CCH ORIENTE

GUÍA PARA EL EXAMEN EXTRAORDINARIO DE ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD II

PANTALEÓN GÓMEZ CARRANZA
FERMAN ARELLANO CABEZAS
ALDO NICOLÁS ARENAS GARCÍA
FERNANDO TOVAR CHÁVEZ
RAFAEL MARTÍNEZ PATIÑO
LAURO ARTURO HERRERA MORALES

COORDINACIÓN
Pantaleón Gómez Carranza
CICLO 2023 - 2024

Es el documento impreso o en línea elaborado para apoyar la preparación de un examen extraordinario, con base en el Programa de Estudio de la asignatura. Será elaborado colegiadamente y deberá incluir: a) introducción; b) instrucciones; c) presentación de cada unidad, indicando los conceptos clave; d) sugerencias de actividades de aprendizaje teórico-prácticas; e) autoevaluación del aprendizaje con base en problemas y preguntas representativas de los aprendizajes y f) fuentes consultadas que deberán presentarse en formato APA. Debe estar aprobada por una instancia de Dirección correspondiente y ser utilizada, por lo menos, en un periodo de exámenes.

Introducción

El presente documento tiene el propósito de guiar al estudiante (en particular a los estudiantes del plantel Oriente) en la preparación del examen extraordinario de la asignatura de Matemáticas III, que se imparte en el Colegio de Ciencias y Humanidades. La hemos elaborado un grupo de profesores del Área de Matemáticas del plantel Oriente del CCH que compartimos el interés de apoyar a los alumnos que por una u otra razón adeuda la asignatura de matemáticas III. Su contenido se basa (y cubre) los aprendizajes y temática contenidos en el programa indicativo y vigente de la asignatura ya antes señalada, también presenta las características que definen a una Guía para Examen Extraordinario en el Glosario de Términos del Protocolo de equivalencias del Colegio.

Cada unidad se subdivide en tres secciones, la primera sección inicia presentando los conceptos claves de toda la unidad, parte de los aprendizajes y temática, así como el desarrollo disciplinario y didáctico. Utilizamos explicaciones teóricas formales, figuras y una gran cantidad y diversidad de ejemplos prácticos totalmente resueltos que permite al alumno apropiarse de los conceptos y un uso correcto de los algoritmos y conocimientos correspondientes. En su desarrollo disciplinario también proponemos un grupo de ejercicios con la finalidad de que el alumno practique lo aprendido. En la terceras sección el alumno encontrará las soluciones de todos los ejercicios propuestos en las secciones 1 y 2; también se presenta un examen de auto evaluación (con las soluciones) con el fin de que mida los conocimientos y las habilidades que adquirió. En la parte final de la obra presentamos las referencias bibliográficas que el estudiante puede consultar los temas en los que desee profundizar; asimismo, les servirá de apoyo a los profesores para enriquecer o incrementar la complejidad de los ejercicios y contenidos abarcados en esta guía.

LOS AUTORES

La Guía para el Examen Extraordinario de Matemáticas III ha sido escrita para que la utilices como apoyo y/o complemento en tu preparación para presentar el examen extraordinario de la asignatura del mismo nombre; para que repases, y/o conozcas los conceptos básicos y practiques a fondo los algoritmos de mayor representatividad en el estudio de la geometría analítica a nivel bachillerato. Debes leer la sección (o la parte de tu interés) antes de intentar resolver los problemas y/o actividades que te proponemos. Ten en cuenta que leer sobre matemáticas dista bastante de leer otro tipo de documentos, tales como una novela, un periódico o hasta libros de otras ramas del conocimiento. Regularmente las partes de textos de matemáticas (de interés para el lector), se leen y se releen varias veces para poder comprenderlas. Debes poner especial atención a los ejemplos resueltos y reconstruir su resolución; utiliza lápiz y papel a medida que los leas y, a continuación, intenta resolver los ejercicios propuesto en la sección. Siguiendo estos consejos seguramente podrás hacer tu tarea optimizando el tiempo e incrementando la comprensión de conceptos y habilidad en el uso de los algoritmos.

En un primer acercamiento a una unidad memoriza las definiciones y trata de comprender los conceptos, sin embargo, no debes cometer el error de tratar como reglas los ejercicios resueltos que observes. Las matemáticas no son simples memorizaciones, sino que son el *arte de modelar y posteriormente resolver problemas,* ¡no se trata de memorizar problemas resueltos! Para comprender significativamente una unidad o un tema, debes modelar y resolver problemas, muchos problemas; haz todos los que puedas, intenta escribir sus soluciones en una forma lógica y detalladamente, paso a paso. Por lo general, para resolver un problema en matemáticas se realizan varios intentos, no te rindas ante ellos, si no puedes resolverlo en los primeros intentos. Los primeros intentos en la resolución de problemas se relacionan con su comprensión y para ello se tienen que leer varias veces y relacionar con lo que ya aprendiste en tus cursos previos de matemáticas y de los ejemplos resueltos de la guía. Lucha con cada hasta que lo resuelvas; una vez que lo hayas hecho esto unas cuantas veces, comprenderás el papel de las matemáticas en los procesos mentales del aprendizaje.

Las respuestas de todos los ejercicios y a todas las preguntas de los exámenes propuestos se encuentran en la tercera sección de cada unidad. En caso de que tu respuesta a cierto ejercicio difiera de la que te proponemos, no concluyas de inmediato que estás en error, tu respuesta y la propuesta pueden ser equivalentes y estar enlazadas por medio de ciertas consideraciones y ambas ser correctas.

ÍNDICE

1. MODELOS DE PROBABILIDAD Y SUS APLICACIONES

PROPÓSITO

Al finalizar la unidad el alumno:

Continuará desarrollando su pensamiento estadístico, apropiándose del concepto de variable aleatoria y construyendo modelos de probabilidad en términos de su tendencia, variabilidad y distribución

CONTENIDO

CONCEPTOS CLAVE

Variable.	Característica de un objeto que es susceptible de asumir distintos valores.
Función.	Relación (regla de correspondencia) entre dos variable de manera que la asignación de un valor a la primera de ellas asigna un único valor a la segunda de ellas.
Dominio de una función.	En una función, el conjunto constituido por aquellos valores para los que la relación tiene sentido.
Rango (recorrido) de una función.	El conjunto de todos los valores (números) generados por la relación (regla de correspondencia) al ser aplicada a la primera variable.
Variable aleatoria.	Función que transforma un evento de S en un número real x o en un intervalo de números reales. Cuantifica un evento
Variable aleatoria discreta.	Transforma un espacio muestral S en conjunto finito (o infinito numerable) de números reales.
Recorrido (rango) de una variable aleatoria discreta (VAD).	Todos los valores que asume.
Función de distribución (o de probabilidad).	Función (puede presentarse en forma tabular) con la que se mide la probabilidad de los valores asumidos por una variable aleatoria.
Propiedades de una Función de distribución de probabilidad.	No negativa. Imágenes menores a uno. Suma de imágenes igual a uno.
Función de probabilidad acumulada.	Función que proporciona la suma de las probabilidades hasta un número (inclusive) específico. $$F(x_0) = p(X \leq x_0) = \sum_{x \leq x_0} f_X(x)$$
Valor esperado o esperanza de una VAD X.	Valor promedio (media de una variable aleatoria.
Varianza de una variable aleatoria X.	Medida de la dispersión o variabilidad de la variable aleatoria. Se conoce también como promedio de las dispersiones cuadráticas de la variable aleatoria.
Desviación estándar de la VAD X.	Raíz cuadrada de la varianza.
Propiedades de la varianza de una VAD X.	si X, Y son variables aleatorias independientes: **a.** $V[c] = c$ **b.** $V[cX] = c^2 \cdot V[X]$

c. $V[X \pm Y] = V[X] + V[Y]$,

d. $V[X] = E[X^2] - E^2[X]$

Ensayo Bernoulli.

Experimento aleatorio con espacio muestral $S = \{E, F\}$, el evento "E" se denomina éxito y el evento "F" se llama fracaso. La probabilidad de éxito se representa por $P(E) = p$ y la probabilidad de fracaso por

$$P(F) = 1 - p = q$$

Variable aleatoria binomial.

X "número de éxitos en n ensayos independientes".

Experimento binomial.

Es una secuencia de n ensayos idénticos (n se fija antes de realizar el experimento). Los experimentos son independientes y la probabilidad de éxito es constante de un ensayo a otro.

fdp binomial.

Probabilidad de obtener x éxitos en n ensayos independientes si la probabilidad de un éxito es p

$b(x, n, p) = C_x^n p^x q^{n-x}$, si $X = 0, 1, 2, \cdots, n$

Relación entre la FDA binomial y la fdp binomial.

$$b(x, n, p) = B(x, n, p) - B(x-1, n, p)$$

Parámetros de VAD Binomial.

a. $E[X] = np$

b. $V[X] = npq$

c. $DE[X] = \sqrt{npq}$

fdp normal.

$f(x; \mu, \sigma) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$, siempre que

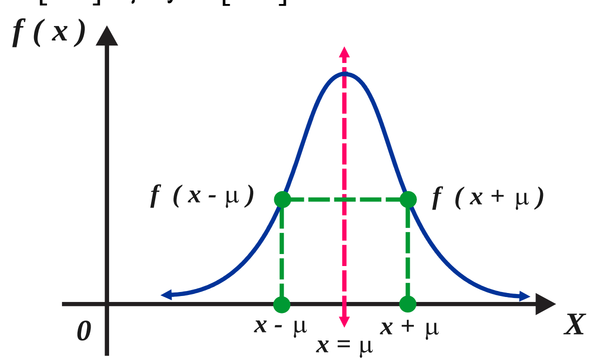
$-\infty < \mu < +\infty$, $\sigma > 0$ y $-\infty < X < +\infty$

Parámetros de la Normal.

$E[X] = \mu$ y $V[X] = \sigma^2$

Propiedad de simetría

$f_X(\mu - x) = f_X(\mu + x)$



Variable aleatoria normal estándar.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

fdp de la variable aleatoria normal estándar.

$$f(z; 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

Parámetros de VAC normal estándar.	$\mu = 0$ y $\sigma^2 = 1$

1.1 VARIABLE ALEATORIA DISCRETA Y DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

APRENDIZAJES

1. Identificar el concepto de variable aleatoria.
2. Diferenciará variables aleatorias discretas y continuas.
3. Examina los conceptos de distribución de probabilidad, esperanza matemática y desviación estándar.
4. Construye la distribución de probabilidad para una variable aleatoria discreta y su modelo de simulación físico o por medio de la computadora.
5. Identifica las características de un proceso binomial.
6. Construye el modelo para la distribución binomial, apoyándose en la simulación física o con la computadora.
7. Aplica el modelo binomial, su valor esperado y su desviación estándar a fenómenos contextualizados que se ajusten a este modelo, interpretando los resultados, obtenidos desde la propia o de tablas.
14. Concluye que una variable aleatoria, discreta, puede describirse y analizarse por su tendencia, dispersión y distribución.

TEMAS

Propiedades. Distribución. Distribución acumulada, parámetros: valor esperado y desviación estándar. Modelo de probabilidad discreto. Distribución binomial: Experimento binomial, variable aleatoria binomial, parámetros y aplicaciones.

El uso de reglas que convierten colecciones de eventos (pertenecientes a un espacio muestral) en números reales facilita el cálculo de probabilidades, en cuanto a, notación, escritura y desarrollo potenciando así la probabilidad con otras ramas del conocimiento y de la matemática.

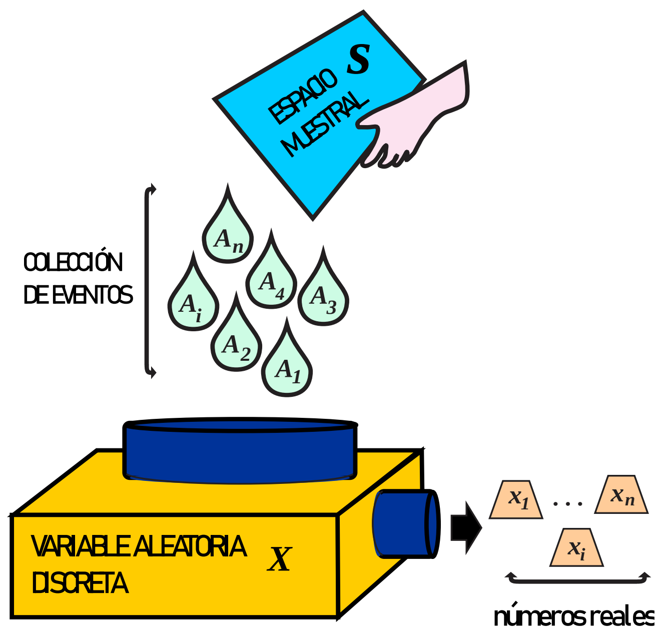
DEFINICIÓN 1. VARIABLE ALEATORIA

Sean:
i. S es espacio muestral asociado a un experimento aleatorio.
ii. A una colección de eventos de S.
Entonces, la función X con dominio en el espacio muestral y recorrido (o rango) contenido en el conjunto de los números reales se denomina variable aleatoria.
Se escribe

$$X : S \to IR$$

Las variables aleatorias se clasifican como:
"variables aleatorias discretas" (VAD y "variables aleatorias contínuas" VAC).

CASO DISCRETO



DEFINICIÓN 2. CLASIFICACIÓN DE LAS VARIABLES ALEATORIAS

Sean:
i. S el espacio muestral de un experimento aleatorio.
ii. A una colección de eventos de S.
iii. La función $X : A \subseteq S \to IR$ y R_X con recorrido (o rango) $R_X = \{ x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n \}$ finito o infinito numerable, entonces, X se denomina variable aleatoria discreta (VAD).

EJEMPLO 1. VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

1.

a. Una bola contiene dos huevos (de gallina) que pueden ser "blancos" o "rojos". Se revisan los huevos, uno tras otro. Sea la variable aleatoria

X =*"número de huevos rojos en la bolsa"*

i. Sean: r *"el huevo revisado es rojo"* y b *"el huevo revisado es blanco"*, entonces, el espacio muestral es

$$S=\{\,(r,r),(r,b),(b,r),(b,b)\,\}$$

ii. La variable aleatoria X = *"número huevos rojos en la bolsa"*, asigna:

$$X((r,r))=2,\; X((r,b))=1,\; X((b,r))=1 \text{ y } X((b,b))=0$$

Por tanto, su recorrido de es

$$R_X=\{\ 0\ ,\ 1\ ,\ 2\ \}$$

b. Se forma un equipo con 3 estudiantes del grupo de Matemáticas con el fin de que desarrollen y presenten cierto tema. Los estudiantes del equipo pueden hombres o mujeres. Sea

X = *"número de alumnos en el equipo"*.

i. Si

h ="el estudiante es hombre" y m = "la estudiante es mujer",

entonces, el espacio muestral es

$$S=\left\{\begin{array}{c}(h,h,h),(h,h,m),(h,m,h),(m,h,h)\\(h,m,m),(m,h,m),(m,m,h),(m,m,m)\end{array}\right\}$$

ii. Las asignaciones de la variable aleatoria son

$$X((h,h,h))=3,\; X((h,h,m))=2,\; X((h,m,h))=2,\; X((m,h,h))=2,$$

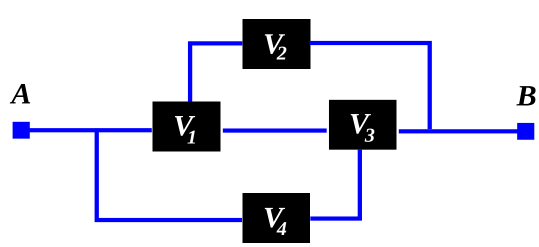
$$X((h,m,m))=1,\; X((m,h,m))=1,\; X((m,m,h))=1,\; X((m,m,m))=0,$$

iii. Su recorrido es $R_X=\{\ 0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3\}$

c. El diagrama de la *figura* muestra un sistema de transportación de aceite, los puntos

V_1, V_2, V_3 y V_4,

son válvulas y pueden estar abiertas o cerradas. Suponga que se ha transportado el aceite desde el punto A hasta el punto B.



i. Sea la variable aleatoria

$$Z = \text{“número de trayectorias abiertas”.}$$

El aceite fluye desde punto A hasta el punto B significa que hay una o más trayectoria con sus dos válvulas abiertas, entonces, $Z = 1, 2, 3$ y $R_Z = \{\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ \}$

ii. Sea la variable aleatoria

$$Y = \text{“número válvulas abiertas”.}$$

El aceite fluye del punto A al punto B en el diagrama, si hay dos o más trayectoria con dos válvulas abiertas, por tanto,

$$Y = 2, 3, 4 \text{ y } R_Y = \{\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ \}$$

SECCIÓN 1.1 EJERCICIOS 1

1. Para la variable aleatoria:

i. Construye el espacio muestral.

ii. Establece la asignación a cada evento.

iii. Determina el recorrido (rango).

a. Se lanzan dos monedas normales (con caras águila y sol) , sea la VA

X = ”*número de soles menos número de águilas*”.

b. Se lanzan tres dados normales, uno tras otro, sea la VA,

X = ”número de cara que se observa al caer el segundo dado”.

c. Las caras de una moneda han sido marcadas con los números 1 y 2. Se lanza dos veces y anotan los números observados.

Sea la variable aleatoria Y = “producto de los números que se observan en la cara de las moneda”.

d. Se forma un equipo con 3 estudiantes del grupo de Matemáticas con el fin de que desarrollen y presenten cierto tema. Los estudiantes del equipo pueden hombres o mujeres. Sea

Y = *“número de alumnas menos número de alumnos en el equipo”*

e. En un sorteo detiene hasta que se gana o se pierden 3 veces consecutivas. Sea la variable aleatoria

X = *“número de participación en que se gana”*

Las asignaciones numéricas de las variables aleatorias se vinculan con la función de probabilidad en el cálculo de probabilidades, esto requiere de una “medida de probabilidad”, misma que recibe el nombre de “***función de probabilidad***” (o “distribución de ***probabilidad***”, si se representarla tabularmente).

DEFINICIÓN 3. FUNCIÓN DE PROBABILIDAD DE UNA VAD

Si la variable aleatoria X tiene recorrido $R_X = \{ x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n \}$, entonces, su función de probabilidad (fdp) , que representaremos por f_X , es

$$f_X(x) = \begin{cases} p(X = x) & \text{si} \quad x = x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n \\ \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

La siguiente tabla corresponde a una distribución de probabilidad de la VAD (misma que es equivalente a f_X).

X	x_0	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
$f_X(x)$	p_0	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

La función de probabilidad f_X representa satisface la ***propiedad 1***. (Axiomas de Kolmogorov).

PROPIEDAD 1. PROPIEDADES DE UNA FUNCIÓN DE PROBABILIDAD

Sea X la variable aleatoria discreta con recorrido

$R_X = \{ x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n \}$, entonces, f_X satisface:

i. $f_X(x) \geq 0$ para todo número real x .

ii. $\sum_{x \in R_X} f_X(x) = 1$

EJEMPLO 2. FUNCIÓN DE PROBABILIDAD Y DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD

1.

a. La probabilidad de que sea diagnosticada esté enferma es 0.5 . Sea X = “número de diagnósticos enfermo al examinar a 2 personas”, evidentemente,

i. La variable aleatoria asume los valores $X = 0, 1, 2$

Sean los eventos $E_i =$ ” diagnóstico i , persona enferma y E_i^C ”diagnóstico i persona no enferma”, luego,

$$f_X(2) = p(X = 0) = p(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0.25$$

$$f_X(1) = p(X = 1) = p\left(E_1 \cap E_2^C\right) + p\left(E_1^C \cap E_2\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0.5$$

$$f_X(0) = p(X = 2) = p\left(E_1^C \cap E_2^C\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0.25$$

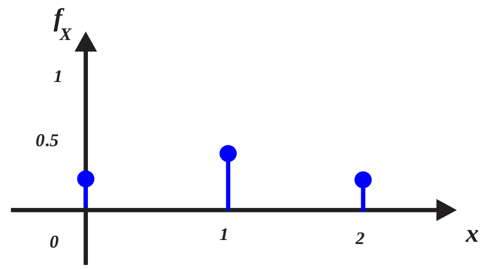
La información anterior se sistematiza en la función

$$f_X(x)=\begin{cases} 0.25 & \text{si} \quad x=0,\ 2 \\ 0.5 & \text{si} \quad x=1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

, o bien,

X	0	1	2
$f_X(x)$	0.25	0.5	0.25

con representación gráfica



b. En un grupo de ratones él $40\,\%$ son machos y él $60\,\%$ hembras, se selecciona un ratón al azar, sea variable aleatoria

$$X=\begin{cases} 0 & \text{se seleccionóun ratón macho} \\ 1 & \text{se seleccionóun ratón hemba} \end{cases},$$

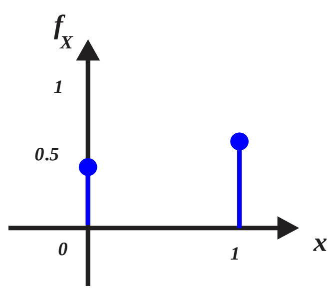
entonces,

$$f_X(x)=\begin{cases} 0.40 & \text{si} \quad x=0 \\ 0.60 & \text{si} \quad x=1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

, o bien,

X	0	1
$f_X(x)$	0.40	0.60

La representación gráfica es



EJEMPLO 3. PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN DE PROBABILIDAD

1.

a. Determina K de manera que $f_X(x)=\begin{cases} 4K & \text{si} \quad x=0.5 \\ K & \text{si} \quad x=2 \\ 0.8 & \text{si} \quad x=2.6 \\ 0 & otro\ caso \end{cases}$, sea función de probabilidad.

Las probabilidades deben ser positivas y su total uno, por tanto, es necesario resolver la ecuación

$4K+K+0.8=1, \Leftrightarrow 5K=0.2$ y $K=0.04$, entonces, $f_X(x)=\begin{cases} 0.16 & \text{si} \quad x=0.5 \\ 0.04 & \text{si} \quad x=2 \\ 0.8 & \text{si} \quad x=3 \\ 0 & otro\ caso \end{cases}$

b. Determina A de manera que

X	-1	1	3	4.2
$f_X(x)$	$2A$	$4A$	A	$3A$

sea función de probabilidad.

Las probabilidades deben ser positivas y su total uno, por tanto, es necesario resolver la ecuación

$$2A+4A+A+3A=1, \Leftrightarrow 10A=1 \text{ y } A=0.1,$$

entonces,

X	-1	1	3	4.2
$f_X(x)$	0.2	0.4	0.1	0.3

La asignación de probabilidades a las asignaciones de la variable aleatoria discreta X también se realiza utilizando su función de probabilidades acumuladas (o distribución acumulada), misma que se define en términos de su función de probabilidades.

DEFINICIÓN 4. FUNCIÓN DE PROBABILIDADES ACUMULADAS

Sea la variable aleatoria discreta X, entonces, su función de probabilidad acumulada (o función de distribución acumulada) es

$$F(x)=p(X\le x_i)=\sum_{x\le x_i} f(x)$$

$F(x)$ es la suma de todas la probabilidades de todos los eventos que dan lugar a los valores de X y que son menores o iguales que x.

EJEMPLO 4. CONSTRUCCIÓN DE LA FUNCIÓN DE PROBABILIDAD ACUMULADA

1.

a. Una manera de construir la función de distribución acumula asociada a

X	-1	2	4
$f_X(x)$	0.5	0.3	0.1

consiste en:

i. Agregamos una tercera fila cuya primera entrada se $F(x)$.

ii. Sumamos probabilidades de entradas sucesivas (línea dos).

X	-1	2	3
$f_X(x)$	0.5	0.3	0.1
$F(x)$	0.5	0.8	1

iii. Antes de $X=-1$, $F(x)=0$

antes de $X=2$, $F(x)=0.5$,

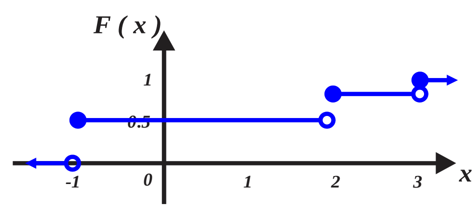
antes de $X=3$, $F(x)=0.8$,

después de $X=3$,

a partir de $X=3$, $F(x)=1$.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad X<-1 \\ 0.5 & \text{si} \quad -1\le X<2 \\ 0.8 & \text{si} \quad 2\le x<3 \\ 1 & \text{si} \quad 3\le X \end{cases}$$

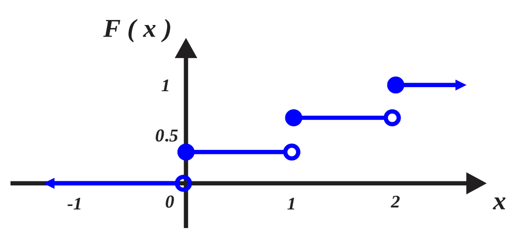
, su gráfica,



b. Graficaremos la función de probabilidad acumulada de $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad X<0 \\ 0.3 & \text{si} \quad 0\le X<1 \\ 0.7 & \text{si} \quad 1\le x<2 \\ 1 & \text{si} \quad 2\le X \end{cases}$

y posteriormente, obtendremos la función de probabilidad que tiene asociada.

Representación grafica es:



Obtengamos $f_X(x)$,

i. Identificamos los signos $\leq$ y los números a su izquierda, en este caso, 0, 1 y 2, mismos que constituyen el recorrido de la variable aleatoria, agregamos sus probabilidades acumuladas (tabla izquierda).

ii. En la primera columna, la probabilidad $f_X(x)$ coincide con $F(x)$.

ii. Las restantes probabilidades se obtienen restando dos probabilidades acumuladas consecutivas.

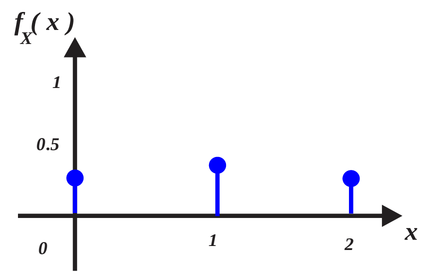
X	0	1	2
$f_X(x)$			
$F(x)$	0.3	0.7	1

X	0	1	2
$f_X(x)$	0.3	0.4	0.3
$F(x)$	0.3	0.7	1

Entonces,

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.3 & \text{si} \quad x = 0 \\ 0.4 & \text{si} \quad x = 1 \\ 0.3 & \text{si} \quad x = 2 \\ 0 & \quad \textit{otro caso} \end{cases}$$

, su gráfica,



La ***propiedad 2.*** de $F(x)$ resulta de utilidad en el cálculo de probabilidades.

PROPIEDAD 2. PROPIEDADES DE $F(x)$

Sea X la variable aleatoria discreta con función de probabilidad f_X, entonces,

i. $p(X = x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$

ii. $p(X \leq x_i) = F(x_i)$

iii. $p(X < x_i) = F(x_{i-1})$

iv. $p(X \geq x_i) = 1 - F(x_{i-1})$

v. $p(X > x_i) = 1 - F(x_i)$

vi. $p(x_i \leq X \leq x_j) = F(x_j) - F(x_{i-1})$

Veamos algunos ejemplos de cómo se aplica ***la propiedad 2.***

EJEMPLO 5. CALCULO DE PROBABILIDADES

1. Sea la VAD X con función de probabilidades

a.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<-3 \\ 0.2 & \text{si } -3\le x<0 \\ 0.4 & \text{si } 0\le x<3 \\ 0.8 & \text{si } 3\le x<6 \\ 1 & \text{si } x\ge 6 \end{cases},$$

El recorrido de la variable aleatoria es

$$R_X=\{-3,\ 0,\ 3,6\}$$

i. Calculemos $p(X=3)$

En este caso $x_i=3$, por tanto, $x_{i-1}=0$, por tanto, por la ***propiedad i.***, tenemos

$$p(X=3)=F(3)-F(0)=0.8-0.4=0.4$$

ii. Calculemos $p(X<3)$

En este caso $x_i=3$ y $x_{i-1}=0$, luego, por la ***propiedad iii.***, $p(X<3)=F(0)=0.4$

iii. Calculemos $p(X<2)$

En este caso $x_i=2$ y $x_{i-1}=0$, entonces, por la ***propiedad iii.***, $p(X<2)=F(0)=0.4$

iv. Calculemos $p(X\le 3)$

En este caso $x_i=3$ y $x_{i-1}=0$, entonces, por la ***propiedad ii.***, $p(X\le 3)=F(3)=0.8$

b.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<-3 \\ 0.2 & \text{si } -3\le x<2.2 \\ 0.35 & \text{si } 2.2\le x<4.5 \\ 0.52 & \text{si } 4.5\le x<6.8 \\ 0.83 & \text{si } 6.8\le x<8 \\ 1 & \text{si } x\ge 8 \end{cases},$$

El recorrido de la variable aleatoria es

$$R_X=\{-3,\ 2.2,\ 4.5,6.8,\ 8\}$$

i. Calculemos $p(X=4.3)$

En este caso $x_i=4.5$ ($x_i=4.3$ pertenece al intervalo $2.2\le x<4.5$), por tanto, según la ***propiedad i.***, $p(X=4.3)=F(4.3)-F(2.2)=0.35-0.35=0$

ii. Calculemos $p(X\ge 5.8)$

$x_i=4.8$ pertenece al intervalo $4.5\le x<6.8$, por tanto $x_{i-1}=4.5$, por la ***propiedad iv.***,

$$p(X \geq 5.8) = 1 - F(4.5) = 0.83 - 0.52 = 0.31$$

iii. Calculemos $p(X < 7.4)$

$x_i = 7.4$ pertenece al intervalo $6.8 \leq x < 88$, por tanto, por la ***propiedad v.***,

$$p(X > 7.4) = 1 - F(7.4) = 1 - 0.83 = 0.17$$

iv. Calculemos $p(-2 \leq X < 5)$

$x_i = 5$ pertenece al intervalo $4.5 \leq x < 6.8$ y $x_{i-1} = -2$ al intervalo $-3 \leq x < 2.2$, entonces,

$$p(-2 \leq X < 5) = 0.52 - 0.2 = 0.32$$

SECCIÓN 1.1
EJERCICIOS 2

1. Obtén la fdp, FDA y grafícalas.

a. Un jugador de basquetbol realizará tres tiros de castigo, la probabilidad anote un tiro 0.5 (anotar o no anotar un tiro posterior es independiente de lo antes ocurrido).
Si $a =$ "anota el tiro de castigo" y $f =$ "no anota el tiro de castigo.

i. Construye el espacio muestral.

ii. Sea la variable aleatoria $X =$ "número de tiros de castigo anotados", obtén las asignaciones y el recorrido.

iii. Construye la fdp (función y tabla) y traza la gráfica.

iv. Construye la FDA y traza la gráfica.

b. La probabilidad de que un trabajador llegue a tiempo (T) a sus labores es 0.4. El inspector de la empresa checa la hora de llegada da la que llegan tres trabajadores y termina la inspección cuando uno de trabajadores llega tarde labores.

i. Construye el espacio muestral.

ii. Sea la variable aleatoria $Y =$ "primer trabajador que llega tarde a sus labores". Determina las asignaciones de la variable aleatoria y su recorrido.

iii. Construye la fdp (función y tabla) y traza la gráfica.

iv. Construye la FDA y traza la gráfica.

2.

a. Si $f_X(x) = \begin{cases} 0.3 & \text{si} \quad x = 1 \\ 0.7 & \text{si} \quad x = 2 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$, obtén la FDA y grafícala.

b. Si $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<1 \\ 0.30 & \text{si} \quad 1\le x<2 \\ 0.70 & \text{si} \quad 2\le x<3 \\ 1 & \text{si} \quad x\ge 3 \end{cases}$, obtén la fdp y grafícala.

3.

a. Sea la VAD X con FDA $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<-4 \\ 0.3 & \text{si } -4\le x<0 \\ 0.5 & \text{si } 0\le x<2 \\ 0.8 & \text{si } 2\le x<4 \\ 1 & \text{si } x\ge 4 \end{cases}$,

calcula:

i. $p(X\le -2)$ **ii.** $p(X<3)$ **iii.** $p(X<5)$

iv. $p(X\le -1)$ **v.** $p(X>1)$ **vi.** $p(1\le X\le 3)$

b. Sea la variable aleatoria discreta con fdp, $f_X(x)=\begin{cases} 0.5 & \text{si} \quad x=-1 \\ 0.3 & \text{si} \quad x=1 \\ 0.2 & \text{si} \quad x=3 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$ calcula,

i. $p(X\le 1)$ **ii.** $p(X<3)$ **iii.** $p(X<4)$ **iv.** $p(X\le -1)$

v. $p(X\le -2)$ **vi.** $p(X>1)$ **vii.** $p(X\ge 1)$ **viii.** $p(1\le X\le 3)$

Las cantidades que definimos en las siguientes líneas: valor esperado y varianza son fundamentales en la descripción de una variable aleatoria, el primero de ellos se interpreta como un promedio (ponderado) de su comportamiento y el segundo promedia as dispersiones cuadráticas respecto al valor esperado.

DEFINICIÓN 4. VALOR ESPERADO DE LA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA X

Si la variable aleatoria X tiene recorrido $R_X=\{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\}$ con función de probabilidad f_X ,entones, el número

$$E[X]=\sum_{i=1}^{n} x_i\cdot f_X(x_i)$$

se llama “valor esperado” de VAD X.

El valor esperado también se conoce como “esperanza matemática”, o esperanza; en algunos temas se hace referencia a ella como “promedio” o simplemente media.

El valor esperado de una $VAD\ X$ es uno de sus parámetros y representa el "promedio" o número que se espera obtener al repetir el experimento aleatorio, en forma independiente, un número "muy grande" de veces, como consecuencia pertenece al intervalo $[\,x_1\ ,\ x_n\,]$ y no necesariamente coincide con alguna de las asignaciones de X.

Por otra parte, La descripción de X se complementa con el estudio de su variabilidad, ésta se describe en términos de su varianza, misma que definimos a continuación.

DEFINICIÓN 5. VARIANZA Y DESVIACIÓN ESTÁNDAR DE LA VAD X

Si la variable aleatoria X tiene recorrido $R_X = \{\, x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n \,\}$ con función de probabilidad f_X ,entones,

i. El número $V[\,X\,] = E\left[(\,x_i - E[\,X\,]\,)^2 \cdot f_X(\,x_i\,)\right]$ se llama "varianza" de $VAD\ X$.

ii. El número $DE = \sqrt{V[\,X\,]}$ se llama "desviación estándar".

La "expresión" $V[\,X\,] = E\left[(\,x_i - E[\,X\,]\,)^2 \cdot f_X(\,x_i\,)\right]$ es equivalente a

$$V[\,X\,] = \sum_{x_i} (\,x_i - E[\,X\,]\,)^2 \cdot f_X(\,x_i\,)$$

EJEMPLO 6. VALOR ESPERADO, VARIANZA Y DESVIACIÓN ESTÁNDAR

1. Calcula: valor esperado, varianza y esperanza.

a. $VAD\ X$ con fdp $f_X(\,x\,) = \begin{cases} 0.25 & \text{si} \quad x = 0,\ 2 \\ 0.5 & \text{si} \quad x = 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$

i. Valor esperado

$$E[\,X\,] = 0(\,0{,}25\,) + 2(\,0{,}25\,) + 1(\,0{,}5\,) = 1$$

ii. Varianza

$$V[\,X\,] = (\,0-1\,)^2 0 + (\,2-1\,)^2 2 + \left(\,2 - \frac{2}{5}\,\right)^2 2 + (\,1-1\,)^2 1 = 2$$

iv. Desviación estándar $DE = \sqrt{[\,X\,]} = \sqrt{2}$

b. $VAD\ X$ con distribución de probabilidad,

X	0	1	2	3
$f_X(\,x\,)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

i. Valor esperado $E\left[\,X\,\right]=0\cdot\frac{2}{5}+1\cdot\frac{1}{5}+2\cdot\frac{1}{5}+3\cdot\frac{1}{5}=\frac{6}{5}$

ii. Varianza $V\left[\,X\,\right]=\left(0-\frac{2}{5}\right)^2 0+\left(1-\frac{2}{5}\right)^2 1+\left(2-\frac{2}{5}\right)^2 2+\left(3-\frac{2}{5}\right)^2 3=\frac{639}{25}$

iv. Desviación estándar

$$DE=\left[\,X\,\right]=\sqrt{\frac{639}{25}}$$

En juegos "gobernados por el azar" el valor esperado se utiliza para estimar si después de "participar en él muchas veces" se tendrán ganancias ($E\left[\,X\,\right]>0$) o pérdidas ($E\left[\,X\,\right]<0$), por otra parte, si $E\left[\,X\,\right]=0$ el juego de azar se denomina "justo" si $E\left[\,X\,\right]=0$

EJEMPLO 7. APLICACIONES DEL VALOR ESPERADO

1.

a. Un juego consiste en lanzar dos monedas regulares. Los participantes ganan $\$1000$ si las monedas al caer muestran dos caras; ganan $\$1000$ si se observa una cara y pierden $\$6000$si no se observan caras.

i. ¿Conviene participar?

ii. Calcula la varianza y la desviación estándar.

Sea la variable aleatoria, X = "ganancia", su distribución es

Número de caras	0	1	2
X	-6000	1000	1000
$f_X(x)$	0.25	0.50	0.25

entonces,

$$E\left[\,x\,\right]=-6000(0.25)+1000(0.50)+1000(0.25)=-750$$

en promedio pierden $\$750$, no conviene jugar.

b. Por otra parte,

$$V\left[\,X\,\right]=(-6000-750)^2(0.25)+(1000-750)^2(0.50)+(1000-750)^2(0.25)$$
$$=11437500$$

$$DE=\sqrt{V\left[\,X\,\right]}=\sqrt{11437500}\approx 3381.937$$

Las propiedades del *valor esperado* y la *varianza* son útiles en la justificación de algunos métodos de la inferencia estadística, por tanto, destacan las siguientes.

PROPIEDAD 3. PROPIEDADES DE $E[X]$

Si X, Y son variables aleatorias discretas, independientes, tienen la misma función de probabilidad y c es un número real, entonces:

a. $E[c]=c$

b. $E[cX]=cE[X]$

c. $E[X \pm Y]=E[X] \pm E[Y]$

PROPIEDAD 4. PROPIEDADES DE $V[X]$

Si X, Y son variables aleatorias con la misma función de probabilidad y c es un número real, entonces:

i. $V[c]=0$

ii. $V[cX]=c^2V[X]$

iii. Si X, Y son independientes, entonces, $V[X \pm Y]=V[X]+V[Y]$

iv. $V[X]=E\left[X^2\right]-E^2[X]$, "forma reducida de la varianza".

