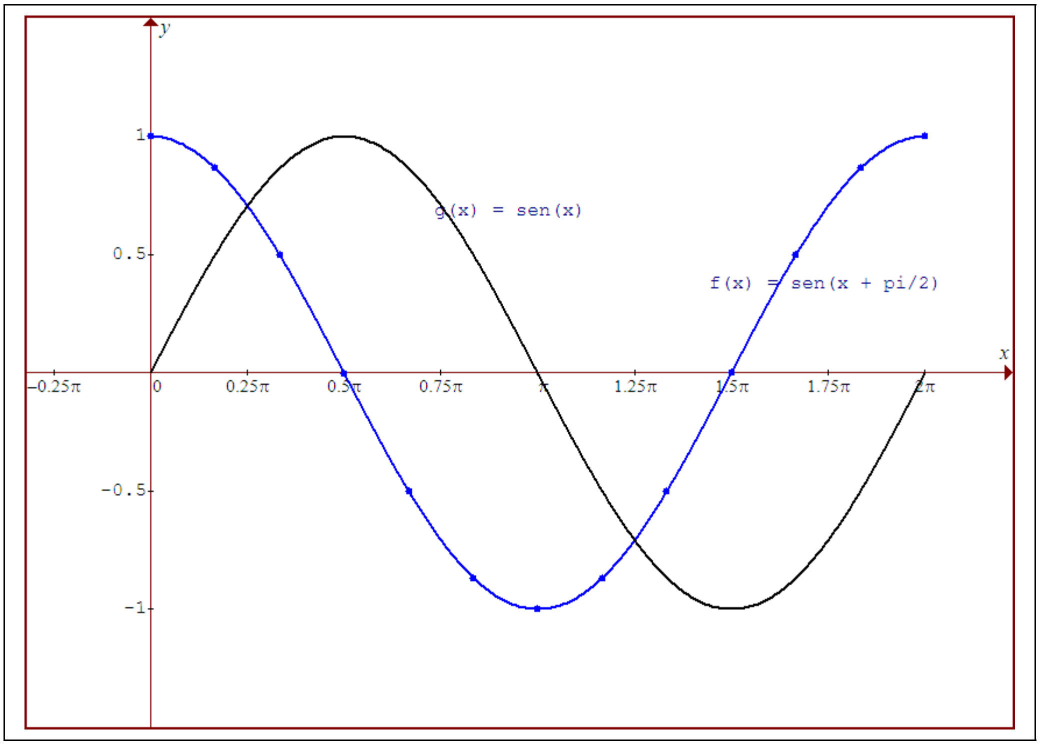
Para establecer la gráfica hacemos una tabulación en el intervalo [0, 2π], con incrementos de 30º = $\frac{\pi}{6}$ radianes, como se muestra a continuación.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$
x + $\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Grados	90º	120º	150º	180º	210º	240º	270º	300º	330º	360º
seno	1	.86	.5	0	-.5	-.86	-1	-.86	-.5	0
x	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π							
x + $\frac{\pi}{2}$	$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{2}$							
Grados	390º	420º	450º							
seno	.5	.86	1							

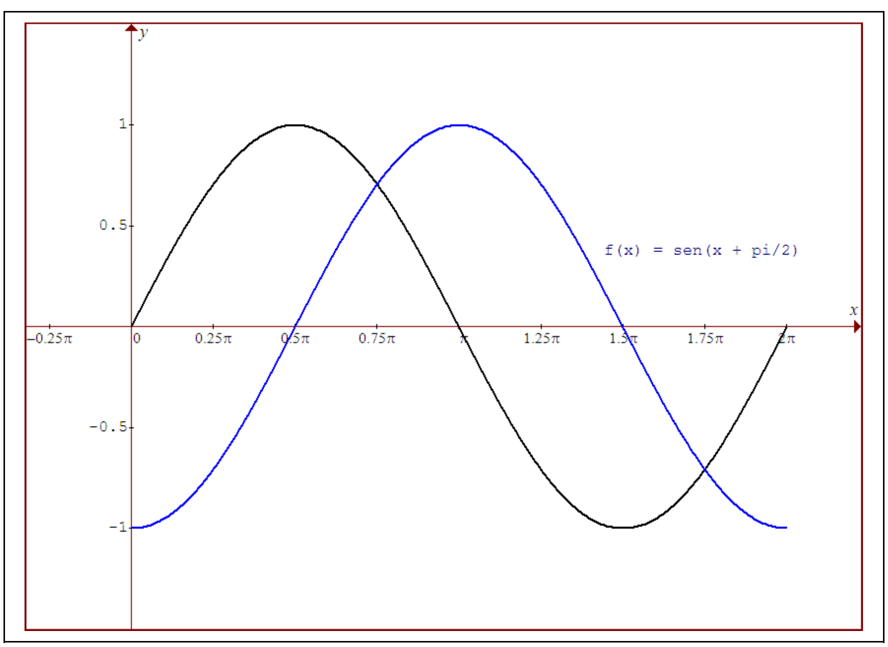
La gráfica correspondiente es.



Si comparamos la gráfica de la función obtenida, con la gráfica de g(x) = sen(x) como se muestra a continuación.



Se observa que la grafica de la función f(x) = sen(x + $\frac{\pi}{2}$) esta recorrida a la izquierda $\frac{\pi}{2}$. Si se hacen las graficas de h(x) = sen(x) con f(x) = sen(x - $\frac{\pi}{2}$), ¿qué observas?



El corrimiento de una gráfica ya sea, a la izquierda o a la derecha, se le llama **desfasamiento**.

El rango de la función es el intervalo [-1, 1].

La amplitud de la función es 1.

El periodo de la función es 2π.

Escribe los valores de x que corresponden a las raíces de la función. ______________________

Si ahora comparas la gráfica de f(x) = cos(x) con la gráfica de g(x) = cos(x - π), ¿hacia dónde se recorre la gráfica? _________________, ¿cuántas unidades? _________________________.

Ejemplo 5. Realiza la gráfica de f(x) = cos(x) en el intervalo [0, 2π], y determina el dominio, rango, raíces, amplitud, periodo.

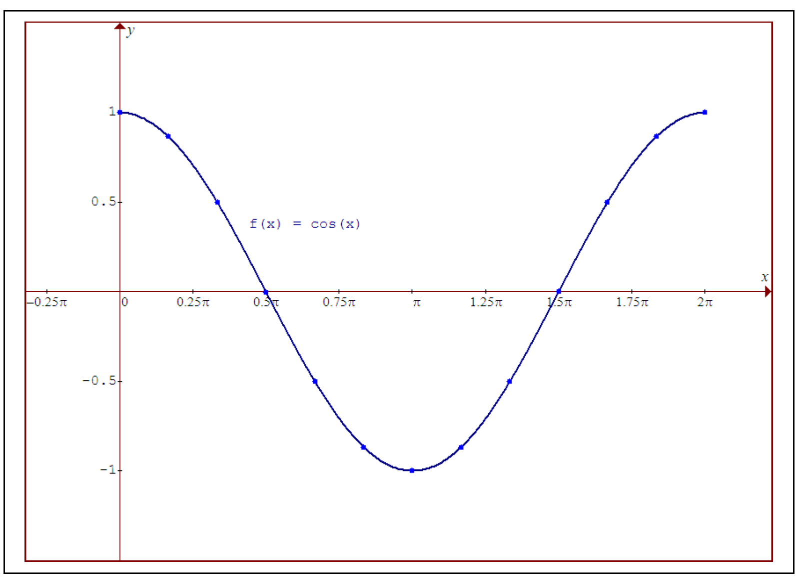
Al igual que la función sen(x) el dominio de la función f(x) = cos(x) es el conjunto de los números reales, $D_f = R$.

Para determinar las demás características de la función se analiza la siguiente tabla de valores, en el intervalo [0, 2π] con incrementos de $\frac{\pi}{6}$ = 30º.

X	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$
Grados	0º	30º	60º	90º	120º	150º	180º	210º	240º	270º
coseno	1	.86	.5	0	-.5	-.86	-1	-.86	-.5	0

x	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Grados	300º	330º	360º
coseno	.5	.86	1

La gráfica correspondiente es.



La amplitud de la función es 1.

El periodo de la función es 2π.

Escribe las raíces de la función: ___________________________

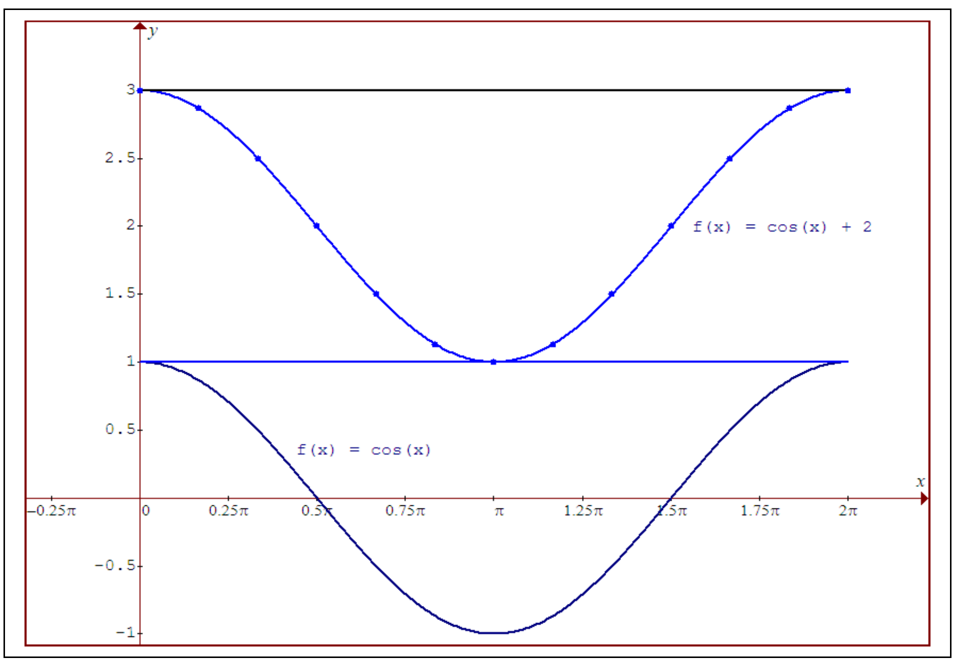
Ejemplo 6. Encuentra el dominio, el rango, las raíces, el periodo, la amplitud y la gráfica de la función f(x) = cos(x) + 2.

Las demás características se obtienen al analizar la siguiente tabla de valores de $[0,\ 2\pi]$ con incrementos de $\frac{\pi}{6}$ = 30º.

X	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$
Grados	0º	30º	60º	90º	120º	150º	180º	210º	240º	270º
Coseno	1	.86	.5	0	-.5	-.86	-1	-.86	-.5	0
Cos(x) + 2	3	2.86	2.5	2	1.5	1.14	1	1.14	1.5	2

X	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Grados	300º	330º	360º
Coseno	2.5	2.86	3

La gráfica se muestra a continuación.



El dominio de la función es R, el rango de la función es el intervalo cerrado [1, 3], el periodo de la función es 2π, la amplitud es 1, y no tiene raíces.

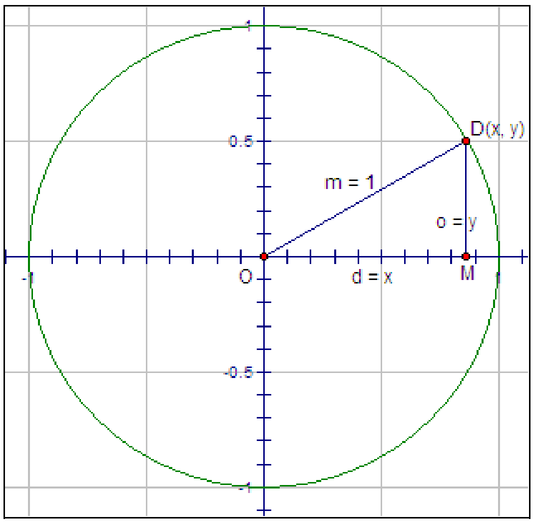
Como puedes observar hemos visto por separado cada uno de los elementos de las funciones.

- f(x) = A sen(Bx + C) + D
- f(x) = A cos(Bx + C) + D

A es la amplitud. B modifica el periodo. C produce un desfasamiento de la gráfica.
D produce un traslado de la gráfica sobre el eje de las ordenadas.

Ejemplo 7. encuentra el dominio, el rango, el periodo, las raíces, y las asíntotas de la siguiente función f(x) = tan(x).

Como recordaras hemos ampliado la definición de razón trigonométrica a función trigonométrica por medio de un círculo unitario con centro en el origen de coordenadas.



de manera que:

$$\mathbf{f(\alpha)=tan(\alpha)=\frac{y}{x}}$$

Pero como:

$$\mathbf{g(\alpha)=sen(\alpha)=y}$$
$$\mathbf{h(\alpha)=cos(\alpha)=x}$$

De manera que:

$$\mathbf{f(\alpha)=tan(\alpha)=\frac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)}}.$$

Para encontrar el dominio, el rango y las demás características del problema, tenemos que hacer una tabla de valores de la función en el intervalo [0, 2π], con incrementos de 15º, así que examinemos la siguiente tabla de valores.

x	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$
Grados	0º	15º	30º	45º	60º	75º	90º	105º	120º	135º
Seno	0	.25	.5	.70	.86	.96	1	.96	.86	.70
Cos	1	.96	.86	.70	.5	.25	0	-.25	-.5	-.70
Tan	0	.26	.58	1	1.72	3.84	No def.	-3.84	-1.72	-1
x	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$	π	$\frac{13\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{17\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{19\pi}{12}$
Grados	150º	165º	180º	195º	210º	225º	240º	255º	270º	285º
Seno	.5	.25	0	-.25	-.5	-.70	-.86	-.96	1	-.96
Cos	-.86	-.96	1	-.96	-.86	-.70	-.5	-.25	0	.25
Tan	-.58	-.26	0	.26	.58	1	1.72	3.84	No def.	-3.84
x	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{21\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{23\pi}{12}$	2π					
Grados	300º	315º	330º	345º	360º					
Seno	-.86	-.70	-.5	-.25	0					
Cos	.5	.70	.86	.96	1					
Tan	-1.72	-1	-.58	.26	0					

Para ver el comportamiento de la función cuando el ángulo se acerca a 90º, usamos la siguiente definición de la función tangente.

$$f(\alpha)=\tan(\alpha)=\frac{y}{x}.$$

Recordando que y = sen(α) = y, cos(α) = x, primero cuando el ángulo $\alpha \leq 90º$, como se muestra en la siguiente tabla.

α	80º	81º	82º	83º	84º	85º	86º	87º	88º	89º
Sen(α)	.98	.98	.99	.99	.99	.99	.99	.99	.99	.99
Cos(α)	.17	.15	.13	.12	0.1	.08	.06	.05	.03	.01
Tan(α)	5.76	6.53	7.61	8.25	9.9	12.3	16.5	19.8	33	99

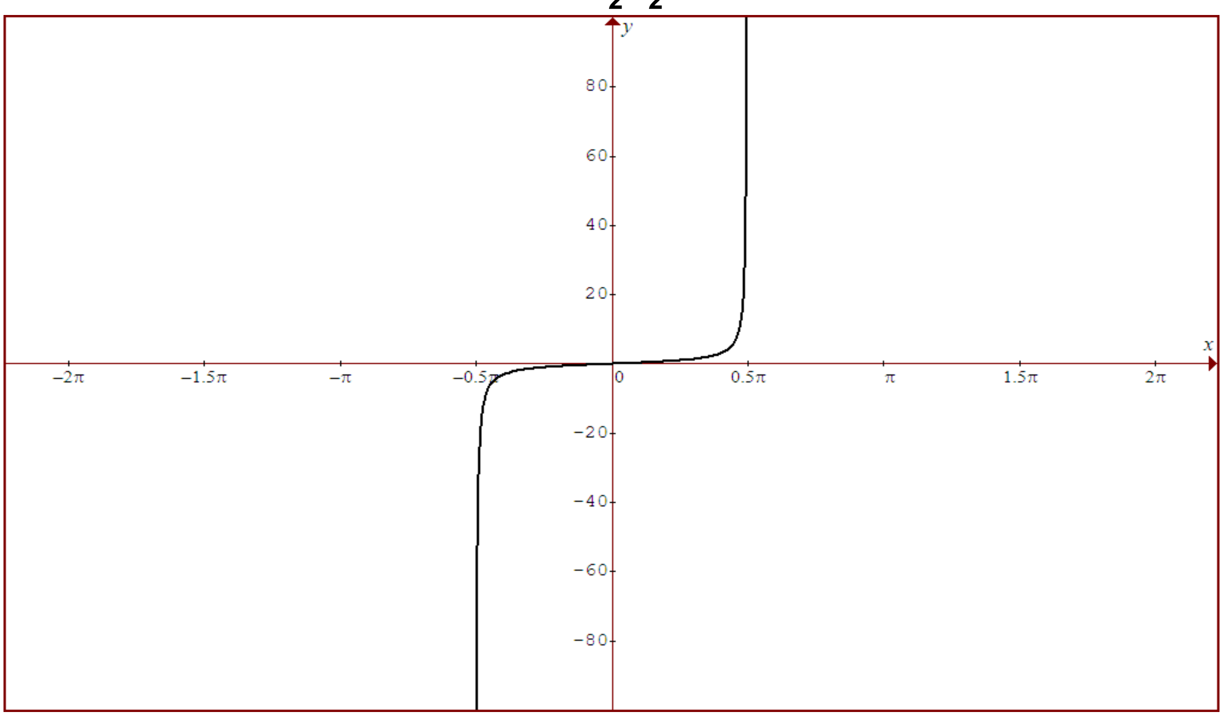
El valor de la tangente se hace cada vez más grande, de manera que cuando el ángulo α se acerca a 90º el valor de la tangente tiende a más infinito.

Veamos ahora que pasa si α se acerca a 90º, con $\alpha \geq 90º$. Como vemos en la siguiente tabla.

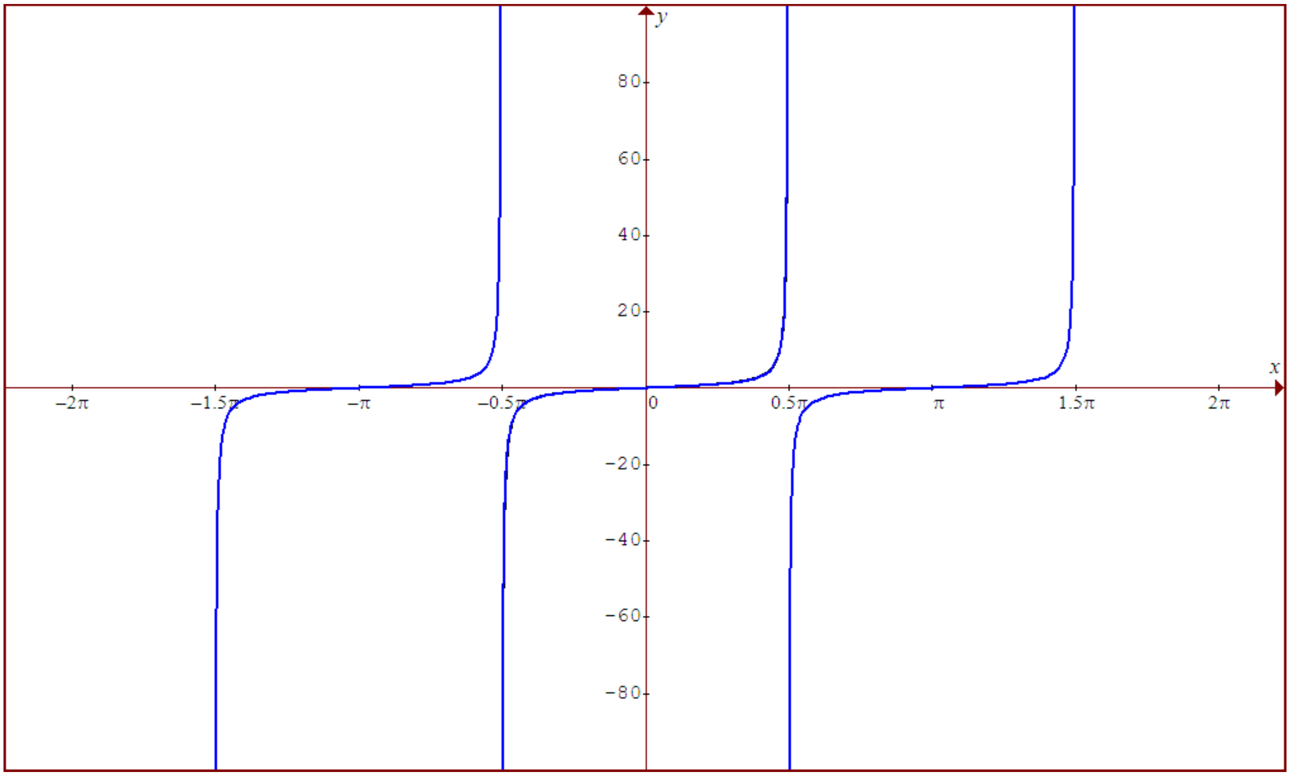
α	100º	99º	98º	97º	96º	95º	94º	93º	92º	91º
Sen(α)	.98	.98	.99	.99	.99	.99	.99	.99	.99	.99
Cos(α)	-.17	-.15	-.13	-.12	-0.1	-.08	-.06	-.05	-.03	-.01
Tan(α)	-5.76	-6.53	-7.61	-8.25	-9.9	-12.3	-16.5	-19.8	-33	-99

Los valores de la tangente se hacen cada vez más grandes, pero con signo negativo cuando el ángulo se acerca a 90º pero con $\alpha \geq 90º$.

La gráfica de la función tangente en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ es la siguiente.



El periodo de la función f(x) = tan (x) es π, una raíz de la función es α = 0º, la siguiente gráfica muestra la gráfica de la función tangente en el intervalo $[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.



Ahora podemos ver que las raíces de la función tangente son de la forma, -π, 0, π, en general las raíces de la función son kπ con k un número entero.

También se puede observar que la función tangente tiene asíntotas verticales en los puntos de la forma $\frac{(2k+1)\pi}{2}$, con k un número entero.

El dominio de la función tangente son los números reales R, menos el conjunto de puntos de la forma $\frac{(2k+1)\pi}{2}$, con k un número entero.

El rango de la función son todos los números reales.

Ejercicio 1. Encuentra la gráfica de la función $f(x)=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$, encuentra las raíces, las asíntotas, el dominio, el rango.

Ejercicio 2. Encuentra la gráfica de la función $f(x)=\tan(2x)$, encuentra el dominio, el rango, las raíces y las asíntotas.

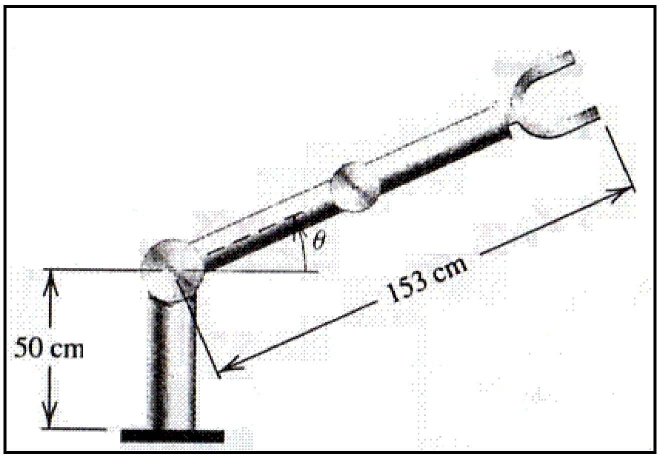
Secuencia didáctica de lectura y exploración.

Aprendizajes:

Conoce algunas aplicaciones de las funciones trigonométricas en el estudio de fenómenos diversos de variación periódica, por ejemplo: movimiento circular, movimiento del péndulo, del pistón, ciclo de la respiración o de los latidos del corazón, estudio de las mareas, fenómenos ondulatorios, etc.

Inicio de la secuencia.

Problema 1. Movimiento de brazo de robot. Las funciones trigonométricas se utilizan mucho en el diseño de robots industriales. Supongamos que la articulación de un hombro del robot está motorizada de modo que el ángulo θ aumenta a una rapidez constante de $\frac{\pi}{12}$ radianes por segundo desde un θ = 0. Supongamos que la articulación del codo se mantiene siempre recta y que el brazo tiene una longitud constante de 153 centímetros, como se muestra en la figura.



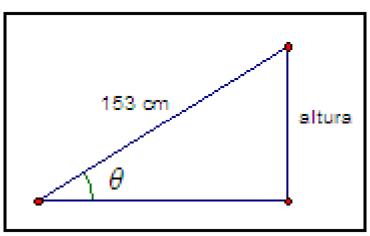
a. Supongamos que h = 50 cm cuando θ = 0. Construye una tabla que enumere el ángulo θ y la altura h de la mano del robot en cada segundo mientras $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

b. Determina si un aumento constante en el ángulo θ produce un aumento constante en la altura de la mano.

c. Encuentra la distancia total que se mueve la mano.

Solución.

La siguiente figura simplifica el brazo.



La altura del brazo se puede obtener con la razón trigonométrica.

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{altura}}{153}.$$

De donde.

Altura = 153 sen(θ)

De manera que la altura del brazo esta dada por la siguiente función del ángulo θ.

$$f(\theta) = 50 + 153\operatorname{sen}(\theta)$$

Ahora veamos la tabla que muestra la altura del brazo en función del ángulo.

θ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$
50 + 153 sen(θ)	50	89.59	126.5	158.18	182.5	197.78	203

b. Si hacemos la diferencia entre dos ángulos consecutivos, la diferencia es de $\frac{\pi}{12}$ = 15º, así que tomemos la diferencia entre dos pares de valores de la altura consecutivos para observar la diferencia entre ellos.

126.5 – 89.59 = 36.91

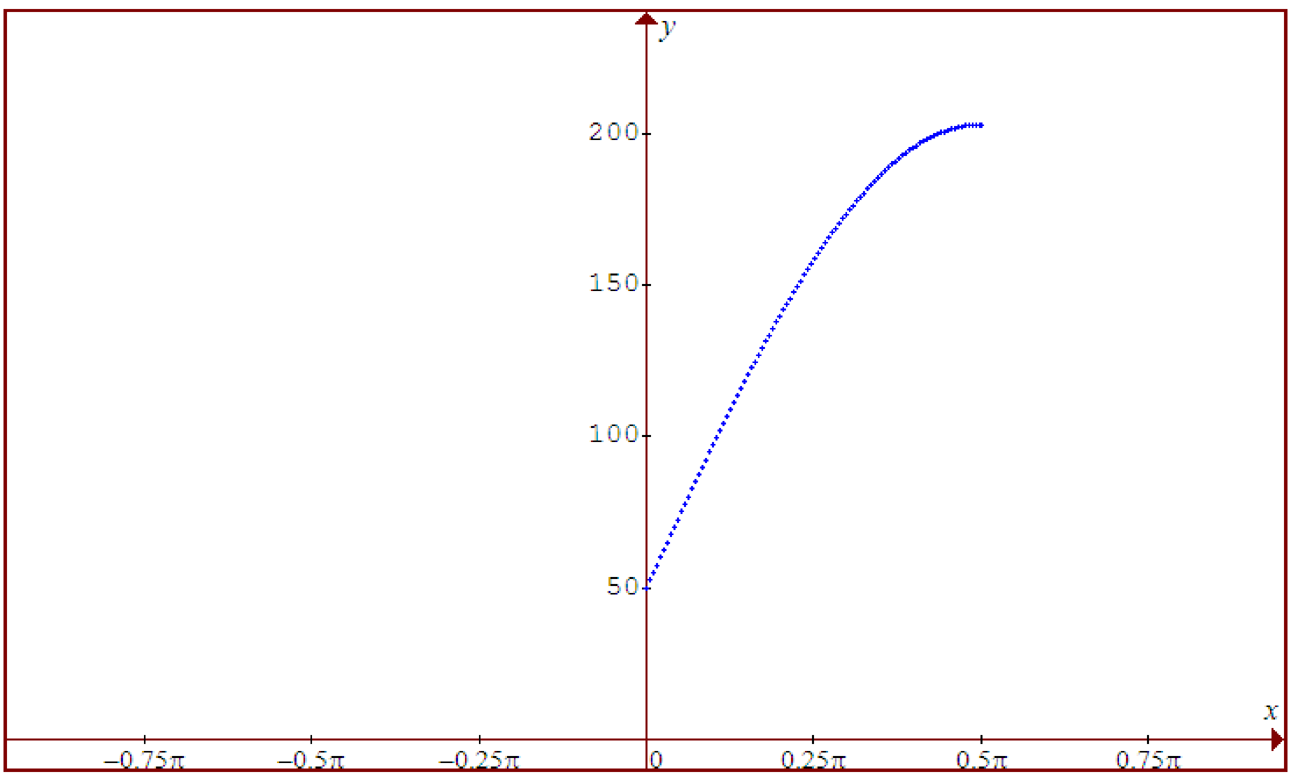
158.18 – 126.50 = 31.68

Las diferencias no son iguales, así que el aumento en la altura no es constante.

c. Para encontrar la distancia total que se mueve la mano, hay que hacer la diferencia de la altura final menos la altura inicial.

203 – 50 = 153 cm.

La gráfica de la función f(θ) = 50 + 153 sen(θ) en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ es la siguiente.



Escribe el rango de la función: ______________________________

¿Tiene raíces la función? __________________________________

Ejercicio 1. Relación temperatura – humedad. El 19 de enero de 1954, en México D. F., la temperatura en grados Fahrenheit se pudo describir mediante la ecuación.

$$T(t) = -\mathbf{12}\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)+60$$

En tanto la humedad relativa en porcentaje se pudo expresar mediante

$$H(t)=20\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)+60,$$

Donde t está en horas y t = 0 corresponde a las 6 a. m.

- Construye una tabla que haga una lista de las temperaturas y humedad relativa cada tres horas, comenzando a la media noche.
- Determina las horas cuando se presentaron los valores máximos y mínimos para T y H.

Ejercicio 2. Brazo de un robot. Los puntos en lados terminales de los ángulos desempeñan una parte importante en el diseño de brazos de robots. Supongamos que una máquina tiene un brazo recto de 180 cm de largo, que puede girar alrededor del origen en un plano coordenado. Si la mano del robot se sitúa en (180, 0) y luego gira en un ángulo de 15º, ¿cuál es la nueva posición de la mano?

Para el profesor:

Bibliografía:

1. Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica.
   Novena Edición
   Editorial: Internacional Thomson
   Swokowski & Cole

Para el alumno:

2. Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica.
   Editorial: Oxford
   Louis Leithold

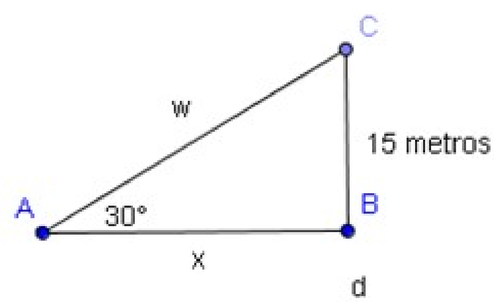
Examen 1 de la Unidad.

1. Transformar las unidades de los siguientes ángulos.

   40º = ___________ radianes

   $\frac{5\Pi}{6}$ **radianes** = __________º

2. Encuentra el valor de x y w en la siguiente figura.



3. Encuentra la gráfica, el dominio, el rango, las raíces, la amplitud, el periodo y la frecuencia de la función f(x) = 3 sen (2x).

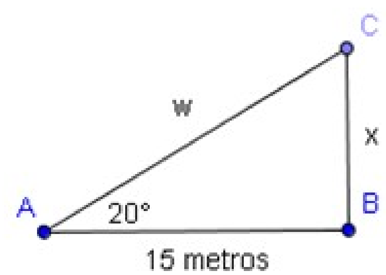
Examen 2 de la Unidad.

1. Transformar las unidades de los siguientes ángulos.

   50º = ___________ radianes

   $\frac{3\Pi}{8}$ **radianes** = __________º

2. Encuentra el valor de x y w en la siguiente figura.



3. Encuentra la gráfica, el dominio, el rango, las raíces, la amplitud, el periodo y la frecuencia de la función f(x) = 2 sen (3x).

Propósitos de la unidad: Continuar con el estudio de las funciones trascendentes con las funciones exponenciales y logarítmicas, cuya forma peculiar de variación, permite modelar diversas situaciones de crecimiento y decaimiento. Introducir la noción de función inversa. Reforzar el manejo de dominio y rango de una función, así como la relación entre parámetros y gráfica.

Al finalizar el capítulo, el alumno:

Respecto a Funciones Exponenciales

Respecto a Funciones Logarítmicas

Secuencia didáctica de lectura y exploración.

Aprendizaje: Explorar una situación o fenómeno que presenta crecimiento o decaimiento exponencial, las relaciones o condiciones existentes y analiza la forma en que varían los valores de la función respectiva.

Obtiene, mediante el análisis de las condiciones de una situación o problema, o bien del estudio del comportamiento de algunos valores que obtenga, la expresión algebraica $f(x) = ca^x$ que le corresponda.

Problema 1. Si invertimos $1000.00 al 8% trimestral, encuentra las cantidades de dinero que tendrá la cuenta los primeros 6 trimestres, encuentra una fórmula que permita calcular el dinero en la cuenta después de n trimestres.

Solución.

Después del primer trimestre el dinero en la cuenta es:

$1000 + .08(1000) = 1000 + 80 = 1080$

$1000 + .08(1000) = 1000(1.08) = 1080$

El dinero en la cuenta es $1080.00

El dinero en la cuenta al final del segundo trimestre es:

$1080 + .08(1080) = 1080 + 86.4 = 1166.4$

$1080 + .08(1080) = 1080(1.08) = 1000(1.08)(1.08) = 1000(1.08)^2 = 1166.4$

El dinero en la cuenta es $1166.4

Para el tercer semestre el dinero en la cuenta es:

$1166.4 + .08(1166.4) = 1166.4 + 93.312 = 1259.712$

$1166.4 + .08(1166.4) = 1166.4(1.08) = 1000(1.08)^2(1.08) = 1000(1.08)^3 = 1259.712$

Tenemos ahorrado en la cuenta $1259.712

Para el cuarto semestre el dinero en la cuenta es:

$1259.712 + .08(1259.712) = 1259.712 + 100.77 = 1260.482$

$1259.712 + .08(1259.712) = 1259.712(1.08) = 1000(1.08)^3(1.08) =$

$= 1000(1.08)^4 = 1260.482$

La cuenta tiene un total de $1260.482

Para el quinto trimestre, podemos emplear la siguiente fórmula:

$= 1000(1.08)^5 = 1469.32$

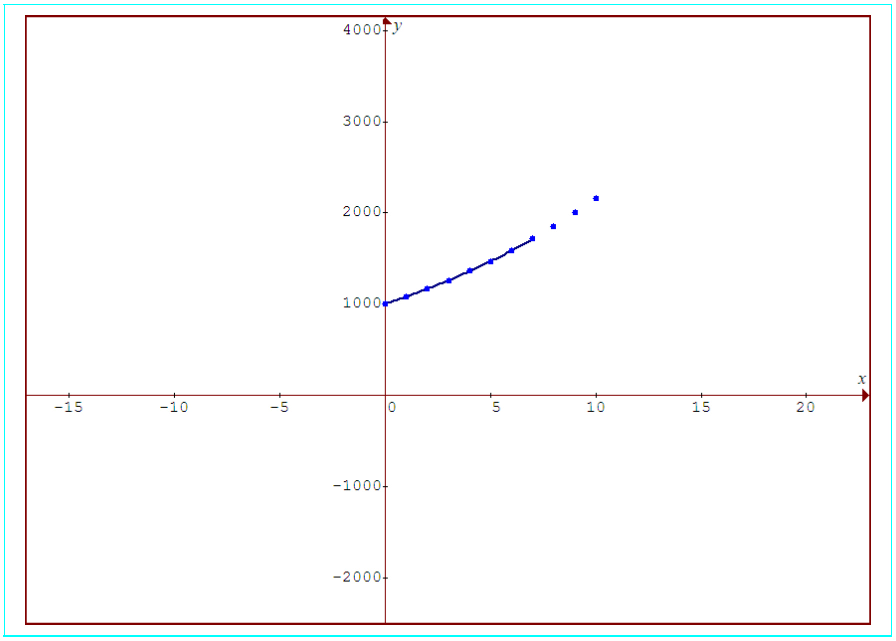
La cuenta tiene $1469.32

Para el sexto trimestre tenemos.

$= 1000(1.08)^6 = 1586.87$

Para el trimestre n – esimo tenemos $\$1000(1.08)^n$.

La gráfica que muestra esto, es la siguiente.

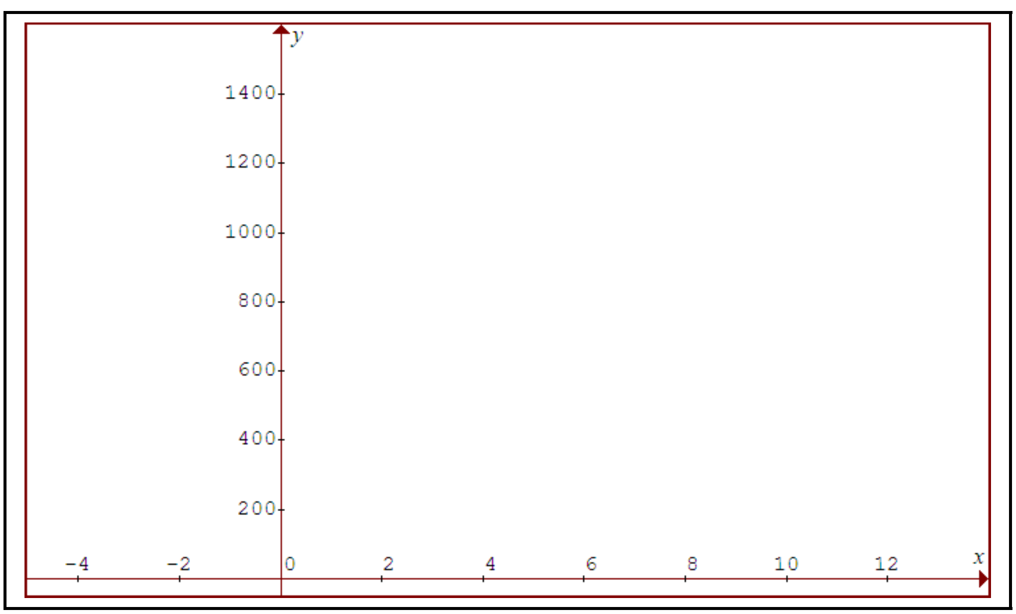


Problema 2. Se tiene un cultivo de bacterias de manera que el número de bacterias se duplica cada hora, en estas condiciones si la población inicial del cultivo era de 40 bacterias.