EJEMPLO 8. PROPIEDADES DEL VALOR ESPERADO Y DE LA VARIANZA

1.

a. Sean X, Y variables aleatorias discretas, independientes con la misma función de probabilidad y $E[X]=2$, $E[Y]=-3$ y $V[X]=3$, $V[Y]=4$, entonces,

i. $E[4X-6Y+5]=E[4X]-E[6Y]+E[5]$, ***propiedad 3.iii.***

$=4E[X]-6E[Y]+E[5]$, ***propiedad 3.ii.***

$=4E[X]-6E[Y]+5$, ***propiedad* 3.i.**

$=4(2)-6(-3)+5=-5$

ii. $V[4X-6Y+5]=V[4X]+V[6Y]+V[5]$, ***propiedad 4.iii.***

$=16V[X]+36V[Y]+V[5]$, ***propiedad 4.ii.***

$=16V[X]+36V[Y]+0$, **propiedad *4.i.***

$=16(3)+36(4)=162$

SECCIÓN 1.1
EJERCICIOS 3

1. Calcula: el valor esperado, la varianza y la desviación estándar.

a. La VAD X tiene distribución de probabilidades

x	0	1	2
$f_X(x)$	0.25	0.50	0.25

En el cálculo de la varianza es necesario conocer el valor esperado,

b. La VAD Y tiene con fdp

$$f_Y(y)=\begin{cases} 0.10 & \text{si} \quad y=-2 \\ 0.40 & \text{si} \quad y=0 \\ 0.20 & \text{si} \quad y=3 \\ 0.10 & \text{si} \quad y=4 \\ 0.20 & \text{si} \quad x=5 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

2.

a. Un juego consiste en lanzar un dado regular, los participantes ganan $\$100$ si el dado al caer muestra los números $1,\ 2,\ 3,\ 4$, en otro caso pierden $\$180$.

i. Con base en el valor esperado, decide si conviene participar.

ii. Calcula la varianza y la desviación estándar.

b. Un juego consiste en lanzar dos monedas regulares. Los participantes ganan $\$100$ si las monedas al caer muestran dos caras, en otro caso pierden $\$50$

i. Con base en el valor esperado, decide si conviene participar.

ii. Calcula la varianza y la desviación estándar.

3.

a. Sean X , Y son variables aleatorias discretas, independientes con la misma función de probabilidad y $E[X]=2$, $E[Y]=4$ y $V[X]=1$, $V[y]=1$, calcula,

i. $E[2X+Y+2]$

ii. $V[X-2Y+1]$

b. Si X , Y son variables aleatorias discretas, independientes con la misma función de probabilidad y $E[X]=4$, $E[Y]=-1$ y $V[X]=2$, $V[Y]=1$, calcula

i. $E[4X-6Y+5]$

ii. $V[4X-6Y+5]$

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Una diversidad de experimentos aleatorios discretos pueden tratarse suponiendo que su espacio muestral está constituido por un par de eventos simples: el evento favorable y la negación del evento favorable, en este caso, el evento favorable es el “éxito” (E) y su negación el “fracaso” (F). Bajo este enfoque, el espacio muestral el experimento de llama “ensayo Bernoulli” y tiene espacio muestral es $S=\{E, F\}$”.

DEFINICIÓN 6. ENSAYO BERNOULLI

a. Un ensayo es un experimento aleatorio con dos resultados posibles: $éxito$ y $fracaso$, su espacio muestral es $S=\{éxito \ , \ fracaso\}$ o $S=\{E \ , F\}$
b. En un ensayo , $p(E)=p$ y $p(F)=1-p=q$

EJEMPLO 9. ENSAYOS

1. Sean los eventos aleatorios
a. Se “lanza un dado y se anota el número de la cara visible:

$E=$”se observa el número 5” y $F=$”no se observa el número 5”

b. Se compra un boleto para participar en la rifa de un avión.

$E=$”se gana el avión” y $F=$”no se gana el avión”.

c. Se revisa el contenido de una bolsa con la impresión “contenido 100 piezas”.

$E=$”el contenido es mayor a 100 piezas” y $F=$”el contenido es menor a 100 piezas”.

La realización de n Bernoulli en forma independiente y la asignación al $éxito$ una probabilidad constante (la misma en todos los ensayos) define a la variable aleatoria binomial.

DEFINICIÓN 7. VARIABLE ALEATORIA BINOMIAL

La variable aleatoria discreta: $X=$“número de éxitos en n ensayos independientes”, se llama como variable aleatoria binomial.

Un experimento binomial:

i. Consiste en n ensayos idénticos (Bernoulli), cada ensayo cuenta con dos resultados, éstos son:

$éxito$ y $fracaso$.

ii. Los ensayos son independientes y la probabilidad de éxito es constante de un ensayo a otro, como consecuencia, también lo es la probabilidad de fracaso.
iii. Se rige por la variable aleatoria discreta: $X =$"número de éxitos en n ensayos independientes".
iv. Si E representa al éxito, $p(E) = p$ y si F representa al fracaso, $p(F) = 1 - p = q$.
v. Tanto p como q se mantienen constantes y $p + q = 1$

Un proceso inductivo justifica que la variable aleatoria binomial

$X =$"número de éxitos en n ensayos independientes",

con probabilidad de éxito p cumple las condiciones contenidas en la ***propiedad 5.***

PROPIEDAD 5. DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Sea la VAD $X =$"número de éxitos en n ensayos independientes", si p es la probabilidad de éxito y q es la probabilidad de fracaso, entonces:

a. Recorrido $X = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$

b. Función de probabilidad, $b(x, n, p) = C_x^n p^x q^{n-x}$

c. Función de probabilidad acumulada $B(x, n, p) = \sum_{k=0}^{x} b(k, n, p) = \sum_{k=0}^{x} C_k^n p^k q^{n-k}$

d. $b(x, n, p) = B(x, n, p) - B(x-1, n, p)$

Nota:

i. $X \sim b(x, n, p)$, significa **"**la variable aleatoria X se distribuye binomialmente" con parámetros n y p.

ii. $X \sim B(x, n, p)$, representa la probabilidad binomial acumulada hasta el número $X = x$

El estudio de la distribución binomial se complementa con el cálculo de su valor esperado y varianza; un uso adecuado de las propiedades de la notación sigma y del "binomio de Newton" se justifica la ***propiedad 6.***

PROPIEDAD 6. VALOR ESPERADO Y VARIANZA DE LA VA BINOMIAL

Sea la VAD $X =$"número de éxitos en n ensayos independientes", si p es la probabilidad de éxito y q es la probabilidad de fracaso, entonces:

a. $E[X] = np$

b. $V[X] = npq$

c. $DE = \sqrt{npq}$

Apliquemos las propiedades ***5. y 6.*** en la caracterización de variables aleatorias binomiales.

EJEMPLO 10. PROBABILIDADES Y PARÁMETROS BINOMIALES

1.

a. Sea la VAD, x = "número de éxitos en 4 ensayos independientes", con $p = 0.30$

i. fdp. Puesto que $n = 4$ (número de ensayos), $p = 0.30$ (probabilidad de éxito y $q = 0.70$ (probabilidad

$$b(x, 4, 0.30) = C_x^4 (0.30)^x (0.70)^{4-x}, \text{ si } X = 0, 1, 2, 3, 4.$$

ii. FDA, $B(x, 4, 0.30) = \sum_{k=0}^{4} b(k, 4, 0.30) = \sum_{k=0}^{4} C_0^4 (0.30)^k (0.70)^{4-k}$

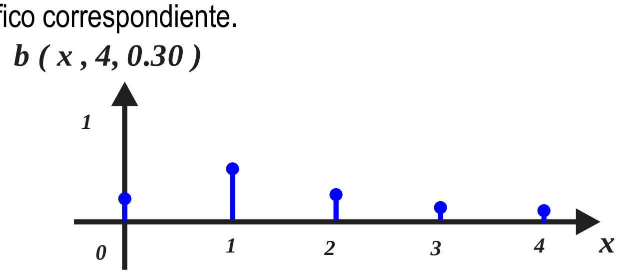
iii. Para representar gráficamente fdp y FDA requerimos de la probabilidades de las asignaciones de la variable aleatoria.

$$b(0, 4, 0.30) = C_0^4 (0.30)^0 (0.70)^4 = \frac{4!}{(4-0)!\,0!}(0.30)^0 (0.70)^4$$
$$= (1)(0.30)^0 (0.70)^4 = 0.2401$$
$$b(1, 4, 0.30) = C_1^4 (0.30)^1 (0.70)^3 = \frac{4!}{(4-1)!\,1!}(0.30)^1 (0.70)^3$$
$$= (4)(0.30)^1 (0.70)^3 = 0.4116$$
$$b(2, 4, 0.30) = C_2^4 (0.30)^2 (0.70)^2 = \frac{4!}{(4-2)!\,2!}(0.30)^2 (0.70)^2$$
$$= (6)(0.30)^2 (0.70)^2 = 0.2646$$
$$b(3, 4, 0.30) = C_3^4 (0.30)^3 (0.70)^1 = \frac{4!}{(4-3)!\,3!}(0.30)^3 (0.70)^1$$
$$= (4)(0.30)^3 (0.70)^1 = 0.0756$$
$$b(4, 4, 0.30) = C_4^4 (0.30)^4 (0.70)^0 = \frac{4!}{(4-4)!\,4!}(0.30)^4 (0.70)^0$$
$$= (1)(0.30)^4 (0.70)^0 = 0.0081$$

entonces, la distribución de probabilidad es

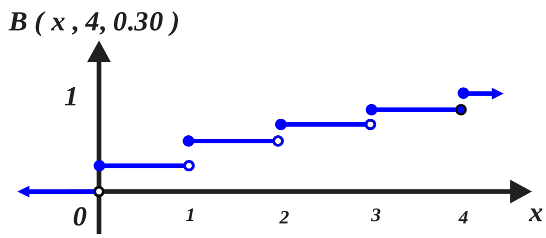
X	0	1	2	3	4
$b(x, 4, 0.30)$	0.2401	0.4116	0.2646	0.0756	0.0081

la *figura* muestra el gráfico correspondiente.



Por otra parte,

$$B(\,x\,,\;4\,,\;0.30\,)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<0 \\ 0.2401 & \text{si} \quad 0\le x<1 \\ 0.6517 & \text{si} \quad 1\le x<2 \\ 0.9163 & \text{si} \quad 2\le x<3 \\ 0.9919 & \text{si} \quad 3\le x<4 \\ 1 & \text{si} \quad x\ge 4 \end{cases}$$



iv. Puesto que $n=4$ y $p=0.30$,

$$E[\,X\,]=(\,4\,)(\,0.30\,)=1.2$$

v. Si $n=4$, $p=0.30$ y $q=0.70$

$$V[\,X\,]=(\,4\,)(\,0.30\,)(\,0.70\,)=0.84 \text{ y } DE=\sqrt{(\,4\,)(\,0.30\,)(\,0.70\,)}\approx 0.91652$$

El cálculo de probabilidades binomiales, tanto puntual (para un solo valor de X) como acumulada (para una secuencia de números enteros no negativos de X), el proceso puede ser largo y tedioso, sin embargo, el uso de tablas o de alguna ***aplicación on line*** (existen muchas y son muy versátiles) y facilitan su evaluación. El ***apéndice*** $A.1$ ***de esta guía*** contiene las tablas de las probabilidades binomiales acumuladas desde $n=1$ ensayo hasta $n=25$ ensayos y diversos valores de p; las siguientes tablas son una sección de ellas.

$n=19$	*probabilidad de éxito p*		
x/p	**0.40**	**0.45**	**0.50**
4	**0.0696**	**0.0280**	**0.0096**
5	**0.1629**	**0.0777**	**0.0318**
6	**0.3081**	**0.1727**	**0.0835**
7	**0.4878**	**0.3169**	**0.1796**
8	**0.6675**	**0.4940**	**0.3238**
9	**0.8139**	**0.6710**	**0.5000**
10	**0.9115**	**0.8159**	**0.6762**
11	**0.9648**	**0.9129**	**0.8204**

$n=10$	*probabilidad de éxito p*		
x/p	**0.85**	**0.90**	**0.95**
3	**0.0001**	**0.0000**	**0.0000**
4	**0.0014**	**0.0001**	**0.0000**
5	**0.0099**	**0.0016**	**0.0001**
6	**0.0500**	**0.0128**	**0.0010**
7	**0.1798**	**0.0702**	**0.0115**
8	**0.4557**	**0.2639**	**0.0861**
9	**0.8031**	**0.6513**	**0.4013**
10	**1.0000**	**1.0000**	**1.0000**

El *ejemplo 11* explica la forma de uso de las tablas de probabilidades binomiales acumuladas incluidas en el ***apéndice*** $A.1$ de esta guía.

EJEMPLO 11. CALCULO DE PROBABILIDADES BINOMIALES CON TABLAS

1.

i. Cálculo de $B(7,\ 19,\ 0.45)$. En la primera columna (de la tabla izquierda) localizamos $n=19$, en la segunda columna se localizamos el número $x=7$, sobre esta fila nos desplazamos a la derecha hasta la columna encabezada por $p=0.45$, observamos el número 0.3169, entonces,

$$B(7,\ 19,\ 0.45)=0.3169$$

ii. Cálculo de $B(8, 10, 0.95)$. En la primera columna localizamos $n=10$, en la segunda columna localizamos el número $x=8$ y sobre esa fila nos desplazamos a la derecha hasta la columna encabezada por $p=0.95$, obtenemos

$$B(8,\ 10,\ 0.95)=0.0861$$

iii. En el cálculo de probabilidades puntuales, utilizamos la propiedad

$$b(x,\ n,\ p)=B(x,\ n,\ p)-B(x-1,\ n,\ p)$$

y aplicamos el procedimiento descrito en los incisos anteriores.

$$b(7, 19, 0.45)=B(7, 19, 0.45)-B(6, 19, 0.45)=0.3169-0.1727=0.1442$$

EJEMPLO 12. PROBLEMAS BINOMIALES

1.

a. Los estudios muestran que una de cada 5 personas tienen deudas bancarias.

Sea la VAD $X=$"número de personas con deudas bancarias en una muestra de tamaño 6". En una muestra de tamaño 6 calcula:

i. La probabilidad de que ninguna persona seleccionada tenga deudas bancarias.

$$p(X=0)=b(0,\ 6,\ 0.20)=\overset{6}{\underset{0}{C}}(0.20)^0(0.80)^6$$

$$=\frac{6!}{(6-0)!(0)!}(0.20)^0(0.80)^6=0.2621$$

ii. La probabilidad de que exactamente dos personas tengan deudas bancarias

$$p(X=2)=b(2,\ 6,\ 0.20)=\overset{6}{\underset{2}{C}}(0.20)^2(0.80)^4$$

$$=\frac{6!}{(6-2)!(2)!}(0.20)^2(0.80)^4=0.2458$$

iii. La probabilidad de que más de dos personas tengan deudas bancarias.

$$p(X>2)=1-p(X\le 2)=1-B(2,\ 6,\ 0.20)$$

$$=1-0.0989$$

iv. Valor esperado y la varianza.

$E[X] = 6(0.20) = 1.2$ y $V[X] = 6(0.20)(0.80) = 0.96$ respectivamente.

b. Se aplica cierta vacuna a cien estudiantes y se encontró que noventa perdieron el hábito de copiar las tareas.

Sea la VAD $X =$"número de alumnos que perdieron el habito de copiar las tareas en una muestra de 12 estudiantes".

i. Construye la función de probabilidades y la función de probabilidades acumuladas.

La fdp es $b(x, 12, 0.90) = \overset{12}{\underset{x}{C}}(0.90)^x(0.10)^{12-x}$

Función de probabilidades acumuladas, $B(x, 12, 0.90) = \sum_{k=0}^{x} \overset{12}{\underset{k}{C}}(0.90)^k(0.10)^{12-k}$

ii. Valor esperado y la varianza.

$$E[X] = 12(0.90) = 10.8 \text{ y } V[X] = 12(0.90)(0.10) = 1.08$$

iii. La probabilidad de que desde tres y hasta seis estudiantes hayan perdido el hábito de copiar tareas.

$$p(3 \leq X \leq 6) = B(6, 12, 0.90) - B(2, 12, 0.90) = 0.0005$$

iv. La probabilidad de que más de cuatro estudiantes hayan perdido el hábito de copiar tareas es

$$p(X > 4) = p(X \geq 5) = 1 - p(X \leq 4) = 1 - B(4, 12, 0.90) = 1 - 1 = 0$$

c. Sea la VAD $X =$"número de estudiantes que no perdieron el habito de copiar tareas en una muestra de 12".

i. fdp y la FPA:

$b(x, 12, 0.10) = \overset{12}{\underset{x}{C}}(0.10)^x(0.90)^{12-x}$ y $B(x, 12, 0.90) = \sum_{k=0}^{x} \overset{12}{\underset{k}{C}}(0.10)^k(0.90)^{12-k}$, respectivamente.

ii. Valor esperado y varianza:

$$E[X] = 12(0.10) = 1.2,\ V[X] = 12(0.10)(0.90) = 1.8,$$

respectivamente.

ii. Probabilidad de que entre tres (inclusive) y seis (inclusive) estudiantes no hayan perdido el hábito de copiar las tareas

$$p(3 \leq X \leq 6) = B(6, 12, 0.10) - B(2, 12, 0.10) = 0.1108$$

iii. Probabilidad de que más de cuatro estudiantes hayan perdido el hábito de copiar las tareas

$$p(X \geq 5) = 1 - p(X \leq 4) = 1 - B(4, 12, 0.90) \approx 1 - 0.0043 = 0.9957$$

c. Un controlador de plagas afirma: "el 95% de las cucarachas rociadas con insecticida mueren.

Sean las variables aleatorias:

$X =$ "número de cucarachas rociadas con insecticida y mueren".

X^C = "número de cucarachas rociadas con insecticida que no mueren".

Supón que su afirmación es verdadera y que rocía con el insecticida 24 cucarachas, calcula la probabilidad.

i. Exactamente 6 de las cucarachas rociadas mueran

$$p\left(X^C = 6\right) = B(6, 24, 0.05) - B(5, 24, 0.05) = 0.9998 - 0.9990 = 0.0008$$

ii. Más de 9 cucarachas rociadas con insecticida no mueran.

$$p\left(X^C \geq 10\right) = 1 - B(9, 24, 0.05) = 1 - 1.0000 = 0$$

iii. Más de 9 pero menos de 15 cucarachas rociadas con insecticida mueran es

$$p(9 < X < 15) = B(14, 24, 0.95) - B(9, 24, 0.95) = 0 - 0 = 0.$$

iii. Más de 9 pero menos de 15 cucarachas rociadas con insecticida no mueran es

$$p\left(9 < X^C < 15\right) = B(14, 24, 0.05) - B(9, 24, 0.05) = 0$$

iv. Entre 15 y 22 cucarachas que fueron rociadas mueran

$$p(15 < X < 22) = B(21, 24, 0.95) - B(15, 24, 0.95) = 0.1159$$

v. Se espera que $E[X] = 6(0.95) = 5.7$ cucarachas no mueran y

$$E\left[X^C\right] = 6(0.05) = 0.3$$

de las cucarachas rociadas mueran, además

$$V[X] = V\left[X^C\right] = 6(0.95)(0.05) = 0.285$$

d. $X \sim b(x, n, p) = \overset{18}{\underset{x}{C}}(0.35)^x(0.65)^{18-x}$, entonces, $n = 18$ y $p = 0.35$,

por tanto,

$$E[X] = 18(0.35) = 6.3 \text{ y } V[X] = 18(0.35)(0.65) = 4.095$$

e. Si $X \sim b(x, n, p)$ con $E[X] = 8$ y $DE = 2$, entonces, para determinar su fdp es necesario conoces los valores de n y p.

$E[X] = np = 8$ y $DE = \sqrt{npq} = 2$, implican $np = 8$ y $npq = 4$, entonces, $8q = 4$,

o bien,

$$q = \frac{1}{2} \text{ y } p = \frac{1}{2} \text{ y } b(x, 16, 0.5) = \overset{16}{\underset{x=0}{C}}(0.5)^x(0.5)^{16-x}$$

SECCIÓN 1.1
EJERCICIOS 4

1. Construye la función de probabilidad y traza la grafica $b(x, 3, 0.4)$

2. Tadeo produce el 10% de las piezas para cierto motor defectuosas lo que es muy elevado. El ingeniero de control de calidad verifica la producción de Tadeo sistemáticamente desde que notó tal situación. Calcula la probabilidad que en una muestra de diez piezas producidas por Tadeo el ingeniero encuentre:

a. Exactamente cinco defectuosas.
b. Cero defectuosas.
c. A lo más cinco defectuosas.
d. Cinco o más defectuosas.

3. Una vendedora tiene p de éxito de vender una aplancha. La vendedora efectúa cinco intentos para vender planchas y sus resultados de venta son independientes entre sí.

a. Si $p = 0.8$, ¿cuál es la probabilidad de que las cinco operaciones sean exitosas?
b. Si $p = 0.6$, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente cuatro operaciones sean exitosas?
c. Si $q = 0.7$, ¿cuál es la probabilidad de que menos de dos operaciones sean exitosas?

4. El 60% de los clientes de la cantina "*El Colegio"* piden "tonaya" como primera bebida. Sean 25 clientes de "*El Colegio"*, determina la probabilidad:

a. Exactamente ocho no pidan "tonaya" como primera bebida.
b. Seis no pidan "tonaya" como primera bebida.
c. Más de 6 pidan "tonaya" como primera bebida.
d. El número esperado y la varianza de que pedirán "tonaya" como primera bebida.

5. El 40% de los tiros de castigo que ejecuta un basquetbolista no son canasta, determina la probabilidad de que en los próximos 15 tiros de castigo que ejecutará el basquetbolista:

a. Ocho no sean canasta.
b. Seis no sean canasta.
c. Menos de seis no sean canasta.
d. El número esperado y la varianza de los tiros de castigo ejecutados por el basquetbolista sean canasta.

6. Si "El patrón*"* (habitante de la zona del Catatumbo *"afana"* un promedio de 25 cigarrillos diarios, con una desviación estándar de $\sqrt{6}$, construye la fdp binomial correspondiente.

7. Un comerciante afirma "en las cajas con treinta plátanos que expendo el 60% de ellos se encuentran maduros y listos para comer". Considera una caja de las que expende el comerciante y determina:

a. La probabilidad de que al menos dos plátanos no se encuentren maduros y listos para comer.
b. El número esperado de plátanos que no se encuentren maduros y listos para comer.
c. La varianza del número de plátanos maduros y listos para comer.

1.2 VARIABLE ALEATORIA CONTINUA Y Y DISTRIBUCIÓN NORMAL

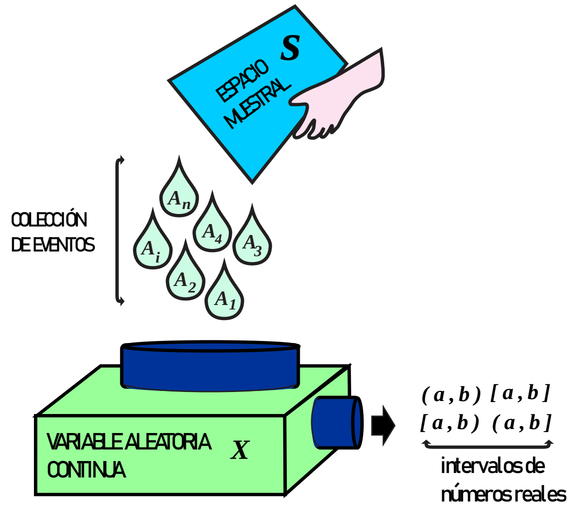
APRENDIZAJES

8. Esboza la curva de densidad para una variable aleatoria aproximadamente normal, a partir de la suavización del polígono de frecuencias de un ejemplo sencillo.
10. Deduce el proceso de estandarización de la distribución normal, aplicando la Regla Empírica, dentro de un problema contextualizado.
11. Utiliza la tablas para valores bajo la curva de la función normal estandarizada como el recurso para el cálculo de probabilidades o de valores z para dicha distribución.
12. Calcula probabilidades por medio de la distribución normal dentro de problemas contextualizados interpretando resultados.
13. Contrasta la gráfica para una situación de comportamiento aproximadamente normal con su correspondiente gráfica en el modelo estandarizado.
14. Concluye que una variable aleatoria continua, puede describirse y analizarse por su tendencia, dispersión y distribución.

TEMAS

Modelo de probabilidad continuo. Distribución Normal: Distribución normal estándar, área bajo la curva normal y manejo de tablas, problemas de aplicación.

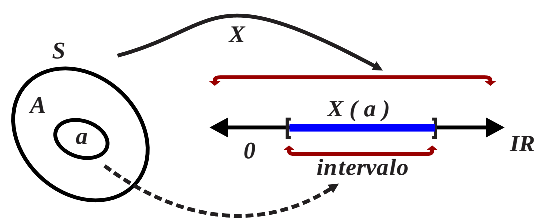
CASO CONTINUO



La información que proporciona la regla que transforma cierta colección de eventos en números reales facilita su manejo en cuanto a: notación, escritura y cálculo de probabilidades con otras ramas del conocimiento y de la matemática.

DEFINICIÓN 1. VARIABLE ALEATORIA CONTINUA

Sean:
i. S el espacio muestral de un experimento aleatorio.
ii. A una colección de eventos de S.
iii. La función $X : A \subseteq S \to I \subset IR$ con I un intervalo de números reales, entonces, la variable aleatoria X se denomina continua (VAC).



EJEMPLO 1. VARIABLE ALEATORIA CONTINUA

1.
a. Las calificaciones finales de los estudiantes en un grupo de cálculo oscilan en el intervalo $[\,0\,,10\,]$. El encargado de asignarlas (el profesor) clasifica a los estudiantes en los eventos:
$a =$ “estudiante aprobado”, si su calificación oscila en el intervalo $[\,5.5\,,10\,]$
$r =$ “reprobado, si su calificación oscila en el intervalo $[\,0\,,5.5\,)$
Sea la VAC X =”*calificación del estudiante*”.
Si se selecciona la calificación de un estudiante, entonces,

el espacio muestral es el conjunto $S=\{\ e,\ p,\ r\ \}$, y $R_X=[\,0\,,10\,]$,
además $X(\,a\,)=[\,5.5\,,10\,]$ y $X(\,r\,)=[\,0\,,5.5\,)$

b. Una persona encargada de del departamento de frutas de un supermercado clasifica los plátanos en una de las categorías:

$e=$ "extras", si su peso se encuentra entre los 150y 180 gramos,

$p=$ "primera", si su peso es mayor a 110 gramos y menor a 150 gramos,

$r=$, "regulares", si su peso es menor a 110 gramos.

Sea la VAC, $X=$"*peso de un plátano*".

Si selecciona un plátano, entonces, $S=\{\ e,\ p,\ r\ \}$ y $R_X=(\,0\,,180\,]$

También, $X(\,e\,)=[\,150\,,180\,]$, $X(\,p\,)=(\,110\,,150\,)$, $X(\,r\,)=(\,0\,,110\,)$

SECCIÓN 2.1
EJERCICIOS 1

1. Para la variable aleatoria.

i. Construye el espacio muestra y su recorrido.

ii. Establece la asignación a cada evento.

a. Las personas se clasifican de acuerdo a su estatura como:

bajas $b=$"miden hasta 165 centímetros",

normales $n=$"miden más de 165 centímetros pero menos de 177 centímetros",

altos $a=$"miden más de 177 centímetros pero menos de 212 centímetros".

VAC, $X=$"*estatura de las personas*".

Se selecciona una persona y se mide su estatura.

b. De acuerdo a su calificación, los alumnos de un Colegio son clasificados como:

no aptos $na=$calificaciones menores que 6 puntos,

suficientes $s=$"calificaciones desde 6 puntos y menores a 7.5 puntos,

buenos $b=$ "calificaciones desde los 7.5 puntos pero menores a 9 puntos,

muy buenos $mb=$ "calificaciones de 9 puntos y hasta 10 puntos.

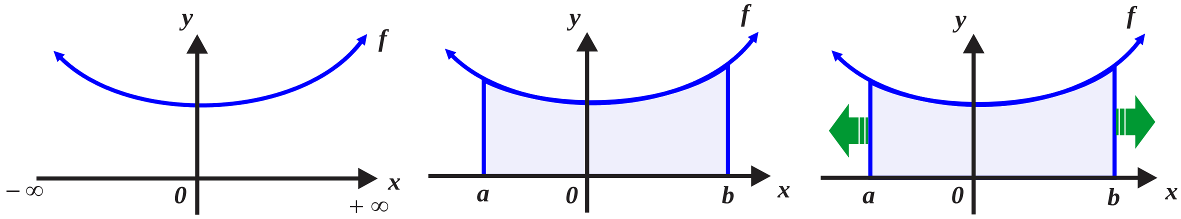
VAC, $X=$"*clasificación del estudiante*".

Si se selecciona un estudiante del Colegio.

El proceso de asignación de probabilidades a variables aleatoria continuas suele ser más complicado que en el caso discreto, en particular, se asigna probabilidad cero a valores específicos (números) asumidos o asignados a una VAC.

FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD

La función utilizada para asignar probabilidades en el caso de una VAC es la “función de densidad de probabilidad” y se relaciona con el “operador” que en cálculo diferencial e integral se denomina “integral definida”, sin embargo, en esta obra el concepto anterior equivale al área de una región del plano cartesiano que limitada: por el eje de las abscisas, y la curva asociada a una función positiva definida sobre un intervalo de números reales, ***figura anexa***



DEFINICIÓN 2. FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD

Sean: X una VAC , si f_X una función que satisface:

i. $f_X(x) \geq 0$ para todo número real x. **ii.** $\overset{+\infty}{\underset{-\infty}{A}} f_X(x) = 1$,

entonces, se denomina “función de densidad de probabilidad” de X .

Las propiedades más importantes de una función de densidad de probabilidad se encuentran en la ***propiedad 1.***

PROPIEDAD 1. FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD

Sea, si f_X una función probabilidad, entonces,

i. $f_X(x_0) = 0$ para todo número real x_0.

ii. $p(a \leq X \leq b) = p(a < X \leq b) = p(a \leq X < b) = p(a < X < b)$

iii. f_X es creciente y sus asíntotas horizontales son las líneas recta de ecuaciones $y = 0$ y $y = 1$

En la *definición 2.*

i. El ***inciso i.*** garantiza que la probabilidad es un número positivo y que su curva asociada se encuentra en los cuadrantes I y II del plano cartesiano.

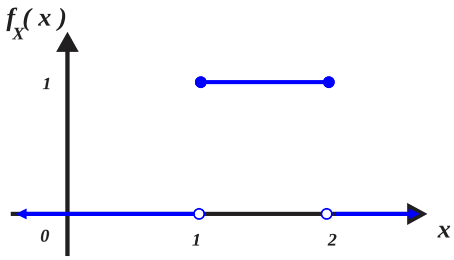
ii. El ***inciso ii.*** garantiza que la probabilidad del espacio muestral es 1, es decir, que el área de la región del plano positiva que está limitada por la curva asociada a f_X y el eje X es 1.

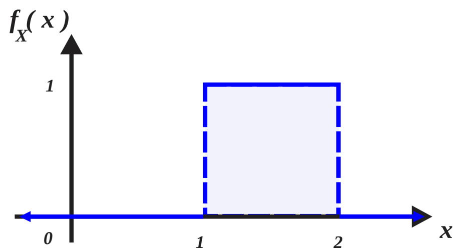
EJEMPLO 2. FUNCIONES DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD

1.

a. $f_X(x) = \begin{cases} 1 & si \quad 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$, es una fdp asociada a una VAC .

i. La figura muestra la región que limita en el plano cartesiano, una región cuadrada con área 1, por tanto, $\int_{-\infty}^{+\infty} f\,(x) = \int_{1}^{2} f\,(x) = (2-1)(1) = 1$ y $f_X(x) \geq 0$

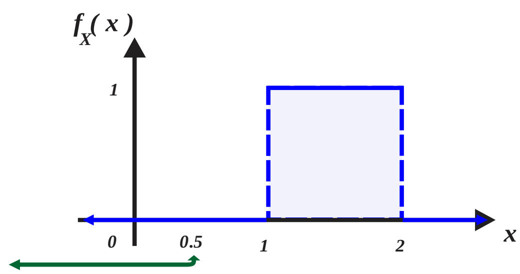




b.

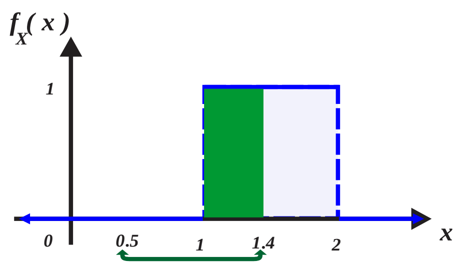
i.

$$p(x \leq 0.5) = \int_{-\infty}^{0.5} f_X(x) = (0)(0) = 0$$



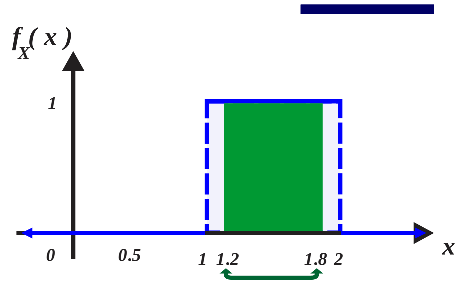
ii.

$$\begin{aligned} p(0.5 \leq x \leq 1.4) &= \int_{0.5}^{1.4} f_X(x) \\ &= \int_{0.5}^{1} f_X(x) + \int_{1}^{1.4} f_X(x) \\ &= (0)(0) + (1)(1.4-1) \\ &= 0.4 \end{aligned}$$



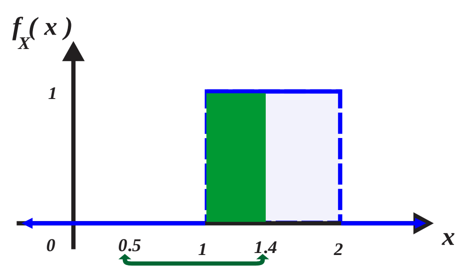
iii.

$$\begin{aligned} p(1.2 \leq x \leq 1.8) &= \int_{1.2}^{1.8} f_X(x) \\ &= (1)(1.8-1.2) \\ &= 0.6 \end{aligned}$$



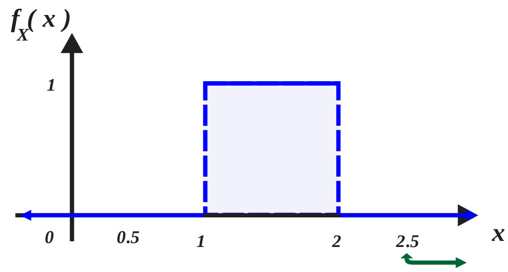
iv.

$$\begin{aligned} p(1.4 < x < 2.4) &= \int_{1.4}^{2.4} f_X(x) \\ &= \int_{1.4}^{2} f_X(x) + \int_{2}^{2.4} f_X(x) \\ &= \int_{1.4}^{2} (1) + \int_{2}^{2.4} (0) \\ &= (1)(2-1.4) + 0(2.4-2) = 0.6 \end{aligned}$$



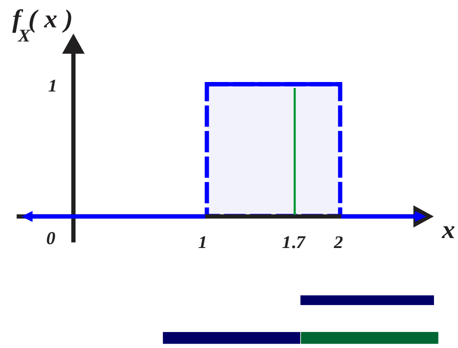
v.

$$p(x > 2.5) = 1 - p(x \le 2.5)$$
$$= 1 - \int_{1}^{2.5} f_X(x)$$
$$= 1 - (2 - 1) = 0$$



vi.

$$p(x = 1.7) = \int_{1.7}^{1.7} f_X(x)$$
$$= (1)(.17 - 1.7)(1) = 0$$



SECCIÓN 2.1
EJERCICIOS 2

1. Si $f_X(x) = \begin{cases} 2 & 0 \le x \le 0.5 \\ 0 & otro\ caso \end{cases}$

a. Traza la gráfica.

b. Calcula $p(x < 0.3)$

c. Calcula $p(0.2 < x < 0.3)$

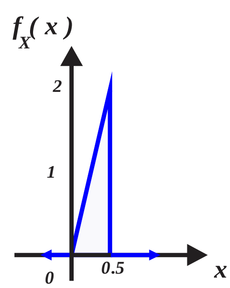
d. Calcula $p(x > 0.4)$

e. Calcula $p(x \ge 0.1)$

3. Si $f_X(x) = \begin{cases} 4 & 0 \le x \le A \\ 0 & otro\ caso \end{cases}$, determina el valor de A para que $f_X(x)$ sea fdp.

2. Si $f_X(x) = \begin{cases} A & 2 \le x \le 10 \\ 0 & otro\ caso \end{cases}$, determina el valor de A para que $f_X(x)$ sea fdp

4. La figura muestra un triángulo con base de longitud 1 y altura con longitud 2.
Supón que corresponde a una fdp.



a. Obtén la fdp.

b. Calcula $p(x < 0.2)$

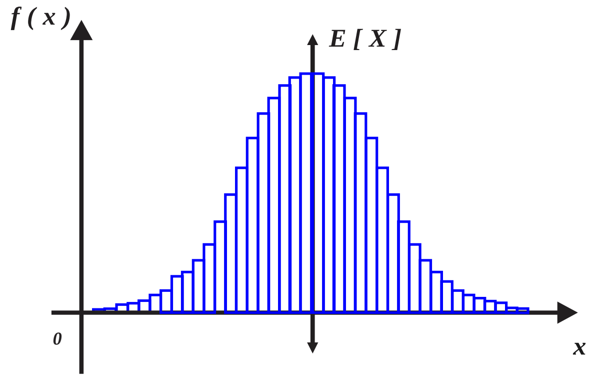
c. Calcula $p(x > 0.2)$

d. Calcula $p(x = 0)$

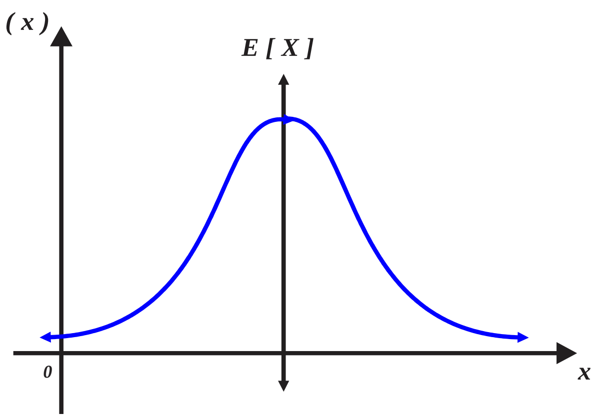
DISTRIBUCIÓN NORMAL

Existen gran variedad de “distribuciones continuas” de probabilidad, sin embargo, dada su importancia sólo trataremos la densidad normal.