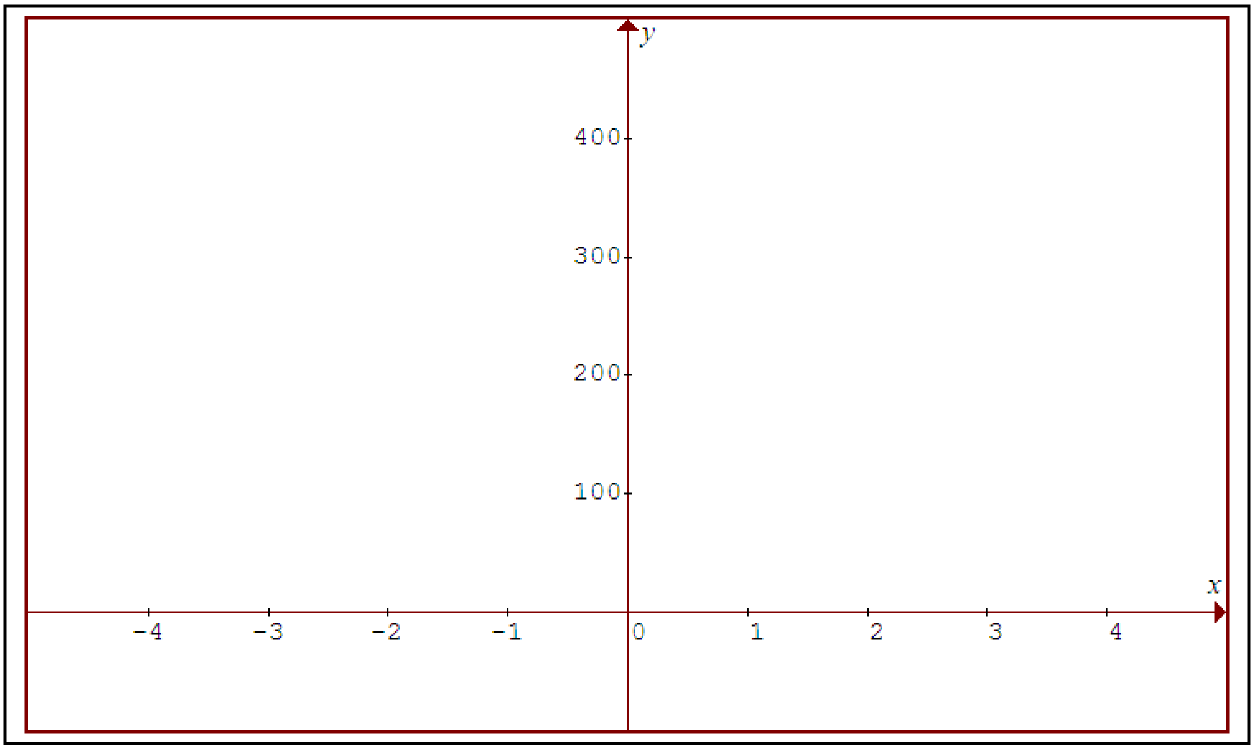
- ¿Indica la población que habrá para los tiempos indicados en la siguiente tabla?

t	0	1	2	3	4	5	6	7
P(t)								

- Localiza los primeros 5 puntos obtenidos en el siguiente sistema de coordenadas.



- Escribe la función que se emplea para calcular la población de bacterias después de t horas: ________
- Si consideramos la función P(t) como una función, para la cual la variable independiente puede tomar cualquier valor, ¿el dominio de la función es?. ___________________________
- ¿El rango de la función es?. ________________________
- ¿Tiene raíces la función?. __________________________
- ¿Tiene asíntotas la función?. _______________________
- Dibuja la gráfica de la función en el siguiente sistema de coordenadas.



Problema 3. Se tiene una pelota que se suelta de una altura de 10 metros, la cual al rebotar solo llega a la mitad de la altura anterior.

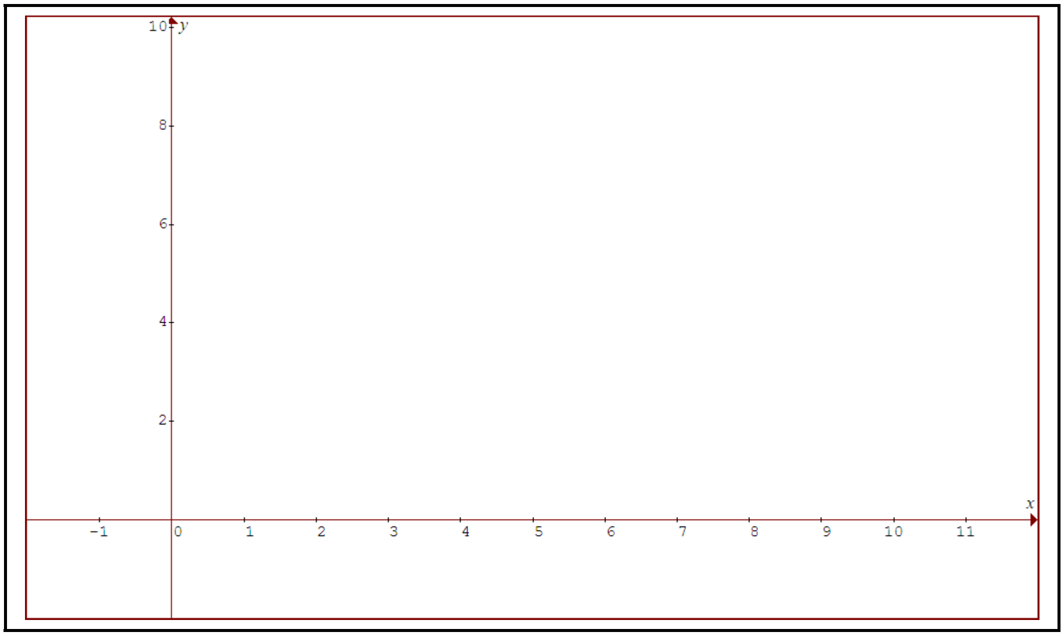
- Calcula las alturas a que llega la pelota, para los rebotes que se indican en la siguiente tabla de valores.

x	0	1	2	3	5	6
A						

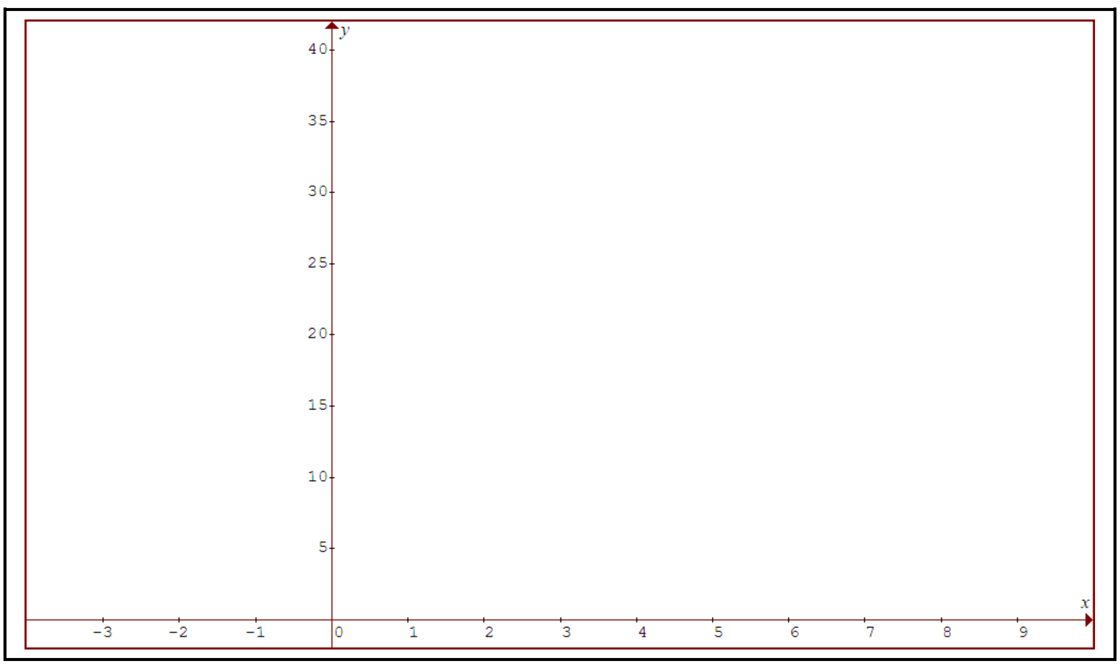
- Escribe la fórmula para calcular la altura que alcanza la pelota en el rebote n.

  A(n) = ________

- Localiza los puntos que encontraste en la tabla anterior, en el siguiente sistema de coordenadas.



- Si suponemos que la función para calcular la altura de la pelota, es ahora una función A(x) donde la variable puede tomar cualquier valor, ¿el dominio de la función es?. _____________
- ¿El rango de la función A(x) es?. ______________
- ¿Tiene ceros la función A(x)?. ________________
- ¿Tiene asíntotas la función A(x)?. _____________
- Dibuja la gráfica de la función en el siguiente sistema de coordenadas.

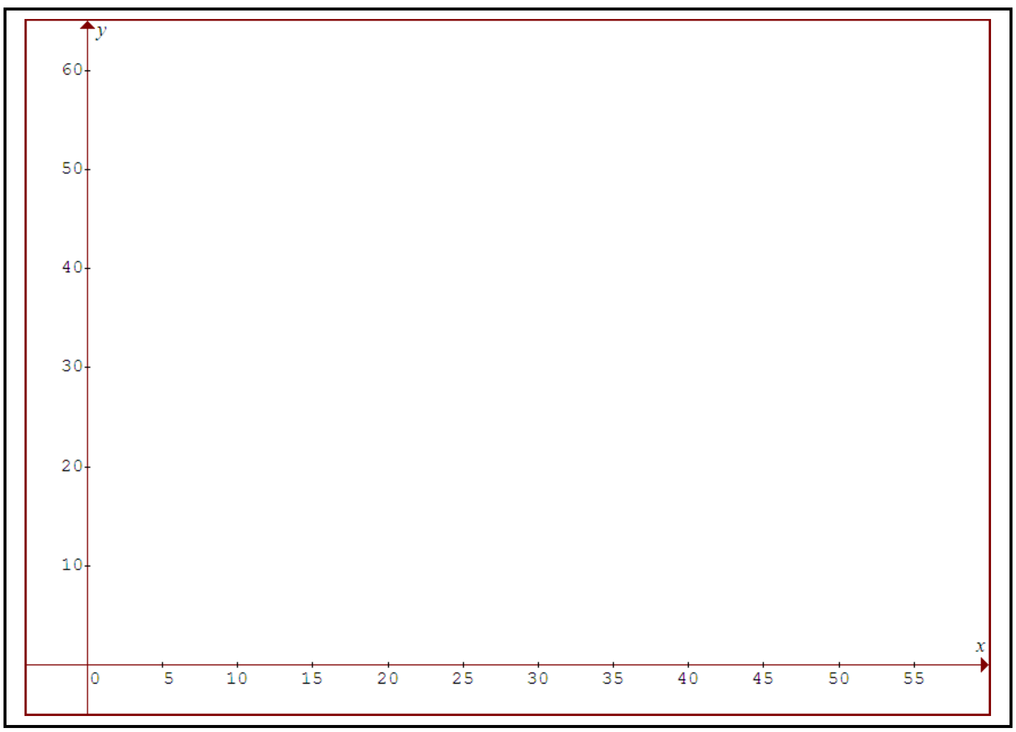


Problema 4. Supongamos que y es la masa de un elemento radiactivo especial cuya vida media es de 10 años. Si al inicio de un experimento se tiene una masa de 50 gramos.

- Calcula la cantidad de masa del elemento que queda para los años indicados en la siguiente tabla de valores.

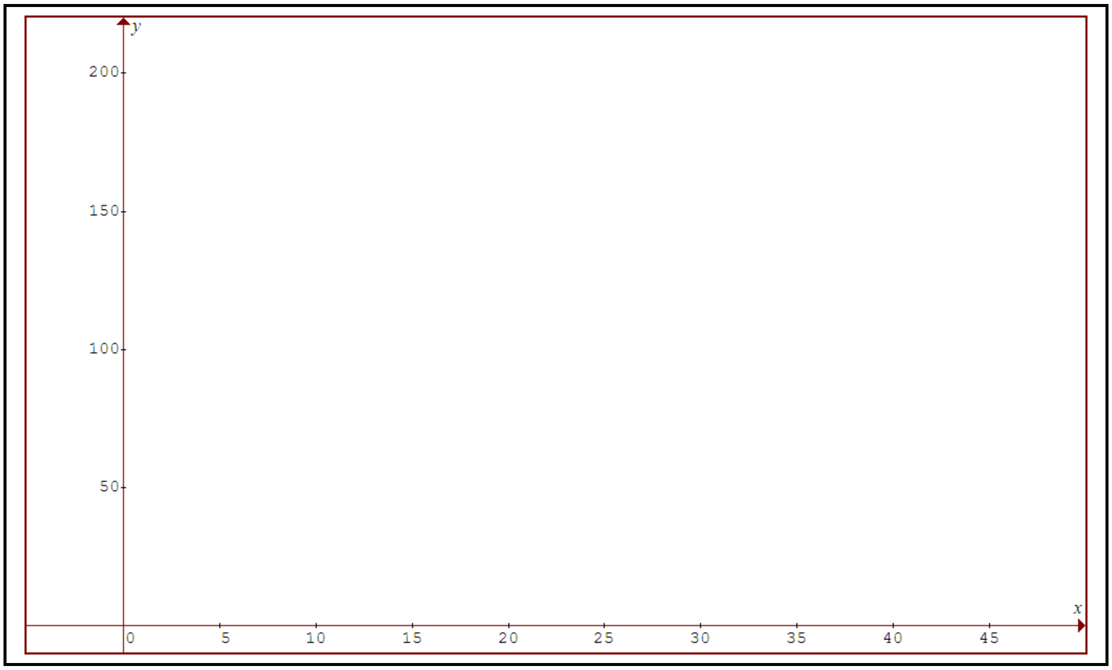
X	0	10	20	30	40	50
M						

- Escribe la fórmula para calcular la cantidad de masa restante después de x años.
  M(x) =
- Localiza los puntos obtenidos en el siguiente sistema de coordenadas.



- Si ahora suponemos que en la función M(x) la variable x, puede tomar cualquier valor, el dominio de la función es: ___________
- El rango de la función M(x) es: __________
- ¿tiene asíntotas la función?. _________
- En caso afirmativo, ¿cuáles son?. ________________

- Realiza la gráfica de la función en el siguiente sistema de coordenadas.



Ejercicio 1. Considera la función $f(x) = 3^{-x}$, encuentra los valores de la función para los siguientes valores mostrados en la tabla.

x	-5	-1	0	3	6	8
f(x)						

Ejercicio 2. Al realizar un experimento de cultivo de bacterias, se obtuvieron los valores mostrados en la siguiente tabla. El tiempo de la medición de la población de bacterias esta en minutos.

x	0	1	3	5	6	7
f(x)	40	80	320	1280	2560	5120

Encuentra la fórmula para encontrar la población de bacterias después de x minutos.________

Ejercicio 3. Al invertir $10,000 a un porcentaje x% capitalizable mensualmente, se obtienen las cantidades indicadas en la siguiente tabla de valores.

t	0	1	2	3	4	5
f(x)	10000	10200	10404	10612.08	10824.32	11040.80

Encuentra la fórmula para encontrar el capital acumulado, después de x meses.________

Secuencia didáctica de lectura y exploración.

Aprendizaje: Reconoce que en este tipo de situaciones, para valores de ***x*** igualmente espaciados, son constantes las razones de los valores correspondientes de **f(x)**.

Identifica que en la regla de correspondencia de las funciones que modelan este tipo de situaciones, la variable ocupa el lugar del exponente.

Inicio de la secuencia:

Problema 1. Inflación, Si el promedio de la tasa anual de inflación es del 5% para los próximos 15 años, entonces el costo C aproximado de artículos o servicios para cualquier año dentro de este periodo estará dado por:

$$C(t) = P(1.05)^t$$

En donde t es el tiempo en años y P es el costo presente. Si el precio de un cambio de aceite para un auto de la marca Ford cuesta ahora $600.00, estima el precio para los años indicados en la siguiente tabla.

T	1	3	5	7	9	11
C						

Escribe la función de costo que se utiliza para calcular el precio del cambio de aceite después de t años, dentro del periodo indicado: ____________

Ahora calcula las siguientes razones.

$$\frac{C(3)}{C(1)} = \qquad \frac{C(5)}{C(3)} = \qquad \frac{C(7)}{C(5)} =$$

$$\frac{C(9)}{C(7)} = \qquad \frac{C(11)}{C(9)} =$$

¿Qué observas en los cocientes? ______________

Explica el comportamiento observado utilizando la definición encontrada para calcular el precio después de x años, por ejemplo si calcular el precio del cambio de aceite dentro de (k) años, y luego calculas el precio del cambio de aceite dentro de (k + n) años de manera que (k) y (k + n) estén en el rango indicado, y luego calculando el cociente.

$$\frac{C(k+n)}{C(k)} =$$

Problema 2. Depreciación, Después de t años, el valor de un auto que cuesta $120,000 está dado por.

$$V(t)=120000\left(\frac{3}{4}\right)^{t}$$

- Encuentra los precios del auto para los lapsos de tiempo indicados en la siguiente tabla de valores.

t	2	4	6	8	10	12
V(t)						

- Encuentra los siguientes cocientes.

$$\frac{C(6)}{C(2)} = \qquad \frac{C(10)}{C(6)} =$$

¿Cómo son entre sí los cocientes anteriores? _________________

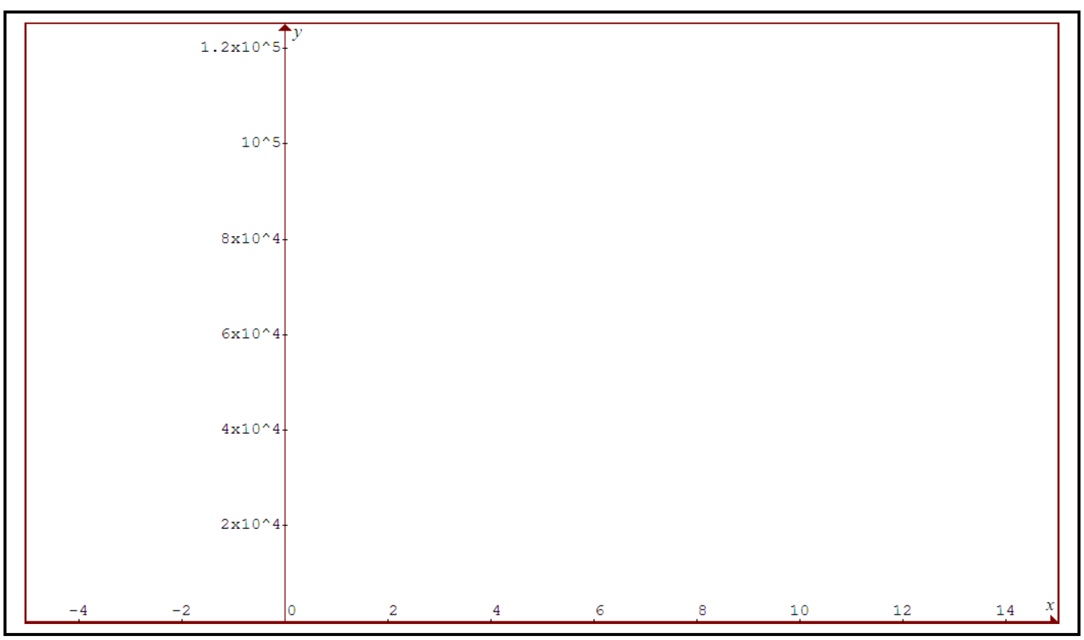
¿El lapso de tiempo entre cada par de precios es de? ___________

$$\frac{C(8)}{C(4)} = \qquad \frac{C(12)}{C(8)} =$$

¿Cómo son entre sí los cocientes anteriores? _________________

¿El lapso de tiempo entre cada par de precios es de? ___________

- Utilizando la información obtenida en la tabla y los cocientes, encuentra el valor de C(14) =
- Como en el ejercicio anterior ahora encuentra el valor de C(16) =
- Dibuja la gráfica de la función con la información disponible.



Problema 3. Origen del Ajedrez, Cuenta la leyenda que hace mucho tiempo había un sultán que se aburría demasiado, por lo cual ordeno a su ministro convocar al pueblo para encontrar algún pasatiempo que le permitiera pasar mejor el tiempo, fueron muchos los pasatiempos presentados, pero ninguno lograba las expectativas del sultán, hasta que un día llego un campesino y le mostró el ajedrez al sultán, él cual quedo maravillado de manera que ordeno se le diera lo que pidiera, él campesino le indico al ministro que le diera un grano de trigo por el primer cuadro del tablero, dos granos por el segundo cuadro, cuatro por el tercer cuadro, y así sucesivamente hasta llegar al último cuadro, al saber esto el sultán le dijo a su ministro que cumpliera de inmediato dicho deseo, a lo cual el ministro contesto, que era imposible cumplirlo.

- Completa la siguiente tabla, escribiendo las cantidades de grano que hay que darle al campesino por los primeros 8 cuadros del tablero.

cuadro	1	2	3	4	5	6	7	8
cantidad								

- Escribe la función que permite calcular la cantidad de granos que hay que darle al campesino por el cuadro n, con $1 \leq n \leq 64$.

____

- ¿Podrías indicar que nombre recibe la variable, por la posición que ocupa en la fórmula?

____

- Localiza los puntos de la tabla anterior en el siguiente sistema de coordenadas.

Secuencia didáctica de lectura y exploración.

Aprendizaje: Obtiene, mediante el análisis de las condiciones de una situación o problema, o bien del estudio del comportamiento de algunos valores que obtenga, la expresión algebraica $f(x) = ca^x$ que le corresponda.

Inicio de la secuencia:

Problema 1. Sebastián invierte $9000.00 a una tasa del 8% anual.

- Encuentra el capital de Sebastián para la años indicados en la siguiente tabla.

Años	0	1	2	3	4	5	6
Capital	9000	9720					

- Escribe la función para calcular el capital de Sebastián después de n años.

  ____

- Por su posición en la fórmula de la función que nombre recibe la variable independiente.

  ____

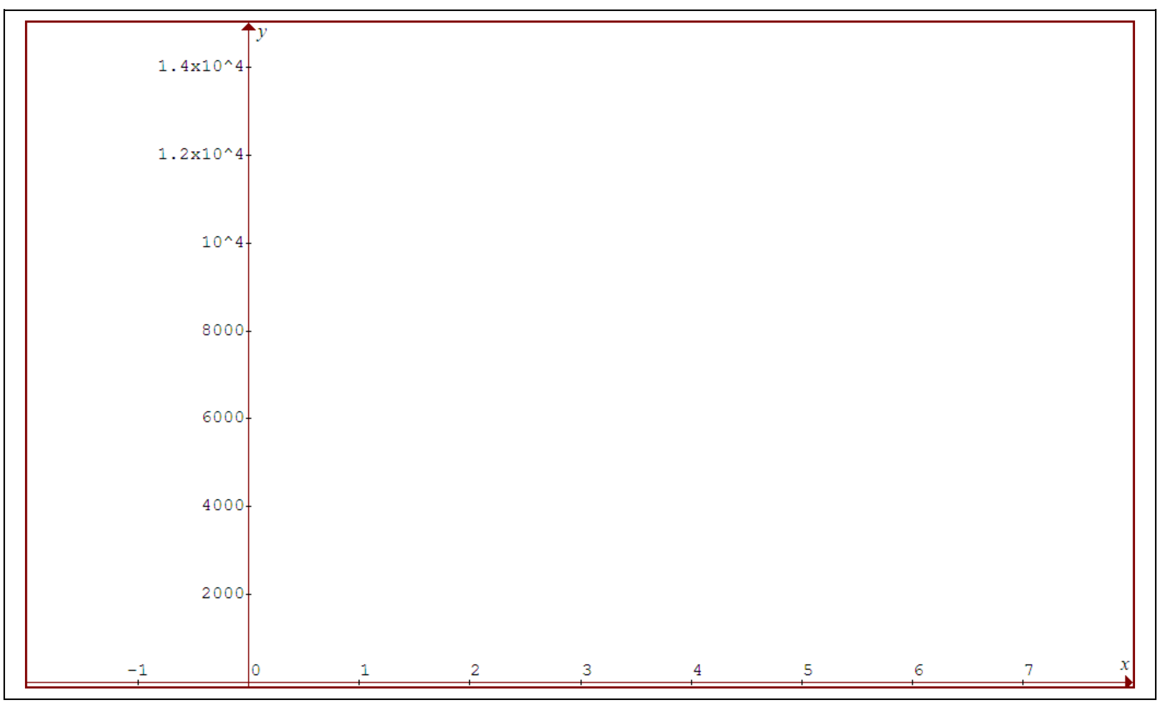
- Si la variable n puede tomar cualquier valor, el dominio de la función es.

  ____

- Por lo que, el dominio de la función será.

  ____

- Localiza los puntos obtenidos, en la siguiente gráfica y une los puntos con una línea suave.



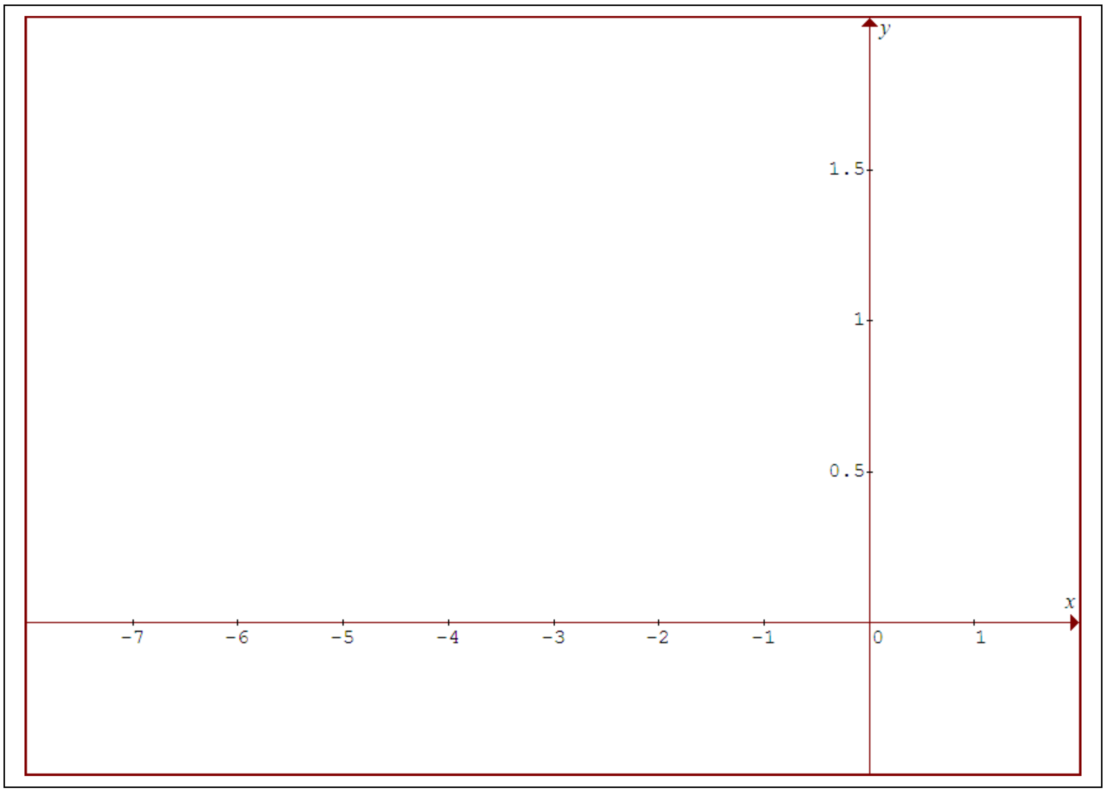
Problema 2. Analiza la siguiente tabla de valores y escribe la función asociada a dicha tabla.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0
f(x)	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1

- Escribe la función asociada a dicha tabla.

  ____

- Localiza los puntos de la tabla en el siguiente sistema de coordenadas.



- Por su posición en la fórmula de la variable independiente se llama.

  ____

- Encuentra f(2).

  ____

- ¿Pertenece el punto S(5, 32) a la gráfica de la función?. __________

- Explica tu respuesta.

  ____

Ejemplo 3. Crecimiento lineal y exponencial, Observa las siguientes dos sucesiones de números.

2	4	6	8	10	12

2	4	8	16	32	64

- Encuentra la función lineal que describe el comportamiento de la primera sucesión de números.

  ____

- Encuentra f(-5).

  ____

- ¿Qué nombre recibe la variable independiente por su posición en la función?.

  ____

- Encuentra la función exponencial que describe el comportamiento de la segunda sucesión de números.

  ____

Ahora se muestran otras dos sucesiones de números.

3	6	9	12	15	18

$\frac{1}{3}$	1	3	9	27	81

- ¿Cuál es la sucesión de números que tiene un crecimiento lineal?

  ____

- Escribe la fórmula de la función lineal?

  ____

- ¿Cuál es la sucesión de números que tiene crecimiento exponencial?

  ____

- Escribe la fórmula de la función exponencial?

  ____

- Escribe dos sucesiones de números, una lineal y una exponencial.

Secuencia didáctica de lectura y exploración.

Aprendizaje: Explica por qué la base ***a debe ser mayor que 1***, en las funciones del tipo ***f(x)=a***^{x} y

$f(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^{x}$.

Recuerda el significado de un exponente negativo, y lo utilizará para manejar la equivalencia entre

$\mathbf{f(x)=\left(\frac{1}{a}\right)^{x}}$ y $f(x) = a^{-x}$.

Proporciona el dominio y el rango de una función exponencial dada.

Inicio de la secuencia.

Problema 1. Encuentra el dominio, el rango, las raíces, las asíntotas y la gráfica de la función $f(x) = (0.5)^{x}$.

Como $\mathbf{0.5=\frac{1}{2}}$, podemos escribir la función dada de la siguiente manera, $\mathbf{f(x)=(0.5)^{x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=\frac{1}{2^{x}}}$,

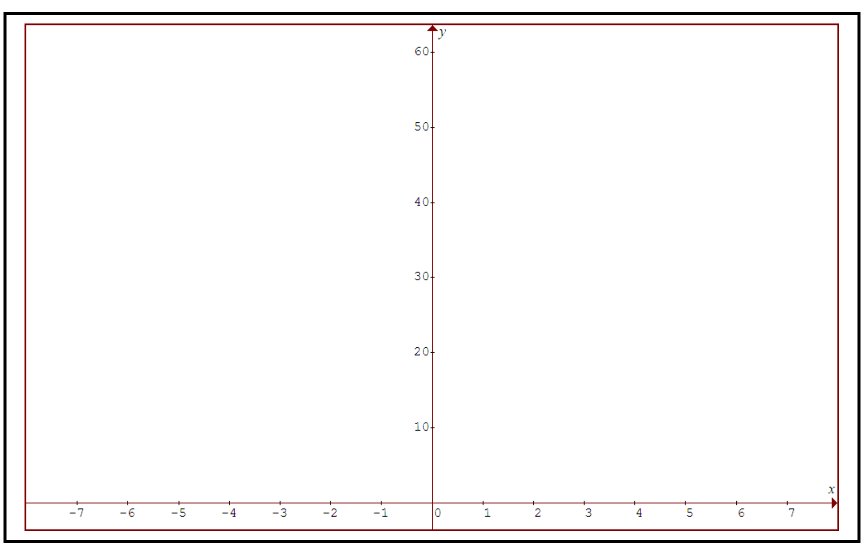
de manera que la base a = 2 es mayor que 1, hecha esta aclaración, completa la siguiente tabla de valores para la función.

x	-6	-4	-2	0	1	3	5
f(x)							

¿Consideras que puede haber algún valor de x, para el cuál la función no este definida?______

Si tu respuesta es afirmativa, trata de evaluar la función para dicho valor, ya sea manualmente o con la ayuda de la computadora, ¿cuál fue el resultado? _____________. ¿Tomando en cuenta lo anterior, el dominio de la función es? _____, Escribe el rango de la función. __________.

Dibuja la gráfica de la función en el siguiente sistema de coordenadas.



Problema 2. Encuentra el dominio, el rango, las raíces, las asíntotas y la gráfica de la función

$\mathbf{f(x)=\dfrac{1}{(.2)^x}}$.

Tenemos que $\mathbf{0.2=\frac{1}{5}}$, de manera que sustituyendo esto en la definición de la fórmula de la función se tiene.

$$\mathbf{f(x)=\frac{1}{(.2)^x}=\frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^x}=\frac{1}{\frac{1}{(5)^x}}}$$, de manera que haciendo la división de fracciones indicada.

$\mathbf{f(x)=5^x}$, y la fórmula de la función, donde la base que era menor que 1 por medio de las operaciones indicadas la hemos transformado en una fórmula en la cual la base 5 es mayor que 1.

Ahora completa la siguiente tabla de valores.

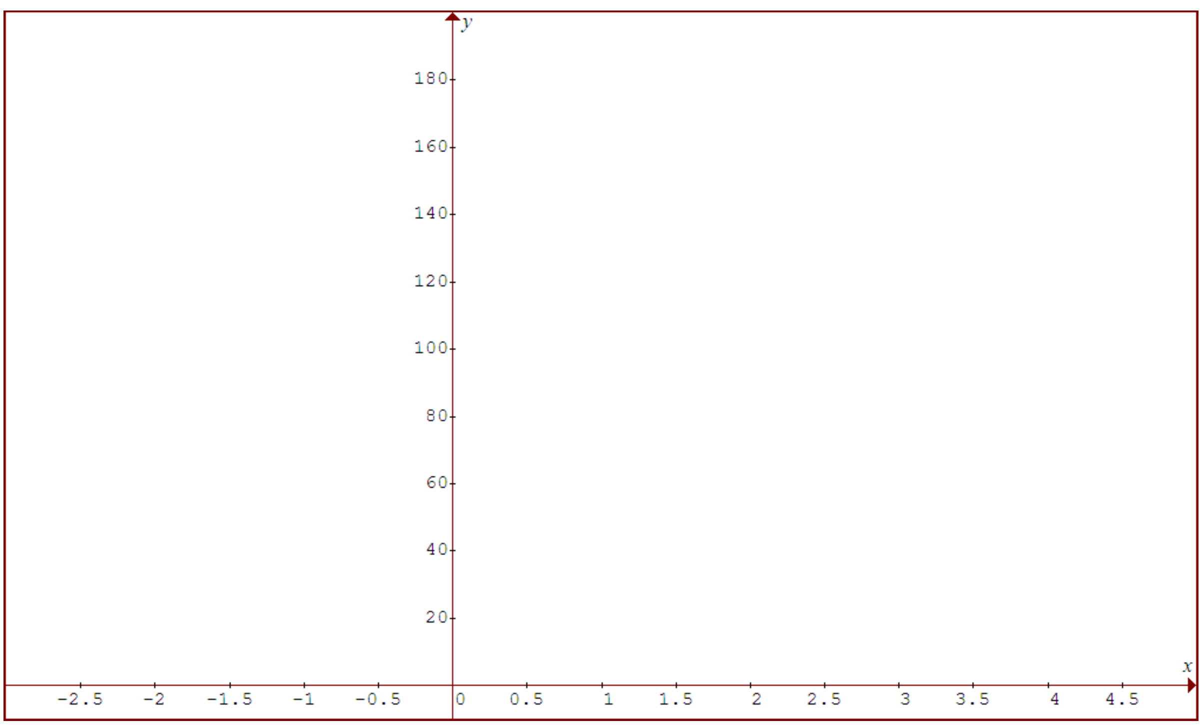
x	-6	-4	-2	0	1	3	5
f(x)							

Indica el dominio de la función.___________

Escribe el rango de la función. ___________

Escribe la ecuación de la asíntota de la función. ___________

Dibuja la gráfica de la función en el siguiente sistema de coordenadas.



Problema 3. Encuentra el dominio, rango, raíces, asíntotas y gráfica de la función $f(x)=\frac{1}{2^{x^2}}$.

El dominio de la función son todos los números reales, y la siguiente tabla de valores nos permite ver el posible rango de valores.

x	0	1	2	3	4	5
f(x)	1	0.5	0.0625	0.00195	0.000015	$2.9\text{x}10^{-8}$

Como la función es par, ya que.

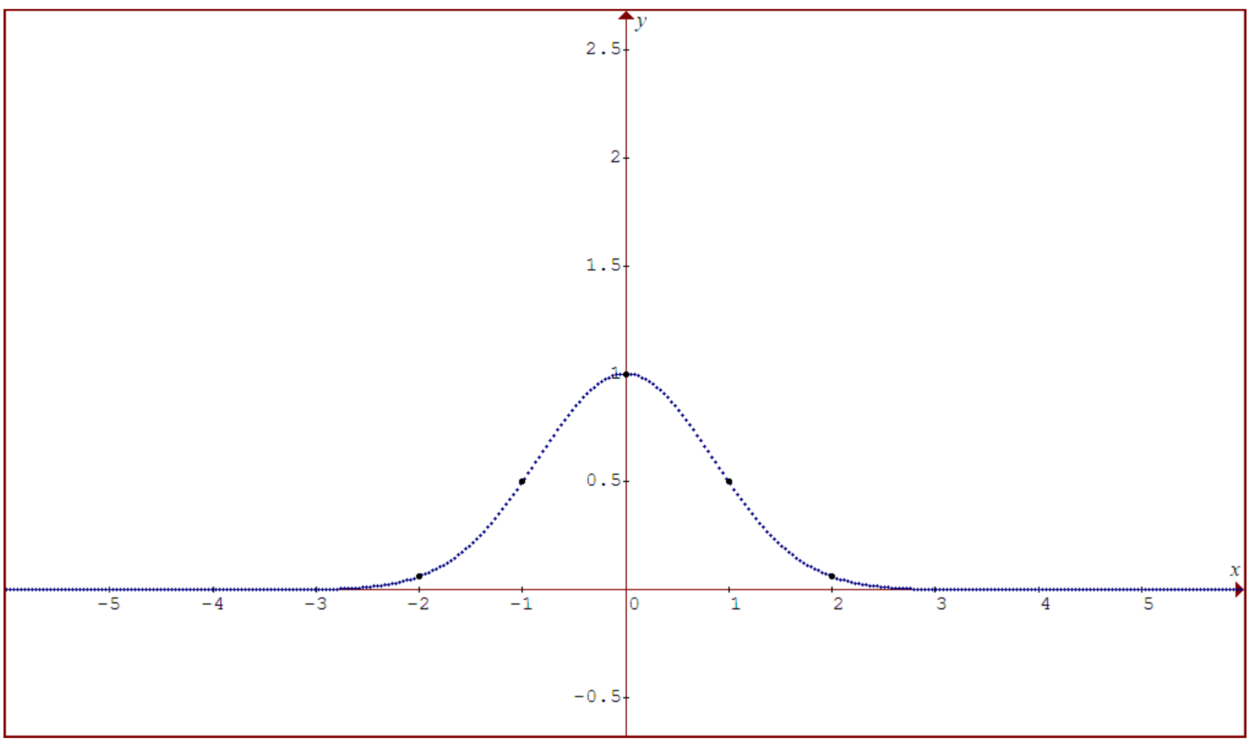
$$f(-x)=\frac{1}{2^{(-x)^2}}=\frac{1}{2^{x^2}}=f(x)$$

La gráfica de la función es simétrica con respecto al eje de las ordenadas que es x = 0.

De la tabla se observa que los valores de la función se acercan a 0, cuando los valores de la variable independiente se alejan del origen con valores cada vez más grandes. Y el rango de la función es el intervalo (0, 1].