En una gran diversidad de estudios y análisis del comportamiento de grupos de medidas (datos), se ha observado que el patrón de comportamiento del histograma de frecuencias (o probabilidades) es similar al mostrado en la *figura* de la derecha.



Si el gráfico de la *figura anterior* se “suaviza” se obtiene la curva de la siguiente *figura.* Esta curva suave "asintótica" (con asíntota el eje de las abscisas) representa de modo intuitivo la distribución teórica de la característica observada y su importancia se debe a la frecuencia con la que distintas variables asociadas a mediciones (de características de objetos, fenómenos naturales y cotidianos, entre otros) se asemejan con ella.



En estos casos la función de probabilidad (regla de correspondencia) que “mejor se ajusta” a ellas se es la función de densidad normal o (distribución normal). La curva perteneciente a la distribución normal es parecida a una campana y es simétrica respecto a la línea recta que representa su valor esperado y por este motivo se llama “campana de Gauss o simplemente Gaussiana”; su función (matemática) asociada fue descrita por Gauss por lo que es común referirse a ella como “ley de probabilidades de Gauss”. Según este modelo de probabilidad, en todo proceso de medida influyen diversas causas que hacen variar su resultado (real), las causas son independientes entre sí y muy pequeñas de manera que los resultados se acumulan alrededor de su valor esperado.

DEFINICIÓN 3. FUNCIÓN DE DENSIDAD DE NORMAL

i. La VAC X, tal que, $-\infty < X < +\infty$, $f_X(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$, $-\infty < \mu < +\infty$ y $\sigma > 0$ se llama función de densidad normal o distribución normal con parámetros μ (miú) y σ (sigma).

En la ***definición 3***., el símbolo $e \approx 2.718$ es el número (irracional) de Euler y representa la base de los logaritmos naturales, tiene un valor aproximado de 2.718, el símbolo π es la constante matemática de valor aproximado a 3.1416, los símbolos μ (miú) y σ (sigma) son letras griegas y denominan parámetros. Para referirnos a distribución normal se utilizaremos la notación

$X \sim N\left(\mu , \sigma^2 \right)$, que significa:

"la variable aleatoria X se distribuye normalmente con parámetros μ y σ^2".

Entre las características de

$$f_X\left(x \right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2}$$

destacan:

i. Recibe el nombre "curva normal", "curva gaussiana" o campana de Gauss.

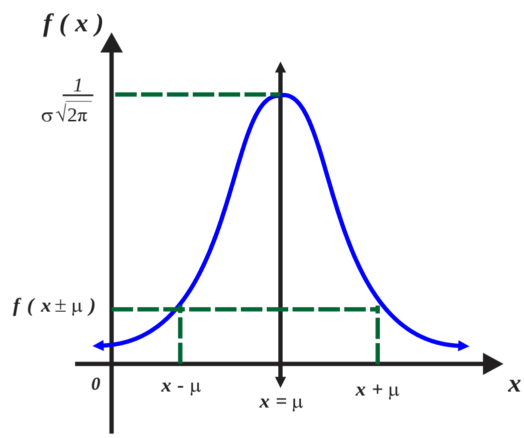
ii. Valor máximo se encuentra cuando

$x = \mu$ y es $f\left(\mu \right) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$

iii. Asíntota horizontal, eje de las abscisas

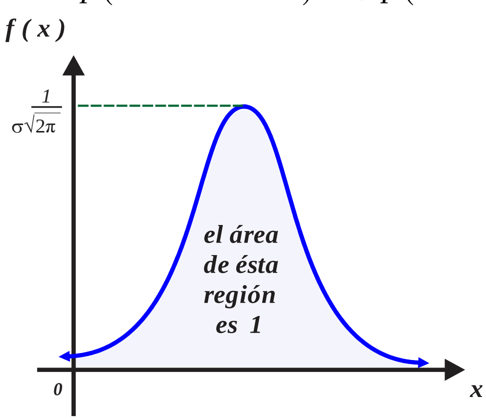
iv. Simétrica a la línea recta vertical de ecuación $x = \mu$, es decir,

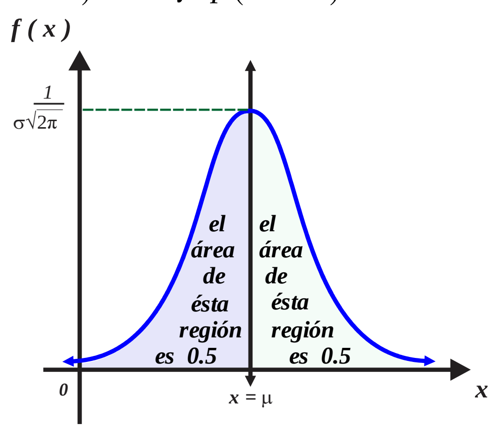
$$f\left(x-\mu \right) = f\left(x+\mu \right)$$



v. El área de la región que limita con el eje de las abscisas es 1, por tanto,

$$p\left(-\infty < x < +\infty \right) = 1,\ p\left(-\infty < x < 0 \right) = 0.5 \text{ y } p\left(x > 0 \right) = 0.5$$

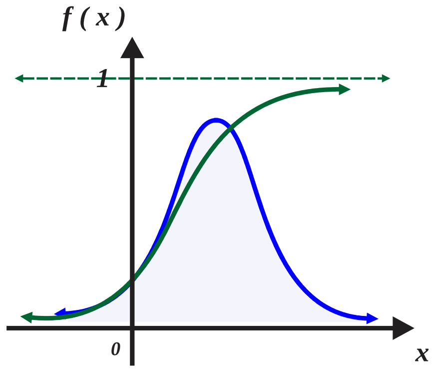


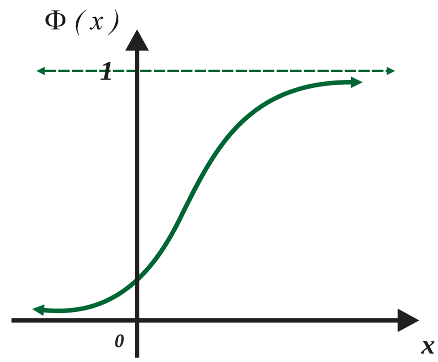


vi. La distribución de probabilidad acumulada se define por medio de la "función área",

$$\Phi\left(x \right) = p\left(X \le x \right) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2} \quad \text{si, } -\infty < X < +\infty,\ -\infty < \mu < +\infty \text{ y } \sigma > 0$$

su curva asociada tiene la forma mostrada en la figura.



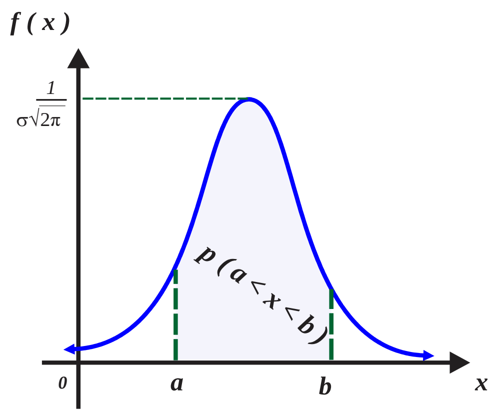


vii.
La probabilidad

$$p\left(a < x < b \right)$$

se representa con la región limitada por la "gaussiana", el eje de las abscisas y las líneas rectas verticales con ecuaciones

$$x = a \text{ y } x = b$$



ix. La ***propiedad 2.*** complementa las propiedades de $X \sim N\left(\mu , \sigma^2 \right)$

PROPIEDAD 2. FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD

Si $X \sim N\left(\mu \ , \ \sigma^2 \right)$, entonces,

i. $E\left[X \right] = \mu$ (el valor esperado también se denomina media). **ii.** $V\left[X \right] = \sigma^2$ y $DE\left[X \right] = \sigma$

El cálculo de "probabilidades normales" requiere del proceso de transformación (simplificación) llamado "estandarización" o normalización, es decir, convertir $X \sim N\left(\mu \ , \ \sigma^2 \right)$ a la forma $Z \sim N\left(0 \ , \ 1^2 \right)$ (de normal cero-uno) aplicando el cambio de variable $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$

DEFINICIÓN 3. FUNCIÓN DE DENSIDAD DE NORMAL

Si $X \sim N\left(\mu \ , \ \sigma^2 \right)$, entonces,

i. $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ es "variable aleatoria normal estándar".

ii. La conversión de $X \sim N\left(\mu \ , \ \sigma^2 \right)$ en $Z \sim N\left(0 , 1^2 \right)$ se llama "normalización".

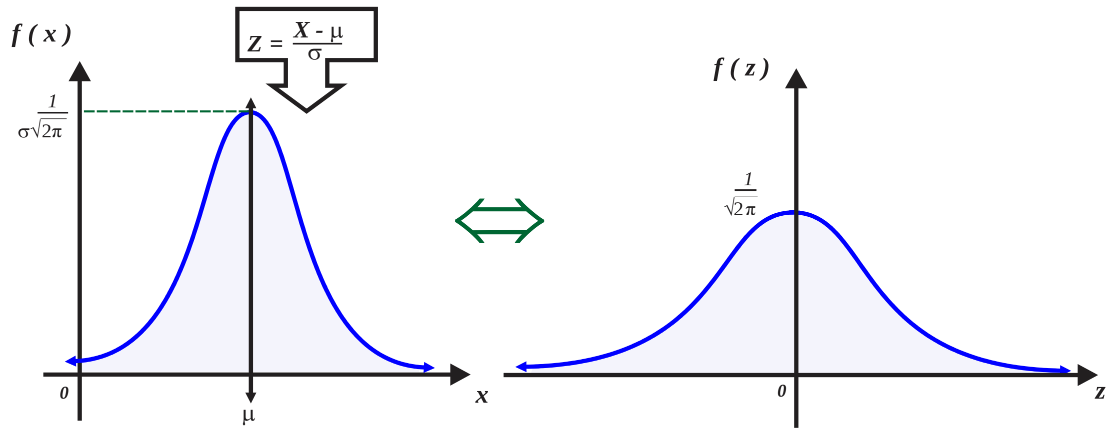
iii. Si $Z \sim N\left(0 , 1^2 \right)$, entonces, $f\left(z \right) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$

Las siguientes *figuras* muestra el efecto gráfico de transformar

$$X \sim N\left(\mu \ , \ \sigma^2 \right) \text{ en } Z \sim N\left(0 , 1^2 \right)$$

(translación vertical de manera que la línea recta de ecuación $x = \mu$ coincida con el eje de las ordenadas y ajuste del valor máximo (altura) al número

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$



La ***propiedad 3.*** son las características de las VAC en el contexto de la distribución normal (cero-uno).

PROPIEDAD 3. FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD

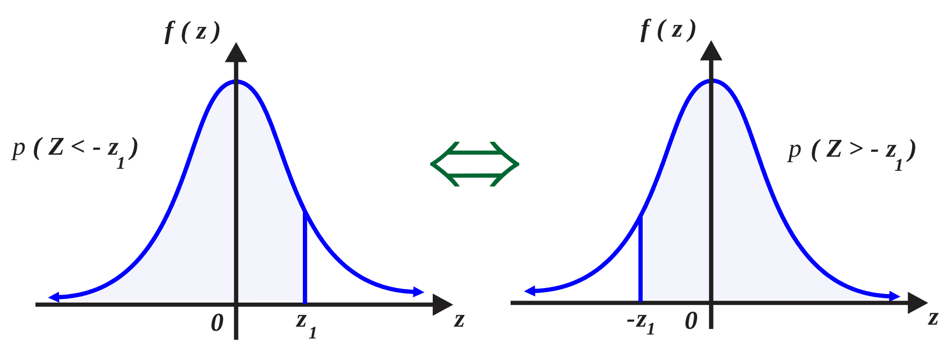
Si $Z \sim N\left(0 \ , \ 1^2 \right)$ y $\Phi\left(z_1 \right) = p\left(Z < z_1 \right)$, entonces,

i. $p\left(Z > z_1 \right) = \Phi\left(-z_1 \right)$ y $p\left(Z > -z_1 \right) = \Phi\left(z_1 \right)$

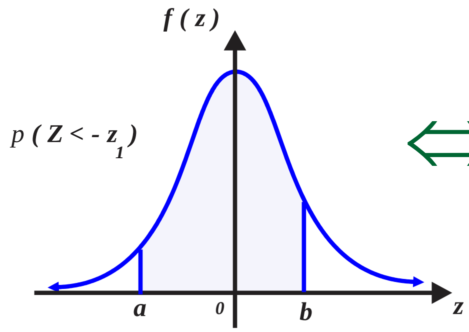
ii. $p\left(a < Z < b \right) = \Phi\left(b \right) - \Phi\left(a \right)$

iii. $p\left(-a < Z < a \right) = D\left(a \right)$

La siguiente figura muestra la ***propiedad 3***.

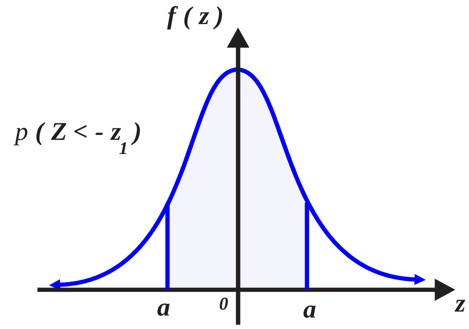


$p\ (Z < -z_1) = \Phi\ (z_1) = p\ (Z > -z_1)$



$p(a<Z<b) = \Phi(b) - \Phi(a)$

$\Leftrightarrow$



$p(-a<Z<a) = \Phi(a) - \Phi(-a) = D(a)$

El cálculo de probabilidades normales se realiza utilizando ***tablas de probabilidad*** o mediante una ***aplicación on line*** (existe gran variedad en la web). Por las características del presente trabajo utilizaremos ***tablas***.

Las tablas $A.2$ del *apéndice* $A.1$ están encabezadas de la siguiente forma:

z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	$D(z)$

i. La primera columna se refiere a las asignaciones a la variable aleatoria Z.
ii. La columna $\Phi(-z) = p(Z \leq -z)$ proporciona la probabilidad normal acumulada hasta $-z$.
iii. La columna $\Phi(z) = p(Z \leq z)$ contiene la probabilidad normal acumulada hasta z.
iv. La columna $D(z) = p(-z \leq Z \leq z)$ contiene la "probabilidad normal" entre $-z$ y z.

EJEMPLO 3. USO DE TABLAS EN EL CÁLCULO DE PROBABILIDAD

1. Sea $Z \sim N(0, 1^2)$ y calcula las probabilidades indicadas.

a. $p(Z \leq 1.20)$

$p(Z \leq 1.20) = \Phi(1.20)$, en las tablas $A.2$ del *apéndice 1* observamos

z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	$D(z)$
1.20	0.1151	0.8849	0.7699

entonces, $p(Z \leq 1.20) = \Phi(1.20) = p(Z \leq 1.20) = 0.8849$

b. $p(Z \leq -1.60)$

$p(Z \leq -1.60) = \Phi(-1.60)$, en las tablas $A.2$ del *apéndice 1* observamos

z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	$D(z)$
1.60	0.0548	0.9452	0.8904

por tanto, $p(Z \leq -1.60) = \Phi(-1.60) = 0.0548$

c. $p(0 \leq Z \leq 1.20)$

$p(0 \leq Z \leq 1.20) = \Phi(1.20) - \Phi(0)$, utilizamos las tablas $A.2$ del *apéndice 1* y obtenemos

$p(\ 0 \leq Z \leq 1.20\ ) = \Phi(1.20) - \Phi(0) = 0{,}8849 - 0.5000 = 0.3849$

z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	$D(z)$
1.20	0.1151	0.8849	0.7699

z	$\Phi(-Z)$	$\Phi(z)$	$D(z)$
0	0.5000	0.5000	0.0000

d. $p(-0.90 \leq Z \leq 0)$

$p(-0.90 \leq Z \leq 0) = \Phi(0) - \Phi(-0.90)$, en las tablas $A.2$ del *apéndice 1* observamos

z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	$D(z)$
-0.90	0.1841	0.8159	0.6319

z	$\Phi(-Z)$	$\Phi(z)$	$D(z)$
0	0.5000	0.5000	0.0000

entonces, $p(-0.90 \leq Z \leq 0) = \Phi(0) - \Phi(-0.90) = 0.5000 - 0.1841 = 0.3159$

e. $p(0.30 \leq Z \leq 1.56)$

$p(0.30 \leq Z \leq 1.56) = \Phi(1.56) - \Phi(0.3)$, con tablas $A.2$ del *apéndice 1*,

z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	$D(z)$
0.30	0.3821	0.6179	0.2358

z	$\Phi(-Z)$	$\Phi(z)$	$D(z)$
1.56	0.0594	0.9406	0.8812

entonces,

$$p(0.30 \leq Z \leq 1.56) = \Phi(1.56) - \Phi(0.3) = 0.9406 - 0.6179 = 0.3227$$

f. $p(-0.20 \leq Z \leq 0.20)$

$p(-0.20 \leq Z \leq 0.20) = D(0.20) = 0.1585$, utilizando las tablas $A.2$ del *apéndice 1*

z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	$D(z)$
0.20	0.4207	0.5793	0.1585

g. $p(Z \geq -0.20)$

$p(Z \geq -0.20) = \Phi(0.20)$, en las tablas $A.2$ del *apéndice 1* observamos

z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	$D(z)$
0.20	0.4207	0.5793	0.1585

entonces,

$$p(Z \geq -0.20) = \Phi(0.20) = 0.5793$$

h. $p(Z \geq 2.30)$

$p(Z \geq 2.30) = \Phi(-2.30) = 0.0107$, las tablas $A.2$ del *apéndice 1* muestran

z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	$D(z)$
-2.30	0.0107	0.9893	0.9786

entonces,

$$p(Z \geq 2.30) = \Phi(-2.30) = 0.0107$$

El cálculo de cuantiles (en particular percentiles) es relevante en problemas relacionados con la distribución normal.

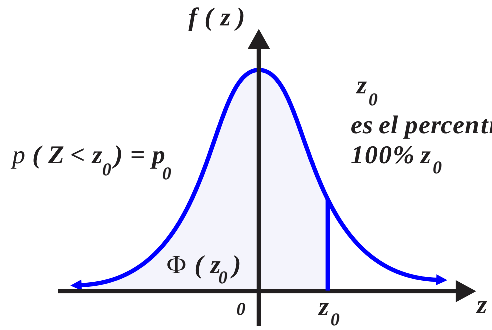
DEFINICIÓN 4. CUANTILES

Si $Z \sim N\left(0, 1^2\right)$, $p\left(Z \le z_0\right) = p_0$, entonces, el número z_0, tal que,

$$\left(100\%\right) \cdot p\left(Z \le z_0\right) = \left(100\%\right) \cdot p_0,$$

se cuantil del $100\% p_0$

En las ***tablas del apéndice*** A incluimos los valores de los cuantiles de la distribución normal estandarizada mismos que pueden calcularse con ellas o con una ***aplicación on line***.



EJEMPLO 4. CÁLCULO DE CUANTILES CON TABLAS

1. Calcula el número

a. z_{30}

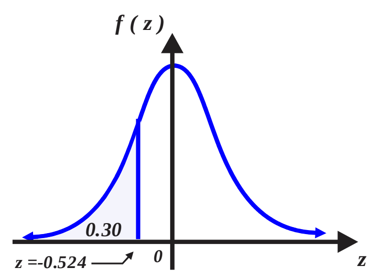
$p\left(Z \le z_0\right) = 0.30$,

entonces, z_0 es negativo (el área o probabilidad va de $-\infty$ a z_{30}), en las tablas del ***apéndice*** $A.3$ observamos

$\%$	$Z\left(\Phi\right)$
30.0	-0.524

entonces,

$z_{30\%} = -0.524$



b. $p\left(Z \ge z_0\right) = 0.525$

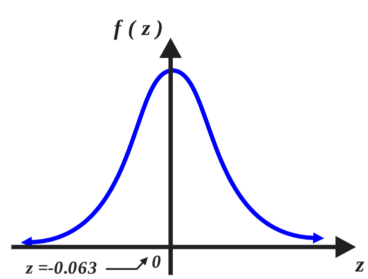
$$p\left(Z \ge z_0\right) = p\left(Z \le -z_0\right) = 0.475,$$

en las tablas del ***apéndice*** $A.3$ localizamos $z_{47.5}$,

$\%$	$Z\left(\Phi\right)$
47.5	0.063

por tanto,

$z_{47.5\%} = -0.063$



EJEMPLO 5. APLICACIONES DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

1. Resuelve.

a. El ancho de las ventanas de en una unidad habitacional se distribuye normalmente con longitud media de 90 centímetros y desviación estándar 5 centímetros.

Sea la $VAC\ \ X =$ “ancho de las ventanas”.

i. Con la renovación de los edificios de la unidad habitacional, las ventanas con ancho comprendido entre los 80 y los 100 centímetros serán reemplazadas.

i. Calcula la probabilidad de que una ventana específica tenga que ser reemplazada.

$X \sim N\left(90\,,5^2\right)$, entonces

$$p\left(80 \le X \le 100\right) = p\left(\frac{80-90}{5} < Z < \frac{100-90}{5}\right) = p\left(-2 < Z < 2\right),$$
$$= \Phi\left(2\right) - \Phi\left(-2\right) = 0.9545,$$

ii. Las ventanas con ancho mayor a 95 centímetros serán remodeladas, entonces, la probabilidad de que una ventana sea remodelada es

$$p\left(X > 95\right) = p\left(Z > \frac{95-90}{5}\right) = p\left(Z > 1\right) = \Phi\left(-1\right) = 0.1587$$

iii. Las ventanas con ancho menor a 80 centímetros serán desechadas, entonces, la proporción de ventanas desechadas es

$$p\left(X < 80\right) = p\left(Z < \frac{80-90}{5}\right) = p\left(Z < -2\right) = \Phi\left(-2\right) = 0.0228$$

b. El peso de las papayas “maradol” que expende *“Frutimex”*, se distribuye normalmente, con un valor promedio de 3.2 kilogramos y desviación estándar 0.2 kilogramos.

Sea $X =$”peso de las papayas hawaianas”, entonces, $X \sim N\left(3.2,\ 0.2^2\right)$

i. Inicialmente son seleccionadas las papayas con peso superior a 2.8 kilogramos, calcula la fracción de papayas seleccionadas inicialmente.

$$p\left(X > 2.8\right) = p\left(Z > \frac{2.8-3.2}{0.2}\right) = p\left(Z > -2\right) = \Phi\left(2\right) = 0.9772$$

97.72% de las papayas pesa más de 2.8 kilogramos.

ii. Calcula la probabilidad de que una papaya pese entre 2.8 y 3.1 kilogramos.

$$p\left(2.8 < X < 3.1\right) = p\left(\frac{2.8-3.2}{0.2} < Z < \frac{3.1-3.2}{0.2}\right)$$
$$= p\left(-2 < Z < -0.5\right) = \Phi\left(-0.5\right) - \Phi\left(-2\right) = 0.2858$$

iii. La compañía rematará el 30% de las papayas con peso menor x_0 kilogramos. ¿Cuál es el peso máximo de las papayas por rematar?

El 30% de las papayas con peso mínimo se representa por $p\left(0 < X < x_0\right) = 0.30$

Por tanto, $p\left(0<X<x_0\right)=p\left(\frac{0-3.2}{0.2}<Z<\frac{x_0-3.2}{0.2}\right)=0.30$

Considerando

$$p\left(-16<Z<\frac{x_0-3.2}{0.2}\right)=0.30 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{x_0-3.2}{0.2}\right)-\Phi\left(-16\right)=0.30 \text{ y } \Phi\left(-16\right)=0$$

obtenemos, $\Phi\left(\frac{x_0-3.2}{0.2}\right)=0.30$, o bien, $\frac{x_0-3.2}{0.2}=z_{0.30}$, con las tablas de cuantiles normales,

$\frac{x_0-3.2}{0.2}=-0.524$ y $x_0=\left(0.2\right)\left(-0.524\right)+3.2=3.0952$

El 30% de las papayas tiene un peso inferior a 3.0952 kilogramos.

c. El gasto semanal en combustible de José Pedro se distribuye normalmente con media $\$600$ y desviación estándar $\$60$ en su vehículo, es decir,

$X=$“gasto semanal de José Pedro en combustible y $X\sim N\left(600, 60^2\right)$

i. La probabilidad de José Pedro de gastar más de $\$612$ en combustible en una semana cualquiera es $p\left(X>612\right)=p\left(Z>\frac{612-600}{60}\right)=p\left(Z>0.2\right)=\Phi\left(-0.2\right)=0.04207$

ii. La probabilidad de que José Pedro gaste menos de $\$440$ en transporte la próxima semana es

$$p\left(0<X<440\right)=p\left(\frac{0-600}{60}<Z<\frac{640-600}{60}\right)=p\left(-10<Z<1.3\bar{3}\right)=\Phi\left(1.3\bar{3}\right)=0.9082$$

iii. Calcula el gasto semanal que supera (representado por x_0) con probabilidad de 0.15

$$p\left(X>x_0\right)=p\left(Z>\frac{x_0-600}{60}\right)=0.15 \text{, o bien, } p\left(Z<\frac{x_0-600}{60}\right)=0.85,$$

entonces, $\frac{x_0-600}{60}=z_{0.85}$ utilizando las tablas de cuantiles normales,

$$\frac{x_0-600}{60}=-0.524 \text{ y } x_0=\left(60\right)\left(-0.524\right)+600=631.44$$

d. En la selección de sus futuros empleados, el jefe de personal de “*La KIKA*” utiliza una prueba cuya puntuación media μ y desviación estándar $\sigma=8$. La distribución de las puntuaciones es normal y una puntuación mínima de 60 permite al aspirante continuar en el concurso de selección con una probabilidad del 90%.

i. Determina el valor de μ.

Sea $X=$“puntuación obtenida de los aspirantes”, entonces, $X\sim N\left(\mu, 8^2\right)$

Un aspirante seguirá siendo considerado en la selección si

$$p\left(X > 60\right) = 0.90 \text{, o bien, } p\left(Z > \frac{60-\mu}{8}\right) = 0.10$$

entonces, $p\left(Z < \frac{60-\mu}{8}\right) = 0.90 \Leftrightarrow \frac{60-\mu}{8} = z_{0.90}$, pero $z_{0.90} = 1.2816$, luego,

$$\frac{60-\mu}{8} = 1.2816 \text{, por tanto, } \mu = 60 - 8\left(1.2816\right) \text{ y } \mu = 49.7472 \text{ puntos.}$$

ii. Determinar μ, de manera que el 80% de los solicitantes sean eliminados del concurso después de la prueba.

Los eliminados son $p\left(X < 60\right) = p\left(Z < \frac{60-\mu}{8}\right) = 0.80 \Leftrightarrow \frac{60-\mu}{8} = z_{0.80}$

$$\frac{60-\mu}{8} = 0.8416 \text{, o bien, } \mu = 53.2672 \text{ puntos.}$$

e. La Ingeniera Martínez diseñó una máquina envasadora de café, su instructivo indica que deposita la cantidad de café programada con una desviación estándar de σ gramos.

Sea la VA $X =$"peso del cereal en el envases".

Supongamos que la cantidad de café en el envase se distribuye normalmente, $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$

i. Calcula σ cuando el contenido medio en los envases es 20 kilogramos y 5% de ellos contiene más de 20.5 kilogramos de café.

$$p\left(X > 20.5\right) = p\left(Z > \frac{20.5-20}{\sigma}\right) = 0.05 \Leftrightarrow p\left(Z < \frac{20.5-20}{\sigma}\right) = 0.95,$$

entonces, $\frac{20.5-20}{\sigma} = z_{0.95} \Leftrightarrow \frac{20.5-20}{\sigma} = 1.6449$ y $\sigma = 0.3039$ kilogramos.

ii. Calcula σ cuando el contenido medio en los envases es 20 kilogramos y 5% de ellos contiene menos de 19 kilogramos de café.

$$p\left(X < 19\right) = p\left(Z < \frac{19-20}{\sigma}\right) = 0.05,$$

entonces,

$$\frac{19-20}{\sigma} = z_{0.05} \Leftrightarrow -\frac{1}{\sigma} = -1.6449 \text{ y } \sigma = 0.5901 \text{ kilogramos.}$$

f. Sea $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$

i. La proporción de asignaciones a X que difieren de la media en menos de σ es

$$p\left(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma\right)$$

estandarizando,

$$p\left(\frac{\mu-\sigma-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{\mu+\sigma-\mu}{\sigma}\right) = p\left(\frac{-\sigma}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{\sigma}{\sigma}\right) = p\left(-1 < Z < 1\right)$$

Por tanto,

$$p\left(-1<Z<1\right)=0.8413$$

ii. La proporción de asignaciones a X que difieren de la media en menos de 2σ es

$$p\left(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma\right),$$

normalizando,

$$p\left(\frac{\mu-2\sigma-\mu}{\sigma}<\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{\mu+2\sigma-\mu}{\sigma}\right)=p\left(\frac{-2\sigma}{\sigma}<\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{2\sigma}{\sigma}\right)=p\left(-2<Z<2\right)$$

De las tablas de la distribución normal

$$p\left(-2<Z<2\right)=0.9545$$

SECCIÓN 2.1
EJERCICIOS 3

1. Los pesos de los lechones con un seis meses de vida se distribuyen normalmente, con media 8 kilogramos y desviación estándar 0.9 kilogramos. Si se registran las mediciones y se redondean a décimas de kilogramo, determine la proporción de lechones con peso:

a. Superior a 9.5 kilogramos.

b. Menor a 8.6 kilogramos.

c. Entre 7.3 y 9.1 kilogramos inclusive.

2. Cierta tipo de roedores tiene vida media de 40 meses. Suponiendo distribución normal del tiempo de vida de los roedores y $\sigma=6.3$ meses, calcula las probabilidad de que un roedores viva.

a. Más de 32 meses.

b. Menos de 28 meses.

c. Entre 37 y 49 meses.

3. Los *bolillos* distribuidos por "La espiga." tienen un grueso promedio de 8 centímetros, desviación estándar 0.8 centímetros y están normalmente distribuidos.

a. ¿Qué porcentaje de bolillos tienen un grosor mayor a 7.7 centímetros?

b. ¿Qué porcentaje de los bolillos tienen un grosor entre 0.72 y 8.04 centímetros?

c. ¿Qué porcentaje de los bolillos tienen un grosor menor de 8.09 centímetros?

4. Los radios internos de los balones *"Seyer."* se distribuyen normalmente con media 15 centímetros y desviación estándar 0.03 centímetros.

a. Obtén la proporción de balones con radio interno mayor a 15.75 centímetros.

b. Calcula la probabilidad de que un balón "Seyer" tenga radio interno entre 14.97 y 10.03 centímetros.

c. Calcula longitud del radio interno de manera que el 15% del radio de los balones "Seyer" sea menor a ella.

5. *"La Giralda."* envasa gomitas en bolsas, los contenidos netos se distribuyen normalmente con desviación estándar de 1.4 gramos. El 4% de las envases con gomitas pesan más de 350 gramos, determina el peso medio de las bolsas con gomitas.

6. La distribución de los pesos de las cajas con duraznos *Sr. Callejas* es normal con un valor medio 10 kilogramos y desviación estándar 1 kilogramo. El servicio de fletes desea establecer un valor de peso p_0, a partir del qué hará un cargo de tres pesos al Sr. Callejas. Calcula p_0.

7. La puntuación media de los policías de la Guardia Nacional *no* es 500 y la desviación estándar 75. Las puntuaciones se distribuyen en forma normal.

a. ¿Qué porcentaje de los guardias nacionales tendrán puntuaciones menores a 320?

b. ¿Cuál es la puntuación mínima que tendrá el 20% de los guardias nacionales?

c. ¿Cuál es la puntuación máxima que tendrá el 10% de los guardias nacionales?

8. Sea $X \sim N\left(\mu ,\ \sigma^2 \right)$, calcula la proporción de asignaciones a X que difieren de la media en menos de 3σ de μ.

1.3 SOLUCIONES Y EVALUACIÓN

SOLUCIÓN A EJERCICIOS PROPUESTOS

EXAMEN DE LA UNIDAD

SOLUCIONES DEL EXAMEN DE LA UNIDAD

SECCIÓN 1.1
EJERCICIOS 1 SOLUCIONES

1. a. i. $S=\{(a,a),(a,s),(s,a),(s,s)\}$

ii. $X((a,a))=2,\ X((a,s))=0,\ X((s,a))=0,\ X((s,s))=0$

iii. $R_X=\{0,1,2\}$

b. i. $S=\{(d_i,d_j,d_k)\mid i,j,k=1,2,3,4,5,6\}$

ii. $X((d_i,d_j,d_k))=d_j$ con $d_j=1,2,3,4,5,6$

iii. $R_X=\{1,2,3,4,5,6\}$

c. i. Espacio muestral $S=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$

ii. $Y(1,1)=1,\ Y(1,2)=2$ y $Y(2,1)=2,\ Y(2,2)=4,$

iii. $R_Y=\{1,2,4\}$

d. i. $S=\left\{\begin{matrix}(h,h,h),(h,h,m),(h,m,h),(m,h,h),\\(h,m,m),(m,h,m),(m,m,h),(m,m,m)\end{matrix}\right\}$

ii. $Y((h,h,h))=-3,\ Y((h,h,m))=-1,\ Y((h,m,h))=-1,\ X((m,h,h))=-1,$
$Y((h,m,m))=1,\ Y((m,h,m))=1,\ X((m,m,h))=1,\ Y((m,m,m))=3$

iii. $R_Y=\{-3,-1,1,3\}$

e. $R_X=\{g_1,\ p_1\cap g_2,\ p_1\cap p_2\cap g_3,\ p_1\cap p_2\cap p_3\}$

ii. $X(g_1)=1,\ X(p_1\cap g_2)=1,\ X(p_1\cap p_2\cap g_3)=3,\ X(p_1\cap p_2\cap p_3)=3$

iii. $R_X=\{1,2,3\}$

SECCIÓN 1.1
EJERCICIOS 2 SOLUCIONES

1. a. i. $S=\left\{\begin{matrix}(f,f,f),(f,f,a),(f,a,f),(a,f,f)\\(f,a,a),(a,f,a),(a,a,f),(a,a,a)\end{matrix}\right\}$

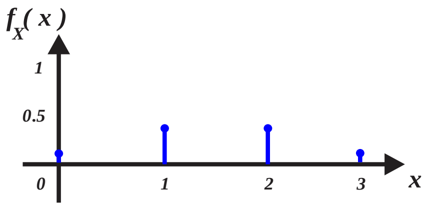
ii.

$$\begin{matrix}X((f,f,f))=0,\ X((f,f,a))=1,\\X((f,a,f))=1,\ X((a,f,f))=1,\\X((f,a,a))=2,\ X((a,f,a))=2,\\X((a,a,f))=2,\ X((a,a,a))=3\\R_X=\{0,1,2,3\}\end{matrix}$$

iii.

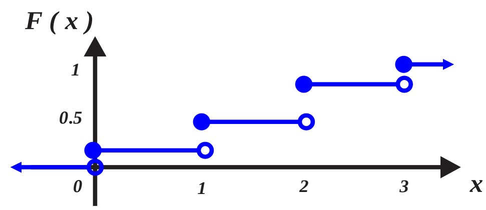
X	0	1	2	3
$f_X(x)$	0.125	0.375	0.375	0.125

$$f_X(x)=\begin{cases} 0.125 & \text{si} \quad x=0 \\ 0.375 & \text{si} \quad x=1 \\ 0.375 & \text{si} \quad x=2 \\ 0.125 & \text{si} \quad x=3 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$



iv.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<0 \\ 0.125 & \text{si} \quad 0\le x<1 \\ 0.50 & \text{si} \quad 1\le x<2 \\ 0.875 & \text{si} \quad 2\le x<3 \\ 1 & \text{si} \quad x\ge 3 \end{cases}$$



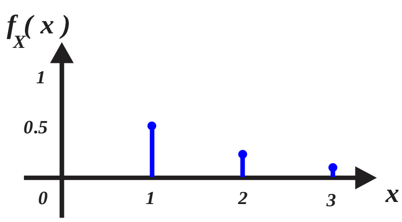
b. i. $S=\{T_1^C,\ T_1\cap T_2^C,\ T_1\cap T_2\cap T_3,\ T_1\cap T_2\cap T_3^C\}$

ii. $Y(T_1^C)=1$, $Y(T_1\cap T_2^C)=2$, $Y(T_1\cap T_2\cap T_3^C)=3$ y $Y(T_1\cap T_2\cap T_3)=3$

iii.

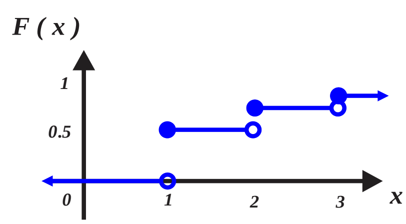
Y	1	2	3
$f_Y(x)$	0.60	0.24	0.16

$$f_Y(x)=\begin{cases} 0.60 & \text{si} \quad x=1 \\ 0.24 & \text{si} \quad x=2 \\ 0.16 & \text{si} \quad x=3 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$



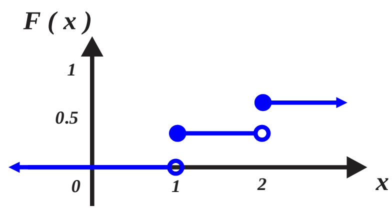
iv.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<1 \\ 0.60 & \text{si} \quad 1\le x<2 \\ 0.84 & \text{si} \quad 2\le x<3 \\ 1 & \text{si} \quad x\ge 3 \end{cases}$$



2. a.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<1 \\ 0.30 & \text{si} \quad 1\le x\le 2 \\ 1 & \text{si} \quad x\ge 2 \end{cases}$$



b.