La función no tiene raíces, ya que el numerador es una constante, la función tiene una asíntota que es el eje de las abscisas, y = 0.

La gráfica de la función se muestra a continuación.



Ejercicio. Encuentra el dominio, el rango, las raíces, las asíntotas, y la gráfica de la siguiente función $f(x)=1-\frac{1}{2^{x^2}}$.

Secuencia didáctica de lectura y exploración.

Aprendizaje: Traza la gráfica de algunas funciones exponenciales como: $\mathbf{2^x}$, $\mathbf{3^x}$, $\mathbf{10^x}$, $\mathbf{e^x}$. Les aplica las modificaciones pertinentes que produzcan, en la gráfica, traslaciones horizontales y verticales. Compara el comportamiento entre funciones exponenciales y funciones potencia. ($\mathbf{2^x}$ con $\mathbf{x^2}$ o con $\mathbf{x^3}$ por ejemplo). Obtiene conclusiones al respecto.

Inicio de la secuencia.

Problema 1. Traza la gráfica de la función $f(x) = 2^x$, y determina el dominio, el rango, asíntotas, raíces.

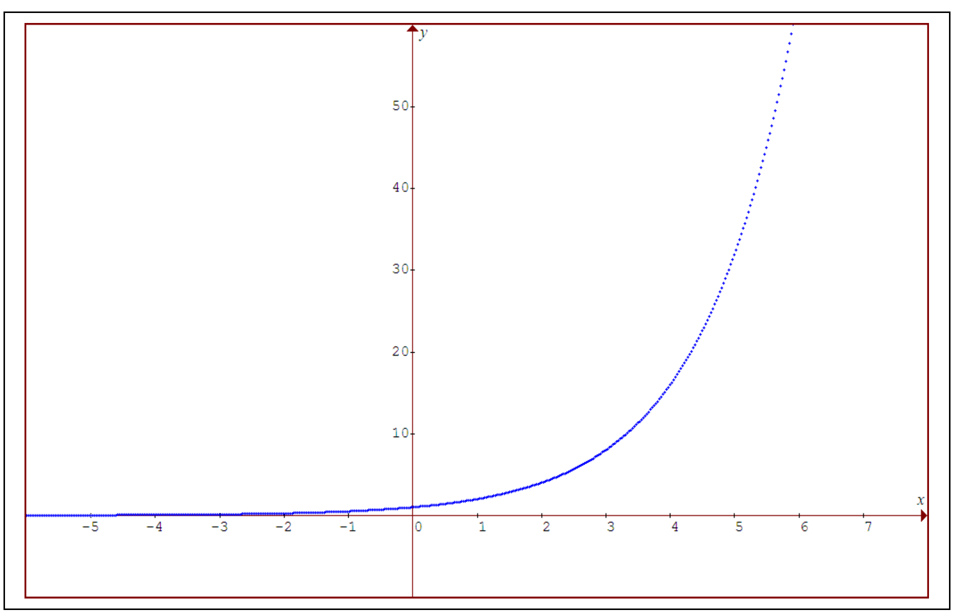
El dominio de la función son todos los números reales, D_f = R, La siguiente tabla de valores nos permiten ver el comportamiento de la función cuando x toma valores cada vez más grandes, y cuando los valores de x se alejan del origen con signo negativo.

x	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	1	2	4	8	16	32	64

x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1
f(x)	0.0078125	0.015625	0.03125	0.0625	0.125	0.25	0.5

De la primera tabla se observa que los valores de la función se hacen cada vez más grandes conforme los valores de la variable independiente también se hacen cada vez más grandes.

En el caso en que la variable se aleja del origen con signo negativo, los valores de la función se hacen cada vez más pequeños, de lo cual vemos que el eje de las abscisas es una asíntota de la función, la función no tiene raíces ya que la función no toma el valor de cero para algún valor de x, la gráfica correspondiente se muestra a continuación.



Ejercicio 1. Realiza la gráfica de la función $f(x) = -2^x$, encontrando el dominio, el rango, las raíces, y las asíntotas.

Problema 2. Para la función $f(x) = 4 - 2^x$, encuentra el dominio, el rango, las raíces, las asíntotas y la gráfica.

El dominio de la función son los números reales. Para encontrar las raíces se estable la igualdad $f(x) = 0$, que nos permite establecer la siguiente ecuación.

$$4 - 2^x = 0$$

$$4 = 2^x$$

Como $4 = 2^2$, tenemos. $\quad 2^2 = 2^x$

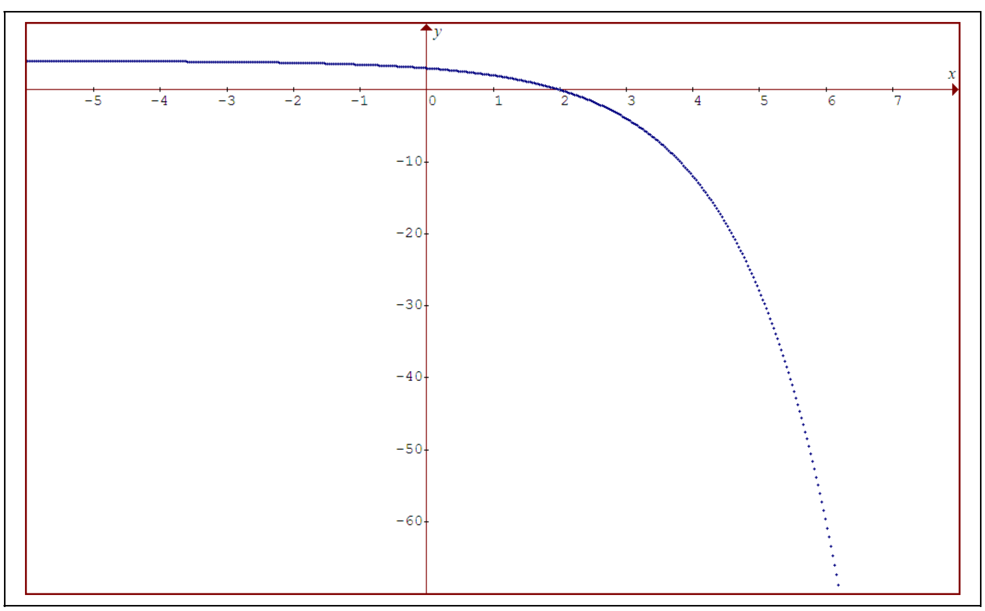
Como se tiene la igualdad de la misma base a las potencias 2 y x, se debe cumplir que x = 2, por lo que la función tiene una raíz en x = 2. Las siguientes tablas nos muestran el comportamiento de la función.

x	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	3	2	0	-4	-12	-28	-60
x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1
f(x)	3.9921875	3.984375	3.96875	3.9375	3.875	3.75	3.5

De la primera parte de la tabla vemos que los valores de la función se alejan del eje de las abscisas con signo negativo, cuando los valores de la variable independiente se hacen cada vez más grandes.

La segunda parte de la tabla nos muestra que los valores de la función se acercan al valor de 4, cuando los valores de la variable independiente se alejan del origen con signo negativo, de manera que la recta y = 4 es una asíntota de la función.

El rango de la función es el intervalo $(-\infty, 4)$, y la gráfica de la función es.



Ejercicio 2. Para la función f(x) = 3^x – 27 encuentra su dominio, rango, raíces, asíntotas y la gráfica.

Ejercicio 3. Realiza la gráfica de la función f(x) = 9 - 3^x, encontrando el dominio, el rango, las raíces, y las asíntotas.

Problema 3. Para la función f(x) = $2^{-(x-2)}$ encuentra el domino, el rango, las raíces, las asíntotas y la gráfica.

La función se puede escribir f(x) = $2^{-(x-2)} = \frac{1}{2^{x-2}}$, de manera que el dominio son los números reales.

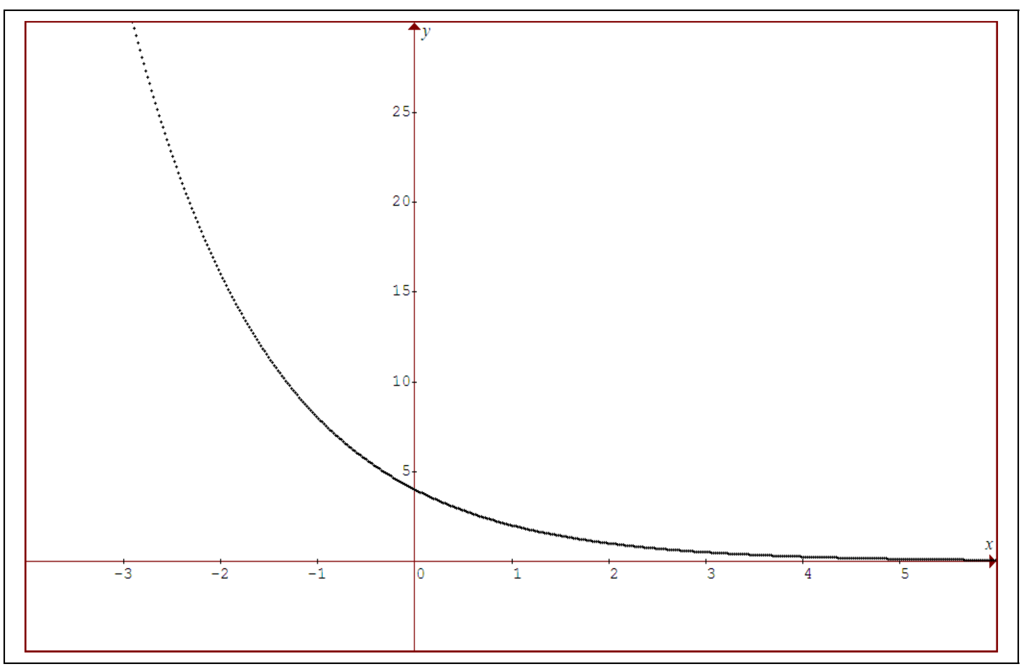
La siguiente tabla de valores nos permiten ver el comportamiento de la función.

X	0	1	2	3	4	5	6
F(x)	4	2	1	0.5	0.25	0.13	0.06
X	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1
F(x)	512	256	128	64	32	16	8

De la primera parte de la tabla se observa que los valores de la función se acercan a cero, cuando los valores de la variable independiente se alejan del origen con signo positivo.

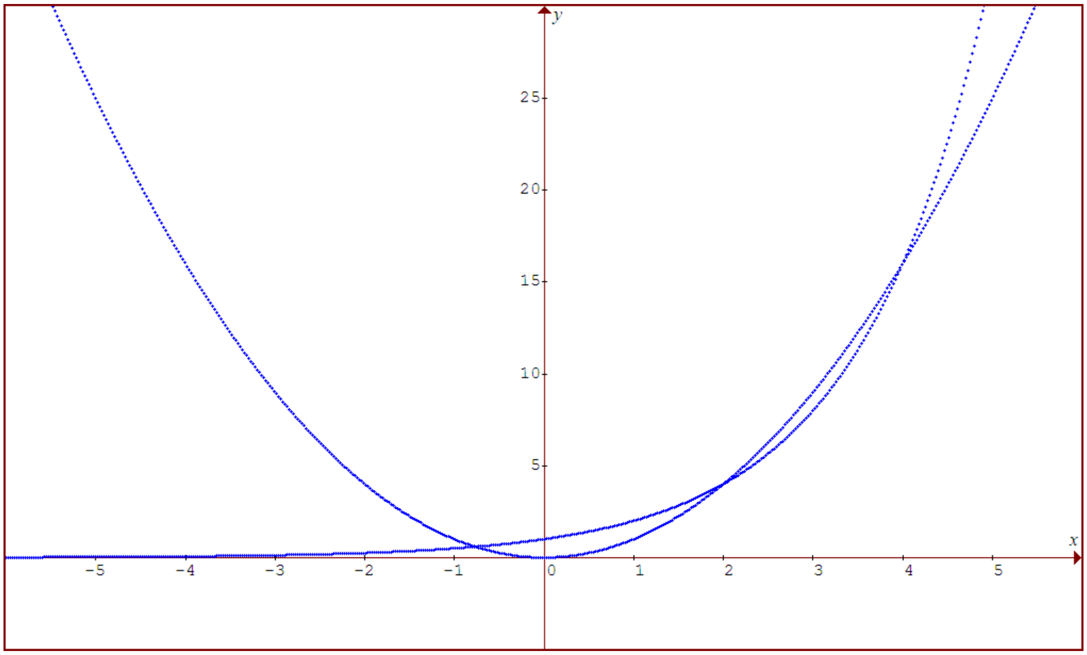
De la segunda parte de la tabla se observa que los valores de la función se hacen cada vez más grandes, cuando los valores de la variable independiente se alejan del origen con valores negativos.

El rango de la función es el intervalo (0, ∞), la recta y = 0 es una asíntota de la función y la gráfica es la siguiente.



Problema 4. Realizar la gráfica de las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = 2^x$ y compáralas, ¿Qué conclusiones tienes al respecto?.

Usando el programa de Graphmatica, se obtiene la siguiente gráfica.



Se puede observar que en el intervalo $(-\infty, 0)$ la función x^2 es decreciente y la función 2^x es creciente, Que al alejarse la variable independiente del origen con signo negativo los valores de la función x^2 crecen indefinidamente y los valores de la función 2^x se acercan a cero indefinidamente. En el origen la función x^2 vale cero y la función 2^x vale 1.

Para el intervalo $(0, +\infty)$, escribe las consideraciones que consideres pertinentes: ____

____

____

Ejercicio 4. Realizar la gráfica de las funciones $f(x) = x^3$, $g(x) = 3^x$ y compáralas, ¿Qué conclusiones tienes al respecto?.

Secuencia didáctica de lectura y exploración.

Aprendizaje: Identifica que en $\mathbf{f(x)=a^x}$ (con a > 1) un exponente positivo indica crecimiento exponencial, mientras que uno negativo, habla de decaimiento. Interpreta estos hechos tanto en la gráfica de la función como en el contexto de la situación dada.

Aplica los conocimientos adquiridos respecto a funciones exponenciales para modelar algunas situaciones de diversos contextos.

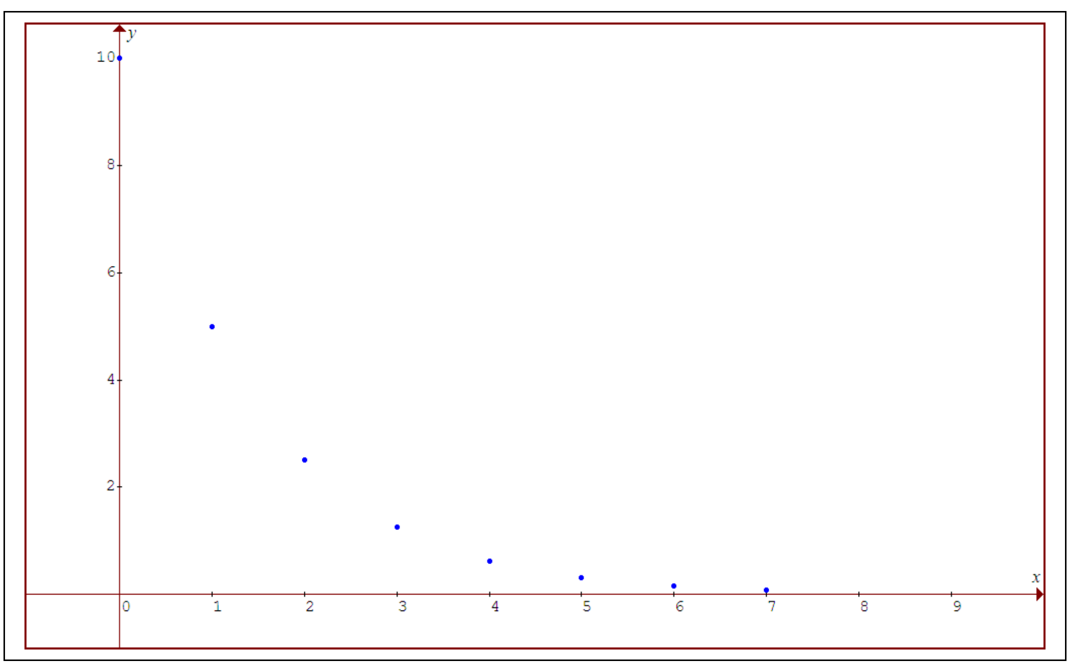
Inicio de la secuencia.

Problema 1. Se tiene una pelota que se deja caer desde una altura de 10 metros, la cual al rebotar solo alcanza la mitad de la altura anterior, encuentra el dominio, el rango, la gráfica y el comportamiento.

- La siguiente tabla de valores muestra las alturas que alcanza la pelota en los primeros 7 rebotes.

r	0	1	2	3	4	5	6	7
a(r)	10	5	2.5	1.25	0.63	0.32	0.16	0.08

- El dominio de la función es el conjunto de los números naturales 1, 2, 3, 4, . . . , más el número cero, que se puede simbolizar por {0} ∪ N.
- Se puede observar que al aumentar el número de saltos, la altura del rebote disminuye lo cual se puede expresar de la siguiente manera, si $r_1 < r_2$ entonces $a(r_1) > a(r_2)$, la función se dice que es decreciente.
- La gráfica de la función se muestra a continuación.



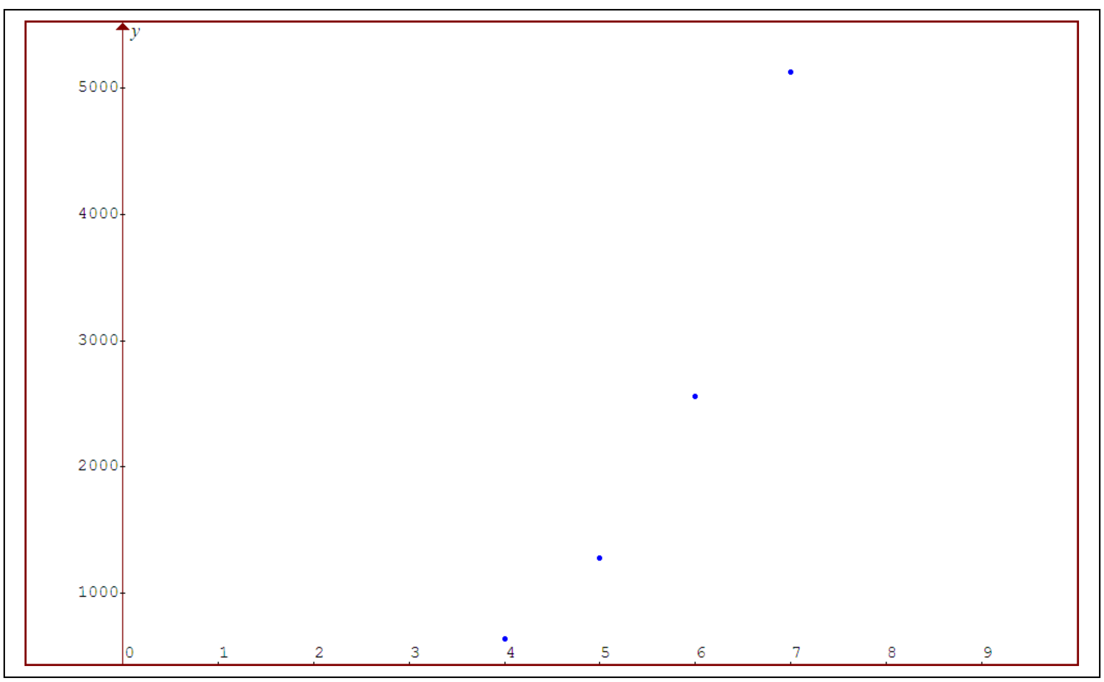
La función que expresa el rebote de la pelota es a(r) = $\frac{10}{2^r}=10(2)^{-r}$ por las leyes de los exponentes, tenemos que si la base es mayor que 1 y el exponente es negativo, entonces la función es decreciente.