Y	1	2	3
$f_Y(x)$	0.30	0.40	0.30

$$f_Y(x)=\begin{cases} 0.30 & \text{si} \quad x=1 \\ 0.40 & \text{si} \quad x=2 \\ 0.30 & \text{si} \quad x=3 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

3. a. i. 0.3 **ii.** 0.8 **iii.** 1 **iv.** 0.3 **v.** 0.2 **vi.** 0.3
b. i. 0.8 **ii.** 0.8 **iii.** 1 **iv.** 0.5 **v.** 0 **vi.** 0.2 **vii.** 0.5 **viii.** 0.5

SECCIÓN 1.1
EJERCICIOS 3 SOLUCIONES

1.
a. $E[X]=1$, $V[X]=0.5$ y $DE\approx +0.7071$ **b.** $E[Y]=1.8$, $V[Y]=26.26$ y $DE\approx 5.124$

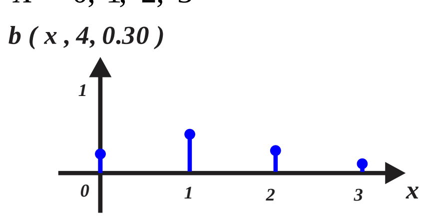
2. a. i. $E[x]=\dfrac{50}{3}=16.\overline{6}$, si conviene. **ii.** $V[X]=\dfrac{157700}{9}$ y $DE=\sqrt{V[X]}\approx 132.372$

b. i. $E[x]=12.5$, si conviene. **ii.** $V[X]=4843.75$ y $DE\approx 69..597$

3. a. i. 10 **ii.** 5 **b. i.** 27 **ii.** 68

SECCIÓN 1.1
EJERCICIOS 4 SOLUCIONES

1. $b(x,3,0.4)=C_x^3(0.4)^x(0.6)^{3-x}$, $X=0,1,2,3$



2. a. 0.0015 **b.** 0.03487. **c.** 0.9999 **d.** 0.0016
3. a. 0.3277 **b.** 0.2592 **c.** 0.5282
4. a. 0.0031 **b.** 0.0002 **c.** 0.9997 **d.** 15 y 6 respectivamente.
5. a. 0.1181 **b.** 0.2066 **c.** 0.4032
d. 9 y 3.6 respectivamente

6. $f_X(x)=C_x^{25}(0.4)^x(0.6)^{25-x}$, $X=0,\cdots,25$ **7. a.** 1.0 **b.** 1.2 **c.** 7.2

SECCIÓN 2.1
EJERCICIOS 1 SOLUCIONES

1.

a. i. $S=\{\ b\ ,\ n\ ,\ a\ \}$ y $R_X=(\ 0\ ,212\ ]$

ii. $X(\ b\ )=(\ 0\ ,165\ ],\ X(\ n\ )=(\ 165,177\ ),\ X(\ a\ )=(\ 177,212\ ]$

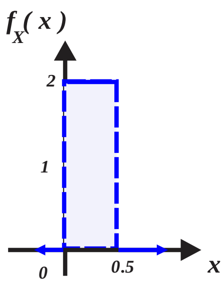
b. i. $S=\{\ na\ ,\ s\ ,\ b\ ,\ mb\ \}$ y $R_X=[\ 0\ ,\ 10\ ]$

ii. $X(\ na\ )=[\ 0\ ,6\ ),\ X(\ s\ )=[\ 6\ ,7.5\ ),\ X(\ b\ )=[\ 7.5\ ,9\ ),\ X(\ mb\ )=[\ 9\ ,10\ ]$

SECCIÓN 1.2
EJERCICIOS 2 SOLUCIONES

1.

a.



b. 0.6

c. 0.2

d. 0.2

e. 0.8

2. $A=\frac{1}{8}$

3. $A=\frac{1}{4}$

4. a. $f_X(x)=\begin{cases} 2x & 0\le x\le 0.5 \\ 0 & otro\ caso \end{cases}$ **b.** 0.2

c. 0.8 **d.** 0

SECCIÓN 1.2
EJERCICIOS 3 SOLUCIONES

1. a. 0.00475 **b.** 0.7486 **c.** 0.6711

2. a. 0.8962 **b.** 0.02870 **c.** 0.6030

3. a. 64.80 **b.** 51.99 **c.** 54.38

4. a. 0 **b.** 0.6827 **c.** 15.0311

5. 347.55 gramos.

6. 8.674 kilogramos.

7. a. 0.82 % **b.** 563.12 **c.** 403.88

8. $p(-3<Z<3)=09773$

UNIDAD 1 EXAMEN

COMPLETA LOS ESPACIOS

1. Una variable aleatoria discreta tiene como dominio del espacio muestral del experimento aleatorio.

2. Los elementos del recorrido de una variable aleatoria continua
.

3. Con la función se miden las probabilidades correspondientes a una variable aleatoria continua a un eventos del espacio muestral.

4. Las dos características básicas de una fdp f_X son: y que su suma es uno.

5. El de una variable aleatoria interpreta como un promedio de la variable aleatoria.

6. Si $x = x_0$ es una VAC con f_X y $x = x_0$ forma parte de su recorrido, entonces, $f_X\left(x_0\right) = 0$

7. La probabilidad asociada a la variable aleatoria se interpreta como el de una región en el pleno cartesiano.

8. Los eventos que definen la variable aleatoria binomial se caracterizan por tener

9. La curva gaussiana de una distribución normal μ - σ se caracteriza por ser simétrica respecto a
$x = \mu$

10. A la derecha del $z_{0.45}$ el área limitada por la curva gaussiana y el eje de las abscisas es 0.55.

PROBLEMAS OPERATIVOS

1. Sea la VAD con la distribución:

X	-3	-1	1	3
$f_X(x)$	0.25	0.25	0.25	0.25

a. Construye la FDA y traza su gráfica.

b. La varianza.

c. Calcula $p\left(-2 \le X \le 2.5\right)$

d. Calcula $p\left(X \ge 1\right)$

2. Sea la FDA asociada a la VAD X : $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad X < -5 \\ 0.2 & \text{si} \quad -5 \le X < -2 \\ 0.6 & \text{si} \quad -2 \le X < 2 \\ 1 & \text{si} \quad X > 2 \end{cases}$

Calcula:

a. La fdp y traza su gráfica.

b. La esperanza matemática.

3. Sea $X \sim b(x, 6, 0.40)$, determina:

a. El recorrido. **b.** La varianza y la desviación estándar. **c.** La probabilidad de que ocurran menos de 5 éxitos.

4. Si $X \sim N(100,\ 25^2)$, calcula:

a. $p(115 < X < 135)$ **b.** $p(95 < X < 130)$ **c.** $p(X > 180)$ **d.** $p(X < 105)$

PROBLEMAS EN CONTEXTO

1. La probabilidad de que un niño de cierta familia herede la inteligencia de su padre es 0.4. Si un padre de familia tiene 5 niños.

a. Calcula la desviación estándar del número de niños que heredan la inteligencia de su padre.

b. Calcula la probabilidad de que menos de tres niños hereden la inteligencia de su padre.

2. Las barras utilizadas en la construcción de las perreras *"Perrotón"*, son cortadas automáticamente por una máquina y 60 centímetros de longitud nominal. Las longitudes reales están distribuidas normalmente con media de 60 centímetros y desviación estándar 0.6 centímetros.

a. ¿Qué proporción de las barras rebasan los límites de tolerancia de 59 a 61 centímetros?

b. Si el 98% de las barras debe estar dentro de los límites de tolerancia, ¿en qué longitud debe ajustarse la desviación estándar?

ESCALA

Preguntas 1 a 10., un punto cada una (total 10 puntos).

Problemas operativos 1. a 4., dos puntos cada inciso (total 26 puntos).

Problemas en contexto 1. a 2., tres puntos cada inciso (total 12 puntos).

Para acreditar se requieren 30 o más puntos

UNIDAD 1 SOLUCIONES AL EXAMEN

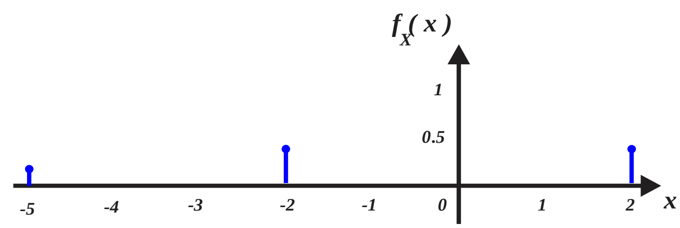
COMPLETA LOS ESPACIOS

1. una colección de eventos
2. son intervalos de números reales
3. de densidad de probabilidad
4. ser no negativa
5. valor esperado
6. función de densidad de probabilidad
7. "área"
8. probabilidad constante
9. la línea recta de ecuación $x = \mu$
10. 0.55

PROBLEMAS OPERATIVOS

1. a.

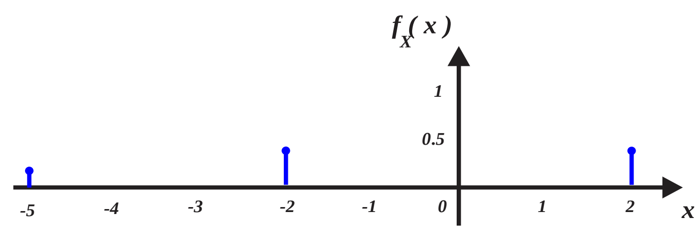
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -3 \\ 0.25 & \text{si} \quad -3 \le X < -1 \\ 0.50 & \text{si} \quad -1 \le X < 1 \\ 0.75 & \text{si} \quad 1 \le X < 3 \\ 1 & \text{si} \quad X \ge 1 \end{cases}$$



b. $V[X] = 5$ **c.** 0.75 **d.** 1

2. a.

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.2 & \text{si} \quad X = -5 \\ 0.4 & \text{si} \quad X = -2 \\ 0.4 & \text{si} \quad X = 2 \end{cases}$$



b. $E[X] = -1$

3. a. $X = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ **b.** $V[X] = (6)(0.40)(0.60) = 1.44$ y $DE[X] = 1.2$

c. 0.9590

4. a. 0.1935 **b.** 0.4642 **c.** 0.0007 **d.** 1

PROBLEMAS EN CONTEXTO

1. a. $DE[X] = 0.6$ **b.** 0.6826 **2. a.** 0.9051 **b.** $\sigma = 0.423$ centímetros.

2. ESTIMADORES E INTRODUCCIÓN A LA INFERENCIA ESTADÍSTICA

PROPÓSITO

Al finalizar la unidad el alumno:

Analizará el comportamiento de los estimadores media y proporción, a través del modelo normal , para construir un vínculo entre la probabilidad y la inferencia estadística

CONTENIDO

* * * *

CONCEPTOS CLAVE

Característica.	Una característica (o carácter) de un objeto (elemento o individuo) es una propiedad a partir de la que es posible clasificarlo y estudiarlo.
Población Estadística.	Grupo de todos objetos (con una característica) de interés para el investigador) que es posible seleccionar para ser objeto de estudio.
Muestra.	Cualquier parte o subconjunto de una población estadística.
Tamaño de muestra.	El número de objetos (elementos o individuos) de la muestra.
Muestra aleatoria simple.	$X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas.
Realización de la Muestra aleatoria simple.	Cuando las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de la MAS asumen los valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ respectivamente
Muestreo.	Proceso de selección de objetos en los que se mide la información en una parte de la población estadística.
Muestreo con reemplazo.	Los objetos que se extraen de la población se observan (miden) y se regresan a la misma para su posible reselección.
Muestreo sin reemplazo.	Los objetos que se extraen de la población se observan (miden) y no se regresan a la misma para su posible reselección.
Valor real o parámetro.	Número que describe una característica de la población de interés para el investigador.
Estadística.	Función o fórmula que asocia a las observaciones aleatorias que contiene un número determinado.
Media.	La variable aleatoria $\overline{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
Proporción.	La variable aleatoria $P = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$ en donde cada variable de $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tienen por recorrido $\{ 0 , 1 \}$.
Estadística.	Función de una muestra aleatoria que no contiene parámetros $f\left(X_1, X_2, \ldots, X_n \right)$.

Distribución muestral.	Distribución de probabilidad de una estadística.
Distribución muestral de la media.	Función de probabilidad de la variable aleatoria $\overline{X}$ $$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$
Distribución muestral de la proporción.	Función de probabilidades de la variable aleatoria $$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$ con $X_i = 0,\ 1$, se representa con $P = \dfrac{X}{n}$
Propiedades de la distribución muestral de la media.	Si $\overline{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$ es la estadística asociada a la MAS $X_1, \ldots, X_n$, obtenida de una población con $E[\ X\ ] = \mu$ y $V[\ X\ ] = \sigma^2$, entonces, **i.** $\mu_{\overline{X}} = \mu$ y **ii.** $\sigma^2_{\overline{X}} = \dfrac{\sigma^2}{n}$
Propiedades de la distribución muestral de la proporción.	En la estadística $P = \dfrac{X}{n}$, X representa el número de éxitos en la MAS $X_1, \ldots, X_n$, que se extrajo de una población con valor medio $E[\ X\ ] = np$ y varianza $V[\ X\ ] = npq$, entonces, **i.** $\mu_P = p$, **ii.** $\sigma^2_P = \dfrac{pq}{n}$
Teorema del Límite Central (o Teorema Central del Límite).	Sea $X_1, \ldots, X_n$ una sucesión de variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas y de tamaño n (suficientemente grande o que aumenta indefinidamente) extraída de una población con valor medio $E[\ X\ ] = \mu$ y varianza $V[\ X\ ] = \sigma^2$ (ambas finitas), entonces la variable aleatoria $Z_n = \dfrac{\left(\dfrac{1}{n} \sum_{i=i}^{n} X_i \right) - \mu}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}}$ converge en distribución a la distribución de la variable aleatoria normal estándar.

2.1 POBLACIÓN Y MUESTRA

APRENDIZAJES

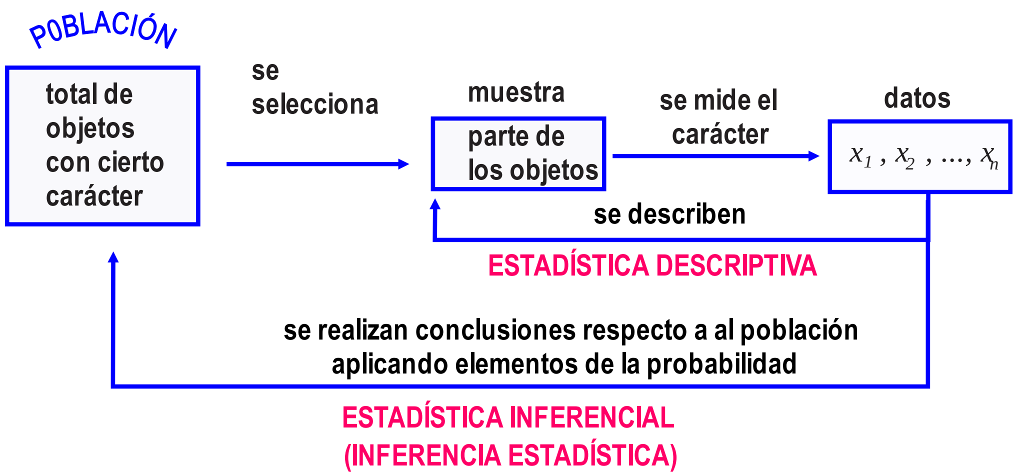
1. Establece hipótesis o conjeturas del comportamiento de una variable en una población a partir de los datos de una muestra, de manera informal, en el contexto de una investigación o un problema.
2. Valora la importancia del azar en los procesos de muestreo.
3. Valora a los estimadores como variables aleatorias y como indicadores de los posibles valores puntual de sus correspondientes parámetros.

TEMAS

Población y muestra: muestreo aleatorio simple con y sin reemplazo.
Parámetros y estadísticos: variabilidad muestral.

La estadística descriptiva tiene como propósito la descripción numérica y gráfica de grupos de datos sin tener en cuenta la forma en que se obtuvieron y, por tanto, las conclusiones y afirmaciones que se obtengan de ellos sólo serán válidas para tal grupo de datos. En la estadística inferencial (inferencia estadística) a partir de un grupo "muy considerable" de datos la forma de selección de parte de ellos se hace minuciosamente y respetando ciertos principios previamente establecidos, es decir, es muy importante el proceso de selección (que se denomina muestreo). La vinculación de la parte descriptiva de la estadística con la PROBABILIDAD (bajo ciertos lineamientos que construiremos más adelante) son los pilares de la estadística inferencial, misma que es objeto de estudio en esta unidad.

La "inferencia estadística" tiene como propósito analizar el comportamiento de características (previamente seleccionadas) de conjuntos de objetos (muestras) para posteriormente (con fundamento en la información contenida en ellas) inferir (o determinar) los rasgos fundamentales del total de datos (población de estudio), por tanto, para comprender correctamente los procesos de la estadística inferencial es necesario tener presentes y claros los conceptos de población, muestra y muestreo.



DEFINICIÓN 1. CARACTERÍSTICA (CARÁCTER)

Una característica (o carácter) de un objeto (elemento o individuo) es una propiedad a partir de la que es posible clasificarlo y estudiarlo.

Las características (propiedades) de los objetos pueden ser:

i. Cualitativas, descriptivas o no medibles, cuando no admite ser medido o se distingue o compara con otros a partir de uno o más atributos.

ii. Cuantitativas o medibles, se pueden cuantificar asociándoles un número.

Los datos cualitativos son atributos, características o propiedades categóricas que identifican o describen un aspecto de un objeto en lugar de medirlo y pueden ser: impresiones, opiniones y perspectivas; describen diferencias de tipo o clase indicando la presencia o ausencia de cierta característica. Los datos cuantitativos se relacionan con mediciones y son generados al asignar un número a una característica de un objeto, asimismo, pueden compararse entre ellos a partir de su magnitud (longitud, peso, volumen, temperatura, etcétera.).

EJEMPLO 1. TIPOS DE CARACTERÍSTICAS

a. En cierta población de botellas:
i. Características cuantitativas (medibles) son: peso, volumen, área, etcétera.
ii. Tipo de materia, forma, color, olor, etcétera.

DEFINICIÓN 2. POBLACION Y MUESTRA

Sea ϖ un objeto (elemento o individuo) de una población, entonces,
i. $X(\omega)$ representa la "característica de interés" del objeto ϖ y se denomina variable.
ii. Si $X(\omega)=x$, entonces, x es la medida de cierta característica del objeto ϖ.
iii. Una población es el conjunto de todos los objetos (elementos o individuos) en los que se desea estudiar una o más de sus características.
iv. Una muestra es cualquier parte (subconjunto) de la población.
v. El número de objetos (elementos o individuos) en una muestra es su tamaño.

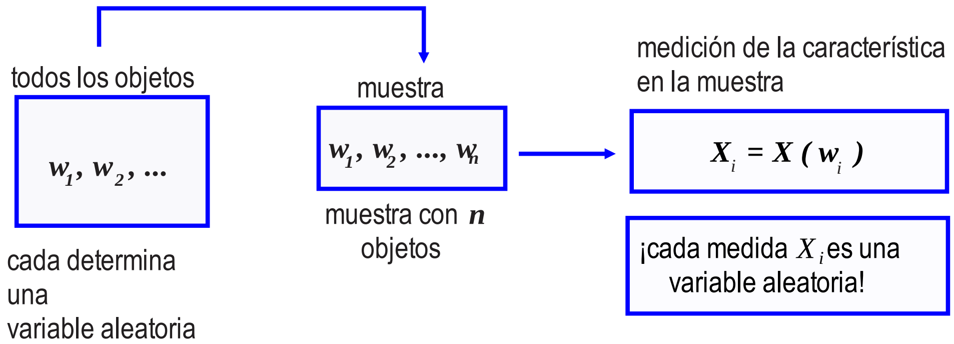
EJEMPLO 2. POBLACIÓN ESTADÍSTICA, MUESTRA ESTADÍSTICA

a. El jefe de control de una empresa estudiará la proporción de artículos defectuosos que produce cierta máquina en su producción anual, entonces,
i. Población estadística: todos los artículos producidos por la máquina en un periodo de tiempo.
ii. Muestra: artículos producidos por la máquina en los primeros 15 días de cierto mes.
ii. Muestra: grupo de artículos que tienen asignados los números de producción múltiplos de 50.
iii. Muestra: grupo de artículos producido por la máquina todos los días a las $12:00$ horas.

b. En la UNAM, considerando como población todos los alumnos matriculados, son muestras:
i. Muestra: alumnos con edad mayor a los 22 años.
ii. Muestra: alumnas que no adeudan materias.
iii. Muestra: alumnos cuyo primer apellido comienza con R.

En el proceso de Inferencia estadística:
i. Se fija la característica de interés (reflejada en todos sus objetos).
ii. Se selecciona una muestra (aplican los elementos de la probabilidad).
iii. Se mide la característica en cada objeto de la muestra.

iv. Se infiere el valor de la característica (en el contexto de la probabilidad).



En los procesos de inferencia estadística está presente el concepto de muestra aleatoria simple que a continuación definimos.

DEFINICIÓN 3. MUESTRA ALEATORIA SIMPLE (MAS)

Las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (extraídas de la misma población estadística), constituyen una muestra aleatoria simple de tamaño n si:

i. Son independientes entre sí.

ii. Están idénticamente distribuidas (idd), es decir, todas tienen la misma función de probabilidad.

iii. Si $X_1 = x_1,\ X_1 = x_2 \ldots,\ X_n = x_n$, entonces, el conjunto de números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se llama realización de la muestra.

EJEMPLO 3. REALIZACIÓN DE UNA MUESTRA ALEATORIA SIMPLE

a. Si de un gran grupo de dados ordinarios (con sus caras numeradas del uno al seis) se extraen tres de ellos, entonces:

i. La muestra aleatoria es X_1, X_2, X_3.

ii. Las ternas $(1, 4, 3)$, $(6, 4, 2)$, $(1, 5, 3)$, $(2, 1, 5)$, entre otras, son realizaciones de la MAS.

b. De un grupo de personas se seleccionan cinco de ellas. La característica de interés es su estatura, entonces:

i. La muestra aleatoria simple es X_1, X_2, X_3, X_4, X_5

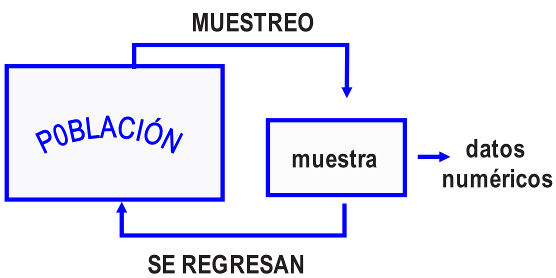
ii. Los arreglos: $(1.661, 1.648, 1.646, 1.662, 1.650)$, $(1.73, 1.742, 1.736, 1.738, 1.73)$, $(1.845, 1.857, 1.855, 1.84, 1.86)$, $(1.690, 1.68, 1.685, 1.692, 1.690)$ entre muchos otros, son realizaciones de la MAS.

Entre los propósitos de la estadística inferencial destaca el obtener información sobre los valores reales que la describen, sin embargo, entre las principales se encuentra la selección adecuada de la MAS. El proceso de selección de muestras recibe el nombre de muestreo y destacan los señalados en la ***definición 4***.

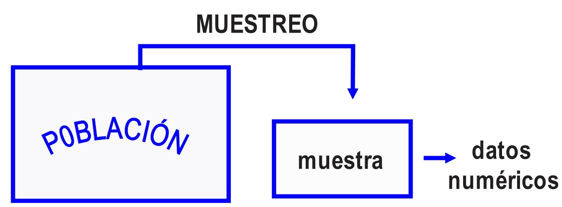
DEFINICIÓN 4. MUESTREO CON REEMPLAZO Y MUETREO SIN REEMPLAZO

i. Si los objetos pertenecientes a una muestra (previamente extraída de una población) se mide la característica de interés y posteriormente se regresan a la población origen, para una posible reelección, entonces, el muestreo se efectúa con reemplazo.
ii. Si al seleccionar una muestra, los objetos que se extraen de la población se observan, se mide el carácter de interés y no se regresan a ella, entonces, el muestreo se efectuó sin reemplazo.

MUESTREO CON REEMPLAZO



MUESTREO SIN REEMPLAZO



EJEMPLO 5. MUESTREO CON REEMPLAZO Y MUESTREO SIN REEMPLAZO

Sea la población compuesta por a, b, c y d, entonces, todas las muestras de tamaño $n = 2$ son:

i. Si en el muestreo importa el orden, se realiza con reemplazo y con repetición (los objetos pueden repetirse),

$$aa,\ ab,\ ac,\ ad,\ ba,\ bb,\ bc,\ bd,\ ca,\ cb,\ cc,\ cd,\ da,\ db,\ dc,\ dd$$

ii. Si el muestreo importa el orden, se realiza con reemplazo y sin repetición (los objetos no pueden repetirse),

$$ab,\ ac,\ ad,\ ba,\ bc,\ bd,\ ca,\ cb,\ cd,\ da,\ db,\ dc$$

iii. Si en el muestreo no importa el orden, se realiza sin reemplazo y sin repetición, entonces todas las muestras son $ab,\ ac,\ ad,\ bc,\ bd,\ cd$.

NÚMEROS ALEATORIOS

En la selección de (objetos) muestras aleatorias es común el uso de tablas con “números aleatorios”, o ***aplicaciones on line***. A continuación presentamos una sección de la tabla de números aleatorios del $apéndice\ A.4$ y mostramos su forma de uso.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	700561	429895	217104	218677	567334	003001	692333	623286	511897	560710	947700	581272	892269	194856	899909
2	953253	116896	256672	987367	391141	613091	385515	359883	628354	281127	164162	453877	738176	840473	505576
3	146597	948656	969995	536114	482259	483693	568088	406930	677122	232632	895770	571568	587830	293007	837035
4	393757	305931	764895	254489	740470	367769	078251	716074	777945	412522	590942	860850	620390	068922	100612
5	556681	380806	114612	822628	327827	800591	821450	672152	418506	366484	458203	223602	207323	330671	735324
6	242094	820952	790724	917318	836032	887349	869979	278548	834419	042696	532080	775858	919687	464217	296160
7	193683	373992	195850	662549	805229	367985	196077	884256	494809	734921	879705	800133	327204	685752	989692
8	105184	232459	197360	490865	982324	617182	556061	295526	573497	530911	292036	302428	365701	768207	773472
9	005704	237486	567025	968434	487453	490858	935283	630944	720707	283474	213827	211969	965455	953211	699539
10	201752	621609	042032	011775	393467	453945	409456	483555	210939	848324	601616	687443	591060	021307	471107

EJEMPLO 6. NÚMEROS ALEATORIOS

a. De un grupo que contiene $N=1000$ objetos se seleccionan , $n=8$:

i. Numeramos los objetos.

ii. Seleccionamos al azar (digamos con los ojos cerrados) un número del “cuerpo” de la tabla de números aleatorios, supongamos que hemos seleccionado el dígito que se encuentra en la fila 9 y la columna 3, entonces la primera observación de la muestra puede ser la etiquetada como 567.

iii. Para seleccionar los otros siete objetos debemos seleccionar otros 7 números de tres cifras, éstos pueden ser los que se encuentran sobre esa línea, es decir, 025, 968, 434, 487, 453, 490 y 858. Los datos pudieron escogerse de las columnas de la derecha, o de la izquierda o hacia arriba del punto de inicio, entre otras formas. Si un número se repite simplemente no se considera y se toma el siguiente.

b. De un mazo con 50 deseamos seleccionar la realización de muestra aleatoria de tamaño $n=5$.

i. Etiquetamos las cartas, digamos c_1, $c_2,\dots,$ c_{50}.

ii. Seleccionamos aleatoriamente un dígito de la tabla de números aleatorios, si el número aleatorio inicial seleccionado es el que se encuentra en la columna 2 y la fila 10, es decir el seis.

iii. Por tanto, no se puede incluir la carta c_{62} en la muestra, si continuamos en la fila 10 observamos que debemos incluir las cartas c_{16}, c_{09}, c_{04}, c_{20} y c_{32}. Si en la selección de la muestra hubiese aparecido otro número mayor que 50 simplemente se omite y se selecciona otro.

Los parámetros (valores reales) son números que sintetizan los aspectos más importantes de una población pueden o inferirse a partir de una parte representativa de ella.

DEFINICIÓN 5. VALORES REALES O PARÁMETROS

i. Son números que dependen de los valores de la población y que sintetizan sus aspectos relevantes.

Ejemplos de parámetros son: la media poblacional (real), la proporción poblacional (real), la varianza poblacional (real), el total de una población (real), entre otros. En estadística inferencial, las realizaciones de la MAS (cuyas variables aleatorias están definidas sobre la población) son representativas de la población) lo que significa que reflejan las características y los valores reales de la población de origen. Las variables aleatorias de una MAS se pueden combinar para dar origen a relaciones o fórmulas que dependen de ellas.

DEFINICIÓN 6. ESTADÍSTICA

Una estadística es cualquier función (o fórmula) obtenida a partir de la combinación de las variables aleatorias de una MAS y que no contiene parámetros.

La suma de dos o más variables aleatorias genera otra variable aleatoria, el producto de un número (distinto de cero) y una variable aleatoria es una variable aleatoria, el producto de dos variables aleatorias es otra variable aleatoria.

MAS **estadística**

$$\boxed{X_1,\ X_2,\dots,X_n} \longrightarrow f\,(X_1,\ X_2,\dots,X_n)$$

se combinan

En esta guía trataremos las estadísticas: "media" y "proporción", sin embargo, existen otras.

DEFINICIÓN 6. MEDIA Y PROPORCIÓN COMO ESTADÍSTICAS

Sea $X_1,\ X_2,\dots,\ X_n$ una muestra aleatoria simple, entonces,

i. La variable aleatoria $\bar{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ se denomina media.

ii. Si las variables aleatorias tienen como recorrido el conjunto $\{\ 0\ ,\ 1\ \}$, entonces, la variable aleatoria $P = \dfrac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ se denomina proporción.

EJEMPLO 7. ESTADÍSTICAS

a. Sea la muestra aleatoria simple $X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4$, correspondiente a cierto experimento.

La estadística

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{4} X_i$$

varía de acuerdo con la realización de la muestra aleatoria simple $X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4$, por ejemplo,

i. Si 4, 5, 3 y 4 es una de sus realizaciones, entonces,

$$\bar{x}_1 = \frac{4+5+3+4}{4} = 4$$

ii. Si 4, 3, 3 y 4, es otra de sus realizaciones, entonces, $\bar{x}_2 = \dfrac{4+3+3+4}{4} = 3.5$

b. En la consulta sobre la preferencia de cierto producto se utilizó la MAS X_1, $X_2, \ldots, X_{2000}$.

i. En la primera realización de X_1, $X_2, \ldots, X_{2000}$ se observa que 800 de prefieren la marca A de cierto producto, entonces, la estadística

$$P = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_{2000}}{n} \; (X = 0 \text{ o } 1) \text{ asume como valor } \hat{p} = \frac{800}{2000} = 0.40$$

ii. En la segunda realización de X_1, $X_2, \ldots, X_{2000}$ se observó que 728 prefieren la marca A, entonces,

$$\hat{p} = \frac{728}{2000} = 0.364$$

SECCIÓN 2.1
EJERCICIOS 1

1. Las datos 3.8, 4.5, 3.2, 7.1, 2.1, 4.2, 5.3, 1.1, 4.1 y 5.8 (gramos) son los pesos de las ranas que constituyen cierta población, "estima informalmente":

a. La media y desviación estándar poblacionales.

b. La proporción real de datos menores a 5.

2. La tabla de frecuencias representa la altura de arbustos pertenecientes a un bosque.

Estatura (centímetros)	Frecuencia
162	6
164	14
166	20
170	18
174	2

"Estima informalmente":

a. La media y desviación estándar.

b. La proporción de estaturas superiores a los 166 centímetros.

3. Un conjunto 20 estudiantes de secundaria proporcionó la siguiente información, respecto a la marca del celular que portan (M = MOTOROLA, H = Hwawei, A = Apple): M, M, H, H, H, A, A, M, M, H, H, H, H, H, M, A, A, H, H, H, estima:

a. La proporción real de todos los estudiantes que portan celular Motorola.

b. Si tres de los celulares Apple son de la clase T - 42 estima la proporción real de estudiantes que portaban esta clase de celular.

4. Construye todas las muestras de tamaño 2 del conjunto $S = \{\ 2\ ,\ 4,\ \ 6,\ \ 8,\ \ 10\ \}$

5. Supón que cada una de las variables aleatoria $X_1,\ X_2$ de la MAS sólo pueden asumir los valores 0 y 2.

a. Construye todas las realizaciones posibles.

b. Calcula la media aritmética de cada una de las realizaciones.

c. Calcula la media aritmética del conjunto formado por todas las medias aritméticas de las realizaciones.

6. Utiliza números aleatorios y obtén una realización de tamaño n.

a. $N = 100$ y $n = 5$

b. $N = 1000$ y $n = 12$

c. $N = 10000$ y $n = 15$

2.2 PARÁMETROS Y ESTADÍSTICOS

APRENDIZAJES

4. Inspecciona el comportamiento de la media y de la proporción muestrales como variables aleatorias, obtenidas por medio de la simulación física y/o computacional, dentro del contexto de un problema o investigación y en términos de tendencia, distribución y dispersión.
5. Infiere que los estimadores media y proporción se distribuyen de manera aproximadamente normal, al trabajar con muestras grandes.
6. Construye las distribuciones muestrales para la media y la proporción, bajo las condiciones del Teorema del Límite Central y a partir de la expresión para estandarizar la distribución normal.
7. Formula juicios acerca de la representatividad de una muestra, a partir de la probabilidad para un valor de la media o de la proporción muestrales, obtenidas por medio de la computadora o calculadora, dentro del contexto de un problema o una investigación.
8. Establece hipótesis o conjeturas acerca del comportamiento de e una variable de una población. a partir de los datos de una muestra, de manera formal en el contexto de una investigación o un problema.

TEMÁTICA

Distribución muestral de medias. Distribución muestral de proporciones. Teorema del Límite Central.

Se considera que un grupo de números está descrito cuando se conocen sus de medidas descriptivas, los promedios (media aritmética, moda, mediana, media geométrica, proporciones, etcétera) y las medidas de dispersión (varianza, desviación estándar, sesgo, agudez, entre otras)., sin embargo, en los procesos de estadística inferencial, la estimación de parámetros (que describen a una población) se lleva a cabo con funciones (fórmulas) que pueden coincidir en nombre (pero no en necesariamente en interpretación) con los números descriptivos de una muestra.

La estimación e inferencia de parámetros se efectúa a través de la combinación de los datos de diversas realizaciones de la muestra aleatoria simple extraída de ella. En particular, cuando el parámetro objetivo es un promedio, la forma de combinar las variables de la MAS (muestra aleatoria simple) es $\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, siendo el conjunto de números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ la realización de $X_1, X_2, \ldots, X_n$ y el estimador puntual el resultado de la operación

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias, la combinación $\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$ también lo es, y tiene asociada una función de probabilidad, que se conoce como distribución muestral.

DEFINICIÓN 1. DISTRIBUCIÓN MUESTRAL

La distribución (función) de probabilidad de una estadística recibe el nombre de *distribución muestral de la estadística.*

EJEMPLO 1. DISTRIBUCIONES MUESTRALES ASIGNADAS

a. La distribución de probabilidad de (variable aleatoria) $\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ se denomina “distribución muestral de la media”.

b. La distribución de probabilidad de $P = \frac{X}{n}$ es la “distribución muestral de la proporción”.

c. La distribución de probabilidad asociada a $T = X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ se llama “distribución muestral del total”.

d. La distribución de probabilidad $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X} \right)^2$ se conoce como “distribución muestral de la varianza”.

Con las siglas DMM nos referiremos a la distribución muestral de la media (estadística $\overline{X}$) y representaremos sus parámetros:

i. Valor esperado por $\mu_{\overline{X}}$, se lee "media de la distribución muestral de la media".

ii. Varianza, con $\sigma^2_{\overline{X}}$, se lee "varianza de la distribución muestral de la varianza".

Con DMP haremos referencia a la distribución muestral de la proporción (estadística P) y representaremos sus parámetros:

i. Valor esperado, con μ_P , lo leeremos como "media de la distribución muestral de la proporción".

ii. Varianza, con σ^2_P , se lee "varianza de la distribución muestral de la proporción".