Problema 2. Se tiene una población de 40 bacterias, que cada 2 minutos doblan el número de bacterias que había, encuentra las características de la población de bacterias al cabo de los primeros 16 minutos.

- La siguiente tabla de valores nos muestra el número de bacterias en la población después de que han transcurrido 20 minutos.

t	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
p(t)	40	80	160	320	640	1280	2560	5120	10240	20480	40960

- Aquí observamos que al transcurrir el tiempo la población de las bacterias aumenta, lo cual se puede expresar de la siguiente manera, si $t_1 < t_2$ entonces $p(t_1) < p(t_2)$, y todas las funciones que cumplen con esta propiedad se dice que son crecientes.
- La gráfica de la función se muestra a continuación.



En este caso la fórmula que nos permite calcular la población de las bacterias después de t minutos es la siguiente p(t) = $40(2)^{\frac{t}{2}}$, observa que el valor del exponente es positivo para cualquiera de los valores que puede tomar la variable independiente, y que la base 2 es mayor que 1, por lo que la función es **creciente**.

Ejercicio 1. ¿Cómo expresarías el hecho de que una función es decreciente considerando únicamente la gráfica?

Ejercicio 2. ¿Cómo expresarías el hecho de que una función es creciente considerando únicamente la gráfica?

Ejercicio 3. Considera la función $f(x) = 3^x$ y encuentra su dominio, rango, asíntotas , gráfica e indica si es creciente o decreciente, compara tus resultados con los que se obtuvieron anteriormente.

Ejercicio 4. Considera la función $f(x) = 2^{-x}$ y encuentra su dominio, rango, asíntotas , gráfica e indica si es creciente o decreciente, compara tus resultados con los que se obtuvieron anteriormente.

Bibliografía:

Para los alumnos.
Algebra
Ronald E. Larson
Robert P. Hostetler
Publicación CULTURAL
Primera Edición 1996.

Para los profesores.
ÁLGEBRA trigonometría y geometría analítica
Stanley A. Smith
Addison Wesley
Primera Edición 1998.

Secuencia didáctica de lectura y exploración.

Aprendizaje: Explica verbalmente el significado de $\mathbf{log_a x}$.

Explica el por qué de la equivalencia entre las expresiones $y = a^x$ *y* $log_a y = x$. Transita de una a la otra.

Conoce la noción de función inversa y explica en sus propias palabras qué sucede cuando se aplica una después de la otra.

Identifica que para una misma base **a**, la función exponencial y la función logaritmo respectivamente, plantean situaciones inversas una de la otra. ($\mathbf{log_a a^x = x}$ y $\mathbf{a^{log_a x} = x}$)

Inicio de la secuencia.

John Napier (1550 – 1617) era un activo participante de las batallas políticas y religiosas de su tiempo, y se divertía estudiando matemáticas y ciencia. Se intereso en reducir el trabajo involucrado al hacer cálculos de trigonometría esférica, en especial cuando se aplicaban a la astronomía. En 1614 publicó un libro que contenía la idea que lo hizo famoso. Le dio el nombre de **Logaritmo**.

Aunque el enfoque de Napier ya no se utiliza, su enfoque sigue siendo de consideración importante, ya que esperaba remplazar las multiplicaciones por sumas, ya que hacer sumas es más fácil.

Si consideramos la función exponencial.

$f(x) = 2^x$. Y recordando que, $2^x \cdot 2^y = 2^{x+y}$

A la izquierda tenemos un producto, y a la derecha hay una suma, de manera que si se busca cumplir el objetivo de Napier, los logaritmos se tienen que comportar como exponentes, que nos sugiere la siguiente definición.

El logaritmo de N en la base 2 es aquel exponente x al que hay que elevar la base 2 para obtener N. Con símbolos,

$$Log_2 N = x \text{ si y sólo si } 2^x = N$$

De manera que:

$\log_2 64 = 6$ ya que $2^6 = 64$, $\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$ ya que $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

$\log_2 0.03 = -5$ ya que $2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32} = 0.03$

En general tenemos.

$$\log_2 (2^x) = x \text{ ya que } 2^x = 2^x$$

¿Esto logra el objetivo de Napier? ¿Transforma el logaritmo a un producto en suma? La respuesta es sí, para lo cual debemos observar.

$\log_2\left(2^x\,2^y\right)=\log_2\left(2^{x+y}\right)$	Propiedades de los exponentes
$= x + y$	Definición de $\log_2$
$= \log_2(2^x) + \log_2(2^y)$	

Se tiene entonces

$$\log_2\left(2^x\,2^y\right)=\log_2\left(2^{x+y}\right)=\log_2(2^x)+\log_2(2^y)$$

Que tiene la forma

$$\log_2(MN)=\log_2(M)+\log_2(N)$$

Veamos ahora la definición general de logaritmo.

Lo que se hizo para 2 se puede hacer con cualquier base a>1, de manera que, el logaritmo de N en la base a es el exponente x al que debe elevarse a para obtener N, entonces.

$\log_a N = x$ si y sólo si $a^x = N$

De manera que ya podemos calcular diferentes logaritmos.

$\log_4 16 = 2$, ya que $4^2 = 16$

$\log_{10} 1000 = 3$, ya que $10^3 = 1000$

$\log_{10}(0.0001) = -4$, ya que $10^{-4} = \frac{1}{10^4} = 0.0001$

$\log_{16} 2 = \frac{1}{4}$, ya que $16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2$

$\log_{27} 3 = \frac{1}{3}$, ya que $27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$

Ejercicio 1. Expresa en su forma exponencial las siguientes expresiones logarítmicas.

$\log_7 243 = 3$, ___________

$\log_4 1 = 0$, ___________

$\log_{125} \frac{1}{25} = -\frac{2}{3}$, ___________

Ejercicio 2. Expresa en su forma logarítmica las siguiente expresiones exponenciales.

$2^{-3} = 0.125$, ___________

$2^4 = 16$, ___________

$10^{-2} = 0.01$, ___________

$5^3 = 125$, ___________

Problema 1. Encuentra el dominio, el rango, las raíces, las asíntotas y la gráfica de la siguiente función $f(x) = \log_2 x$.

En este caso utilizaremos la definición de $y = \log_2 x$, para poder encontrar algunos de los elementos que se piden, se tiene la siguiente equivalencia:

$y = \log_2 x$ si y sólo si $2^y = x$.

de manera que primero haremos una tabla de valores de la función $2^y = x$, cuando los valores de la variable se incrementan.

y	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2^y	2	4	8	16	32	64	128	256	512

Se observa que al incrementarse el valor de la variable independiente, los valores de la función también se incrementan, calcularemos dos valores más para confirmar la observación anterior.

Para x = 15, tenemos $y(15) = 2^{15} = 32768$, y finalmente para x = 30, $y(30) = 2^{30} = 1073741824$, los valores anteriores confirman la observación realizada.

Usando ahora la definición de la función logaritmo.

$y = \log_2 x$ si y sólo si $2^y = x$.

Se tiene que $\log_2 2 = 1$, $\log_2 4 = 2$, y de igual manera se pueden observar los demás valores. De manera que para obtener una tabla de valores de la función $f(x) = \log_2 x$, basta con invertir los valores de la tabla anterior, como se muestra a continuación.

x	2	4	8	16	32	64	128	256	512
$\log_2 x$	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Aquí también observamos que al incrementarse los valores de la variable independiente, se incrementan los valores de la función, aunque el incremento es muy lento.

Ahora realizaremos una tabla de valores para la función $x(y) = 2^y$, de manera que los valores de la función se alejan del origen de coordenadas pero con signo negativo.

y	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
2^y	0.0039	0.0078	0.0156	0.0312	0.0625	0.125	0.25	0.5	1

En este caso vemos que los valores de la función se acercan a cero, conforme los valores de la variable se alejan del origen con signo negativo.

Como ya se indico, para obtener ahora una tabla de valores de la función $f(x) = \log_2 x$ se tienen que invertir los valores de la tabla anterior.

x	0.0039	0.0078	0.0156	0.0312	0.0625	0.125	0.25	0.5	1
$\log_2 x$	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0

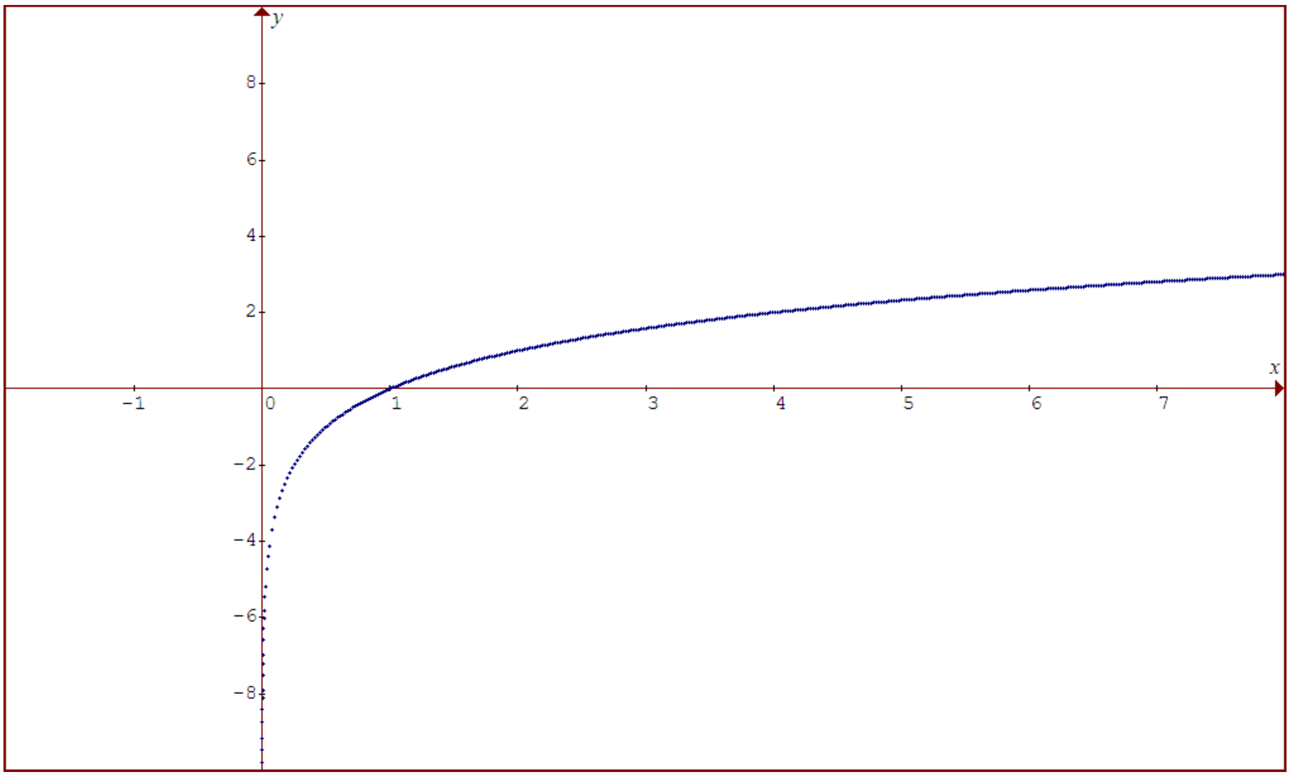
En esta tabla se pueden hacer varias observaciones, como por ejemplo x = 1 es una raíz de la función, que al tender los valores de la variable independiente a cero, los valores de la función tienden a menos infinito (-∞), de lo cual se desprende que la recta vertical x = 0 es una asíntota de la función $f(x) = \log_2 x$.

De la tabla se observa que el dominio de la función $x(y) = 2^y$ es el rango de la función $f(x) = \log_2 x$.

También se observa que el rango de la función $x(y) = 2^y$ es el dominio de la función $f(x) = \log_2 x$.

Así que el dominio de la función $f(x) = \log_2 x$ es el intervalo $(0, +\infty)$ y el rango de la función es el conjunto de los números reales R.

La gráfica de la función $f(x) = \log_2 x$ es la siguientes.



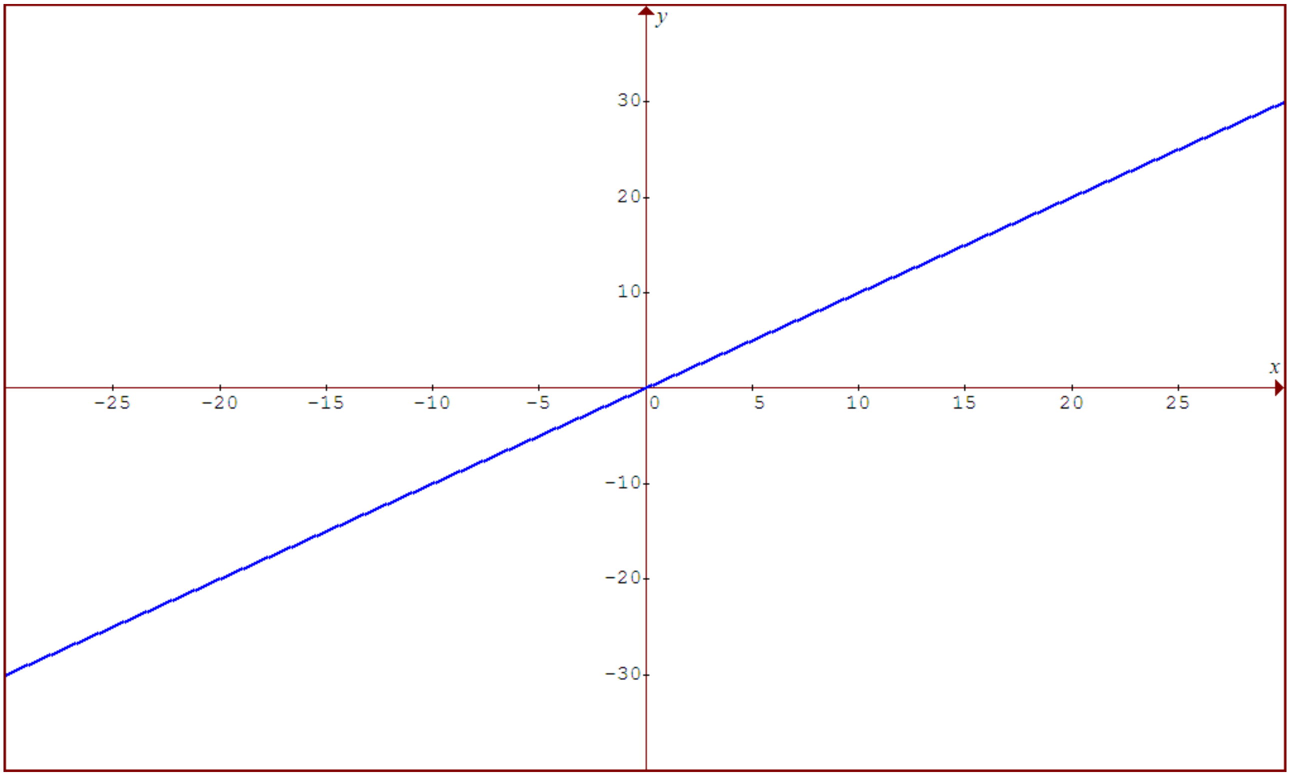
Problema 2. Veamos ahora una función polinomial que tiene especial interés para los conceptos siguientes, la función identidad I(x) = x.

Para esta función el dominio es el conjunto de los números reales R, el rango de la función también es el conjunto de los números reales R.

A continuación mostramos una tabla de valores de la función.

x	-8	-7	-3	-1	0	2	6	8	9
I(x)	-8	-7	-3	-1	0	2	6	8	9

Y su gráfica es la siguiente.



Ejercicio 3. Completa la siguiente tabla de valores para la función f(x) = x.

x	-30	-25	-20	-10	0.5	2.4	6.9	18	29,3
I(x)									

Problema 2. Ahora veamos el concepto de función inversa, y después veremos la relación que existe entre este concepto y las funciones exponencial y logarítmica.

El concepto de función inversa se muestra con el siguiente ejemplo, para abordar un taxi hay un costo de $5.00 y la tarifa es de $0.80 por kilómetro recorrido. Completa la siguiente tabla para calcular el costo para cada una de las distancias indicadas.

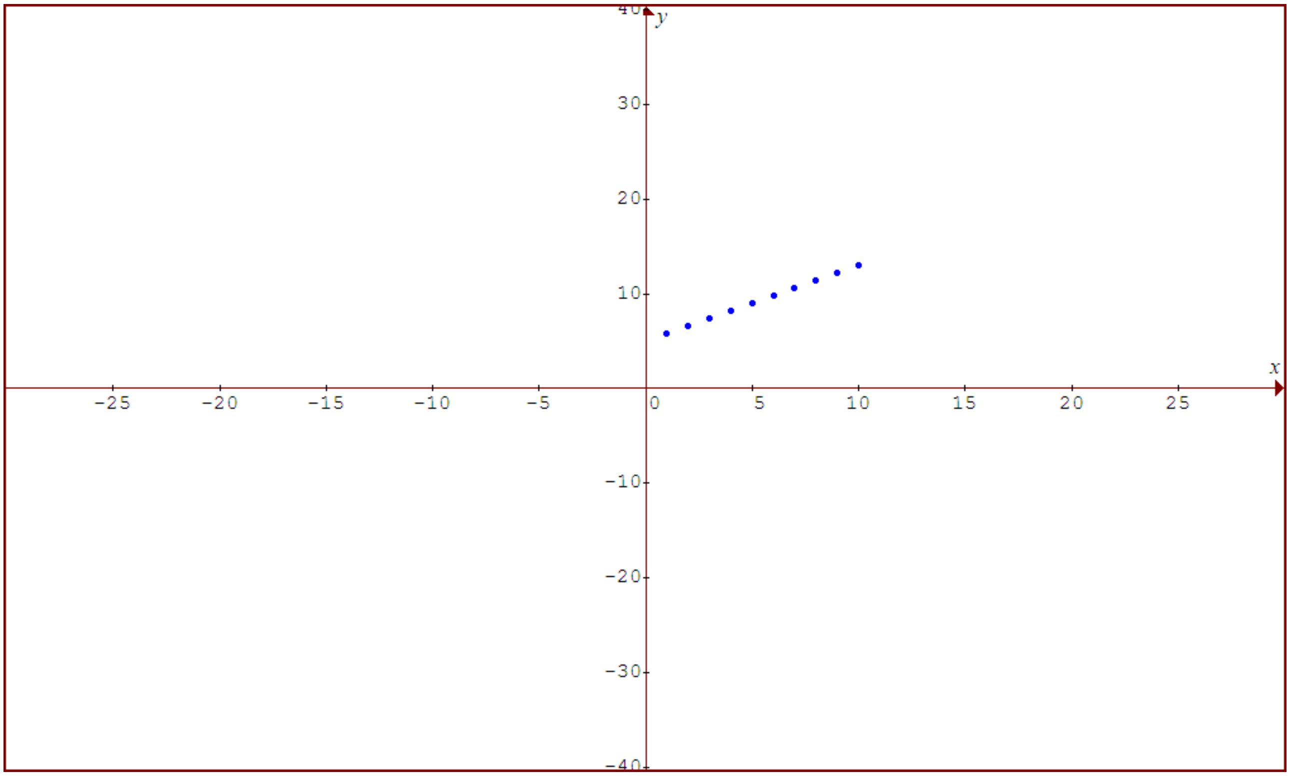
x	1	2	4	6	8	9	11	13	15
C(x)									

Escribe la función del costo que se utiliza para este problema. ________________________

Si la distancia recorrida en el taxi, es de 7 kilómetros el costo es C(7) = ________________

El costo por recorrer una distancia de 20 kilómetros en el taxi es C(20) = _______________

La gráfica correspondiente para los primeros 10 kilómetros es la siguiente, localiza los demás puntos calculados en la gráfica.



La función del Costo por recorrer x kilómetros en el taxi es C(x) = 5 + .8x, ahora queremos saber, ¿cuántos kilómetros se pueden recorrer si tenemos $21.00?

Para resolver este problema, hay que observar que ahora conocemos el valor del recorrido, o sea el valor de C(x) = 21, por lo cual se puede establecer la siguiente ecuación.

$$21 = 5 + 0.8x$$

$$21 - 5 = 0.8x$$

$$16 = 0.8x$$

$$\frac{16}{0.8} = x$$

$$20 = x$$

Se pueden recorrer 20 kilómetros en el taxi.

Ejercicio 4. Encuentra los kilómetros que se pueden recorrer para las cantidades indicadas en la siguiente tabla de valores.

x	6.6	7.4	9.0	10.6	12.2	13.0	17.0	21.8	24.20
R(x)									

Si consideramos la fórmula C(x) = 5 + .8x, si despejamos x de la misma, tendremos una fórmula que nos permite calcular la cantidad de kilómetros recorridos en función de la cantidad de dinero disponible.

$C(x) = 5 + .8x$

$C(x) – 5 = .8x$

$$\frac{C(x)-5}{.8}=x$$

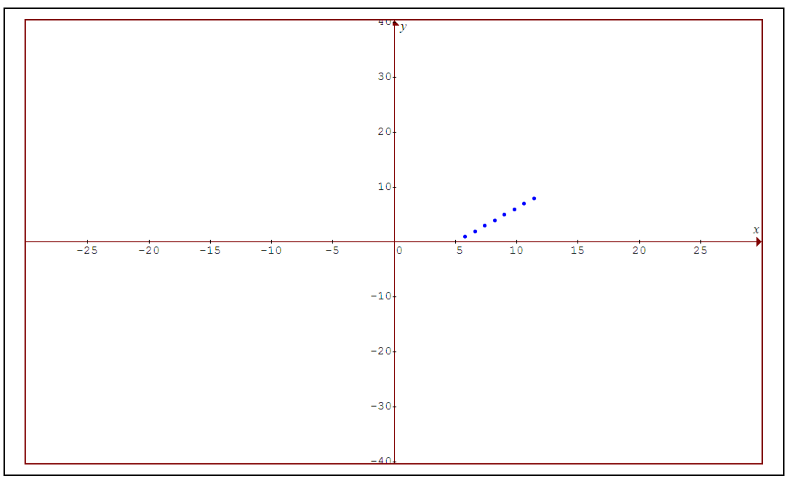
La función $x(c) = \frac{c(x)-5}{.8}$ permite calcular el recorrido en función del dinero disponible, por ejemplo para x = $9.00, se tiene.

$$x(9) = \frac{9-5}{.8}$$

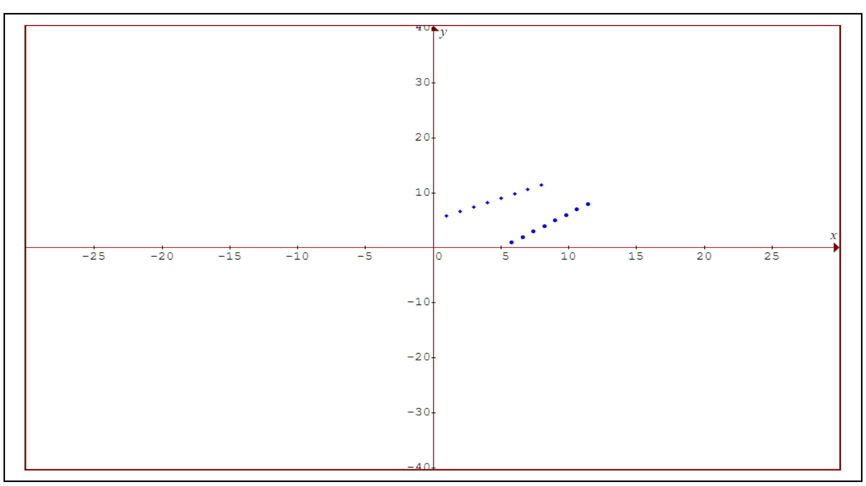
$$x(9) = \frac{4}{.8}$$

$x(9) = 5$

Con la cantidad de $9.00 se pueden recorrer 5 kilómetros, la siguiente gráfica de la función c(x) muestra algunos de los puntos.



Considerando las dos gráficas en el mismo sistema de coordenadas, se tiene.



Considerando los dos ejemplos anteriores, por ejemplo para un recorrido de 8 kilómetros en un taxi se usa la fórmula C(x) = 5 + .8x y tiene un costo de C(8) = 5 + .8(8) = 5 + 6.4 = 11. 4, para el recorrido de 8 kilómetros el costo es de $11.40

Si ahora se toma en cuenta la cantidad de $11.40, la distancia recorrida con dicha cantidad se puede calcular con la función x(c) = $\frac{c-5}{.8}$ y se tiene.

$$x(11.40) = \frac{11.40-5}{.8}$$

$$x(11.40) = \frac{6.40}{.8}$$

$$x(11.40) = 8$$

Con $11.40 se pueden recorrer 8 kilómetros. La función C(x) permite calcular el costo de un recorrido de x kilómetros, y la función x(c) el recorrido que se puede efectuar con una cantidad de $c pesos. Veamos que pasa si sustituimos la función x(c) en la función C(x) después de hacer las simplificaciones necesarias.

$C(x(c)) = C(\frac{c-5}{.8}) = 5 + .8\left(\frac{c-5}{.8}\right) = 5 + c - 5 = c$. Lo anterior se puede escribir como se muestra.

$$C \bullet x(c) = C(x(c)) = c$$

Por lo que la función C(x(c)) = c es la función identidad. De igual manera se puede ver que

$$x \bullet C(x) = x(C(x)) = x$$

Se obtiene que la función x(C(x)) = x es la función identidad, Dos funciones que cumplen la propiedad anterior se llaman funciones inversas, x(c) es la función inversa de la función C(x), y las operaciones x • C (x) = x(C(x)) y C•x(c) = C(x(c)) se llaman Composición de funciones.

Ejercicio 5. Encuentra la composición de funciones en cada caso.

- Para f(x) = 2x – 3, g(x) = 4 – 3x encuentra

  f•g(x):______________________ g•f(x):______________________
- Para f(x) = x + 5, g(x) = -2x + 3 encuentra

  f•g(x):______________________ g•f(x):______________________

Ejercicio 6. Encuentra en cada caso la función inversa y comprueba el resultado.

- f(x) = 5x – 15
- g(x) = 2x – 6
- h(x) = $\frac{1}{2}x+6$

Consideremos ahora $x(y) = 2^y$, para $y = 4$, se tiene $x(4) = 2^4 = 16$, y para $f(x) = \log_2 x$, si $x = 16$ el valor de la función es $f(16) = \log_2 16 = 4$.

De manera que si Consideramos $f(2^4) = f(16) = \log_2 16 = \log_2 (2^4) = 4$, lo anterior equivale a tener:

$\log_2 (2^4) = f(x(4)) = 4$, la función identidad.

De igual forma, para $f(x) = \log_2 x$, si $x = 16$, $f(16) = \log_2 16 = 4$, y para $x(y) = 2^y$, cuando $y = 4$, se obtiene $x(4) = 2^4 = 16$.

Si consideramos $2^{\log_2 16} = 2^4 = 16 = x(f(16)) = 16$, se tiene la función identidad.

Así pues $x(y) = 2^y$ es la función inversa de la función $f(x) = \log2 x$, y viceversa.

Observación: dada una función f(x) dada en forma de una tabla y existe la función inversa g(x) de la función f(x) se obtiene intercambiado de lugar los valores de x con los valores de y, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Problema 3. Dada la función $f(x) = 3x – 4$, obtener su función inversa dada una tabla de valores de f(x) y comprobar el resultado de manera algebraica.

Como el dominio de la función son los números reales, consideremos los que se muestran en la siguiente tabla.

x	-5	-3	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)	-19	-13	-7	-4	-1	2	5	8	16

De acuerdo a la observación, la función inversa se muestra en la siguiente tabla.

x	-19	-13	-7	-4	-1	2	5	8	16
g(x)	-5	-3	-1	0	1	2	3	4	5

Despejando x de la función dada $f(x) = y = 3x – 4$, tenemos.

$y = 3x – 4$

$y + 4 = 3x$

$\frac{y+4}{3} = x$, la función inversa es, $x(y) = \frac{y+4}{3}$

Comprobemos algunos de los valores de la tabla.

$x(-13) = \frac{-13+4}{3} = \frac{-9}{3} = -3$

$x(-4) = \frac{-4+4}{3} = \frac{0}{3} = 0$

$x(8) = \frac{8+4}{3} = \frac{12}{3} = 4$

Ejercicio 7. Comprueba que los demás valores mostrados son correctos para la función inversa.

Secuencia didáctica de lectura y aplicación.

Aprendizaje: Representa por medio de funciones logarítmicas, algunas situaciones que se le presenten, y aplica en ellas, cuando se requiere, las propiedades de los logaritmos.

Menciona las ventajas de trabajar con los exponentes para efectuar cálculos y resolver problemas.

Inicio de la secuencia.

Ejercicio 1. Se invierte un capital de $4000.00 a una tasa de interés del 6% anual, hasta que alcanza un valor de $5353.00, ¿por cuántos años fue la inversión?

Para este tipo de problema se puede usar la fórmula.

$$A = P(1 + r)^t$$

Donde A es la cantidad en que el capital principal P se convertirá después de t años a una tasa de interés r, compuesto anualmente. Para nuestro problema.

$$A = 5353$$

$$P = 4000$$

$$R = 0.06$$

De manera que sustituyendo se tiene.

$$5353 = 4000(1 + 0.06)^t$$

Que nos da.

$$5353 = 4000(1.06)^t$$

Aplicando logaritmos en ambos miembros de la ecuación.

$$\log(5353) = \log(4000(1.06)^t)$$

Aplicando las propiedades de los logaritmos.

$$\log(5353) = \log(4000) + t^*\log(1.06)$$

Despejando la variable t.

$$\mathbf{t = \frac{\log(5353) - \log(4000)}{\log(1.06)}}$$

Evaluando los logaritmos con una calculadora y aproximando a 4 decimales se tiene.

$$\log(5353) = 3.728557243 \cong 3.7286$$

$$\log(4000) = 3.60205991 \cong 3.6021$$

$$\log(1.06) = 0.025305865 \cong 0.0253$$

Sustituyendo en la fórmula

$$\mathbf{t = \frac{3.7286 - 3.6021}{0.0253}}$$

$\mathbf{t = \frac{0.1265}{0.0253}}$, t = 5, la inversión duro aproximadamente 5 años.

Utilizando una calculadora para comprobar la solución.

$$4000(1.06)^5 \cong 5352.9023104 \cong 5353.$$

Ejercicio 2. Se invierten $5000.00 al 14% de interés anual compuesto, hasta que la inversión alcanza un valor de $18 540.00, ¿por cuánto tiempo se hizo la inversión?

Para este problema tenemos.

$$A = 18540$$

$$P = 5000$$

$$r = 0.14$$

Sustituye los valores en la fórmula.

$$18540 = 5000(1.14)^t$$

Aplicando logaritmos en ambos miembros de la ecuación.

$$\log(18540) = \log(5000(1.14)^t)$$

$$\log(18540) = \log(5000) + t*\log(1.14)$$

termina de resolver la ecuación y comprueba el resultado. La sensación de intensidad del sonido no es proporcional a la intensidad de la energía, sino más bien a la función logarítmica.

La intensidad se mide en belios (en honor de Alexander Graham Bell) o en unidades más pequeñas, los decibeles. La intensidad (L) en decibeles de un sonido de intensidad (I) se define como.

$$L = 10 \log\left(\frac{I}{I_o}\right)$$

Donde I_0 es la mínima detectable por el oído humano (tal como el tic de un reloj a 6 metros de distancia en condiciones de silencio). Cuando un sonido es 10 veces más intenso que otro, su estridencia es 10 decibeles mayor. Si un sonido es 100 veces más intenso que otro, su estridencia es 20 decibeles mayor que la del otro, y así sucesivamente.

Ejercicio 3. Encuentra la intensidad en decibeles del ruido de fondo de un estudio de radio, en el cual la intensidad (I) es 199 veces I_0. Sustituyendo valores en la fórmula.

$$L = 10 \log\left(\frac{199I_0}{I_0}\right)$$

$$L = 10 \log(199)$$

Haciendo las operaciones indicadas.

$$L = 10 * 2.298853 \cong 23 \text{ decibeles.}$$

Ejercicio 4. Encuentra la intensidad del sonido en un concierto de rock, en que la intensidad es de 10^{11} I_0.

Ejercicio 5. Calcula la intensidad en decibeles del sonido en una biblioteca, en la que la intensidad es de 2510 veces I_0.

Ejercicio 6. Calcula la intensidad en decibeles de la voz en una conversación, en la que la intensidad es de 10^6 veces I_0.

La magnitud R (en la escala de Richter) de un terremoto de intensidad I se define como

$$R = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

Donde I_0 es una intensidad mínima utilizada como punto de referencia.

Ejercicio 7. Un terremoto tiene una intensidad de 4×10^8 veces de I_0. ¿Cuál es su magnitud en la escala de Richter?

Se tiene los siguientes datos.

$$I = 4 \times 10^8\, I_0$$

De manera que sustituyendo valores en la fórmula.

$$R = \log\left(\frac{4 \times 10^8\, I_0}{I_0}\right) = \log\left(4 \times 10^8\right) = \log 4 + 8 \log 10$$

Haciendo operaciones

$$R = 0.6020 + 8 = 8.6020 = 8.6$$

Ejercicio 8. El terremoto de Anchorage, Alaska, del 27 de marzo de 1964, tuvo una intensidad de 2.5×10^8 veces I_0. ¿Cuál fue su intensidad en la escala de Richter?

Ejercicio 9. ¿Cuántos años tardará una inversión de \$10 000.00 en duplicarse cuando se invierte con un interés compuesto al 6% anual?

Secuencia didáctica de lectura y aplicación.

Aprendizaje: Construye la gráfica de algunas logarítmicas, en particular de ***f(x) = log x*** y de ***f(x) = ln x.***

Construye la gráfica de **f(x) = log$_a$ x** (para algún valor de ***a***) a partir de reflejar la gráfica de su inversa, en la recta **y =x**.

Inicio de la secuencia.

Primero veamos que dada la gráfica de una función f(x) que tiene función inversa g(x), la gráfica de g(x) se puede obtener al reflejar la gráfica de la función f(x) a través de la gráfica de la función identidad d(x) = x.

Para lo cual usaremos el programa Geogebra, la función que vamos a considerar es la función lineal f(x) = 2x -1.

La siguiente tabla de valores nos muestra las coordenadas de cuatro puntos de la gráfica de la función.

x	2x - 1
1	1
2	3
3	5

Después de ejecutar el programa, escribe en la barra de Ingresa la siguiente ecuación.

y=2x-1

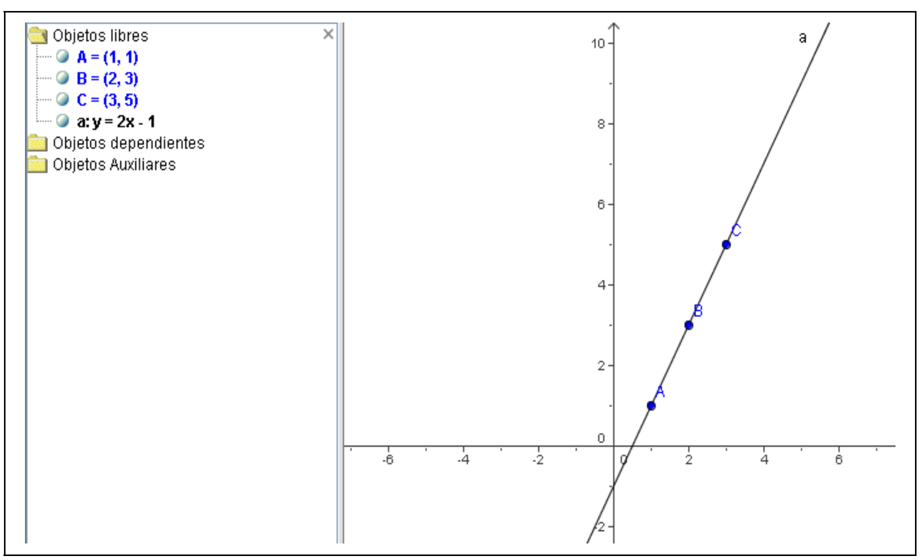
Luego ingresa los valores de la tabla como se muestra a continuación.

(1,0)

(2,3)

(3,5)

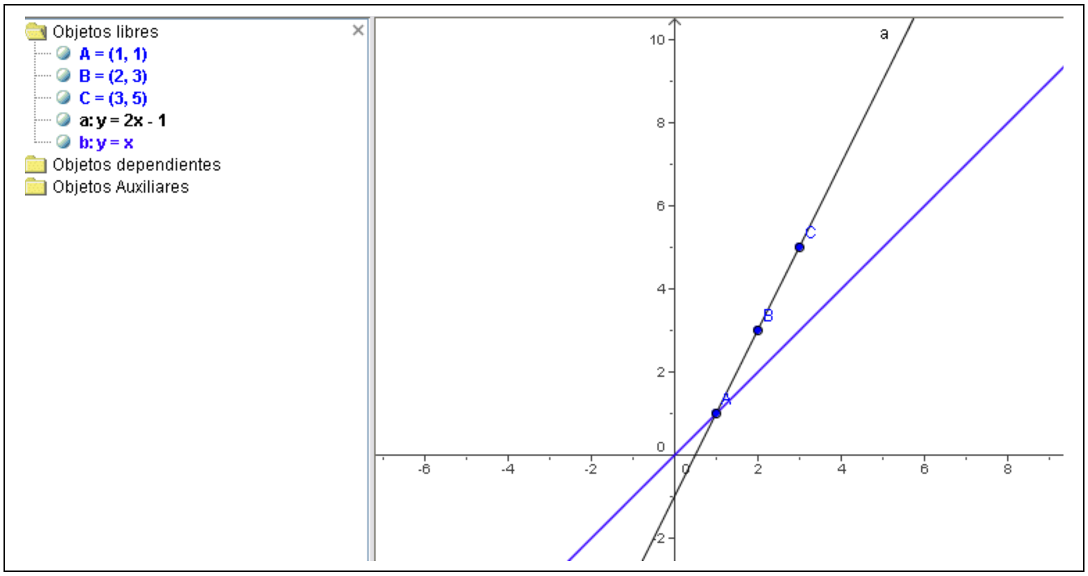
Para obtener la siguiente gráfica.