La estadística $\overline{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ se genera combinando la muestra aleatoria simple $X_1,\ X_2, \ldots,\ X_n$, por tanto, tiene asociada un valor esperado y una varianza, así,

$$\mu_{\overline{X}} = E\left[\ \overline{X}\ \right] = E\left[\ \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\ \right],$$

$$= \frac{1}{n} E\left[\ X_1 + X_2 + \ldots + X_n\ \right] = \frac{1}{n}\left\{ E\left[\ X_1\ \right] + E\left[\ X_1\ \right] + \cdots + E\left[\ X_n\ \right] \right\},$$

Si consideramos que las variables aleatorias $X_1,\ X_2, \ldots,\ X_n$ están idénticamente distribuidas (idd) y tienen el mismo valor esperado μ , obtenemos:

$$\mu_{\overline{X}} = \frac{1}{n}\left\{ \underbrace{\mu + \mu + \cdots + \mu}_{n\ veces} \right\} = \frac{1}{n}(\ n\mu\ ) = \mu$$

La varianza de $\overline{X}$ (que se representa por $\sigma^2_{\overline{X}}$) es

$$\sigma^2_{\overline{X}} = V\left[\ \overline{X}\ \right] = V\left[\ \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\ \right] = \frac{1}{n^2} V\left[\ X_1 + X_2 + \ldots + X_n\ \right]$$

$$= \frac{1}{n^2}\left\{ V\left[\ X_1\ \right] + V\left[\ X_1\ \right] + \cdots + V\left[\ X_n\ \right] \right\}$$

$$\sigma^2_{\overline{X}} = \frac{1}{n^2}\left\{ \underbrace{\sigma^2 + \sigma^2 + \cdots + \sigma^2}_{n\ veces} \right\} = \frac{1}{n^2}\left(n\sigma^2 \right) = \frac{\sigma^2}{n}$$

La formalización de las observaciones previas es la ***propiedad 1.***

PROPIEDAD 1. PARÁMETROS DE LA DISTRIBUCIÓN MUESTRAL DE LA MEDIA

Sea la MAS $X_1, \ldots,\ X_n$ extraída de una población con valor esperado $E\left[\ X\ \right] = \mu$ y varianza $V\left[\ X\ \right] = \sigma^2$ y $\overline{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$, entonces, **i.** $\mu_{\overline{X}} = \mu$ y **ii.** $\sigma^2_{\overline{X}} = \dfrac{\sigma^2}{n}$

La distribución muestral de la proporción P se trata como un caso particular de la distribución muestral de la media, sea $X_1,\ X_2,\ldots,\ X_n$ en donde X representa el total de las variables aleatorias que asumen el valor de 1 en una de sus realizaciones y las restantes $n-X$ variables aleatorias asumen el valor de 0, entonces, la variable aleatoria $P=\dfrac{X}{n}$ se distribuye binomialmente, por tanto,

$$\mu_{\overline{P}}=E\left[\ P\ \right]=E\left[\ \frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}\ \right]=\frac{1}{n}E\left[\ X\ \right]=\frac{1}{n}\left\{\ np\ \right\}=p\ ,$$

y

$$\sigma_P^2=V\left[\ P\ \right]=V\left[\ \frac{X}{n}\ \right]=\frac{1}{n^2}V\left[\ X\ \right]=\frac{1}{n^2}npq=\frac{pq}{n}$$

Los cálculos y observaciones previas los formaliza la ***propiedad 2.***

PROPIEDAD 2. PARÁMETROS DE LA DISTRIBUCIÓN MUESTRAL DE LA PROPORCIÓN

Si $P=\dfrac{X}{n}$ en donde X representa el número de éxitos en la MAS $X_1,\ldots,\ X_n$ extraída de una población con $E\left[\ X\ \right]=np$ y varianza $V\left[\ X\ \right]=npq$, entonces,

i. $\mu_P=p$ **ii.** $\sigma_P^2=\dfrac{pq}{n}$

EJEMPLO 2. CÁLCULO DE PARÁMETROS DE DISTRIBUCIONES MUESTRALES

1. a. “Los Volcanes” distribuye mantequilla en empaques con la leyenda peso $\mu=250$ gramos y $\sigma=10$ gramos, entonces, una muestra aleatoria de $n=25$ empaques con mantequilla tienen media, varianza y desviación estándar $\mu_{\overline{X}}=250$, $\sigma_{\overline{X}}^2=\dfrac{10^2}{25}=4$ y $\sigma_{\overline{X}}=\dfrac{10}{\sqrt{25}}=2$.

b. La compañía comandada por el *coronel Benito Cañedo* se caracteriza porque sus integrantes tienen un peso medio de $\mu=68$ kilogramos y desviación estándar $\sigma=3$ kilogramos. Se selecciona una muestra aleatoria simple de tamaño $n=25$, entonces,

$$\mu_{\overline{X}}=\mu=68,\ \sigma_{\overline{X}}^2=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{3^2}{25}=\frac{9}{25}\ \text{y}\ \sigma_{\overline{X}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{3}{\sqrt{25}}=0.6$$

c. La fábrica de golosinas “La Torre de Oro” distribuye chocolates en bolsas con la leyenda: peso neto $\mu=100$ gramos y desviación estándar $\sigma=10$ gramos. Se selecciona una muestra aleatoria de $n=25$ bolsas, entonces,

$$\mu_{\overline{X}}=\mu=100,\ \sigma_{\overline{X}}^2=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{10^2}{25}=4\ \text{y}\ \sigma_{\overline{X}}=\frac{10}{\sqrt{25}}=2$$

d. La proporción real de roedores que sobreviven más de 15 minutos al ingerir una primera dosis de veneno es $p=0.10$. Se analiza una muestra aleatoria simple de $n=25$ roedores que han ingerido el veneno, entonces, $\mu_P=0.10$, $\sigma_P^2=\dfrac{(0.10)(0.90)}{25}=0.0036$ y $\sigma_P=0.06$

e. Solo el 40% de estudiantes de cierta institución educativa visitan la biblioteca, en una muestra aleatoria de 100 integrantes de la institución educativa, entonces,

$$\mu_P=p=0.40,\ \sigma_P^2=\frac{(0.40)(0.60)}{100}=0.0024 \text{ y } \sigma_P=\sqrt{\frac{(0.40)(0.60)}{100}}=0.048989$$

La distribución muestral de la media y la distribución muestral de la proporción tienen asignada una función de probabilidad, ¿cuál es su forma específica?, ¿cómo se distribuyen?

En cursos con otro nivel se justifica: si la población origen de la muestra aleatoria simple $X_1,\ldots,\ X_n$ está distribuida normalmente, entonces, ambas distribuciones muestrales (de la media y de la proporción) se distribuyen normalmente.

El TEOREMA DEL LÍMITE CENTRAL *(o Teorema Central del Límite*), es el resultado de mayor utilidad e importancia en el cálculo de probabilidades y es la justificación formal de la aproximación de las diversas distribuciones de probabilidades a la distribución la normal, su enunciado fue obra del Matemático Aleksandr Liapunov en el Siglo XX, quien además lo demostró.

PROPIEDAD 3. TEOREMA DEL LÍMITE CENTRAL PARA $\overline{X}$ Y P

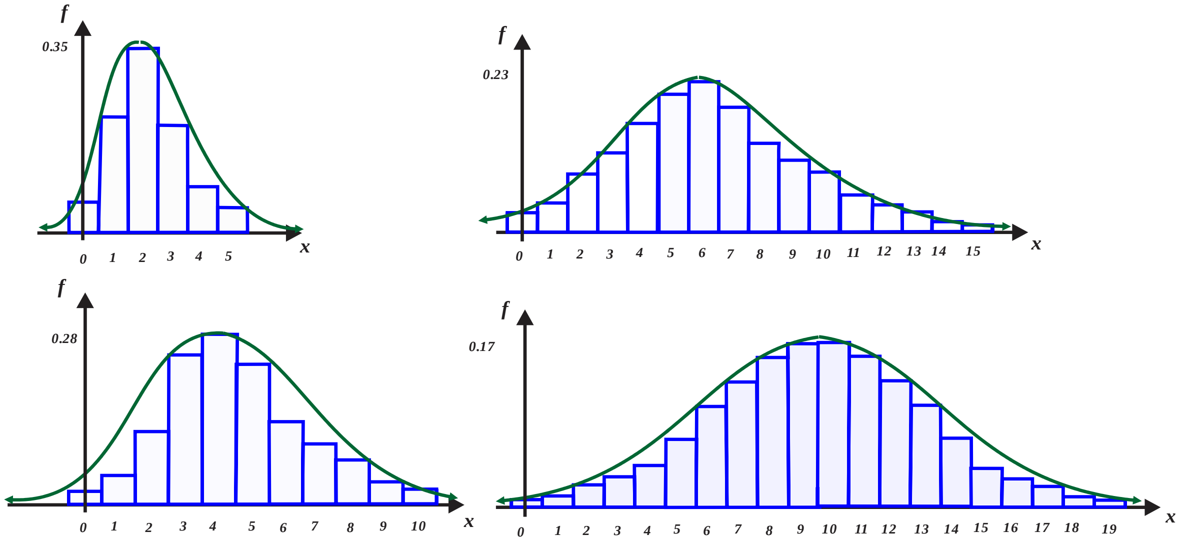
Sean $X_1,\ldots,\ X_n$ variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas, y n suficientemente grande (o que aumenta indefinidamente) extraída de una población con $E[\ X\ ]=\mu$ y varianza $V[\ X\ ]=\sigma^2$ (ambas finitas), entonces,

i. La variable aleatoria $Z_n=\dfrac{\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=i}^{n}X_i\right)-\mu}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}}$ converge en distribución a $N(\ 0\ ,\ 1\ )$

ii. La variable aleatoria $Z_n=\dfrac{\left(\dfrac{X}{n}\right)-p}{\sqrt{\dfrac{pq}{n}}}$ converge en distribución a $N(\ 0\ ,\ 1\ )$

En la práctica, la condición “tamaño de la muestra es suficientemente grande” se considera satisfecha cuando n es mayor o igual que 30.

La *figura* ilustra un caso particular del Teorema del Límite Central.



EJEMPLO 4. EL TLC EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS SOBRE DMM

1.

a. El promedio de las propinas (medio turno) de los "despachadores de gasolina" en la Ciudad de México es $\$125$ con desviación estándar $\$24$. Calcula $p\left(0<\overline{X}\leq 115\right)$

i. Si $n=36$, $\overline{X}$ se distribuye normalmente con $\mu_{\overline{X}}=125$ y $\sigma_{\overline{X}}=\dfrac{24}{\sqrt{36}}=4$. El tamaño de muestra garantiza un comportamiento (casi) normal de la media, por tanto, la probabilidad de un ingreso medio (en medio turno) menor a $\$115$ es

$$p\left(0<\overline{X}<115\right)=p\left(0<Z<\frac{115-125}{4}\right)$$
$$=p\left(-31.25<Z<-2.5\right)\approx\Phi\left(-2.5\right)=0.0062$$

ii. Si $n=64$, entonces, $\overline{X}$ se distribuye normalmente con parámetros

$$\mu_{\overline{X}}=125 \text{ y } \sigma_{\overline{X}}=\frac{24}{\sqrt{64}}=3$$

$$p\left(0<\overline{X}\leq 115\right)=p\left(-\frac{125}{3}<Z\leq\frac{115-125}{3}\right)\approx p\left(Z\leq -3.33\right)=\Phi\left(-3.33\right)=0.0004$$

b. Las taparroscas de los envases de la compañía "Jarritos", se distribuyen normalmente, tienen un diámetro medio de $\mu=1.001$ centímetros y desviación estándar $\sigma=0.003$ centímetros, por tanto:

$$\mu_{\overline{X}}=1.001 \text{ y } \sigma_{\overline{X}}=\frac{0.003}{\sqrt{9}}=0.001$$

i. La probabilidad de que diámetro medio esté comprendido entre 1.009 y 1.012 (inclusive) centímetros es

$$p\left(1.009 \leq \bar{X} \leq 1.012\right) = p\left(\frac{1.009-1.001}{0.001} \leq Z \leq \frac{1.012-1.001}{0.001}\right) = p\left(8 \leq Z \leq 11\right) = 0$$

ii. La probabilidad de un diámetro medio mayor a 1.00102 centímetros es

$$p\left(\bar{X} > 1.00102\right) = p\left(Z \geq \frac{1.00102-1.001}{0.001}\right) = p\left(Z \geq 0.02\right) = \Phi\left(-0.02\right) = 0.4920$$

iii. ¿Sobre qué longitud de diámetro promedio se encuentra el 90% de las taparroscas?

Sea $\bar{x}_0$ el diámetro promedio mínimo de las taparroscas, entonces,

$$p\left(\bar{X} \geq \bar{x}_0\right) = 0.90 \Leftrightarrow p\left(Z \geq \frac{\bar{x}_0 - 1.001}{0.001}\right) = 0.90\text{, por tanto,}$$

$\dfrac{\bar{x}_0 - 1.001}{0.001} = 1.2816$, o bien, $\bar{x}_0 = \left(1.2816\right)\left(0.001\right) + 1.001 = 1.002281$ centímetros.

c. El tiempo que utiliza un Metrobús en recorrer la ruta "Rojo Gómez. Metro Coyuya" se distribuye normalmente con $\mu = 8.2$ minutos y $\sigma = 1.5$ minutos. Si se analiza una muestra aleatoria de 49 tiempos de recorrido, entonces, la distribución muestral de $\bar{X}$ se distribuye normalmente con parámetros $\mu_{\bar{X}} = \mu = 8.2$ y $\sigma_{\bar{X}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{1.5}{\sqrt{49}} = 0.214$

También:

i. $p\left(\bar{X} < 8\right) = p\left(Z < \dfrac{8-8.2}{0.214}\right) = p\left(Z < -0.935\right) = \Phi\left(-0.935\right) = 0.1740$

ii. $p\left(7.5 \leq \bar{X} \leq 8.5\right) = p\left(\dfrac{7.5-8.2}{0.214} \leq Z \leq \dfrac{8.5-8.2}{0.214}\right) = p\left(-3.27 \leq Z \leq 1.40\right)$

$$= \Phi\left(1.40\right) - \Phi\left(-3.27\right) = 0.9192 - 0.0005 = 0.9187$$

iii. $p\left(\bar{X} > 7.5\right) = p\left(Z > \dfrac{7.5-8.2}{0.214}\right) = p\left(Z > -3.27\right) = \Phi\left(3.27\right) = 0.9995$

iv. Sea $\bar{t}_0$ el tiempo medio máximo desconocido (los otros valores de la estadística son menores o iguales), entonces, $p\left(\bar{X} \leq \bar{t}_0\right) = 0.95$, entonces, $p\left(Z < \dfrac{\bar{t}_0 - 8.2}{0.214}\right) = 0.95$,

$$p\left(Z < \frac{\bar{t}_0 - 8.2}{0.214}\right) = 0.95 \Leftrightarrow z_{95} = 1.6449,$$

así $\dfrac{\bar{t}_0 - 8.2}{0.214} = 1.6449 \Leftrightarrow \bar{t}_0 = \left(1.6449\right)\left(0.214\right) + 8.2 = 8.552$ minutos.

La evaluación de probabilidades referentes a la estadística P se requiere tener en cuenta la "corrección por continuidad" dada la precisión en la medición, por tanto, se considera el error de precisión como la mitad de mínima graduación del aparato o instrumento utilizado en la medida. Si la mínima escala del instrumento de medida es, por ejemplo,

i. 1 Kilogramo, entonces, la precisión es ± 0.5 kilogramos.

ii. 1 Metro, entonces, la precisión es ± 0.5 metros.

iii. 1 milímetro, entonces la precisión es ± 0.5 milímetros.

iv. 1 litro, entonces la precisión es ± 0.5 litros.

La cantidad ± 0.5 se denomina corrección por continuidad. La ***tabla 1*** muestra un ejemplo de cómo transformar una cantidad discreta a continua.

Cantidad discreta	Observación	Transformación	Forma continua
$X = 8$	Incluye al 8	Sumar y restar 0.5	$7.5 \leq X \leq 8.5$
$X < 8$	No Incluye al 8	Restar 0.5	$X < 7.5$
$X > 8$	No Incluye al 8	Sumar 0.5	$X > 8.5$
$X \leq 8$	Incluye al 8	Sumar 0.5	$X \leq 8.5$
$X \geq 8$	Incluye al 8	Restar 0.5	$X \geq 7.5$

TABLA 1

En la distribución muestral de proporciones la corrección por continuidad es $\pm \frac{1}{2n}$, en donde, n representa el tamaño de la muestra, la forma de operar es similar a la del cuadro anterior y en la ***tabla 2*** presentamos un ejemplo.

Forma discreta	Observación	Transformación	Forma continua
$P = 0.8$	Incluye al 0.8	Sumar y restar $\frac{1}{2n}$	$0.8 - \frac{1}{2n} \leq P \leq 0.8 + \frac{1}{2n}$
$P < 0.8$	No Incluye al 0.8	Restar $\frac{1}{2n}$	$P < 0.8 - \frac{1}{2n}$
$P > 0.8$	No Incluye al 0.8	Sumar $\frac{1}{2n}$	$P > 0.8 + \frac{1}{2n}$
$P \leq 0.8$	Incluye al 0.8	Sumar $\frac{1}{2n}$	$P \leq 0.8 + \frac{1}{2n}$
$P \geq 0.8$	Incluye al 0.8	Restar $\frac{1}{2n}$	$P \geq 0.8 - \frac{1}{2n}$

TABLA 2

EJEMPLO 5. EL TLC EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS SOBRE DMP

1.

a. Las bolsas de caramelos "Bremen" contienen 1000 unidades y tres de cada diez son de sabor "pizza de huachinango", entonces, $\mu_P = 0.30$ y $\sigma_P = \sqrt{\frac{(0.30)(0.30)}{1000}} \approx 0.0205$

i. Probabilidad de que la proporción de caramelos sea mayor o igual a 0.29 es

$$p(P \geq 0.29) = p\left(Z \geq \frac{0.29 - \frac{1}{2000} - 0.3}{0.0205} \right)$$

$$= p(Z \geq -0.537) = \Phi(0.537) = 0.2979$$

ii. La probabilidad de que la proporción de caramelos sea menor o igual a 0.31 es

$$p(P \leq 0.31) = p\left(Z \leq \frac{0.31 + \frac{1}{2000} - 0.3}{0.0205} \right) = p(Z \leq 0.537) = 0.2979$$

b. En uno de cada dos departamentos, de la unidad habitacional "La Estrella", existe un aparato electrónico "Koblenz"; de la unidad habitacional se selecciona una muestra aleatoria simple de 120 departamentos, entonces, $\mu_P = p = 0.5$, $\sigma_P^2 = \frac{(0.5)(0.5)}{120} = 0.0021$ y $\sigma_P = 0.0456$

i. La probabilidad de que la proporción de aparatos electrónicos "Koblenz" se encuentre entre 40% y 60% inclusive (considera ambos extremos) es

$$p\ (0.40 \leq P \leq 0.60) = p\left(\frac{0.40 - \frac{1}{240} - 0.5}{0.0456} \leq Z \leq \frac{0.60 + \frac{1}{240} - 0.5}{0.0456} \right)$$

$$= p(-2.28 \leq Z \leq 2.28) = D(2.28) = 0.9774$$

ii. La probabilidad de que la proporción de aparatos electrónicos de la marca "Koblenz" sea al menos 75% es

$$p(P \geq 0.75) = p\left(Z \geq \frac{0.75 - \frac{1}{240} - 0.5}{0.0456} \right) = p(Z \geq 5.391) = \Phi(-5.391) \approx 0$$

iii. La proporción correspondiente a 30 departamentos con aparatos "Koblenz" es $p = \frac{30}{120} = 0.25$, entonces, la probabilidad de que la proporción de departamentos con aparatos electrónicos sea "Koblenz" por lo menos de 0.25 es

$$p(\ P \geq 0.25) = p\left(Z \geq \frac{0.25 - \frac{1}{240} - 0.5}{0.0456} \right) = p(Z \geq -5.5738) = \Phi(5.5738) \approx 1$$

c. Ángel Chávez afirma: "el 5% de los estudiantes (con domicilio en la alcaldía Tlahuac) consume algún tipo de droga"; sea una muestra con tamaño $n = 60$, entonces,

$$\mu_P = p = 0.05,\ \sigma_P^2 = \frac{(0.05)(0.95)}{60} = 0.000792 \text{ y } \sigma_P = 0.02814$$

i. La probabilidad de que la proporción de estudiantes consuman la droga sea del 11% o más es

$$p(\ P \geq 0.11) = p\left(\ Z \geq \frac{0.11 - \frac{1}{120} - 0.05}{0.02814}\right) = p(Z \geq 1.83) = \Phi(-1.83) = 0.0336$$

ii. La probabilidad de que la proporción de estudiantes que consumen la droga sea menor a 3% es

$$p(\ P < 0.03) = p\left(\ Z < \frac{0.03 - \frac{1}{120} - 0.05}{0.02814}\right) = p(Z < -1.007) \approx 0.1562$$

SECCIÓN 2.2
EJERCICIOS 1

1. Si se seleccionan muestras aleatorias con tamaño n de poblaciones con la media y varianza señaladas, calcula la media y la desviación estándar de la distribución muestral de medias.

a. $n = 25,\ \mu = 1$ y $\sigma^2 = 16$

b. $n = 64,\ \mu = 16$ y $\sigma^2 = 25$

c. $n = 16,\ \mu = 6$ y $\sigma^2 = 100$

2. Se seleccionan muestras de tamaño n de poblaciones con proporción real p, calcula la media y la desviación estándar de la distribución muestral de proporciones.

a. $n = 64$ y $p = 0.25$

b. $n = 400$ y $p = 0.90$

c. $n = 625$ y $p = 0.75$

d. $n = 4$ y $p = 0.1$

3. La cantidad de minerales en los garrafones con agua "Impoluta" se distribuye normalmente con media $\mu = 4.0$ gramos y desviación estándar $\sigma = 1.5$ gramos. Un camión transporta 100 garrafones con agua "Impoluta". Calcula las probabilidades:

a. La cantidad media de minerales en los garrafones con agua "Impoluta" sea de 3.5 a 3.8 gramos?

b. La cantidad media de minerales en los garrafones con agua "Impoluta" sea superior a 4.2 gramos.

c. La cantidad media de minerales en los garrafones con agua "Impoluta" sea inferior a 3.9 gramos.

d. Calcula el contenido medio máximo de minerales que contiene el 99% de los garrafones con agua "Impoluta".

4. Se talarán 400 árboles en cierto bosque. La distribución de los diámetros de los árboles se distribuye normalmente con $\mu = 44$ centímetros y $\sigma = 4$ centímetros. Calcula la probabilidad:
a. El diámetro medio de los árboles talados esté entre 43 y 44.5 centímetros.
b. Obtén El diámetro medio de los árboles talados esté entre 0 y 46 centímetros.

5. El contenido medio de potasio en un "plátano dominico" se distribuye normalmente con $\mu = 0.8$ miligramos y $\sigma = 0.1$ miligramos. Sea un racimo con 25 "plátanos dominicos". Calcula la probabilidad de que las cantidades medias de potasio en los plátanos dominicos sean:
a. Superior a 0.82 miligramos.
b. Menor a 0.86 miligramos.
c. ¿Qué contenido medio máximo de potasio tendrá el 99% de los "plátanos dominicos"?

6. El tiempo medio utilizado por los individuo en llenar una solicitud de trabajo se distribuye normalmente con $\mu = 10$ y $\sigma = 2$ minutos. Si 49 individuos llenan la solicitud de trabajo por día. Calcula la probabilidad de que el tiempo medio requerido en llenar la solicitudes sea:
a. Como máximo 13 minutos.
b. Mayor a 11 minutos.
c. Esté entre 7 y 11 minutos
d. ¿Qué tiempo medio mínimo se requiere para llenar el 10% de las solicitudes?

7. La dureza media de los cristales, fabricados por "Cristalux", se distribuye normalmente con $\mu = 50$ y $\sigma = 4.5$, Kilogramos. Se selecciona una muestra aleatoria de 9 cristales. Calcula la probabilidad de que la dureza media de los cristales sea:
a. Por lo menos de 52 Kilogramos.
b. Menor de 52 Kilogramos.
8. Un mecánico arregla satisfactoriamente el 20% de los que presentan las transmisiones de los autos. Si recibe 64 órdenes de arreglar transmisiones, calcula la probabilidad de que la proporción real de transmisiones arregladas satisfactoria sea:
a. Del 25% o más.
b. A lo más el 32%.

9. En cierto Colegio, la proporción de alumnos que llega temprano a su primera clase 2%. Sea una muestra de 400 alumnos del Colegio. Determina la probabilidad de que la proporción real de alumnos que llegan temprano a su primera clase:

a. Sea de 3% o más.

b. Sea de 2% o menos.

c. Esté entre 13% y 27% (incluye ambos extremos).

d. Esté entre 4% y el 8% (no incluya los extremos).

10. El 46% de los últimos nacimientos en el hospital *“CEE”* fueron hombres. Calcula la probabilidad de que en los próximos:

a. 200 nacimientos sea una mayoría de hombres.

b. 1000nacimientos sea una mayoría de hombres.

c. 200 nacimientos sean más de 105 mujeres.

11. Un estudio de mercado determinó que el 78% de los habitantes de la región consumen la bebida “Transcola”. Sea una muestra de 50 personas de la región. Determina la probabilidad de que la proporción real de personas que consume la bebida “Transcola” sea:

a. Superior al 80%.

b. Superior al 20%.

c. Menos de 30 afirmen consumir la bebida “Transcola”.

d. Menos de 36 afirmen no consumir la bebida “Transcola”.

12. Las “aspirinas” son efectivas el 74% de las veces en que se utilizan en el tratamiento del dolor de cabeza.

a. A 16 personas con dolor de cabeza se les administran aspirinas, ¿cuál es la probabilidad de que más de 4 se recuperen del dolor de cabeza?

b. A 140 personas con dolor de cabeza se les administran aspirinas, ¿cuál es la probabilidad de que más de 4 se recuperen del dolor de cabeza?

2.3 SOLUCIONES Y EVALUACIÓN

SOLUCIÓN A EJERCICIOS PROPUESTOS

EXAMEN DE LA UNIDAD

SOLUCIONES DEL EXAMEN DE LA UNIDAD

SECCIÓN 2.1
EJERCICIOS 1 SOLUCIONES

1. a. $\hat{\mu} = 4.12$, $\hat{\sigma} = 1.65517$ **b.** $\hat{p} = 0.70$

2. a. $\hat{\mu} = 166.6$, $\hat{\sigma} = 3.04$ **b.** $\hat{p} = \frac{1}{3}$

3. a. $\hat{p} = \frac{1}{4}$, **b.** $\hat{p} = \frac{3}{20}$

4. $\left\{\begin{matrix} (2,2), (2,4), (2,6), (2,8), (2,10) \\ (4,2), (4,4), (4,6), (4,8), (4,10) \\ (6,2), (6,4), (6,6), (6,8), (6,10) \\ (8,2), (8,4), (8,6), (8,8), (8,10) \\ (10,2), (10,4), (10,6), (10,8), (10,10) \end{matrix}\right\}$

5. a. $\left\{\begin{matrix} (0,0), (0,2) \\ (2,0), (2,2) \end{matrix}\right\}$ **b.** $\left\{\begin{matrix} \bar{x}_{12} = 0, \bar{x}_{12} = 1 \\ \bar{x}_{21} = 1, \bar{x}_{22} = 2 \end{matrix}\right\}$ **c.** $\bar{x} = 1$

SECCIÓN 2.2
EJERCICIOS 1 SOLUCIONES

1. a. $\mu_{\bar{X}} = 1$ y $\sigma_{\bar{X}} = 0.8$ **b.** $\mu_{\bar{X}} = 16$ y $\sigma_{\bar{X}} = 0.625$ **c.** $\mu_{\bar{X}} = 6$ y $\sigma_{\bar{X}} = 2.5$

2. a. $\mu_p = 0.25$ y $\sigma_p = 0.0541$ **b.** $\mu_p = 0.90$ y $\sigma_p = 0.015$. **c.** $\mu_p = 0.75$ y $\sigma_p = 0.0173$ **d.** $\mu_p = 0.1$ y $\sigma_p = 0.1500$

3. a. 0.914. b. 0.918 **c.** 0.2456 **d.** 4.34 miligramos.

4. a. 0.9938 **b.** 1 8. **a.** 0.9991 **b.** 0

5. a. 0.1587b. 0.9987 **c.** 0.8168 miligramos. **d.** 0.8081 miligramos.

6. a. 1 . **b.** 0.0002**c.** 0.9998 **d.** 10.3662

7. a. 0.9082**b.** 0.0918

8. a. 0.2005 **b.** 0.9946

9. a. 0.1056 **b.** 0.5714 **c.** 0.0000**d.** 0.0012

10. a. 0.1131 **b.** 0.0052**c.** 0.5832

11. a. 0.3050 **b.** 1.0000**c.** 0.0006 **d.** 0.8830

12. a. 1.0000 **b.** 1.0000

UNIDAD 2 EXAMEN

COMPLETA LOS ESPACIOS

1. Una es una parte de una población estadística.

2. En la realización de la muestra aleatoria simple $X_1, X_2, \ldots, X_n$, las variables aleatorias que la componen asumen los valores respectivamente.

3. La variable aleatoria con $n \geq 30$ tiene una distribución aproximadamente normal con parámetros $\mu_{\overline{X}} = \mu$ y $\sigma_{\overline{X}}^2 = \dfrac{\sigma^2}{n}$.

4. Si la no incluye parámetros y $X_1, X_2, \ldots, X_n$ es una MAS extraída de una población estadística recibe el nombre de estadística.

5. La función de probabilidad de la variable aleatoria $\overline{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$ con $X_i = 0, 1$, y que se representa con se conoce como distribución muestral de la proporción.

PROBLEMAS OPERATIVOS

1. La edad a la que tienen su primer hijo las mujeres profesionistas es una variable aleatoria aproximadamente normal con media $\mu = 35$ y desviación estándar $\sigma = 5$ años. Para una muestra aleatoria de 100 mujeres profesionistas, sea $\overline{X}$ la media muestral de la edad en que tienen su primer hijo, calcula la media, la desviación estándar y la varianza de $\overline{X}$.

2. En un rebaño, el peso medio de los chivos 50 kilogramos con una desviación estándar de 4 kilogramos. Si se selecciona al azar una muestra aleatoria simple de 100 chivos. Calcula la media y la desviación estándar de $\overline{X}$.

3. El 3% de los pastelillos elaborados en una panadería tiene un peso menor al deseado Un restaurant recibe un pedido de 500 pastelillos de la panadería. Calcula la media, la varianza y la desviación estándar de la proporción real de pastelillos con menor peso que el especificado.

4. Si $p = 0.03$, $n = 500$ calcula $p\left(P > 0.05\right)$

PROBLEMAS EN CONTEXTO

1. En un estudio a pacientes con trastornos diabéticos se determinó que el promedio de pérdida de peso medio por semana es 325 gramos con desviación estándar 20 gramos. Si se extrae de la lista de pacientes una muestra aleatoria de 50 pacientes, calcula:

a. La probabilidad de que la pérdida media de peso en la muestra sea inferior a 320 gramos.

b. ¿Cuál es la probabilidad de que la media de la muestra de los pacientes con pérdida de peso sea entre 320gramos y 330gramos?

2. El administrador de una cadena de tiendas de electrodomésticos determinó que la proporción de personas morosas en sus en sus pagos (morosos) es 0.10del total; si se extrae de esta población una muestra aleatoria de 100cuentas, ¿cuál es la probabilidad de que más de 13cuentas san de personas morosas?

ESCALA

Preguntas 1 a 5., un punto cada una (total 5 puntos).
Problemas operativos 1. a 4., dos puntos (total 8 puntos).
Problemas en contexto 1. a 2., tres puntos cada inciso (total 9 puntos).

Para acreditar se requieren 16 o más puntos

UNIDAD 2 SOLUCIONES AL EXAMEN

COMPLETA LOS ESPACIOS

1. muestra aleatoria simple
2. $x_1, x_2, \ldots, x_n$
3. $\overline{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$
4. la función $f\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$
5. $P = \dfrac{X}{n}$

PROBLEMAS OPERATIVOS

1. $\mu_{\overline{X}} = 35,\ \sigma_{\overline{X}} = \dfrac{1}{2}$ y $\sigma^2_{\overline{X}} = \dfrac{1}{4}$
2. $\mu_{\overline{X}} = 50$ y $\sigma_{\overline{X}} = 0.4$
3. $\mu_P = 0.3,\ \sigma^2_P = 0.00042$y $\sigma_P = 0.0205$
4. 0.0044

PROBLEMAS EN CONTEXTO

1. a. 0.0384 **b.** 0.9232
2. 0.1587

3. INFERENCIA ESTADÍSTICA

PROPÓSITO

Al finalizar la unidad el alumno:

Realizará inferencias formales sobre los valores de los parámetros, a partir de del análisis de los estimadores, para fundamentar la toma de decisiones en una investigación estadística, consolidando la formación de su pensamiento estadístico.

CONTENIDO

CONCEPTOS CLAVE

Estimador. Función que depende de una muestra aleatoria simple y que se utiliza para estimar y/o inferir el valor de un parámetro.

Estimador puntual. Valor asociado por un estadístico a una realización de la MAS que se utiliza para inferir el valor del parámetro de una población.

Intervalo aleatorio de confianza. Intervalo de la forma $\hat{\Theta}_i \leq \theta \leq \hat{\Theta}_s$, los extremos son funciones que dependen de una MAS.

Estimador por intervalo o intervalo de confianza. Intervalo de valores $\hat{\theta}_I \leq \theta \leq \hat{\theta}_S$, con una confianza previamente establecida, en el que se estima contiene al parámetro objetivo. $\hat{\theta}_I$ y $\hat{\theta}_S$ son estimadores puntuales de la estadística o del estimador.

Nivel de confianza. Probabilidad de que el parámetro a estimar se encuentre en el intervalo de confianza.

Otros elementos en un intervalo de confianza $p\left(\hat{\theta}_I \leq \theta \leq \hat{\theta}_S \right) = 1-\alpha$

a. Parámetro objetivo θ .
b. Coeficiente o nivel de confianza $1-\alpha$
c. Confianza $\left(1-\alpha\right)100\%$
d. Longitud del intervalo $L = \hat{\theta}_S - \hat{\theta}_I$

Intervalo de confianza para μ, con σ conocida. $\bar{x} - z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $z_{\alpha/2}$ es el valor del percentil z que deja un área de $\alpha/2$ a su derecha.

Intervalo de confianza para μ, con $n \geq 30$. $\bar{x} - z_{\alpha/2}\dfrac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2}\dfrac{s}{\sqrt{n}}$, $z_{\alpha/2}$ es el valor del percentil z que deja una área de $\alpha/2$ a su derecha.

Error máximo cometido al estimar μ.

$$E_{Máx} = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Tamaño de la muestra n.

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}\,\sigma}{E_{MAX}} \right)^2$$

Intervalo de confianza para p. $\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}} < p < \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$, $z_{\alpha/2}$ el valor del percentil z que deja una área de $\alpha/2$ a su derecha.

Error máximo cometido al estimar p.

$$E_{Máx} = z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{p}\hat{q}/n}$$

Tamaño de la muestra n si se conoce $\hat{p}$.	$n=\left(\dfrac{z_{\alpha/2}}{E_{Máx}}\right)^2 \hat{p}\hat{q}$
Tamaño de la muestra n si no se conoce $\hat{p}$.	$n=\left(\dfrac{z_{\alpha/2}}{2E_{Máx}}\right)^2$
Hipótesis Estadística.	Suposición acerca el valor de un parámetro.
Hipótesis nula.	Suposición sobre valor real de un parámetro que indica que la situación no cambia.
Hipótesis Alternativa.	Suposición que se contrapone a la hipótesis nula.
$Error\ \ tipo\ \ I$.	Rechazar la hipótesis nula siendo verdadera.
$Error\ \ tipo\ \ II$.	Aceptar la hipótesis nula siendo falsa.
Nivel de significación α.	Probabilidad de cometer error $tipo\ \ I$.
Nivel de significación β.	Probabilidad de cometer error $tipo\ \ II$.
Estadístico de prueba.	Es el valor de una función que depende de los datos muestrales, y sobre el que se basa la decisión de no rechazar o rechazar la hipótesis nula.
Región crítica o región de rechazo.	Conjunto de valores del estimador para los que se rechaza la hipótesis nula.
Toma de una decisión.	Si el valor calculado del estadístico de prueba cae en la región de rechazo, se rechaza la hipótesis nula H_0 y se acepta la hipótesis alternativa H_a. Si el valor calculado del estadístico de prueba no se encuentra en la región de rechazo, no se rechaza H_0.
Hipótesis alternativa bilateral.	Si $H_0 : \theta = \theta_0$, entonces, la hipótesis alternativa es $H_a : \theta \neq \theta_0$ y la prueba se denomina bilateral o de dos colas.
Hipótesis alternativa unilateral.	Si $H_0 : \theta > \theta_0$ o $H_0 : \theta < \theta_0$, entonces, la hipótesis alternativa $H_a : \theta < \theta_0$ o $H_a : \theta > \theta_0$ respectivamente, la prueba se denominan: unilateral izquierda o derecha respectivamente.

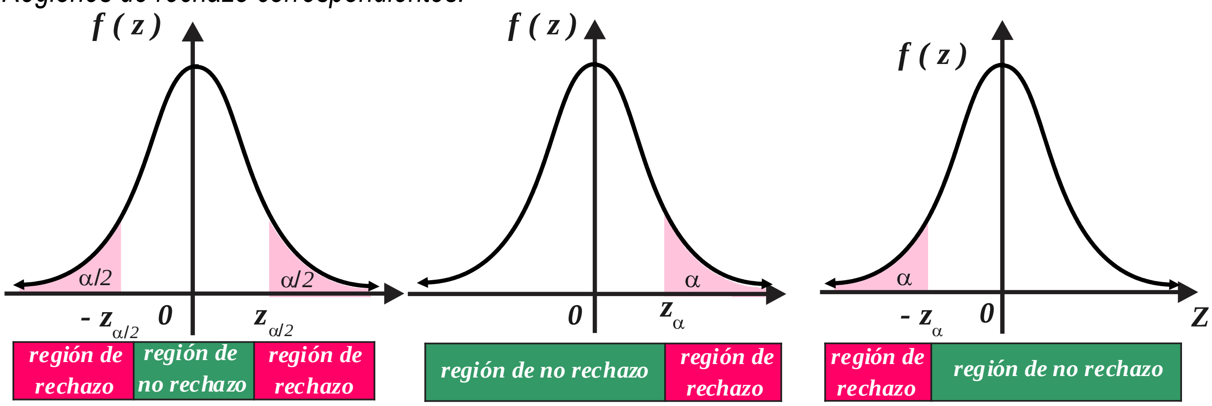
Características de una prueba de hipótesis para μ

Hipótesis nula : $H_0 : \mu = \mu_0$

Estadística de prueba: $z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ o $z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$ $\quad n \geq 30$

Hipótesis alternativa	*Región de rechazo al nivel de significación* α
$H_a : \mu \neq \mu_0$	$z > z_{\alpha/2}$ o $z < -z_{\alpha/2}$
$H_a : \mu > \mu_0$	$z > z_{\alpha}$
$H_a : \mu < \mu_0$	$z < -z_{\alpha}$

Regiones de rechazo correspondientes:



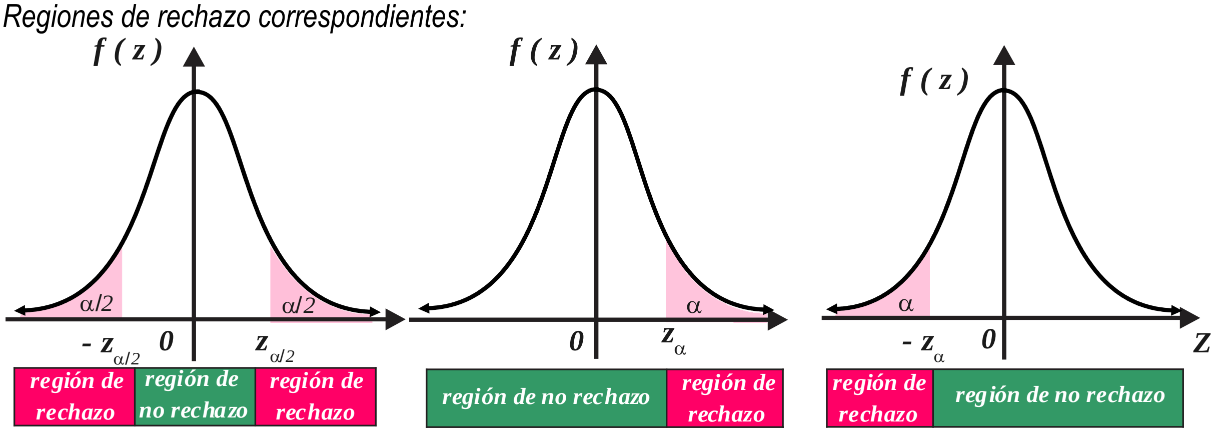
Características de una prueba de hipótesis para p, si $n \geq 30$

Hipótesis nula: $H_0 : p = p_0$

Estadística de prueba: $z = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0 q_0 / n}} = \dfrac{x - np_0}{\sqrt{n\, p_0\, q_0}}$

Hipótesis alternativa	*Región de rechazo al nivel de significación* α
$H_a : p \neq p_0$	$z > z_{\alpha/2}$ o $z < -z_{\alpha/2}$
$H_a : p > p_0$	$z > z_{\alpha}$
$H_a : p < p_0$	$z < -z_{\alpha}$

Regiones de rechazo correspondientes:



3.1 ESTIMACIÓN Y ESTIMACIÓN POR INTERVALOS

APRENDIZAJES

1. Construye el concepto de estimación por intervalo a partir de un problema.
2. Deduce las expresiones para el cálculo de intervalos de confianza para la media o para la proporción, bajo las condiciones del Teorema del Límite Central.
3. Estima la media y la proporción poblacionales por medio del intervalo de confianza correspondiente, que haya generado en el contexto de una investigación o un problema, comunicando su interpretación.