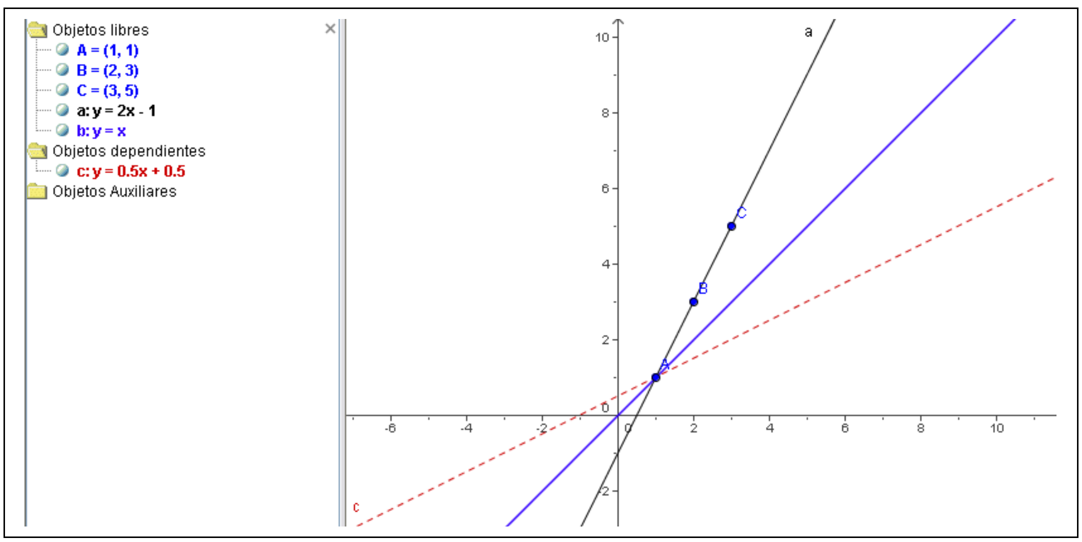
Para hacer la gráfica de la función d(x) = x, en la barra de ingresa escribe la ecuación.

y=x

Para tener la siguiente gráfica.



Con la herramienta Refleja objeto por la recta, refleja la gráfica de la función f(x) dando Clic sobre la gráfica y luego da Clic sobre la gráfica de la función d(x) para obtener.



Veamos ahora que para obtener los valores de la función inversa basta invertir los valores de la tabla anterior, como se muestra a continuación.

x	g(x)
1	1
3	2
5	3

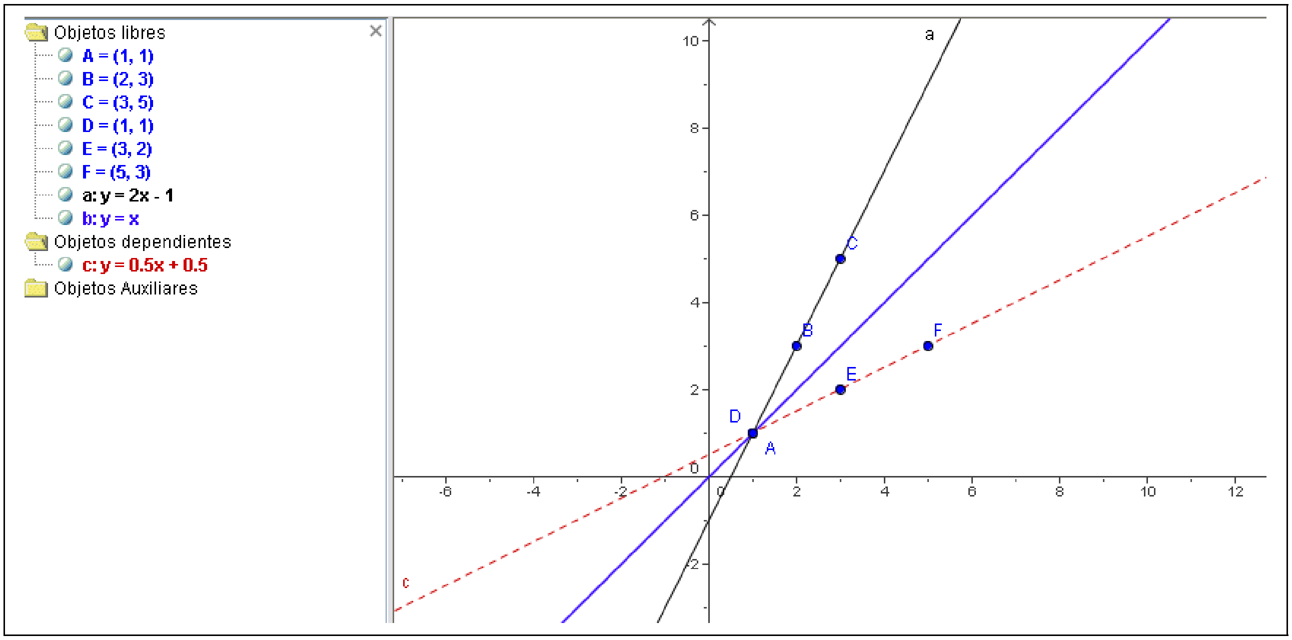
Para ver que esto es correcto introduce los siguientes valores a través de la barra de Ingresa.

(0, 1)

(3, 2)

(5, 3)

Para obtener la siguiente gráfica.



Observa que los puntos A y D coinciden ya que sus coordenadas son (1, 1), para el punto B(2, 3) en la función f(x) tiene su correspondiente E(3, 2) en la función g(x).

Para tener la regla de correspondencia de g(x), de la fórmula y = 2x – 1, se despeja la variable x.

$$y + 1 = 2x$$

$$x = \frac{y+1}{2}$$

Así que la regla de correspondencia de la función g(x) es.

$$g(x) = \frac{x+1}{2}$$

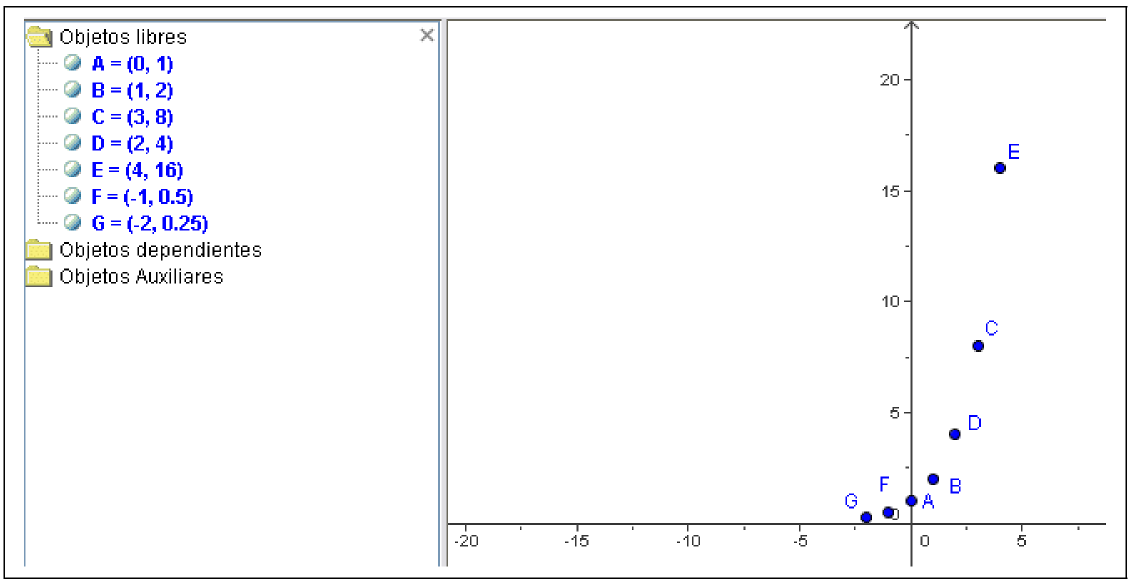
Con las funciones donde no se puede hacer el despeje de la varible x para obtener la función inversa, dada la tabla de valores de la función f(x) al invertir los valores de cada renglón de la tabla se obtiene una tabla de valores de la función inversa de f(x), o sea la función g(x),

Ejercicio 1. Encuentra la gráfica de la función f(x) = $\log_2$ (x).

Por la definición de la función logaritmo la expresión y = $\log_2$ (x) es equivalente a la siguiente expresión $2^y = x$, de manera que para hacer la gráfica de la función dada, primero hacemos una table de valores de la función y = 2^x.

x	2^x
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
-1	0.5
-2	0.25
-3	0.125

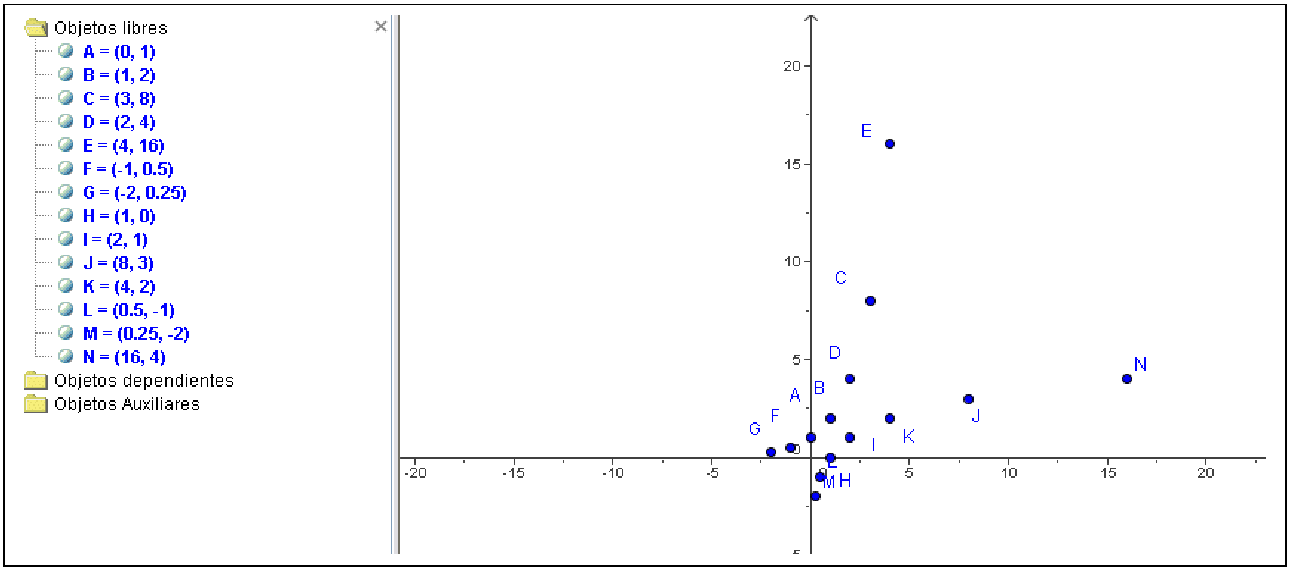
Captura los valores anteriores en la barra de Ingreso del programa Geogebra., para tener la siguiente gráfica.



Si ahora invertimos los valores de la tabla, se obtiene.

x	2^x
1	0
2	1
4	2
8	3
16	4
0.5	-1
0.25	-2
0.125	-3

Ahora se introducen los valores anteriores en el programa y se obtiene la siguiente gráfica.

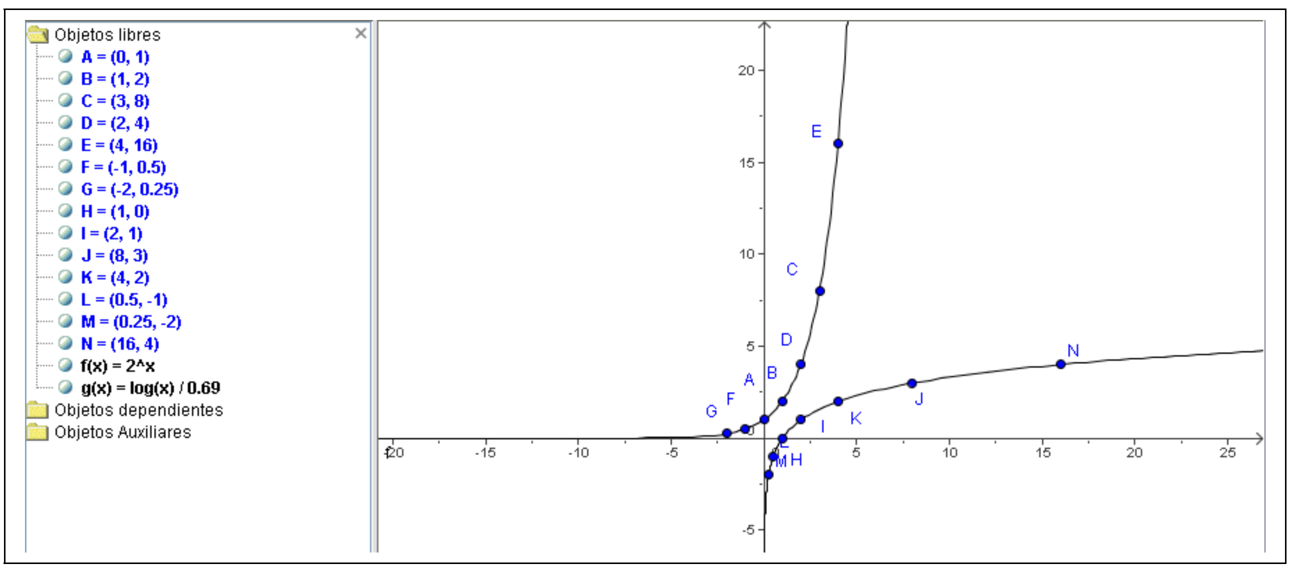


Para verificar que los resultados son correctos ahora introduce las fórmulas de las funciones que estamos graficando.

Para $f(x) = \log_2 (x)$., se introduce la expresión, f(x) = log(x) / log(2)

Para $g(x) = 2^x$ se introduce la expresión, g(x) = 2∧x.

La gráfica que se obtiene es.



Ejercicios. Traza la gráfica de las siguientes funciones.

- **$f(x)= \log_3 (x)$**
- **$h(x) = \log_4 (x)$**
- **$p(x)=\log_5 (x)$**
- **$n(x)=\log_{10} (x)$**

Secuencia didáctica de lectura y aplicación.

Aprendizaje:

Reconoce a las funciones exponenciales y logarítmicas como una herramienta útil para representar y analizar diversas situaciones.

Inicio de la secuencia.

Ejercicio 1. Supongamos que a nivel experimental se observa que el número de bacterias de un cultivo se duplica cada día. Si hay 1000 ejemplares al comienzo, se obtiene la tabla siguiente, en donde t es el tiempo en días y f(t) es el conteo de bacterias en el tiempo t.

t (tiempo en días)	0	1	2	3	4	5	6
f(t) (número de bacterias)	1000	2000	4000	8000	16000	32000	64000

La función que describe los valores de la tabla anterior es:

$$f(t) = (1000)2^t$$

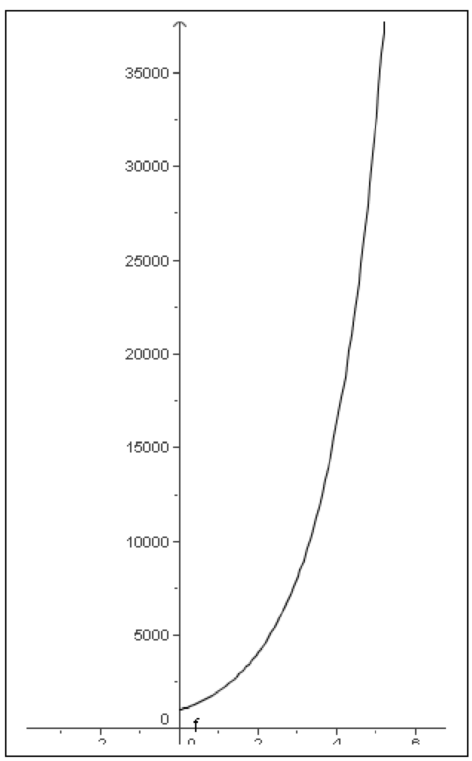
Ya que para t = 3

$$f(3) = (1000)2^3 = (1000)*8 = 8000$$

Así que la fórmula nos permite predecir la cantidad de bacterias presentes para cualquier tiempo t, de manera que para t = 1.5

$$f(1.5) = (1000)2^{\frac{3}{2}} \cong 1000*2.8 = 2800$$

Si consideramos que t puede tomar cualquier valor mayor o igual que 0, la gráfica es.



Ejercicio 2. Una inversión de \$10 000 se incrementa en forma continua, ¿qué tasa de porcentaje anual producirá un saldo de \$25 000 en 10 años?

Usando la fórmula

$$\mathbf{A = P\,e^{rt}}$$

P = capital invertido

r = tasa porcentual anual

t = el número de años de la inversión.

A = capital acumulado después de t años.

$e \cong 2.71828$

Tenemos los siguientes valores

P = 10 000, A = 25 000, t = 10 años.

Sustituyendo valores en la fórmula se tiene.

$$\mathbf{25000 = 10000\,e^{10r}}$$

Despejando r de la ecuación anterior.

$$\mathbf{\frac{25000}{10000} = e^{10r}}$$

$$\mathbf{2.5 = e^{10r}}$$

Sacando logaritmo natural en ambos miembros de la ecuación.

$$\mathbf{\ln 2.5 = \ln\left(e^{10r}\right)}$$

Como las funciones f(x) = ln (x) y $g(x) = e^{(x)}$, son funciones inversas.

$$10r = \ln(2.5) = 0.9162$$

De manera que

$$r = \mathbf{\frac{0.9162}{10} = 0.09162}$$

Así que la tasa de interés es de aproximadamente r = 9.16%.

Ejercicio 3. Desintegración exponencial, El yoduro radiactivo es un derivado de algunos tipos de reactores nucleares. Su vida media es 60 días; es decir, después de 60 días una cantidad dada de yoduro radiactivo se habrá desintegrado hasta la mitad de su cantidad original. Supongamos que ocurre un accidente nuclear y se emite una cantidad inicial C de yoduro radiactivo.

a. Escribe la función para la cantidad de yoduro radiactivo presente en cualquier tiempo t después del accidente.

b. ¿cuánto tardará el yoduro radiactivo en desintegrarse hasta llegar a un nivel de 20% de la cantidad original?

Solución de a. Para escribir la función necesitamos encontrar la tasa r de desintegración, si consideramos la función.

$$Q(t) = C\ e^{(rt)}$$

Del dato, que permanece la mitad de la cantidad original después de un tiempo t = 60 días, se obtiene:

$$Q(60) = C\ e^{r(60)} = \frac{1}{2}C$$

$$e^{r(60)} = \frac{1}{2}$$

Sacando logaritmo natural en ambos miembros de la ecuación.

$$\text{Ln } e^{60r} = .60r = -\text{ Ln } 2 = -\ 0.6931$$

De manera que.

$$r = -\frac{0.6931}{60} = -\ 0.0116.$$

La función que describe al modelo es.

$$Q(r) = C\ e^{-0.0116t}.$$

Solución de b. Para encontrar el tiempo que se requiere para tener el 20% de la materia original.

$$Q(t) = C\ e^{-0.0116t} = 0.2C.$$

De donde.

$$e^{-0.0116t} = 0.2.$$

Sacando logaritmo natural en ambos miembros de la ecuación se tiene.

$$-0.0116t = \text{Ln } 0.2 = -1.60943$$

Así que.

$$t = \frac{1.60943}{0.0116} = 138.743965517$$

El tiempo necesario es de aproximadamente 139 días.

Bibliografía:

Para los alumnos.

Algebra

Ronald E. Larson

Robert P. Hostetler

Publicación CULTURAL

Primera Edición 1996.

Para los profesores.

ÁLGEBRA trigonometría y geometría analítica

Stanley A. Smith

Addison Wesley

Primera Edición 1998.

Nombre del alumno: ___________________________ Grupo: ____________

1. Encuentra el dominio, el rango, y la gráfica de la función $f(x) = 3^x$.

2. Encuentra el dominio, el rango y la gráfica de la función $g(x) = 2^{-x}$.

3. Encuentra el dominio, el rango y la gráfica de la función $h(x) = \log(x)$.

4. Encuentra el valor de x en las siguientes expresiones.
   $\log_2 x = 32$ $\log_4 64 = x$

Nombre del alumno: ___________________________ Grupo: ____________

1. Encuentra el dominio, el rango, y la gráfica de la función $f(x) = 2^x$.

2. Encuentra el dominio, el rango y la gráfica de la función $g(x) = 4^{-x}$.

3. Encuentra el dominio, el rango y la gráfica de la función $h(x) = \log(x - 2)$.

4. Encuentra el valor de x en las siguientes expresiones.
   $\log_2 x = 64$ $\log_4 32 = x$