TEMAS

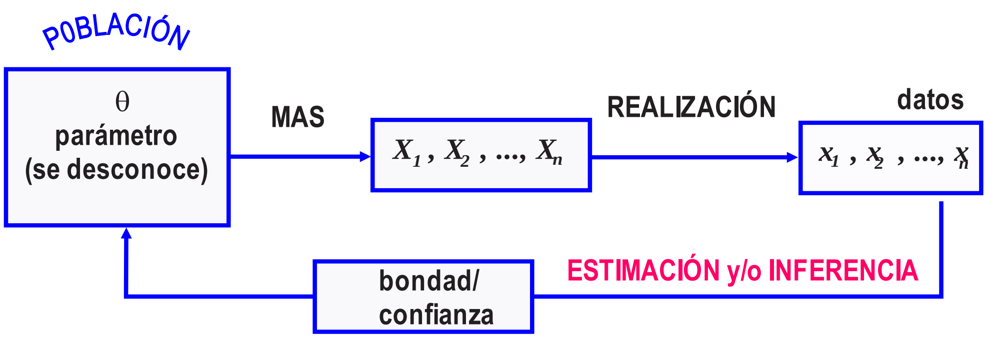
Estimación puntual y por intervalos para la media y la proporción de la población. Elementos que componen a un intervalo de confianza. Aplicación e interpretación de resultados.

El propósito de la estadística inferencial (inferencia estadística) es inferir y/o estimar los parámetros (caracteres o números) que describen las características de una población (o su distribución de probabilidades) que no es completamente observable debido a diversos factores. Los procesos de estimación e inferencia requieren el uso muestras para calcular números (aproximaciones) y establecer la bondad en su representatividad (aproximación), con el fin de determinar o establecer que tan confiables o significativos respecto a los valores reales (parámetros) de la población.

DEFINICIÓN 1. PARÁMETRO

Un parámetro (valor real) de una población es un número que representa el valor de un carácter de la variable (o variables) que la definen.

La ***figura*** muestra el proceso de estimación de un parámetro.



EJEMPLO 1. PARÁMETROS

a. En una población con una característica medible y cuyos valores se representan por la variable X distribuida binomialmente el parámetro que es factible de estimar es p.

b. Consideremos la población en que los valores de la característica variable (de interés) se representan por X con distribución normal, los parámetros a estimar son μ y σ^2 (equivalentemente σ).

Los procesos de inferencia/estimación de parámetros requieren del uso de estadísticas que por su uso reciben el nombre de estimadores.

EJEMPLO 2. ESTADÍSTICAS

a. Si en una población el parámetro objetivo (parámetro que se desea estimar) es un promedio, entonces una estadística útil es la media aritmética.

b. Si en una población el parámetro objetivo es una proporción o un porcentaje, entonces una estadística útil es la estadística proporción.
c. Si en una población el parámetro objetivo es un total, entonces una estadística útil es el total muestral.

A diferencia de la estadística descriptiva, en que los elementos componentes de las estadísticas son números, en estadística inferencial los elementos que componen los estimadores son variables aleatorias.

DEFINICIÓN 2. ESTIMADOR Y ESTIMADOR PUNTUAL

Sean: θ un parámetro, $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria y $\Theta(X_1, \ldots, X_n)$ la estadística correspondiente a θ, entonces:

a. La expresión $\hat{\Theta}(X_1, \ldots, X_n)$ se denomina estimador del parámetro θ.

b. El valor (o número) $\hat{\theta}$ obtenido cuando en $\hat{\Theta}(X_1, \ldots, X_n)$ $X_1, \ldots, X_n$ asumen los valores $x_1, \ldots, x_n$ se llama estimador puntual de θ.

La ***tabla 1*** presenta: el parámetro, la estadística o estimador y el estimador puntual del parámetro.

POBLACIÓN	PARÁMETRO θ	ESTIMADOR $\hat{\Theta}$	ESTIMADOR PUNTUAL
BINOMIAL	p	$\hat{P} = \frac{X}{n}$	$\hat{p} = \frac{x}{n}$
NORMAL	μ	$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$	$\hat{\mu} = \overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$
NORMAL	σ^2	$\hat{S}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1}$	$\hat{s}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}$

TABLA 1

EJEMPLO 1. ESTIMADORES PUNTUALES

a. Se desea inferir la estatura media μ de todos los alumnos de una escuela Vocacional suponiendo que ésta (estatura media) se distribuye normalmente. Con este propósito se analiza una realización de la muestra aleatoria $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10}$ obteniendo $166, 168, 170, 172, 168, 164, 174, 170, 172, 166$

Si utilizamos la estadística

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10}}{10}$$

como estimador puntual del parámetro μ obtenemos

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{166+168+170+172+168+164+174+170+172+166}{10} = 169$$

b. Para inferencia la proporción real p de alumnos "regulares" matriculados en el IPN, suponiendo que tal carácter se distribuye binomialmente, se revisó la realización de una muestra aleatoria de diez alumnos, misma que condujo al resultado

$$1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0$$

Con los datos anteriores calculamos un valor para la estadística

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10},$$

en donde $X_i = 1$ si el alumno es regular y $X_i = 0$ si el alumno es irregular, entonces,

$$X = 1+0+0+1+1+1+1+1+0+0 = 6 \text{ y } \hat{p} = \frac{6}{10} = 0.6$$

Con $\hat{P}$ inferimos que el parámetro $p = 0.6$ tiene un valor de $\hat{p} = 0.6$

La inferencia del valor del parámetro θ, que define el comportamiento de una característica X de cierta población, puede utilizarse un conjunto de valores, es decir, estimarlo utilizando un estimador por intervalos. Un estimador (aleatorio) por intervalo del parámetro θ se construye con una estadística de la forma

$$\left(\hat{\Theta}_I (X_1,\ldots, X_n),\ \hat{\Theta}_s (X_1,\ldots, X_n) \right)$$

y la realización $x_1,\ldots, x_n$ de la MAS $X_1,\ldots, X_n$ obteniéndo el intervalo

$$\left(\hat{\theta}_I ,\ \hat{\theta}_S \right)$$

DEFINICIÓN 3. INTERVALO DE CONFIANZA O ESTIMADOR POR INTERVALO

Sean:

θ un parámetro, $X_1,\ldots, X_n$ una MAS, $\hat{\Theta}_i(X_1,\ldots,X_n)$ y $\hat{\Theta}_S(X_1,\ldots,X_n)$ estadísticas correspondientes al parámetro θ, entonces:

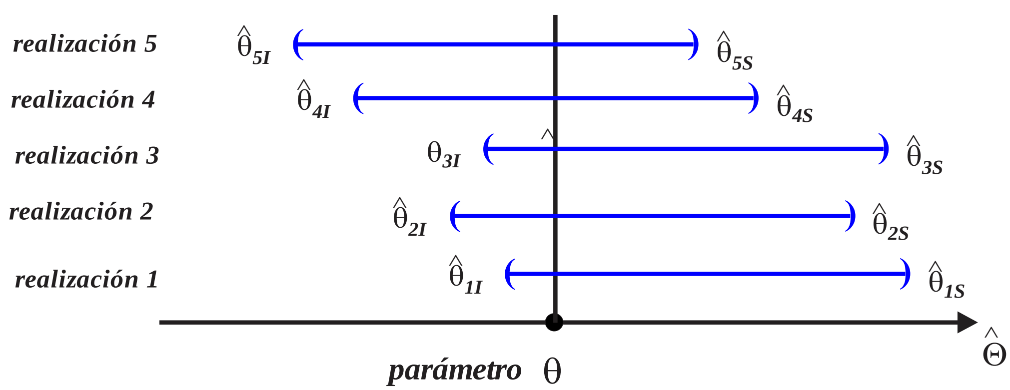
a. $p\left(\hat{\Theta}_I \leq \theta \leq \hat{\Theta}_S\right) = 1-\alpha$ es un intervalo aleatorio de confianza del $(1-\alpha)100\%$ para θ.

b. Si $x_1,\ldots, x_n$, es una realización de la MAS $X_1,\ldots,X_n$, entonces, $\hat{\theta}_I \leq \theta \leq \hat{\theta}_S$ es un intervalo de confianza (estimador por intervalo) del $(1-\alpha)100\%$ para θ.

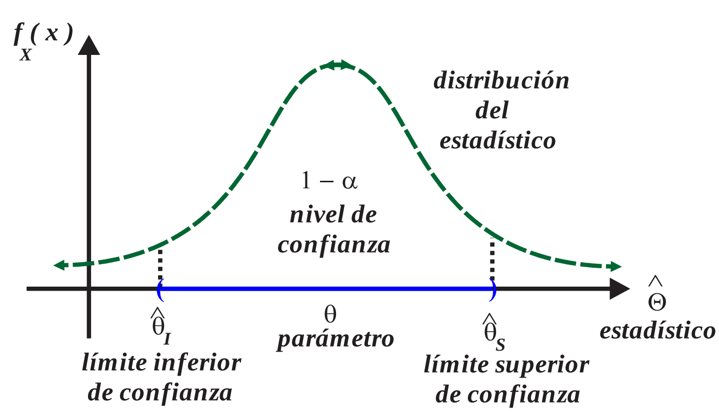
c. Los números $\hat{\theta}_I$ y $\hat{\theta}_S$ son los límites de confianza, inferior y superior respectivamente.

d. $L = \hat{\theta}_S - \hat{\theta}_I$ es la amplitud del intervalo de confianza.

La ***figura*** muestra diversos intervalos de confianza para un parámetro objetivo θ.



El estimador $\hat{\Theta}$ tiene asociada una distribución de probabilidad que puede ser como la mostrada en la siguiente *figura*, La ***figura*** ilustra los elementos que involucra un intervalo de confianza.



El nivel de confianza $1-\alpha$ indica la fiabilidad del estimador por intervalo, esto es, la probabilidad de que contenga al parámetro de interés, habitualmente se fijan niveles de confianza "altos" como 90%, 95% o 99%. El uso de un alto nivel de confianza un intervalo de confianza implica una amplitud relativamente grande de él (a mayor nivel de confianza seleccionado, mayor amplitud del intervalo de confianza) y, por tanto, se pierde precisión en la estimación real del parámetro objetivo. En la construcción del intervalo de confianza del $(1-\alpha)100\%$ para un parámetro específico θ, se utiliza una estadística (variable aleatoria) que lo incluya y la distribución de probabilidad correspondiente. En la construcción del intervalo de confianza para μ supondremos que la varianza real (o poblacional) σ^2 de la población se conoce (o si es el caso que el tamaño de la muestra es mayor o igual que 30, entonces, $p\left(-z_{\alpha/2} < \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$

Un proceso algebraico y el manejo de la relación de orden conducen a la ***proposición 1***.

PROPOSICIÓN 1. INTERVALO DE CONFIANZA O ESTIMADOR POR INTERVALO PARA μ

Sea $x_1,\dots, x_n$ una realización de la MAS $X_1,\dots, X_n$ extraída de una población normal con parámetro μ.

a. Si σ_0 es conocida, un intervalo con confianza $(1-\alpha)100\%$ para μ es

$$\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$

b. Si σ_0 es desconocida y $n \geq 30$, un intervalo de confianza $(1-\alpha)100\%$ para μ es

$$\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}}$$

En ambos casos $z_{\alpha/2}$ es el valor de la distribución normal estándar Z que deja un área (o probabilidad) de $\alpha/2$ a su derecha.

La ***proposición 1*** proporciona un método (si se conocen ciertos elementos) para calcular el tamaño de muestra n y el error máximo cometido al estimar μ puntualmente:

i. El error máximo e que se cometerá será menor a $e = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

ii. El error será menor que e si el tamaño de muestra es $n = \left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{e}\right)^2$

EJEMPLO 2. INTERVALO DE CONFIANZA PARA LA MEDIA

a. Se encontró que el contenido promedio de azúcar en 49 envases de jugos "Valle Cuadrado" fue 36 gramos, suponiendo que la desviación estándar del contenido real de azúcar $\sigma = 4$ gramos,

entonces, un intervalo de confianza del 95% para el contenido medio μ de azúcar se construye de la siguiente manera:
Con la confianza del 95%, obtenemos $(1-\alpha)100\% = 95\%$, es decir, $\alpha = 0.05$ y $\alpha/2 = 0.025$, el percentil correspondiente es $z_{0.025} = 1.96$, por tanto, el estimador por intervalos para μ es

$$36 - 1.96\frac{4}{\sqrt{49}} < \mu < 36 + 1.96\frac{4}{\sqrt{49}}, \text{ o bien, } 34.88 < \mu < 37.12$$

El resultado anterior se interpreta en las formas:
i. Con una confianza de 95%, el verdadero valor de μ se encuentra entre

34.88 y 37.12 gramos.

ii. El 95% de las realizaciones de la muestra aleatoria tienen un contenido medio de azúcar entre

34.88 y 37.12 gramos.

b. Una institución de crédito financió a 200 personas que deseaban cambiar su automóvil. Al revisar las solicitudes encontró una solicitud de préstamo promedio de 120000 pesos. Suponiendo $\sigma = 20000$ y una distribución normal del el monto de los créditos, un intervalo de confianza de 90% para el préstamo medio se construye como sigue:
con $(1-\alpha)100\% = 90\%$, obtenemos $\alpha = 0.10$, $\alpha/2 = 0.05$, y $z_{0.05} = 1.645$, por tanto,

$$120000 - 1.9645\frac{20000}{\sqrt{200}} < \mu < 120000 + 1.9645\frac{20000}{\sqrt{200}} \text{ y } 11767.362 < \mu < 12232.638$$

i. Con una confianza de 90% el valor medio de los créditos se encuentra en

$11767.362 < \mu < 12232.638$ pesos.

ii. 90% de las realizaciones de la muestra aleatoria tiene un valor medio comprendido entre

11767.362 y 12232.638 pesos.

c. La construcción de un intervalo de confianza de 99% para μ, "media de las estaturas de los niños menores a 8" años matriculados en el primer grado de primaria tuvo como resultado:

$98 < \mu < 106$, si $\bar{x} = 102$, $s_{n-1} = 10$

i. El error máximo cometido (e) al utilizar $\bar{x}$ como estimador puntual de parámetro μ, es

$$e = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \text{ pero } \hat{\theta}_S = \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}}, \text{ por tanto, } e = \hat{\theta}_S - \bar{x} \text{ y } e = 106 - 102 = 4$$

ii. De la confianza (99%), obtenemos $z_{0.005} = 2.58$, el tamaño de la muestra que se utilizó considerando que el error cometido es menor a $e = 4$ es

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{e}\right)^2 = \left(\frac{(2.58)(10)}{4}\right)^2 \approx 42$$

d. La organización caritativa “Familia Pro” obtuvo el intervalo de confianza $4.45 < \mu < 5.15$ como estimador de μ de los días de hospitalización de pacientes sometidos a cierta cirugía. La realización de la MAS proporcionó una estancia promedio de 4.8 días y desviación estándar de 2.6 días, utilizó un nivel de confianza de 90%.

i. El error máximo cometido (e) al utilizar $\bar{x}$ como estimador puntual de μ, se calcula con

$$e = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ y } \hat{\theta}_S = \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\text{, entonces, } e = \hat{\theta}_S - \bar{x}$$

Con $\bar{x} = 4.8$ y $\hat{\theta}_S = 5.15$, obtenemos $e = 5.15 - 4.8 = 0.35$

ii. Calculo de n, si $(1-\alpha)100\% = 90\%$, entonces,

$$\alpha = 0.10 \text{ y } z_{\alpha/2} = z_{0.05} = 1.645$$

$s = 2.6$ es estimador puntual de σ, entonces, $n = \left(\frac{(1.645)(2.6)}{0.35}\right)^2 \approx 149$

La ***proposición 2.*** contiene los elementos relacionados con un intervalo de confianza proporción real.

PROPOSICIÓN 2. INTERVALO DE CONFIANZA O ESTIMADOR POR INTERVALO PARA p

Sea $\hat{p}$ la proporción de éxitos en una realización de las variables aleatorias $X_1,\ldots, X_n$ con tamaño $n \geq 30$, el intervalo con confianza de $(1-\alpha)100\%$ para el parámetro binomial p es

$$\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} < p < \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}},$$

donde $z_{\alpha/2}$ es el valor de la distribución normal estándar Z que deja área (o probabilidad) de $\alpha/2$ a su derecha, $\hat{p} = \frac{x}{n}$ el estimador puntual de la proporción, en donde x la cantidad de éxitos.

Con la ***propiedad 2.*** y $\hat{p}$ como estimador puntual de p, se justifica:

i. El error máximo que se cometerá será menor al número $e = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

ii. Si el error cometido es menor que e, entonces, el tamaño de muestra es $n = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{e}\right)^2 \hat{p}\hat{q}$

iii. $n = \dfrac{z^2{}_{\alpha/2}}{4e^2}$ para $\hat{p}$ desconocida, el error cometido no excede e.

EJEMPLO 3. INTERVALO DE CONFIANZA PARA LA PROPORCIÓN

a. Un estudio sobre los gustos musicales realizado a $n = 500$ estudiantes (seleccionados al azar) mostró que $x = 340$ no tiene idea sobre el género "fox trot". Para construir un intervalo de confianza del 98% respecto a la proporción real de estudiantes que no tienen idea sobre el género "fox trot":
De $(1-\alpha)100\% = 98\%$, obtenemos: $\alpha = 0.02$, $\alpha/2 = 0.01$; en la tabla de percentiles normales observamos $z_{0.01} = 2.326$

El estimador puntual de la proporción real p es $\hat{p} = 340/500 = 0.68$, por tanto, el intervalo de confianza para p es:

$$0.68 - 2.326\sqrt{\frac{(0.68)(0.32)}{500}} < p < 0.68 + 2.326\sqrt{\frac{(0.68)(0.32)}{500}},$$

o bien,

$$0.631 < p < 0.729$$

Con confianza del 98% la proporción real de estudiantes que no tiene idea sobre el género "fox trot", se encuentra en $(0.631\ ,\ 0.729)$

b. Para estimar la proporción de choferes que desayunan "chilaquiles" un día a la semana, se seleccionó una muestra aleatoria de $n = 100$ choferes, se encontró que $x = 64$ lo hacen. Un intervalo con confianza de 99% para la proporción real de choferes que desayunan "chilaquiles" un día a la semana procedemos de la siguiente forma
Con $(1-\alpha)100\% = 99\%$, obtenemos $\alpha = 0.01$, $\alpha/2 = 0.005$ y en las tablas de los cuantiles normales observamos $z_{0.005} = 2.576$

El estimador puntual de la proporción real p es $\hat{p} = 64/100 = 0.64$, por tanto,

$$0.64 - 2.576\sqrt{\frac{(0.64)(0.36)}{100}} < p < 0.64 + 2.576\sqrt{\frac{(0.64)(0.36)}{100}},$$

o bien,

$$0.5164 < p < 0.7636$$

Con una confianza de 98% la proporción real de choferes que "desayunan chilaquiles" un día a la semana se encuentra al intervalo $(0.5164\ ,\ 0.7636)$

c. Con una confianza de $(1-\alpha)100\% = 95\%$, se estimó que los plátanos machos de la compañía "United Fruit", tienen longitud media de 18.5 centímetros. Si el error es menor a 0.05 centímetros cuando se utiliza $\hat{p} = 0.12$ como estimador puntual de la proporción real p, calculemos el tamaño de la muestra utilizada.

Puesto que

$e = 0.05$, $(1-\alpha)100\% = 95\%$ y $z_{0.25} = 1.96$, entonces, el tamaño de muestra utilizado fue

$$n = \left(\frac{1.96}{0.05}\right)^2 (0.12)(0.88) \approx 162$$

d. La proporción de peras con peso menor a 150 gramos en las cajas de la compañía "United Fruit" es desconocida. Determinemos el tamaño de muestra, con confianza de 95% para que el error cometido en la estimación sea menor a 0.05.

No se conoce el estimador puntual $\hat{p}$ de la proporción real p, pero

$e = 0.05$, $(1-\alpha)100\% = 95\%$ y $z_{0.25} = 1.96$, entonces

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{2E_{Máx}}\right)^2 = \left(\frac{1.96}{2(0.05)}\right)^2 \approx 384$$, aproximadamente 384 peras.

SECCIÓN 3.1
EJERCICIOS 1

1. Sean: una población con distribución normal con parámetros μ y σ^2, la muestra aleatoria $X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_5,\ X_6,\ X_7,\ X_8$ y $2,\ 6,\ 5,\ 7,\ 5,\ 7,\ 5,\ 8$ una de sus realizaciones.

i. Determina el estimador puntual de μ utilizando la estadística $\overline{X}$.

ii. Calcula el estimador puntual de σ^2 utilizando la estadística $S^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1}$

b. Sea una población con distribución binomial y parámetro p, si

$$X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_5,\ X_6,\ X_7,\ X_8$$

es una muestra aleatoria y $1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1$ una de sus realizaciones. Calcula el estimador puntual de p.

2. Sea una muestra aleatoria de las edades de 100 empleados de una población con media desconocida μ y desviación estándar $\sigma = 4.5$. Si una realización promedió $\bar{x} = 28.3$ años construye un intervalo de confianza para μ. Determina el ancho de cada intervalo y compara los resultados.

a. 90%

b. 95%

3. Un examen de conocimientos físicas aplicado a 120 aspirantes a enfermeros dio una calificación media de 77.8 con desviación estándar de 11.1; suponiendo las calificaciones se distribuyen normalmente. Construye intervalos de confianza para la media real de las calificaciones.

a. Del 95%

b. Del 99%

4. El tiempo que dura cargada una computadora lap-top se distribuye normalmente; se probó una muestra aleatoria de 77 cargas del mismo número de computadoras para determinar su duración promedio real de vida, la muestra produjo $\bar{x} = 152$ minutos y $s = 5$ minutos. Construye un intervalo con 99% de confianza sobre el tiempo de duración de la carga de este tipo de computadoras.

5. Para estimar la longitud media de las tuercas, en milímetros, que expende “Sekiguchi”. se utilizó una muestra aleatoria de n tuercas. Si $e = 0.05$, $s = 0.4$ y el nivel de confianza es 98%, determina n, si se utiliza $\bar{x}$ para estimar μ, interpreta el resultado.

6. Una cafetera se ajusta de modo que libere cierta cantidad de café en un vaso donde será mezclado con agua caliente. En una muestra aleatoria de 36 bebidas servidas por la cafetera se obtiene $\bar{x} = 300$ mililitros con una desviación estándar $s = 1$ mililitros. Sí $e = 0.3$ determina el nivel de confianza.

7. Los oxímetros utilizados por 500 médicos del Centro Médico Nacional de la aduana de Manzanillo dieron lecturas incorrectas en 20 ocasiones.

a. Construye un intervalo del 95% de confianza para la proporción real de oxímetros que fallan, interpreta el resultado.

b. Determina el error máximo cometido en la estimación anterior.

8. Se mide el contenido de una muestra aleatoria de 25 gaseosas con la leyenda “contenido 600 mililitros”. Se encontró que sólo 20 de ellas tuvieron el contenido indicado. Construye un intervalo de 95% de confianza para la verdadera proporción de “gaseosas” que no contienen lo señalado.

9. De 350 personas encuestadas sobre el tipo de taco preferido, 161 indicaron que prefieren los de maciza. Construye intervalos de confianza para la proporción real de las personas que prefieren los tacos de maciza.

a. De 99%

b. De 98%

10. Un tratamiento contra el “estreñimiento mental”, da esperanza de eliminarlo, e incluso la ha eliminado completamente. En un hospital, el especialista en el tratamiento de ese mal afirma que una nueva técnica las disminuyó considerablemente en 50 de 104 personas. Construye un intervalo de confianza para la proporción real de personas en las que el tratamiento hace disminuir significativamente tal mal.

a. De 95%

b. De 99%

11. En un estimador por intervalos para μ: $e = 0.0413$ y $\sigma = 0.6$ con un nivel de confianza de 95%.

a. ¿Qué tamaño de muestra utilizó?

b. Si $\bar{x} = 3.6$, ¿cuáles son los límites de confianza?

12. Un nutriólogo desea estimar el porcentaje de sobrepeso de los adultos de cierta población, estudios previos muestran que este valor es 68%.

a. Si desea no errar por más de 2% con un nivel de confianza de 90%, determina el tamaño de muestra requerido.

b. Si no se cuenta con una estimación previa, ¿qué tan grande debe ser la muestra?

3.2 PRUEBA DE HIPÓTESIS PARA LA MEDIA Y PARA LA PROPORCIÓN

APRENDIZAJES

4. Analiza el concepto de prueba de hipótesis, para una media y para una proporción, bajo las condiciones del Teorema del Límite Central.
5. Construye pruebas de hipótesis para la media y la proporción, preferentemente con el uso de la calculadora o la computadora en el contexto de una investigación o un problema.
6. Mide la validez de una hipótesis estadística para la media o para la proporción, en el contexto de una investigación o problema.
7. Evalúa las características de interés en una población, de manera formal, a partir de los datos de una muestra, en el contexto de una investigación o un problema.

TEMÁTICA

Elementos que componen una prueba de hipótesis. Aplicación e interpretación de resultados.

Si el objeto de una investigación se relaciona con la determinación de cuál de dos afirmaciones, sobre el valor de un parámetro, es la correcta, los métodos y técnicas para decidir forman parte de la inferencia estadística denominada *prueba de hipótesis*. Un proceso de prueba de hipótesis justifica la decisión que se toma con relación a la selección de uno de dos enunciados (o hipótesis, competitivos entre sí, mutuamente excluyentes y complementarios). Los enunciados en contraste son la hipótesis nula y alternativa.

DEFINICIÓN 1. HIPÓTESIS ESTADÍSTICA

a. H*ipótesis estadística*, es una afirmación sobre el valor de un parámetro de una población.
b. Hipótesis nula, afirmación acerca del valor de un parámetro, inicialmente se supone válida y se representa por H_0.
c. Hipótesis alternativa, afirmación que se contrapone a la hipótesis nula, se representa por H_a

EJEMPLO 1. HIPÓTESIS ESTADÍSTICAS

a. Para una población distribuida normalmente y con parámetros μ y σ^2, son ejemplos de hipótesis estadísticas:
i. $H : \mu = 13.2$
ii. $H : \mu \leq \mu_0$

b. Si una población sigue una distribución Binomial con parámetro p, la proporción de éxitos, las siguientes afirmaciones son hipótesis estadísticas:
i. $H : p = 0.120$
ii. $H : p > 0.27$
iii. $H : p \geq p_0$

El proceso que conduce a tomar una decisión sobre una hipótesis estadística particular recibe el nombre de *prueba de hipótesis* y depende de la información contenida en la realización de una muestra aleatoria simple de la población de interés, incluye:
a. La hipótesis nula representada por H_0, es la hipótesis de investigación sobre el valor del (los) parámetro(s) objetivo(s),
b. La hipótesis alternativa, representada por H_a, es negación o contrastación de la hipótesis nula.
c. El procedimiento de prueba (basada en la información contenida en la realización de la muestra) que se utiliza para determinar si se rechaza o no se rechaza H_0, sus componentes son:

i. Valor de la estadística de prueba, base de la decisión en que se acepta o rechaza H_0.

ii. La regla de decisión, incluye todos los valores de la estadística para los que se rechaza la hipótesis nula H_0, se conoce como región de rechazo o región crítica.

iii. La toma de una decisión, fundamentada en la estadística de prueba y en la región de rechazo (o región crítica). Si el valor calculado para la estadística de prueba se localiza en la región de rechazo, se rechaza la hipótesis nula H_0 y se acepta la hipótesis alternativa H_a; si el valor calculado de la estadística de prueba no se localiza en la región de rechazo, simplemente no se rechaza H_0.

Para un parámetro objetivo θ existen tres formas de plantear la hipótesis nula H_0 correspondiente, ellas son:

$$H_0:\ \theta = \theta_0,\ \theta > \theta_0 \text{ y } \theta < \theta_0,$$

que en todos los casos se representan por $H_0:\ \theta = \theta_0$, teniendo en cuenta el contexto inicial, por otra parte, el proceso de prueba de hipótesis se clasifica de acuerdo con el tipo de hipótesis alternativa planteada.

DEFINICIÓN 2. TIPOS DE PRUEBA DE HIPÓTESIS

Sea θ un parámetro objetivo en una población,

i. Si se contrastan $H_0:\theta = \theta_0$ y $H_a:\theta \neq \theta_0$, la prueba se denomina bilateral o de dos colas.

ii. Si se contrastan $H_0:\theta < \theta_0$ y $H_a:\theta \geq \theta_0$, la prueba es unilateral derecha o de cola derecha.

iii. Si se contrastan $H_0:\theta > \theta_0$ y $H_a:\theta \leq \theta_0$, la prueba es unilateral izquierda o de cola izquierda.

EJEMPLO 2. HIPÓTESIS ALTERNATIVA

1.

a. Si se afirma: “la proporción de jóvenes en cierta ciudad es 0.38, entonces,

$$H_0:\ p = 0.38\text{, entonces, } H_a:\ p \neq 0.38$$

y se requiere una prueba bilateral (de dos colas).

b. Para la afirmación, “la proporción de personas que no trabajan es menor al 40%”, entonces,

$$H_0:\ p < 0.40 \text{ (suele escribe } p = 0.40\text{), y } H_a:\ p \geq 0.40,$$

el proceso de prueba de hipótesis será unilateral derecha o de cola derecha.

c. Para la afirmación, “la edad promedio de los docentes que imparten Matemáticas es mayor a 35 años”,

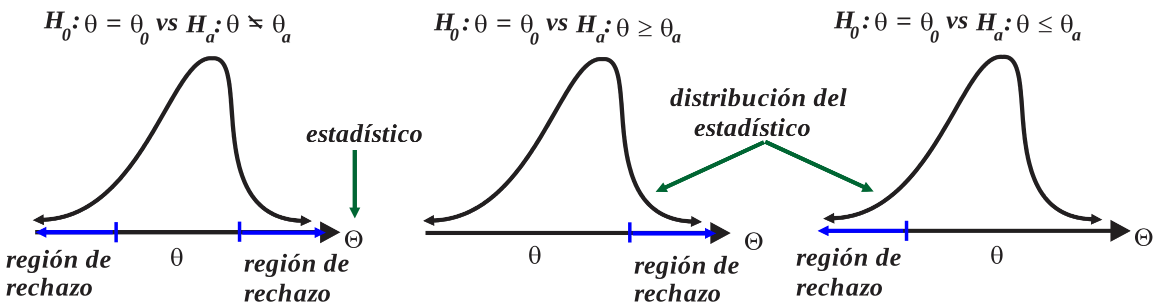
$$H_0:\mu > 35 \text{ y } H_a:\mu \leq 35,$$

y debe usarse una prueba unilateral izquierda (de una cola izquierda).

d. Para la afirmación: “el peso promedio de las tortas que expenden afuera del Colegio es menor a 220 gramos”:

$$H_0 : \mu < 220 \text{ (es común escribir } \mu = 220\text{)}, \; H_a : \mu \geq 220$$

La toma de una decisión se fundamenta en un criterio, previamente establecido, la región crítica o región de rechazo constituida por los valores de la distribución del estadístico más lejanos del valor propuesto para *la hipótesis nula*. La ***figura*** muestra la región de rechazo (o región crítica) y de aceptación (no rechazo) de la hipótesis nula H_0 respecto para un parámetro.



La probabilidad asociada a los valores del estadístico para los que la hipótesis nula H_0 se rechaza se conoce como nivel de significación (o significancia) y se representa por el símbolo α .

En el proceso de prueba de hipótesis es posible cometer errores al tomar de una decisión por ejemplo, rechazar la hipótesis nula siendo verdadera o no rechazarla siendo falsa, en ambos casos el error tiene un nombre y notación específica.

DEFINICIÓN 3. TIPOS DE PRUEBA DE HIPÓTESIS

Sea θ un parámetro objetivo en una población,

i. Si se rechaza la hipótesis nula $H_0 : \theta = \theta_0$ siendo verdadera se comete error $tipo\ I$, su probabilidad se denota por la letra griega α (alfa) y se conoce como *nivel de significación* (o significancia).

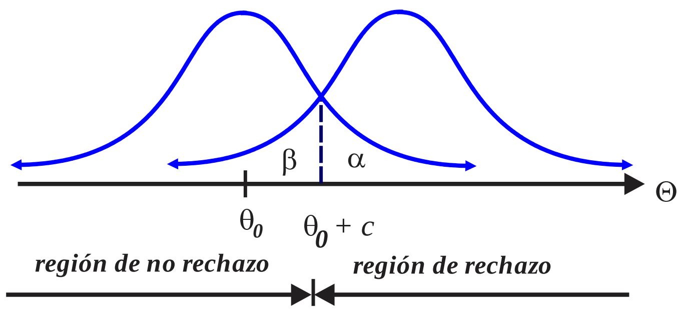
ii. Si se no se rechaza la hipótesis nula $H_0 : \theta = \theta_0$ siendo falsa se comete error $tipo\ II$, su probabilidad se representa por la letra griega β (beta).

Hipótesis nula		H_0	
		no se rechaza	*se rechaza*
H_0	*verdadera*	*decisión correcta*	*error Tipo I*
	falsa	*error Tipo II*	*decisión correcta*

La siguiente ***figura*** muestra la relación entre los errores antes señalados, observa:

i. Un desplazamiento a la derecha de la línea punteada implica un aumento del tamaño de la región de no rechazo y, por tanto, una disminución de la probabilidad α pero también un incremento de la probabilidad β.

ii. Un desplazamiento a la izquierda de la línea punteada implica una disminución del tamaño de la región de no rechazo y, por tanto, un aumento de la probabilidad α pero también una disminución de la probabilidad β.



La probabilidad de cometer error $tipo\ I$ o $tipo\ II$ se escriben como función de la región de rechazo (o región crítica) en la forma:

$$\alpha = p(\text{ cometer } error\ tipo\ I\ ) = p(\text{ rechazar } \theta = \theta_0 \text{ siendo verdadera })$$

$$\alpha = p(\text{ el número } \theta_0 \text{ está en la región de rechazo y } \theta = \theta_0 \text{ es verdadera })$$

Similarmente, $$\beta = p(\text{ cometer error } tipo\ II\ ) = p(\text{ aceptar } \theta = \theta_0 \text{ siendo falsa })$$

$$\beta = p(\text{ el número } \theta_0 \text{ está en la región de no rechazo y } \theta_a \text{ es verdadera })$$

EJEMPLO 3. PROBABILIDADES DE ERRORES

1. El 25% de los taxistas proporciona mal trato a los pasajeros. Para verificar la afirmación es seleccionada una muestra aleatoria de $n = 20$ taxista, y se decide rechazar la afirmación si se detecta que menos de ocho ($0 \le X \le 7$) taxistas tratan mal al pasajero, entonces:

i. Se contrastan: $H_0 : p = 0.25$ contra $H_a : p < 0.25$

ii. Sea X = Número taxistas que tratan mal al pasajero

iii. La región de rechazo son los datos: $X = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$

La región de no rechazo está constituida por:

$$X = 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ 17,\ 18,\ 19,\ 20$$

a. Calculemos α,

$$\alpha = p(\text{ cometer error } tipo\ I\ ) = p(\text{ rechazar } p = 0.25 \text{ siendo verdadera })$$
$$= p(\ X \le 7 \text{ cuando } p = 0.25\ )$$

La VAD X se distribuye en forma binomial con parámetros $p = 0.25$ y $n = 20$, entonces,

$$\alpha = p(\ X \le 7 \text{ cuando } p = 0.25\ ) = B(\ 7\ , 20\ , 0.25\ ) = 0.8992$$

b. Calculemos β para la alternativa

$$H_a:\ p = 0.20$$

Puesto que $\beta = p(\ \theta_0 \text{ está en la región de no rechazo y } \theta_a \text{ es verdadera}\ )$

$$\beta = p(\ X \ge 8, \text{ si } p = 0.20\ ) = 1 - B(\ 7\ , 20\ , 0.20\ ) = 0.0321$$

2. Las especificaciones de las bolsas harina indican: contenido: $\mu = 200$ gramos, más menos $\sigma = 15$ miligramos. Supongamos que la cantidad se harina se distribuye normalmente. Para verificar el contenido de harina en las bolas. Se toma una muestra de $n = 9$ bolsas y se pesa su contenido. Con la regla: un peso medio de harina de $195 \le \overline{X} \le 205$ gramos, indica que la el contenido de las bolsas es cierto; en otro caso se considera que el contenido no es el adecuado y el contenido medio de harina en las bolsas es $\mu \ne 200$ gramos. Calculas las probabilidades de cometer errores tipo α y β.

Se contrastan las hipótesis, $H_0: \mu = 200$ contra $H_a: \mu \ne 200$

Sea la variable aleatoria: $\overline{X} =$ contenido medio de harina en las bolsas.

Se rechaza H_0 cuando $\overline{X} < 195$, o bien, $\overline{X} > 205$ mililitros.

i. Determinemos α considerando $\mu = 200$ verdadera.

$$\alpha = p(\text{ cometer error } \textit{tipo I}\ ) = p(\text{ rechazar } \mu = 200 \text{ siendo verdadera }\ )$$

$$\alpha = p(\ \overline{X} < 195 \text{ si } \mu_{\overline{X}} = 200) + p(\ \overline{X} > 205 \text{ si } \mu_{\overline{X}} = 200\ ).$$

Si $H_0: \mu = 200$ es verdadera, entonces, $\overline{X}$ se distribuye normalmente y

$$\mu_{\overline{X}} = \mu = 200,\ \sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{15}{\sqrt{9}} = 5,$$

$$\alpha = p\left(\ Z < \frac{195-200}{5}\right) + p\left(\ Z > \frac{205-200}{5}\right) = p(\ Z < -1\ ) + p(\ Z > 1\ )$$

$$= 1 - p(\ -1 < Z < 1\ ) = 1 - D(\ 1\ ) = 0.3173$$

ii. Calculemos β. Sea $H_0:\ \mu = 200$ es falsa, entonces, $H_a: \mu = 210$ es verdadera.

$$\mu_{\overline{X}} = \mu = 210 \text{ y } \sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{15}{\sqrt{9}} = 5$$

$$\beta = p(\ \theta_0 \text{ está en la región de no rechazo y } \theta_a \text{ es verdadera}\ )$$

$$= p\ (\ 195 \le \overline{X} \le 205 \text{ y } \mu_{\overline{X}} = 210\ ) = p\left(\ \frac{195-210}{5} \le Z \le \frac{205-210}{5}\ \right)$$

$$= p(\ -3 \le Z \le -1\ ) = 0.1587 - 0.0013 = 0.1574$$

PROCESO DE PRUEBA DE UNA HIPÓTESIS ESTADÍSTICA

i. Identificación del parámetro objetivo (media o proporción).

ii. Establecimiento de la hipótesis nula y formular la hipótesis alternativa.

iii. Cálculo del estimador puntual de la estadística de prueba.

iv. Uso del nivel de significación y determinación de la región de rechazo.

v. Ubicación del estimador puntual de la estadística de prueba en el gráfico de la distribución de la estadística de prueba.

vi. Determinar si H_0 debe ser o no ser rechazada y establecer la conclusión en el contexto del problema.

PROCESO DE PRUEBA DE UNA HIPÓTESIS ESTADÍSTICA A TRATAR

a. Para μ, con σ conocida o $n \geq 30$, $\overline{X}$ se distribuye normalmente y $\mu_{\overline{X}} = \mu$ y $\sigma_{\overline{X}} = \sigma / \sqrt{n}$, o bien, $\sigma_{\overline{X}} = s / \sqrt{n}$

Hipótesis nula: $H_0 : \ \mu = \mu_0$

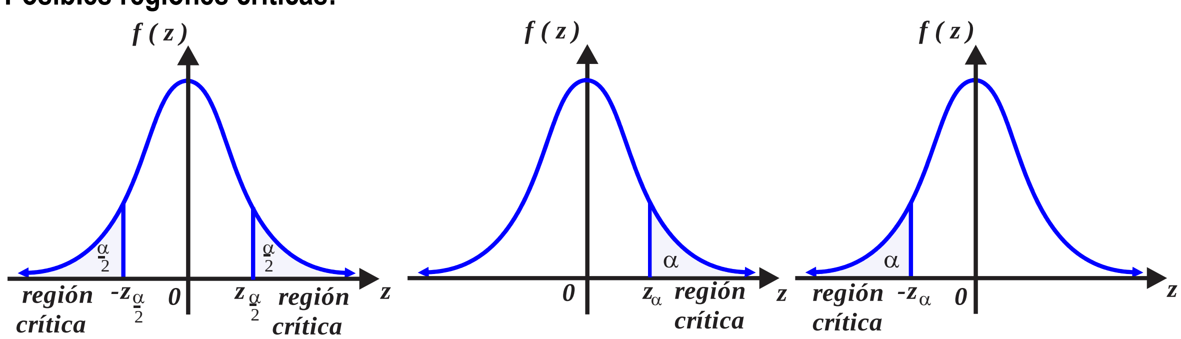
Posibles Hipótesis alternativas:

$$H_a : \ \mu \neq \mu_0 \ , \ H_a : \ \mu > \mu_0 \text{, o bien, } H_a : \ \mu < \mu_0$$

Estadística de prueba

$$z = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

Posibles regiones críticas:



b. Para: p con $n \geq 30$

Hipótesis nula: $H_0 : \ p = p_0$

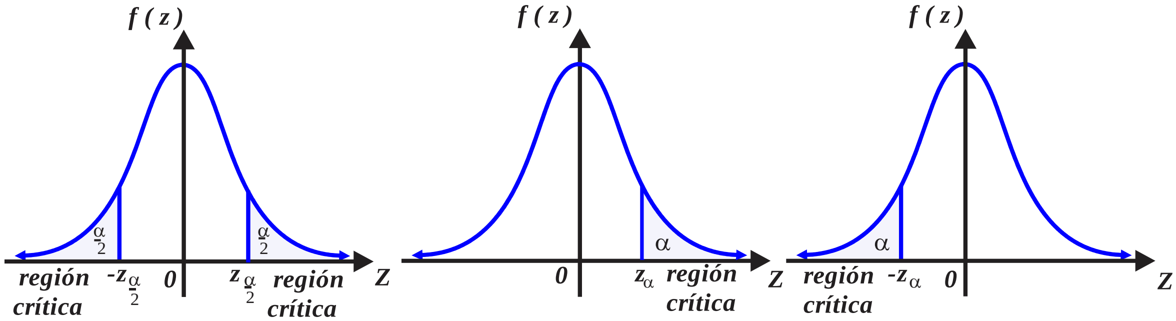
Posibles Hipótesis alternativas:

$$H_a : \ p \neq p_0 , \ H_a : \ p > p_0 , \textbf{ o bien, } H_a : \ p < p_0$$

Estadística de prueba

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0 \, q_0 / n}} = \frac{x - np_0}{\sqrt{n \, p_0 \, q_0}}$$

Posibles regiones críticas:



EJEMPLO 4. PRUEBA DE HIPÓTESIS

1.

a. Contrastemos $H_0:\ \mu = 175$ contra $H_a:\ \mu \neq 175$, utilizando una realización de una muestra aleatoria de tamaño $n = 49$, suponiendo $\bar{x} = 177$ y $s = 7.7$ unidades a un nivel de significación de 5%.

i. Parámetro objetivo μ .

ii. $H_0:\ \mu = 175$contra $H_a:\ \mu \neq 175$

iii. Estadística de prueba $z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \dfrac{177 - 175}{7.7/\sqrt{49}} = 1.82$

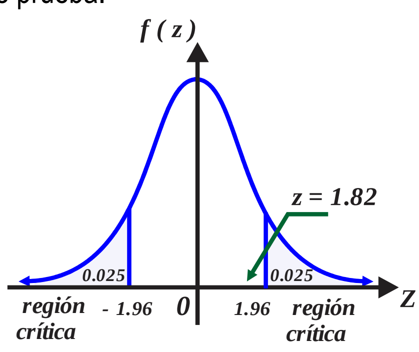
(se utilizó la desviación estándar muestral $s = 7.7$ como estimador puntual de σ)

iv. Región crítica.

Si $\alpha = 0.05$, en las tablas de "percentiles normales" observamos $-z_{0.025} = -1.96$ y $z_{0.025} = 1.96$

Por tanto, sí $z > 1.96$ o $-z < -1.96$, entonces, debe rechazarse $H_0:\ \mu = 175$

v. Localización del estadístico de prueba.



vi. No se rechaza la hipótesis $H_0:\ \mu = 175$

b. En la etiqueta de "*refrescos del valle de un cuarto*" se observa: contenido medio de azúcar superior a 50 gramos, sin embargo, un investigador piensa que el contenido medio de azúcar es menor a 50 gramos. En la realización de una muestra de 25 *"refrescos del valle de un cuarto"* se obtuvo media muestral de 48 gramos de azúcar. Suponiendo normalidad y que la desviación estándar real es $\sigma = 6$, ¿debe rechazarse la hipótesis nula al nivel $\alpha = 0.10$?

i. Parámetro objetivo μ

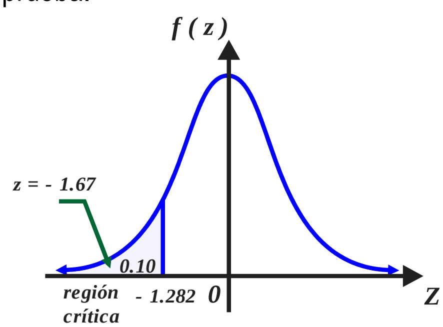
ii. $H_0: \mu = 50$ vs $H_a: \mu < 50$

iii. Estadístico de prueba $z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{48 - 50}{6/\sqrt{25}} = -1.67$

iv. Región de rechazo.

Si $\alpha = 0.10$, entonces, (tablas de cuantiles la distribución normal) $z_\alpha = z_{0.10} = -1.282$. Debe rechazarse $H_0: \mu = 50$ cuando $Z < -1.282$

v. Ubicación del estadístico de prueba.



vi. Conclusión.

Rechazar $H_0: \mu = 50$ y aceptar $H_a: \mu < 50$. El contenido de azúcar en los *"refrescos del valle de un cuarto"* es menor a 50 gramos.

c. Los diámetros de las pijas fabricadas por "*CH*" tienen desviación estándar real 0.001 centímetros. Una muestra aleatoria de 10 pijas promedió de 0.2546 centímetros. Para contrastar la hipótesis "el diámetro medio verdadero de las pijas es menor a 0.2526 centímetros" con el nivel de confianza $\alpha = 0.05$.

i. Parámetro objetivo μ

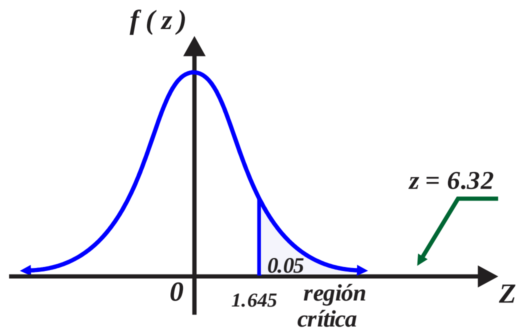
ii. $H_0: \mu = 0.2526$ vs $H_a: \mu > 0.2526$

iii. Estadístico de prueba $z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{0.2546 - 0.2526}{0.001/\sqrt{10}} = 6.32$

iv. Región de rechazo.

Si $\alpha = 0.05$, entonces (tablas de percentiles normales), $z_\alpha = z_{0.05} = 1.645$, por tanto, si $z > 1.645$se rechaza $H_0: p = 0.2526$

v. Ubicación del estadístico de prueba.



vi. Conclusión.

Se rechaza $H_0: \mu = 0.2526$, el diámetro medio de las pijas es mayor a $\mu = 0.2526$ centímetros.

d. Afirmación: menos de $60\,\%$ de los jóvenes consume alguna "cierta blanda". Un estudio a 100 jóvenes mostró que 70 consumía la "droga blanda".

Para verificar si la información obtenida es evidencia suficiente para concluir, que la proporción de jóvenes que consumen la "droga blanda" utilizando $\alpha = 0.05$, sean:

i. Parámetro objetivo p

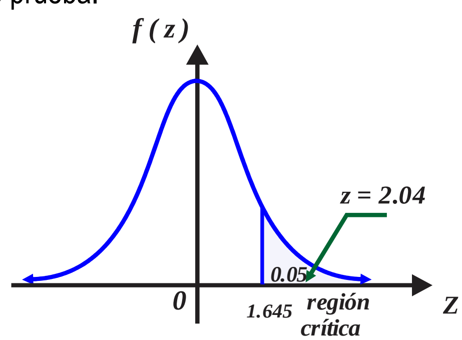
ii. $H_0: p = 0.6$ vs $H_a: p > 0.6$

iii. Estadístico de prueba $z = \dfrac{x - np_0}{\sqrt{n\,p_0\,q_0}} = \dfrac{70 - 60}{\sqrt{100(0.6)(0.4)}} = 2.04$

iv. Región de rechazo

Si $\alpha = 0.05$, entonces, $z_\alpha = z_{0.05} = 1.645$; debe rechazarse $H_0: p = 0.6$ si $z > 1.645$

v. Ubicación del estadístico de prueba.



vi. Conclusión.

Se rechaza $H_0: p = 0.6$, es decir, la proporción real de jóvenes que consumen la "droga blanda" es superior a $p = 0.6$

SECCIÓN 3.2
EJERCICIOS 1

1. El encargado de la fonda "La mesita" considera que la proporción de "servicios" que requieren menos de 8 minutos en su atención es $p=0.6$

En una muestra aleatoria de 10 tortas se observa que tres o más requirieron 8 minutos o más en su atención, entonces, la hipótesis $p=0.6$ debe rechazarse a favor de la alternativa $p>0.6$.

a. ¿Cuál es el nivel de significación si la verdadera proporción es $p=0.6$?

b. ¿Cuál es el valor de β, si el verdadero valor para la proporción es $p=0.3$?

Utiliza la distribución Binomial.

2. Un anuncio afirma "el nuevo quitamanchas elimina el 70% de ellas". Para verificar su afirmación, el quitamanchas se aplica a 12 manchas (elegidos al azar), si al menos 11 manchas son eliminadas, se acepta la hipótesis $p=0.70$ en cualquier otro caso se concluye $p<0.70$. Utiliza la distribución Binomial.

a. Evalúa α sí $p=0.70$

b. Evalúa β sí $p=0.90$

3. Una población se distribuye normalmente con $\sigma=8.4$ centímetros, se contrastan: $\mu_0=80$ y $\mu_a<80$ centímetros con base en una muestra aleatoria de tamaño 100.

a. Si se rechaza la hipótesis nula cuando $\overline{X}<78$ centímetros, ¿cuál es la probabilidad de cometer un error $tipo\ \ I$, y de otra manera se acepta?

b. Si en realidad $\mu=77.5$ centímetros, ¿cuál es la probabilidad de cometer un error $tipo\ \ II$?

4. Una compañía de productos de belleza desarrolla actualmente un champú y está interesada en la altura de la espuma en milímetros que éste genera. La altura de la espuma se distribuye de forma aproximadamente normal con $\sigma=20$ milímetros. La compañía confronta H_0: $\mu_0=175$ y H_a: $\mu>175$ milímetros, con una realización de una muestra aleatoria con $n=10$, para la región crítica $\overline{X}>185$:

a. Determina α.

b. Determina β si realmente $\mu=195$ milímetros.

5. El encargado del control de calidad de los productos "Gamex", le preocupa que el contenido promedio de fibra en galletas dietéticas que produce pueda no ser adecuada, misma que es 24 gramos por paquete. Si μ es el promedio de la población de referencia, contraste $\mu_0=24$ gramos por paquete y $\mu_a\neq 24$ gramos por paquete. Si una realización de una muestra aleatoria de 280 paquetes de "galletas dietéticas Gamesa" tuvo $\bar{x}=24.08$ y $s=1$ gramos por paquete. ¿Se debe se debe rechazar la hipótesis nula y que μ es significativamente diferente a 24 gramos por caja? Usa $\alpha=0.05$

6. Se desea verificar la afirmación “los raterillos ocasionales son recluidos en promedio 12.8 meses en prisión”. Un ciudadano analiza una realización de una muestra aleatoria de 60 casos y obtiene $\bar{x} = 11$ meses y $s = 3.5$ meses de prisión.
a. Contrasta $\mu_0 = 12.8$ meses vs $\mu_a \neq 12.8$ meses en el nivel de significación de $\alpha = 0.01$
b. Contrasta $\mu_0 = 12.8$ vs $\mu_a < 12.8$ meses en el nivel de significación de $\alpha = 0.01$

7. Se afirma, el 40% de los fumadores de tabaco compran los cigarros “sueltos”. En una realización de una muestra aleatoria de 120 consumidores de cigarrillos, 50 de ellos afirmaron comprarlos “sueltos”. ¿Estos resultados presentan evidencia suficiente para concluir que la proporción de fumadores que compran cigarros “sueltos” es superior a la indicada por el estudio?
a. Utiliza el nivel de significación $\alpha = 0.05$
b. Utiliza el nivel de significación $\alpha = 0.01$

8. En una realización de una muestra aleatoria se observó que 80 de 140 accidentes de motociclistas fueron consecuencia de sus errores. Suponga normalidad.
a. Utiliza el nivel de significación del 0.05 para probar la hipótesis “el 0.5 de los accidentes de motociclistas son consecuencia de sus errores”.
b. ¿Cuál es nivel de significación mínimo (bilateral) para rechazar la hipótesis: “el 0.5 de los accidentes industriales es error de los trabajadores?

9. Una realización de una muestra aleatoria de $n = 1000$ paletas mostró que $x = 306$ de ellas tenían peso distinto al señalado en su etiqueta.
a. ¿Proporcionan los datos evidencia para suponer $p < 0.31$? Utiliza una probabilidad de cometer error $tipo\ I$ de 0.05
b. ¿Proporcionan los datos evidencia que indique $p < 0.31$? Utiliza una probabilidad de cometer error $tipo\ I$ de 0.01

10. Un administrador de la línea de autobuses “*Unión Camionera”* sostiene son menos del 6% de equipajes extraviados los no recuperados.
a. Pruebe esta afirmación, si en una ejecución de una muestra aleatoria 14 de 200 equipajes extraviados no se recuperaron y la probabilidad de cometer un error $tipo\ I$ es 0.01.
b. ¿Cuál es el nivel de significación mínimo (unilateral) para rechazar la hipótesis: 0.06 de todos los equipajes perdidos no se recuperan?

11. Para contrastar la afirmación del director del hospital *“Xoco”*, “por lo menos 40% de los accidentados que ingresan son emergencias de vida o muerte”, se analizó una muestra aleatoria de sus registros y se encontró que 49 de 150 de los accidentados que ingresaron fueron emergencias de vida o muerte.
a. ¿Qué puede concluirse, sobre la afirmación anterior, si la probabilidad de cometer un error $tipo\ I$ es menor a 0.08?
b. ¿Qué puede concluirse, sobre la afirmación anterior, si la probabilidad de cometer un error $tipo\ I$ es menor de 0.20?

3.3 SOLUCIONES Y EVALUACIÓN

SOLUCIÓN A EJERCICIOS PROPUESTOS

EXAMEN DE LA UNIDAD

SOLUCIONES DEL EXAMEN DE LA UNIDAD

SECCIÓN 3.1
EJERCICIOS 1 SOLUCIONES

1. a. 5.625 y 3.4107 . **b.** 0.5

2. a. $27.588 < \mu \leq 29.043$. **b.** $27.418 < \mu \leq 29.182$

3. a. $75.82 \leq \mu \leq 78.89$ **b.** $75.180 \leq \mu \leq 80.41$

4. $150.5323 \leq \mu \leq 153.4677$

5. $n \approx 346$

6. $(1-\alpha)100\% = 92.81\%$

7. a. $0.02282 < p < 0.5718$ **b.** $e = 0.01718$

8. $0.0432 < p < 0.3568$

9. a. $0.392 < p < 0.528$ **b.** $0.4 < p < 0.52$

10. a. $0.3131 < p < 0.4884$ **b.** $0.286 < p < 0.5160$

11. a. 811 **b.** $3.5587 < p < 3.6413$

12. a. $n = 1472$ **b.** $n = 1691$

SECCIÓN 3.2
EJERCICIOS 1 SOLUCIONES

1. a. 0.9877 **b.** 0.3828

2. a. 0.915 **b.** 1

3. a. 0.0087 **b.** 0.2776

4. a. 0.943 **b.** 0.570

5. $z = 39.89$, rechazar H_0

6. a. Rechazar H_0 . **b.** Rechazar. H_0

7. a. No rechazar H_0 . **b.** No rechazar H_0 .

8. a. No rechazar H_0 **b.** $\alpha = 0.0727$

9. a. No rechazar H_0 . **b.** No rechazar H_0

10. a. No rechazar H_0 . **b.** 13.76%

11. a. Rechazar H_0 **b.** Rechazar H_0

UNIDAD 3 EXAMEN

COMPLETA LOS ESPACIOS

1. Un también recibe el nombre de estimador por intervalo.

2. de un intervalo de confianza también son estimadores puntuales.

3. Un estimador es una función que depende de una y que se utiliza para estimar y/o inferir el valor de un parámetro

4. En un intervalo de confianza, la confianza representa la probabilidad de que esté contenido en el intervalo de confianza.

5. En $\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$, $z_{\alpha/2}$ que deja una área de $\alpha/2$ a su derecha de intervalo de confianza, la confianza representa

6. En un proceso de prueba de hipótesis, la hipótesis nula es la suposición del que indica que la situación no cambia.

7. En , la hipótesis alternativa es la negación de la hipótesis nula.

8. En un proceso de prueba de hipótesis, es el conjunto de valores del estimador para los que se rechaza la hipótesis nula.

9. En un proceso de prueba de hipótesis, cometer error tipo II significa

10. El proceso de prueba de hipótesis con se denomina de cola derecha o unilateral derecha.

PROBLEMAS OPERATIVOS

1. Si $53.2 < \mu < 56.2$, $\bar{x} = 54.7$, $s = 5.23$ y $1-\alpha = 0.95$ calcula el tamaño de la muestra.

2. Si $n = 100$, $x = 25$, $1-\alpha = 0.95$ determina el error máximo cometido al estimar p .

3. Contrasta $H_0 : \mu \geq 175$ y $H_a : \mu < 175$ al nivel de significación $\alpha = 0.05$, si $\bar{x} = 175$, $\sigma = 4$ y $n = 20$.

PROBLEMAS EN CONTEXTO

1. Un vendedor de aparatos electrodomésticos va a estimar el porcentaje de hogares que tienen más de una plancha. Una muestra aleatoria de 500 hogares revela que 275 de ellos tienen 2 o más planchas. Construye el intervalo de confianza al nivel de 90% para estimar la proporción real hogares que tienen 2 o más planchas.

2. Se estima la velocidad media de los vehículos sobre una avenida en donde se marca límite máximo de 50 kilómetros por hora. Utilizando un radar, se observó que la velocidad media de una muestra de 25 vehículos fue 58 kilómetros por hora. Si la desviación estándar de la velocidad en la avenida es 6 kilómetros por hora, construye un intervalo con 95% de confianza para la verdadera velocidad media.

3. Los servicios de salud de un municipio indican que en el invierno, un número promedio de 200 adultos mayores, con problemas resfriado. Supón que la incidencia de adultos mayores con problemas de resfriado se distribuye normalmente con $\mu = 200$ y desviación estándar $\sigma = 16$. Para una realización sobre 50 adultos mayores se quiere investigar si ha habido un cambio en la incidencia de casos de resfrío en el municipio de alta marginación, utiliza un nivel de significación de 1%.

4. El departamento de crédito de un banco revisa los préstamos por primera vez a personas. Suponen que el 50% de los prestatarios a personas por primera vez son del mismo monto que los hechos a otros clientes. Una muestra de 100 préstamos a personas que por primera vez los solicitan indican que 53 de estos préstamos son menores que los demás. Utilizan un nivel de significación de 5%. Presentan los datos evidencia de que los préstamos hechos son iguales

ESCALA

Preguntas 1 a 10., un punto cada una (total 10 puntos).

Problemas operativos 1. a 3., dos puntos cada inciso (total 9 puntos).

Problemas en contexto 1. a 4., tres puntos cada inciso (total 12 puntos).

Para acreditar se requieren 19 o más puntos

UNIDAD 2 SOLUCIONES AL EXAMEN

COMPLETA LOS ESPACIOS

1. intervalo de confianza

2. Los límites

3. muestra aleatoria simple

4. el valor real del parámetro objetivo

5. es el valor del percentil z

6. valor real de un parámetro

7. un proceso de prueba de hipótesis

8. la región crítica

9. aceptar la hipótesis nula siendo falsa.

10. hipótesis alternativa $H_a : \theta > \theta_0$

PROBLEMAS OPERATIVOS

1. $n = 48$ **2.** $e_{máx} = 0.0735$ **3.** $z = -1.48$ **No se rechaza la hipótesis nula.**

PROBLEMAS EN CONTEXTO

1. $0.5140 < p < 0.586$

2. $55.65 < \mu < 60.35$

3. No se rechaza $H_0 : \mu = 200$

4. No se rechaza $H_0 : p = 0.50$

A. DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD TABLAS

TABLAS

A.1 DISTRIBUCIÓN BINOMIAL (ACUMULADA)

A.2 DISTRIBUCIÓN NORMAL (ACUMULADA)

A.3 PERCENTILES NORMALES

A.1 PROBABILIDADES BINOMIALES ACUMULADAS

n = 1 — probabilidad de éxito p

x/p	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
0	0.9500	0.9000	0.8500	0.8000	0.7500	0.7000	0.6500	0.6000	0.5500	0.5000	0.4500	0.4000	0.3500	0.3000	0.2500	0.2000	0.1500	0.1000	0.0500
1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

n = 2 — probabilidad de éxito p

x/p	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
0	0.9025	0.8100	0.7225	0.6400	0.5625	0.4900	0.4225	0.3600	0.3025	0.2500	0.2025	0.1600	0.1225	0.0900	0.0625	0.0400	0.0225	0.0100	0.0025
1	0.9975	0.9900	0.9775	0.9600	0.9375	0.9100	0.8775	0.8400	0.7975	0.7500	0.6975	0.6400	0.5775	0.5100	0.4375	0.3600	0.2775	0.1900	0.0975
2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

n = 3 — probabilidad de éxito p

x/p	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
0	0.8574	0.7290	0.6141	0.5120	0.4219	0.3430	0.2746	0.2160	0.1664	0.5000	0.4253	0.3520	0.2818	0.2160	0.1563	0.1040	0.0607	0.0280	0.0073
1	0.9927	0.9720	0.9393	0.8960	0.8438	0.7840	0.7182	0.6480	0.5748	0.8750	0.8336	0.7840	0.7254	0.6570	0.5781	0.4880	0.3859	0.2710	0.1426
2	0.9999	0.9990	0.9966	0.9920	0.9844	0.9730	0.9571	0.9360	0.9089	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

n = 4 — probabilidad de éxito p

x/p	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
0	0.8145	0.6561	0.5220	0.4096	0.3164	0.2401	0.1785	0.1296	0.0915	0.0625	0.0410	0.0256	0.0150	0.0081	0.0039	0.0016	0.0005	0.0001	0.0000
1	0.9860	0.9477	0.8905	0.8192	0.7383	0.6517	0.5630	0.4752	0.3910	0.3125	0.2415	0.1792	0.1265	0.0837	0.0508	0.0272	0.0120	0.0037	0.0005
2	0.9995	0.9963	0.9880	0.9728	0.9492	0.9163	0.8735	0.8208	0.7585	0.6875	0.6090	0.5248	0.4370	0.3483	0.2617	0.1808	0.1095	0.0523	0.0140
3	1.0000	0.9999	0.9995	0.9984	0.9961	0.9919	0.9850	0.9744	0.9590	0.9375	0.9085	0.8704	0.8215	0.7599	0.6836	0.5904	0.4780	0.3439	0.1855
4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

n = 5 — probabilidad de éxito p

x/p	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
0	0.7738	0.5905	0.4437	0.3277	0.2373	0.1681	0.1160	0.0778	0.0313	0.0185	0.0102	0.0053	0.0024	0.0010	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.9774	0.9185	0.8352	0.7373	0.6328	0.5282	0.4284	0.3370	0.2562	0.1875	0.1312	0.0870	0.0540	0.0308	0.0156	0.0067	0.0022	0.0005	0.0000
2	0.9988	0.9914	0.9734	0.9421	0.8965	0.8369	0.7648	0.6826	0.5931	0.5000	0.4069	0.3174	0.2352	0.1631	0.1035	0.0579	0.0266	0.0086	0.0012
3	1.0000	0.9995	0.9978	0.9933	0.9844	0.9692	0.9460	0.9130	0.8688	0.8125	0.7438	0.6630	0.5716	0.4718	0.3672	0.2627	0.1648	0.0815	0.0226
4	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9976	0.9947	0.9898	0.9815	0.9688	0.9497	0.9222	0.8840	0.8319	0.7627	0.6723	0.5563	0.4095	0.2262
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

n = 6 — probabilidad de éxito p

x/p	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
0	0.7351	0.5314	0.3771	0.2621	0.1780	0.1176	0.0754	0.0467	0.0277	0.0156	0.0083	0.0041	0.0018	0.0007	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.9672	0.8857	0.7765	0.6554	0.5339	0.4202	0.3191	0.2333	0.1636	0.1094	0.0692	0.0410	0.0223	0.0109	0.0046	0.0016	0.0004	0.0001	0.0000
2	0.9978	0.9841	0.9527	0.9011	0.8306	0.7443	0.6471	0.5443	0.4415	0.3438	0.2553	0.1792	0.1174	0.0705	0.0376	0.0170	0.0059	0.0013	0.0001
3	0.9999	0.9987	0.9941	0.9830	0.9624	0.9295	0.8826	0.8208	0.7447	0.6563	0.5585	0.4557	0.3529	0.2557	0.1694	0.0989	0.0473	0.0159	0.0022
4	1.0000	0.9999	0.9996	0.9984	0.9954	0.9891	0.9777	0.9590	0.9308	0.8906	0.8364	0.7667	0.6809	0.5798	0 .4661	0.3446	0.2235	0.1143	0.0328
5	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0 .9993	0.9982	0.9959	0.9917	0.9844	0.9723	0.9533	0.9246	0.8824	0.8220	0.7379	0.6229	0.4686	0.2649
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

n = 7 — probabilidad de éxito p

x/p	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
0	0.6983	0.4783	0.3206	0.2097	0.1335	0.0824	0.0490	0.0280	0.0152	0.0078	0.0037	0.0016	0.0006	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.9556	0.8503	0.7166	0.5767	0.4449	0.3294	0.2338	0.1586	0.1024	0.0625	0.0357	0.0188	0.0090	0.0038	0.0013	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000
2	0.9962	0.9743	0.9262	0.8520	0.7564	0.6471	0.5323	0.4199	0.3164	0.2266	0.1529	0.0963	0.0556	0.0288	0.0129	0.0047	0.0012	0.0002	0.0000
3	0.9998	0.9973	0.9879	0.9667	0.9294	0.8740	0.8002	0.7102	0.6083	0.5000	0.3917	0.2898	0.1998	0.1260	0.0706	0.0333	0.0121	0.0027	0.0002
4	1.0000	0.9998	0.9988	0.9953	0.9871	0.9712	0.9444	0.9037	0.8471	0.7734	0.6836	0.5801	0.4677	0.3529	0.2436	0.1480	0.0738	0.0257	0.0038
5	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9987	0.9962	0.9910	0.9812	0.9643	0.9375	0.8976	0.8414	0.7662	0.6706	0.5551	0.4233	0.2834	0.1497	0.0444
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994	0.9984	0.9963	0.9922	0.9848	0.9720	0.9510	0.9176	0.8665	0.7903	0.6794	0.5217	0.3017
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

n = 8 — probabilidad de éxito p

x/p	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
0	0.6634	0.4305	0.2725	0.1678	0.1001	0.0576	0.0319	0.0168	0.0084	0.0039	0.0017	0.0007	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.9428	0.8131	0.6572	0.5033	0.3671	0.2553	0.1691	0.1064	0.0632	0.0352	0.0181	0.0085	0.0036	0.0013	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.9942	0.9619	0.8948	0.7969	0.6785	0.5518	0.4278	0.3154	0.2201	0.1445	0.0885	0.0498	0.0253	0.0113	0.0042	0.0012	0.0002	0.0000	0.0000
3	0.9996	0.9950	0.9786	0.9437	0.8862	0.8059	0.7064	0.5941	0.4770	0.3633	0.2604	0.1737	0.1061	0.0580	0.0273	0.0104	0.0029	0.0004	0.0000
4	1.0000	0.9996	0.9971	0.9896	0.9727	0.9420	0.8939	0.8263	0.7396	0.6367	0.5230	0.4059	0.2936	0.1941	0.1138	0.0563	0.0214	0.0050	0.0004
5	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9958	0.9887	0.9747	0.9502	0.9115	0.8555	0.7799	0.6846	0.5722	0.4482	0.3215	0.2031	0.1052	0.0381	0.0058
6	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9987	0.9964	0.9915	0.9819	0.9648	0.9368	0.8936	0.8309	0.7447	0.6329	0.4967	0.3428	0.1869	0.0572
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9993	0.9983	0.9961	0.9916	0.9832	0.9681	0.9424	0.8999	0.8322	0.7275	0.5695	0.3366
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

n = 9 — *probabilidad de éxito p*

x/p	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
0	0.6302	0.3874	0.2316	0.1342	0.0751	0.0404	0.0207	0.0101	0.0046	0.0020	0.0008	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.9288	0.7748	0.5995	0.4362	0.3003	0.1960	0.1211	0.0705	0.0385	0.0195	0.0091	0.0038	0.0014	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.9916	0.9470	0.8591	0.7382	0.6007	0.4628	0.3373	0.2318	0.1495	0.0898	0.0498	0.0250	0.0112	0.0043	0.0013	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.9994	0.9917	0.9661	0.9144	0.8343	0.7297	0.6089	0.4826	0.3614	0.2539	0.1658	0.0994	0.0536	0.0253	0.0100	0.0031	0.0006	0.0001	0.0000
4	1.0000	0.9991	0.9944	0.9804	0.9511	0.9012	0.8283	0.7334	0.6214	0.5000	0.3786	0.2666	0.1717	0.0988	0.0489	0.0196	0.0056	0.0009	0.0000
5	1.0000	0.9999	0.9994	0.9969	0.9900	0.9747	0.9464	0.9006	0.8342	0.7461	0.6386	0.5174	0.3911	0.2703	0.1657	0.0856	0.0339	0.0083	0.0006
6	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987	0.9957	0.9888	0.9750	0.9502	0.9102	0.8505	0.7682	0.6627	0.5372	0.3993	0.2618	0.1409	0.0530	0.0084
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9986	0.9962	0.9909	0.9805	0.9615	0.9295	0.8789	0.8040	0.6997	0.5638	0.4005	0.2252	0.0712
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9980	0.9954	0.9899	0.9793	0.9596	0.9249	0.8658	0.7684	0.6126	0.3698
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

n = 10 — *probabilidad de éxito p*

x/p	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
0	0.5987	0.3487	0.1969	0.1074	0.0563	0.0282	0.0135	0.0060	0.0025	0.0010	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.9139	0.7361	0.5443	0.3758	0.2440	0.1493	0.0860	0.0464	0.0233	0.0107	0.0045	0.0017	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.9885	0.9298	0.8202	0.6778	0.5256	0.3828	0.2616	0.1673	0.0996	0.0547	0.0274	0.0123	0.0048	0.0016	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.9990	0.9872	0.9500	0.8791	0.7759	0.6496	0.5138	0.3823	0.2660	0.1719	0.1020	0.0548	0.0260	0.0106	0.0035	0.0009	0.0001	0.0000	0.0000
4	0.9999	0.9984	0.9901	0.9672	0.9219	0.8497	0.7515	0.6331	0.5044	0.3770	0.2616	0.1662	0.0949	0.0473	0.0197	0.0064	0.0014	0.0001	0.0000
5	1.0000	0.9999	0.9986	0.9936	0.9803	0.9527	0.9051	0.8338	0.7384	0.6230	0.4956	0.3669	0.2485	0.1503	0.0781	0.0328	0.0099	0.0016	0.0001
6	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9965	0.9894	0.9740	0.9452	0.8980	0.8281	0.7340	0.6177	0.4862	0.3504	0.2241	0.1209	0.0500	0.0128	0.0010
7	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9984	0.9952	0.9877	0.9726	0.9453	0.9004	0.8327	0.7384	0.6172	0.4744	0.3222	0.1798	0.0702	0.0115
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9983	0.9955	0.9893	0.9767	0.9536	0.9140	0.8507	0.7560	0.6242	0.4557	0.2639	0.0861
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9975	0.9940	0.9865	0.9718	0.9437	0.8926	0.8031	0.6513	0.4013

n = 11 — *probabilidad de éxito p*

x/p	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
0	0.5688	0.3138	0.1673	0.0859	0.0422	0.0198	0.0088	0 .0036	0.0014	0.0005	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.8981	0.6974	0.4922	0.3221	0.1971	0.1130	0.0606	0.0302	0.0139	0.0059	0.0022	0.0007	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.9848	0.9104	0.7788	0.6174	0.4552	0.3127	0.2001	0.1189	0.0652	0.0327	0.0148	0.0059	0.0020	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.9984	0.9815	0 .9306	0.8389	0.7133	0.5696	0.4256	0.2963	0.1911	0.1133	0.0610	0.0293	0.0122	0.0043	0.0012	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.9999	0.9972	0.9841	0.9496	0.8854	0.7897	0.6683	0.5328	0.2744	0.1738	0.0994	0.0501	0.0216	0.0076	0.0020	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
5	1.0000	0.9997	0.9973	0.9883	0.9657	0.9218	0.8513	0.7535	0.6331	0.5000	0.3669	0.2465	0.1487	0.0782	0.0343	0.0117	0.0027	0.0003	0.0000
6	1.0000	1.0000	0.9997	0.9980	0.9924	0.9784	0.9499	0.9006	0.8262	0.7256	0.6029	0.4672	0.3317	0.2103	0.1146	0.0504	0.0159	0.0028	0.0001
7	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9957	0.9878	0.9707	0.9390	0.8867	0.8089	0.7037	0.5744	0.4304	0.2867	0.1611	0.0694	0.0185	0.0016
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9980	0.9941	0.9852	0.9673	0.9348	0.8811	0.7999	0.6873	0.5448	0.3826	0.2212	0.0896	0.0152
9	1.0000	1.0000	1 .0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9993	0.9978	0.9941	0.9861	0.9698	0.9394	0.8870	0.8029	0.6779	0.5078	0.3026	0.1019
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9995	0.9986	0.9964	0.9912	0.9802	0.9578	0.9141	0.8327	0.6862	0.4312
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

n = 12 — *probabilidad de éxito p*

x/p	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
0	0.5404	0.2824	0.1422	0.0687	0.0317	0.0138	0.0057	0.0022	0.0008	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.8816	0.6590	0.4435	0.2749	0.1584	0.0850	0.0424	0.0196	0.0083	0.0032	0.0011	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.9804	0.8891	0.7358	0.5583	0.3907	0.2528	0.1513	0.0834	0.0421	0.0193	0.0079	0.0028	0.0008	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.9978	0.9744	0.9078	0.7946	0.6488	0.4925	0.3467	0.2253	0.1345	0.0730	0.0356	0.0153	0.0056	0.0017	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.9998	0.9957	0.9761	0.9274	0.8424	0.7237	0.5833	0.4382	0.3044	0.1938	0.1117	0.0573	0 .0255	0.0095	0.0028	0 .0006	0.0001	0.0000	0.0000
5	1.0000	0.9995	0.9954	0.9806	0.9456	0.8822	0.7873	0.6652	0.5269	0.3872	0.2607	0.1582	0.0846	0.0386	0.0143	0.0039	0.0007	0.0001	0.0000
6	1.0000	0.9999	0.9993	0.9961	0.9857	0.9614	0.9154	0.8418	0.7393	0.6128	0.4731	0.3348	0.2127	0.1178	0 .0544	0.0194	0.0046	0.0005	0.0000
7	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9972	0.9905	0.9745	0.9427	0.8883	0.8062	0.6956	0.5618	0.4167	0.2763	0.1576	0.0726	0.0239	0.0043	0.0002
8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9983	0.9944	0.9847	0.9644	0.9270	0.8655	0.7747	0.6533	0.5075	0.3512	0.2054	0.0922	0.0256	0.0022
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9992	0.9972	0.9921	0.9807	0.9579	0.9166	0.8487	0.7472	0.6093	0.4417	0.2642	0.1109	0.0196
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9989	0.9968	0.9917	0.9804	0.9576	0.9150	0.8416	0.7251	0.5565	0.3410	0.1184
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9992	0.9978	0.9943	0.9862	0.9683	0.9313	0.8578	0.7176	0.4596
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

n = 13 — *probabilidad de éxito p*

x/p	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
0	0.5133	0.2542	0.1209	0.0550	0.0238	0.0097	0.0037	0.0013	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.8646	0.6213	0.3983	0.2336	0.1267	0.0637	0.0296	0.0126	0.0049	0.0017	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0 .0000	0.0000
2	0.9755	0.8661	0.6920	0.5017	0.3326	0.2025	0.1132	0.0579	0.0269	0.0112	0.0041	0.0013	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.9969	0.9658	0.8820	0.7473	0.5843	0.4206	0.2783	0.1686	0.0929	0.0461	0.0203	0.0078	0.0025	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.9997	0.9935	0.9658	0.9009	0.7940	0.6543	0.5005	0.3530	0.2279	0.1334	0.0698	0.0321	0.0126	0.0040	0.0010	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
5	1.0000	0.9991	0.9925	0.9700	0.9198	0.8346	0.7159	0.5744	0.4268	0.2905	0.1788	0.0977	0.0462	0.0182	0.0056	0.0012	0.0002	0.0000	0.0000
6	1.0000	0.9999	0.9987	0.9930	0.9757	0.9376	0.8705	0.7712	0.6437	0.5000	0 .3563	0 .2288	0.1295	0.0624	0.0243	0.0070	0.0013	0.0001	0.0000
7	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9944	0.9818	0.9538	0.9023	0.8212	0.7095	0.5732	0.4256	0.2841	0.1654	0.0802	0.0300	0.0075	0.0009	0.0000
8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9990	0.9960	0.9874	0.9679	0.9302	0.8666	0.7721	0.6470	0.4995	0.3457	0.2060	0.0991	0.0342	0.0065	0.0003
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9975	0.9922	0.9797	0.9539	0.9071	0.8314	0.7217	0.5794	0.4157	0.2527	0.1180	0.0342	0.0031
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9987	0.9959	0.9888	0.9731	0.9421	0.8868	0.7975	0.6674	0.4983	0.3080	0.1339	0.0245
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9983	0.9951	0.9874	0.9704	0.9363	0.8733	0.7664	0.6017	0.3787	0.1354
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9987	0.9963	0.9903	0.9762	0.9450	0.8791	0.7458	0.4867
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

n = 14 *probabilidad de éxito p*

x/p	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
0	0.4877	0.2288	0.1028	0.0440	0.0178	0.0068	0.0024	0.0008	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.8470	0.5846	0.3567	0.1979	0.1010	0.0475	0.0205	0.0081	0.0029	0.0009	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.9699	0.8416	0.6479	0.4481	0.2811	0.1608	0.0839	0.0398	0.0170	0.0065	0.0022	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.9958	0.9559	0.8535	0.6982	0.5213	0.3552	0.2205	0.1243	0.0632	0.0287	0.0114	0.0039	0.0011	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.9996	0.9908	0.9533	0.8702	0.7415	0.5842	0.4227	0.2793	0.1672	0.0898	0.0426	0.0175	0.0060	0.0017	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	1.0000	0.9985	0.9885	0.9561	0.8883	0.7805	0.6405	0.4859	0.3373	0.2120	0.1189	0.0583	0.0243	0.0083	0.0022	0.0004	0.0000	0.0000	0.0000
6	1.0000	0.9998	0.9978	0.9884	0.9617	0.9067	0.8164	0.6925	0.5461	0.3953	0.2586	0.1501	0.0753	0.0315	0.0103	0.0024	0.0003	0.0000	0.0000
7	1.0000	1.0000	0.9997	0.9976	0.9897	0.9685	0.9247	0.8499	0.7414	0.6047	0.4539	0.3075	0.1836	0.0933	0.0383	0.0116	0.0022	0.0002	0 .0000
8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9996	0.9978	0.9917	0.9757	0.9417	0.8811	0.7880	0.6627	0.5141	0.3595	0.2195	0.1117	0.0439	0.0115	0.0015	0.0000
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9983	0.9940	0.9825	0.9574	0.9102	0.8328	0.7207	0.5773	0.4158	0.2585	0.1298	0.0467	0.0092	0.0004
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9989	0.9961	0.9886	0 .9713	0.9368	0.8757	0.7795	0.6448	0.4787	0.3018	0.1465	0.0441	0.0042
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9978	0.9935	0.9830	0.9602	0.9161	0.8392	0.7189	0.5519	0.3521	0.1584	0.0301
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9991	0.9971	0.9919	0.9795	0.9525	0.8990	0.8021	0.6433	0.4154	0.1530
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9992	0.9976	0.9932	0.9822	0.9560	0.8972	0.7712	0.5123
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

n = 15 *probabilidad de éxito p*

x/p	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
0	0.4633	0.2059	0.0874	0.0352	0.0134	0.0047	0.0016	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.8290	0.5490	0.3186	0.1671	0.0802	0.0353	0.0142	0.0052	0.0017	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.9638	0.8159	0.6042	0.3980	0.2361	0.1268	0.0617	0.0271	0.0107	0.0037	0.0011	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.9945	0.9444	0.8227	0.6482	0.4613	0.2969	0.1727	0.0905	0.0424	0.0176	0.0063	0.0019	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.9994	0.9873	0.9383	0.8358	0.6865	0.5155	0.3519	0.2173	0.1204	0.0592	0.0255	0.0093	0.0028	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.9999	0.9977	0.9832	0.9389	0.8516	0.7216	0.5643	0.4032	0.2608	0.1509	0.0769	0.0338	0.0124	0.0037	0.0008	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
6	1.0000	0.9997	0.9964	0.9819	0.9434	0.8689	0.7548	0.6098	0.4522	0.3036	0.1818	0.0950	0.0422	0.0152	0.0042	0.0008	0.0001	0.0000	0.0000
7	1.0000	1.0000	0.9994	0.9958	0.9827	0.9500	0.8868	0.7869	0.6535	0.5000	0.3465	0.2131	0.1132	0.0500	0.0173	0.0042	0.0006	0.0000	0.0000
8	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9958	0.9848	0.9578	0.9050	0.8182	0.6964	0.5478	0.3902	0.2452	0.1311	0.0566	0.0181	0.0036	0.0003	0.0000
9	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9963	0.9876	0.9662	0.9231	0.8491	0.7392	0.5968	0.4357	0.2784	0.1484	0.0611	0.0168	0.0022	0.0001
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9972	0.9907	0.9745	0.9408	0.8796	0.7827	0.6481	0.4845	0.3135	0.1642	0.0617	0.0127	0.0006
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9981	0.9937	0.9824	0.9576	0.9095	0.8273	0.7031	0.5387	0.3518	0.1773	0.0556	0.0055
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9989	0.9963	0.9893	0.9729	0 .9383	0.8732	0.7639	0.6020	0.3958	0.1841	0.0362
13	1.0000	1.0000	1.0000	1 .0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9983	0.9948	0.9858	0.9647	0.9198	0.8329	0.6814	0.4510	0.1710
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9984	0.9953	0.9866	0.9648	0.9126	0.7941	0.5367
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

n = 16 *probabilidad de éxito p*

x/p	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
0	0.4401	0.1853	0.0743	0.0281	0.0100	0.0033	0.0010	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.8108	0.5147	0.2839	0.1407	0.0635	0.0261	0.0098	0.0033	0.0010	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.9571	0.7892	0.5614	0.3518	0.1971	0.0994	0.0451	0.0183	0.0066	0.0021	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.9930	0.9316	0.7899	0.5981	0.4050	0.2459	0.1339	0.0651	0.0281	0.0106	0.0035	0.0009	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.9991	0.9830	0.9209	0.7982	0.6302	0.4499	0.2892	0.1666	0.0853	0.0384	0.0149	0.0049	0.0013	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.9999	0.9967	0.9765	0.9183	0.8103	0.6598	0.4900	0.3288	0.1976	0.1051	0.0486	0.0191	0.0062	0.0016	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
6	1.0000	0.9995	0.9944	0.9733	0.9204	0.8247	0.6881	0.5272	0.3660	0.2272	0.1241	0.0583	0.0229	0.0071	0.0016	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
7	1.0000	0.9999	0.9989	0.9930	0.9729	0.9256	0.8406	0.7161	0.5629	0.4018	0.2559	0.1423	0.0671	0.0257	0.0075	0.0015	0.0002	0.0000	0.0000
8	1.0000	1.0000	0.9998	0.9985	0.9925	0.9743	0.9329	0.8577	0.7441	0.5982	0.4371	0.2839	0.1594	0.0744	0.0271	0.0070	0.0011	0.0001	0.0000
9	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9984	0.9929	0.9771	0.9417	0.8759	0.7728	0.6340	0.4728	0.3119	0.1753	0.0796	0.0267	0.0056	0 .0005	0.0000
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9984	0.9938	0.9809	0.9514	0.8949	0.8024	0.6712	0.5100	0.3402	0.1897	0.0817	0.0235	0.0033	0.0001
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987	0.9951	0.9851	0.9616	0.9147	0 .8334	0.7108	0.5501	0.3698	0.2018	0.0791	0.0170	0.0009
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9991	0.9965	0.9894	0.9719	0.9349	0.8661	0.7541	0.5950	0.4019	0.2101	0.0684	0.0070
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9979	0.9934	0.9817	0.9549	0.9006	0.8029	0.6482	0.4386	0.2108	0.0429
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9967	0.9902	0.9739	0.9365	0.8593	0.7161	0.4853	0.1892
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9967	0.9900	0.9719	0.9257	0.8147	0.5599
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

n = 17 *probabilidad de éxito p*

x/p	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
0	0.4181	0.1668	0.0631	0.0225	0.0075	0.0023	0.0007	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.7922	0.4818	0.2525	0.1182	0.0501	0.0193	0.0067	0.0021	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.9497	0.7618	0.5198	0.3096	0.1637	0.0774	0.0327	0.0123	0.0041	0.0012	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.9912	0.9174	0.7556	0.5489	0.3530	0.2019	0.1028	0.0464	0.0184	0.0064	0.0019	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.9988	0.9779	0.9013	0.7582	0.5739	0.3887	0.2348	0.1260	0.0596	0.0245	0.0086	0.0025	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.9999	0.9953	0.9681	0.8943	0.7653	0.5968	0.4197	0.2639	0.1471	0.0717	0.0301	0.0106	0.0030	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
6	1.0000	0.9992	0.9917	0.9623	0.8929	0.7752	0.6188	0.4478	0.2902	0.1662	0.0826	0.0348	0.0120	0.0032	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
7	1.0000	0.9999	0.9983	0.9891	0.9598	0.8954	0.7872	0.6405	0.4743	0.3145	0.1834	0.0919	0.0383	0.0127	0.0031	0.0005	0.0000	0.0000	0.0000
8	1.0000	1.0000	0.9997	0.9974	0.9876	0.9597	0.9006	0.8011	0.6626	0.5000	0.3374	0.1989	0.0994	0.0403	0.0124	0.0026	0.0003	0.0000	0.0000
9	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9969	0.9873	0.9617	0.9081	0.8166	0.6855	0.5257	0.3595	0.2128	0.1046	0.0402	0.0109	0.0017	0.0001	0.0000
10	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9968	0.9880	0.9652	0.9174	0.8338	0.7098	0.5522	0.3812	0.2248	0.1071	0.0377	0.0083	0.0008	0.0000
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9970	0.9894	0.9699	0.9283	0.8529	0.7361	0.5803	0.4032	0.2347	0.1057	0 .0319	0.0047	0.0001
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9975	0.9914	0.9755	0.9404	0.8740	0.7652	0.6113	0.4261	0.2418	0.0987	0.0221	0.0012
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9981	0.9936	0.9816	0.9536	0.8972	0.7981	0.6470	0.4511	0.2444	0.0826	0.0088
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9988	0.9959	0.9877	0.9673	0.9226	0.8363	0.6904	0.4802	0.2382	0.0503
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9979	0.9933	0.9807	0.9499	0.8818	0.7475	0.5182	0 .2078
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9993	0.9977	0.9925	0.9775	0.9369	0.8332	0.5819
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

n = 18 — **probabilidad de éxito p**

x/p	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
0	0.3972	0.1501	0.0536	0.0180	0.0056	0.0016	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.7735	0.4503	0.2241	0.0991	0.0395	0.0142	0.0046	0.0013	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.9419	0.7338	0.4797	0.2713	0.1353	0.0600	0.0236	0.0082	0.0025	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.9891	0.9018	0.7202	0.5010	0.3057	0.1646	0.0783	0.0328	0.0120	0.0038	0.0010	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.9985	0.9718	0.8794	0.7164	0.5187	0.3327	0.1886	0.0942	0.0411	0.0154	0.0049	0.0013	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.9998	0.9936	0.9581	0.8671	0.7175	0.5344	0.3550	0.2088	0.1077	0.0481	0.0183	0.0058	0.0014	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
6	1.0000	0.9988	0.9882	0.9487	0.8610	0.7217	0.5491	0.3743	0.2258	0.1189	0.0537	0.0203	0.0062	0.0014	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
7	1.0000	0.9998	0.9973	0.9837	0.9431	0.8593	0.7283	0.5634	0.3915	0.2403	0.1280	0.0576	0.0212	0.0061	0.0012	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
8	1.0000	1.0000	0.9995	0.9957	0.9807	0.9404	0.8609	0.7368	0.5778	0.4073	0.2527	0.1347	0.0597	0.0210	0.0054	0.0009	0.0001	0.0000	0.0000
9	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9946	0.9790	0.9403	0.8653	0.7473	0.5927	0.4222	0.2632	0.1391	0.0596	0.0193	0.0043	0.0005	0.0000	0.0000
10	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9939	0.9788	0.9424	0.8720	0.7597	0.6085	0.4366	0.2717	0.1407	0.0569	0.0163	0.0027	0.0002	0.0000
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9986	0.9938	0.9797	0.9463	0.8811	0.7742	0.6257	0.4509	0.2783	0.1390	0.0513	0.0118	0.0012	0.0000
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9986	0.9942	0.9817	0.9519	0.8923	0.7912	0.6450	0.4656	0.2825	0.1329	0.0419	0.0064	0.0002
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987	0.9951	0.9846	0.9589	0.9058	0.8114	0.6673	0.4813	0.2836	0.1206	0.0282	0.0015
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9990	0.9962	0.9880	0.9672	0.9217	0.8354	0.6943	0.4990	0.2798	0.0982	0.0109
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9975	0.9918	0.9764	0.9400	0.8647	0.7287	0.5203	0.2662	0.0581
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9987	0.9954	0.9858	0.9605	0.9009	0.7759	0.5497	0.2265
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9984	0.9944	0.9820	0.9464	0.8499	0.6028
18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1 .0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1 .0000	1.0000

n = 19 — **probabilidad de éxito p**

x/p	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
0	0.3774	0.1351	0.0456	0.0144	0.0042	0.0011	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.7547	0.4203	0.1985	0.0829	0.0310	0.0104	0.0031	0.0008	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.9335	0.7054	0.4413	0.2369	0.1113	0.0462	0.0170	0.0055	0.0015	0.0004	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.9868	0.8850	0.6841	0.4551	0.2631	0.1332	0.0591	0.0230	0.0077	0.0022	0.0005	0.0001	0 .0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.9980	0.9648	0.8556	0.6733	0.4654	0.2822	0.1500	0.0696	0.0280	0.0096	0.0028	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.9998	0.9914	0.9463	0.8369	0.6678	0.4739	0.2968	0.1629	0.0777	0.0318	0.0109	0.0031	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
6	1.0000	0.9983	0.9837	0.9324	0.8251	0.6655	0.4812	0.3081	0.1727	0.0835	0.0342	0.0116	0.0031	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
7	1.0000	0.9997	0.9959	0.9767	0.9225	0.8180	0.6656	0.4878	0.3169	0.1796	0.0871	0.0352	0.0114	0.0028	0.0005	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8	1.0000	1.0000	0.9992	0.9933	0.9713	0.9161	0.8145	0.6675	0.4940	0.3238	0.1841	0.0885	0.0347	0.0105	0.0023	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
9	1.0000	1.0000	0.9999	0.9984	0.9911	0.9674	0.9125	0.8139	0.6710	0.5000	0.3290	0.1861	0.0875	0.0326	0.0089	0.0016	0.0001	0.0000	0.0000
10	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9977	0.9895	0.9653	0.9115	0.8159	0.6762	0.5060	0.3325	0.1855	0.0839	0.0287	0.0067	0.0008	0.0000	0.0000
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9972	0.9886	0.9648	0.9129	0.8204	0.6831	0.5122	0.3344	0.1820	0.0775	0.0233	0.0041	0.0003	0.0000
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9969	0.9884	0.9658	0.9165	0.8273	0.6919	0.5188	0.3345	0.1749	0.0676	0.0163	0.0017	0.0000
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9969	0.9891	0.9682	0 .9223	0.8371	0.7032	0.5261	0.3322	0.1631	0.0537	0.0086	0.0002
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9972	0.9904	0.9720	0.9304	0.8500	0.7178	0.5346	0.3267	0.1444	0.0352	0.0020
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9978	0.9923	0.9770	0.9409	0.8668	0.7369	0.5449	0.3159	0.1150	0.0132
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9985	0.9945	0.9830	0.9538	0.8887	0.7631	0.5587	0.2946	0.0665
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9992	0.9969	0.9896	0.9690	0.9171	0.8015	0.5797	0.2453
18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9989	0.9958	0.9856	0.9544	0.8649	0.6226
19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

n = 20 — **probabilidad de éxito p**

x/p	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
0	0.3585	0.1216	0.0388	0.0115	0.0032	0.0008	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.7358	0.3917	0.1756	0.0692	0.0243	0.0076	0.0021	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.9245	0.6769	0.4049	0.2061	0.0913	0.0355	0.0121	0.0036	0.0009	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.9841	0.8670	0.6477	0.4114	0.2252	0.1071	0.0444	0.0160	0.0049	0.0013	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.9974	0.9568	0.8298	0.6296	0.4148	0.2375	0.1182	0.0510	0.0189	0.0059	0.0015	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.9997	0.9887	0.9327	0.8042	0.6172	0.4164	0.2454	0.1256	0.0553	0.0207	0.0064	0.0016	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
6	1.0000	0.9976	0.9781	0.9133	0.7858	0.6080	0.4166	0.2500	0.1299	0.0577	0.0214	0.0065	0.0015	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
7	1.0000	0.9996	0.9941	0.9679	0.8982	0.7723	0.6010	0.4159	0.2520	0.1316	0.0580	0.0210	0.0060	0.0013	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8	1.0000	0.9999	0.9987	0.9900	0.9591	0.8867	0.7624	0.5956	0.4143	0.2517	0.1308	0.0565	0.0196	0.0051	0.0009	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
9	1.0000	1.0000	0.9998	0.9974	0.9861	0.9520	0.8782	0.7553	0.5914	0.4119	0.2493	0.1275	0.0532	0.0171	0.0039	0.0006	0.0000	0.0000	0.0000
10	1.0000	1.0000	1.0000	0.9994	0.9961	0.9829	0.9468	0.8725	0.7507	0.5881	0.4086	0.2447	0.1218	0.0480	0.0139	0.0026	0.0002	0.0000	0.0000
11	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9949	0.9804	0.9435	0.8692	0.5881	0.4086	0.2447	0.1218	0.0480	0.0139	0.0026	0.0002	0.0000	0.0000
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9987	0.9940	0.9790	0.9420	0.8684	0.7480	0.5841	0.3990	0.2277	0.1018	0.0321	0.0059	0.0004	0.0000
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9985	0.9935	0.9786	0.9423	0.8701	0.7500	0.5834	0.3920	0.2142	0.0867	0.0219	0.0024	0.0000
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9984	0.9936	0.9793	0.9447	0.8744	0.7546	0.5836	0.3828	0.1958	0.0673	0.0113	0.0003
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9985	0.9941	0.9811	0.9490	0.8818	0.7625	0.5852	0.3704	0.1702	0.0432	0.0026
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987	0.9951	0.9840	0.9556	0.8929	0.7748	0.5886	0.3523	0.1330	0.0159
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9991	0.9964	0.9879	0.9645	0.9087	0.7939	0.5951	0 .3231	0.0755
18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9979	0.9924	0.9757	0.9308	0.8244	0.6083	0.2642
19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9992	0.9968	0.9885	0.9612	0.8784	0.6415
20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

n = 21 — *probabilidad de éxito p*

x/p	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
0	0.3406	0.1094	0.0329	0.0092	0.0024	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.7170	0.3647	0.1550	0.0576	0.0190	0.0056	0.0014	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.9151	0.6484	0.3705	0.1787	0.0745	0.0271	0.0086	0.0024	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.9811	0.8480	0.6113	0.3704	0.1917	0.0856	0.0331	0.0110	0.0031	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.9968	0.9478	0.8025	0.5860	0.3674	0.1984	0.0924	0.0370	0.0126	0.0036	0.0008	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.9996	0.9856	0.9173	0.7693	0.5666	0.3627	0.2009	0.0957	0.0389	0.0133	0.0037	0.0008	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
6	1.0000	0.9967	0.9713	0.8915	0 .7436	0.5505	0.3567	0.2002	0.0964	0.0392	0.0132	0.0036	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
7	1.0000	0.9994	0.9917	0.9569	0.8701	0.7230	0.5365	0.3495	0.1971	0.0946	0.0379	0.0123	0.0031	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8	1.0000	0.9999	0.9980	0.9856	0.9439	0.8523	0.7059	0.5237	0.3413	0.1917	0.0908	0.0352	0.0108	0.0024	0.0004	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
9	1.0000	1.0000	0.9996	0.9959	0.9794	0.9324	0.8377	0.6914	0.5117	0.3318	0.1841	0.0849	0.0313	0.0087	0.0017	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
10	1.0000	1.0000	0 .9999	0.9990	0.9936	0.9736	0.9228	0.8256	0.6790	0.5000	0.3210	0.1744	0.0772	0.0264	0.0064	0.0010	0.0001	0.0000	0.0000
11	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9983	0.9913	0.9687	0.9151	0.8159	0.6682	0.4883	0.3086	0.1623	0.0676	0.0206	0.0041	0.0004	0.0000	0.0000
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9996	0.9976	0.9892	0.9648	0.9092	0.8083	0.6587	0.4763	0.2941	0.1477	0.0561	0.0144	0.0020	0.0001	0.0000
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9969	0.9877	0.9621	0.9054	0.8029	0.6505	0.4635	0.2770	0.1299	0.0431	0.0083	0.0006	0.0000
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9964	0.9868	0.9608	0.9038	0.7998	0.6433	0.4495	0.2564	0.1085	0.0287	0.0033	0.0000
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9963	0.9867	0.9611	0.9043	0.7991	0.6373	0.4334	0.2307	0.0827	0.0144	0.0004
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9992	0.9964	0.9874	0.9630	0.9076	0.8016	0.6326	0.4140	0.1975	0.0522	0.0032
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9969	0.9890	0.9669	0.9144	0.8083	0.6296	0.3887	0.1520	0.0189
18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9976	0.9914	0.9729	0.9255	0.8213	0.6295	0.3516	0.0849
19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9985	0.9944	0.9810	0.9424	0.8450	0.6353	0.2830
20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9976	0.9908	0.9671	0.8906	0.6594
21	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

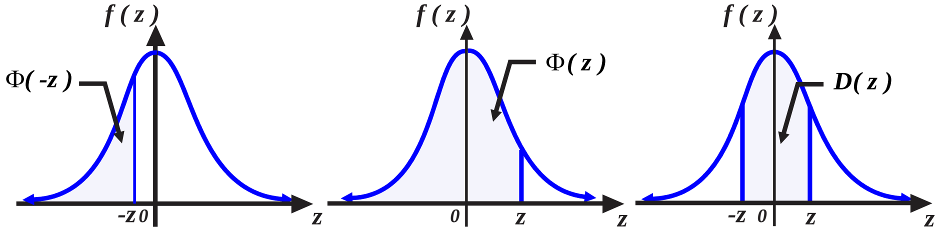
n = 22 — *probabilidad de éxito p*

x/p	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
0	0.3235	0.0985	0.0280	0.0074	0.0018	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.6982	0.3392	0.1367	0.0480	0.0149	0.0041	0.0010	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.9052	0.6200	0.3382	0.1545	0.0606	0.0207	0.0061	0.0016	0.0003	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.9778	0.8281	0.5752	0.3320	0.1624	0.0681	0.0245	0.0076	0.0020	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.9960	0.9379	0.7738	0.5429	0.3235	0.1645	0.0716	0.0266	0.0083	0.0022	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.9994	0.9818	0.9001	0.7326	0.5168	0.3134	0.1629	0.0722	0.0271	0.0085	0.0021	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
6	0.9999	0.9956	0.9632	0.8670	0.6994	0.4942	0.3022	0.1584	0.0705	0.0262	0.0080	0.0019	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
7	1.0000	0.9991	0.9886	0.9439	0.8385	0.6713	0.4736	0.2898	0.1518	0.0669	0.0243	0.0070	0.0016	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8	1.0000	0.9999	0.9970	0.9799	0.9254	0.8135	0.6466	0.4540	0.2764	0.1431	0.0617	0.0215	0.0058	0.0011	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
9	1.0000	1.0000	0.9993	0.9939	0.9705	0.9084	0.7916	0.6244	0.4350	0.2617	0.1328	0.0551	0.0180	0.0043	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
10	1.0000	1.0000	0.9999	0.9984	0.9900	0.9613	0.8930	0.7720	0.6037	0.4159	0.2457	0.1207	0.0474	0.0140	0.0029	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
11	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9971	0.9860	0.9526	0.8793	0.7543	0.5841	0.3963	0.2280	0.1070	0.0387	0.0100	0.0016	0.0001	0.0000	0.0000
12	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9957	0.9820	0.9449	0.8672	0.7383	0.5650	0.3756	0.2084	0.0916	0.0295	0.0061	0.0007	0.0000	0.0000
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9989	0.9942	0.9785	0.9383	0.8569	0.7236	0.5460	0.3534	0.1865	0.0746	0.0201	0.0030	0.0001	0.0000
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9984	0.9930	0.9757	0.9331	0.8482	0.7102	0.5264	0.3287	0.1615	0.0561	0.0114	0.0009	0.0000
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9981	0.9920	0.9738	0.9295	0.8416	0.6978	0.5058	0.3006	0.1330	0.0368	0.0044	0.0001
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9979	0.9915	0.9729	0.9278	0.8371	0.6866	0.4832	0.2674	0.0999	0.0182	0.0006
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9978	0.9917	0.9734	0.9284	0.8355	0.6765	0.4571	0.2262	0.0621	0.0040
18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9980	0.9924	0.9755	0.9319	0.8376	0.6680	0.4248	0.1719	0.0222
19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9984	0.9939	0.9793	0.9394	0.8455	0.6618	0.3800	0.0948
20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9990	0.9959	0.9851	0.9520	0.8633	0.6608	0.3018
21	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9982	0.9926	0.9720	0.9015	0.6765
22	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

n = 23 — *probabilidad de éxito p*

x/p	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
0	0.3074	0.0886	0.0238	0.0059	0.0013	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0 .0000
1	0.6794	0.3151	0.1204	0.0398	0.0116	0.0030	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0 .0000
2	0.8948	0.5920	0 .3080	0.1332	0.0492	0.0157	0.0043	0.0010	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0 .0000
3	0.9742	0.8073	0.5396	0.2965	0.1370	0.0538	0.0181	0.0052	0.0012	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.9951	0.9269	0.7440	0.5007	0.2832	0.1356	0.0551	0.0190	0.0055	0.0013	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.9992	0.9774	0.8811	0.6947	0.4685	0.2688	0.1309	0.0540	0.0186	0.0053	0.0012	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
6	0.9999	0.9942	0.9537	0.8402	0.6537	0.4399	0.2534	0.1240	0.0510	0.0173	0.0048	0.0010	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
7	1.0000	0.9988	0.9848	0.9285	0.8037	0.6181	0.4136	0.2373	0.1152	0.0466	0.0153	0.0040	0.0008	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8	1.0000	0.9998	0.9958	0.9727	0.9037	0.7709	0.5860	0.3884	0.2203	0.1050	0.0411	0.0128	0.0030	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
9	1.0000	1.0000	0.9990	0.9911	0.9592	0.8799	0.7408	0.5562	0.3636	0.2024	0.0937	0.0349	0.0100	0.0021	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
10	1.0000	1.0000	0.9998	0.9975	0.9851	0.9454	0.8575	0.7129	0.5278	0.3388	0.1836	0.0813	0.0283	0.0072	0.0012	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
11	1.0000	1.0000	1.0000	0.9994	0.9954	0.9786	0.9318	0.8364	0.6865	0.5000	0.3135	0.1636	0.0682	0.0214	0.0046	0.0006	0.0000	0.0000	0.0000
12	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9988	0.9928	0.9717	0.9187	0.8164	0.6612	0.4722	0.2871	0.1425	0.0546	0.0149	0.0025	0.0002	0.0000	0.0000
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9979	0.9900	0.9651	0.9063	0.7976	0.6364	0.4438	0.2592	0.1201	0.0408	0.0089	0.0010	0.0000	0.0000
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9970	0.9872	0.9589	0.8950	0.7797	0.6116	0.4140	0.2291	0.0963	0.0273	0.0042	0.0002	0.0000
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9960	0.9847	0.9534	0.8848	0.7627	0.5864	0.3819	0.1963	0.0715	0.0152	0.0012	0.0000
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9990	0.9952	0.9827	0.9490	0.8760	0.7466	0.5601	0.3463	0.1598	0.0463	0.0058	0.0001
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9947	0.9814	0.9460	0.8691	0.7312	0.5315	0.3053	0.1189	0.0226	0.0008
18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9987	0.9945	0.9810	0.9449	0.8644	0.7168	0.4993	0.2560	0.0731	0.0049
19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9948	0.9819	0.9462	0.8630	0.7035	0.4604	0.1927	0.0258
20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9990	0 .9957	0.9843	0.9508	0.8668	0.6920	0.4080	0.1052
21	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9970	0.9884	0.9602	0.8796	0.6849	0.3206
22	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987	0.9941	0.9762	0.9114	0.6926
23	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

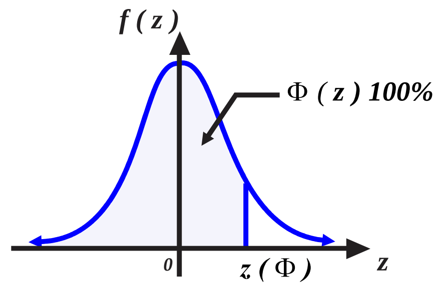
A.2 PROBABILIDADES NORMALES ACUMULADAS



z	Φ(-z)	Φ(z)	D(-z)	z	Φ(-z)	Φ(z)	D(-z)	z	Φ(-z)	Φ(z)	D(-z)
0.00	0.5000	0.5000	0.0000	0.55	0.7088	0.2912	0.4177	1.10	0.8643	0.1357	0.7287
0.01	0.5040	0.4960	0.0080	0.56	0.7123	0.2877	0.4245	1.11	0.8665	0.1335	0.7330
0.02	0.5080	0.4920	0.0160	0.57	0.7157	0.2843	0.4313	1.12	0.8686	0.1314	0.7373
0.03	0.5120	0.4880	0.0239	0.58	0.7190	0.2810	0.4381	1.13	0.8708	0.1292	0.7415
0.04	0.5160	0.4840	0.0319	0.59	0.7224	0.2776	0.4448	1.14	0.8729	0.1271	0.7457
0.05	0.5199	0.4801	0.0399	0.60	0.7257	0.2119	0.4515	1.15	0.8749	0.1251	0.7499
0.06	0.5239	0.4761	0.0478	0.61	0.7291	0.2090	0.4581	1.16	0.8770	0.1230	0.7540
0.07	0.5279	0.4721	0.0578	0.62	0.7324	0.2061	0.4647	1.17	0.8790	0.1210	0.7580
0.08	0.5319	0.4681	0.0638	0.63	0.7357	0.2033	0.4713	1.18	0.8810	0.1190	0.7620
0.09	0.5359	0.4641	0.0717	0.64	0.7389	0.2005	0.4778	1.19	0.8830	0.1170	0.7660
0.10	0.5398	0.4602	0.0797	0.65	0.7422	0.1977	0.4843	1.20	0.8849	0.1151	0.7699
0.11	0.5438	0.4562	0.0876	0.66	0.7454	0.1949	0.4907	1.21	0.8869	0.1131	0.7737
0.12	0.5478	0.4522	0.0955	0.67	0.7486	0.1922	0.4971	1.22	0.8888	0.1112	0.7775
0.13	0.5517	0.4483	0.1034	0.68	0.7517	0.1894	0.5035	1.23	0.8907	0.1093	0.7813
0.14	0.5557	0.4443	0.1113	0.69	0.7549	0.1867	0.5098	1.24	0.8925	0.1075	0.7850
0.15	0.5596	0.4404	0.1192	0.70	0.7580	0.1841	0.5161	1.25	0.8944	0.1056	0.7887
0.16	0.5636	0.4364	0.1271	0.71	0.7611	0.1814	0.5223	1.26	0.8962	0.1038	0.7923
0.17	0.5675	0.4325	0.1350	0.72	0.7642	0.1788	0.5285	1.27	0.8980	0.1020	0.7959
0.18	0.5714	0.4286	0.1428	0.73	0.7673	0.1762	0.5346	1.28	0.8997	0.1003	0.7995
0.19	0.5753	0.4247	0.1507	0.74	0.7704	0.1736	0.5407	1.29	0.9015	0.0985	0.8029
0.20	0.5793	0.4207	0.1585	0.75	0.7734	0.1711	0.5467	1.30	0.9049	0.0968	0.8064
0.21	0.5832	0.4168	0.1663	0.76	0.7764	0.1685	0.5527	1.31	0.9032	0.0951	0.8098
0.22	0.5871	0.4129	0.1741	0.77	0.7794	0.1660	0.5587	1.32	0.9066	0.0934	0.8132
0.23	0.5910	0.4090	0.1809	0.78	0.7823	0.1635	0.5646	1.33	0.9082	0.0918	0.8165
0.24	0.5948	0.4052	0.1897	0.79	0.7852	0.1611	0.5705	1.34	0.9099	0.0901	0.8198
0.25	0.5987	0.4013	0.1974	0.80	0.7881	0.2119	0.5763	1.35	0.9115	0.0885	0.8230
0.26	0.6026	0.3974	0.2051	0.81	0.7910	0.2090	0.5821	1.36	0.9131	0.0869	0.8262
0.27	0.6064	0.3936	0.2128	0.82	0.7939	0.2061	0.5878	1.37	0.9147	0.0853	0.8293
0.28	0.6103	0.3897	0.2205	0.83	0.7967	0.2033	0.5935	1.38	0.9162	0.0838	0.8324
0.29	0.6141	0.3859	0.2282	0.84	0.7995	0.2005	0.5991	1.39	0.9177	0.0823	0.8355
0.30	0.6179	0.3821	0.2358	0.85	0.8023	0.1977	0.6047	1.40	0.9192	0.0808	0.8385
0.31	0.6217	0.3783	0.2434	0.86	0.8051	0.1949	0.6102	1.41	0.9207	0.0793	0.8415
0.32	0.6255	0.3745	0.2510	0.87	0.8078	0.1922	0.6157	1.42	0.9222	0.0778	0.8444
0.33	0.6293	0.3707	0.2586	0.88	0.8106	0.1894	0.6211	1.43	0.9236	0.0764	0.8473
0.34	0.6331	0.3669	0.2651	0.89	0.8133	0.1867	0.6265	1.44	0.9251	0.0749	0.8501
0.35	0.6368	0.3632	0.2737	0.90	0.8159	0.1841	0.6319	1.45	0.9265	0.0735	0.8529
0.36	0.6406	0.3594	0.2812	0.91	0.8186	0.1814	0.6372	1.46	0.9279	0.0721	0.8557
0.37	0.6443	0.3557	0.2886	0.92	0.8212	0.1788	0.6424	1.47	0.9292	0.0708	0.8584
0.38	0.6480	0.3520	0.2961	0.93	0.8238	0.1762	0.6476	1.48	0.9306	0.0694	0.8611
0.39	0.6480	0.3483	0.3035	0.94	0.8264	0.1736	0.6528	1.49	0.9319	0.0681	0.8638
0.40	0.6554	0.3446	0.3108	0.95	0.8289	0.1711	0.6579	1.50	0.9332	0.0668	0.8664
0.41	0.6591	0.3409	0.3182	0.96	0.8315	0.1685	0.6629	1.51	0.9345	0.0655	0.8690
0.42	0.6628	0.3372	0.3255	0.97	0.8340	0.1660	0.6680	1.52	0.9357	0.0643	0.8715
0.43	0.6664	0.3336	0.3328	0.98	0.8365	0.1635	0.6729	1.53	0.9370	0.0630	0.8740
0.44	0.6700	0.3300	0.3401	0.99	0.8389	0.1611	0.6778	1.54	0.9382	0.0618	0.8764
0.45	0.6736	0.3264	0.3473	1.00	0.8413	0.1587	0.6827	1.55	0.9394	0.0606	0.8789
0.46	0.6772	0.3228	0.3545	1.01	0.8438	0.1562	0.6875	1.56	0.9406	0.0594	0.8812
0.47	0.6808	0.3192	0.3616	1.02	0.8461	0.1539	0.6923	1.57	0.9418	0.0582	0.8836
0.48	0.6844	0.3156	0.3688	1.03	0.8485	0.1515	0.6970	1.58	0.9429	0.0571	0.8859
0.49	0.6879	0.3121	0.3759	1.04	0.8508	0.1492	0.7017	1.59	0.9441	0.0559	0.8882
0.50	0.6915	0.3085	0.3829	1.05	0.8531	0.1469	0.7063	1.60	0.9452	0.0548	0.8904
0.51	0.6950	0.3050	0.3899	1.06	0.8554	0.1446	0.7109	1.61	0.9463	0.0537	0.8926
0.52	0.6985	0.3015	0.3969	1.07	0.8577	0.1423	0.7154	1.62	0.9474	0.0526	0.8948
0.53	0.7019	0.2981	0.4039	1.08	0.8599	0.1401	0.7199	1.63	0.9484	0.0516	0.8969
0.54	0.7054	0.2946	0.4108	1.09	0.8621	0.1379	0.7243	1.64	0.9495	0.0505	0.8990

z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	$D(-z)$	z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	$D(-z)$	z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	$D(-z)$
1.65	0.9505	0.0495	0.9011	2.30	0.9893	0.0107	0.9786	2.95	0.9984	0.0016	0.9968
1.66	0.9515	0.0485	0.9031	2.31	0.9896	0.0104	0.9791	2.96	0.9985	0.0015	0.9969
1.67	0.9525	0.0475	0.9051	2.32	0.9898	0.0102	0.9797	2.97	0.9985	0.0015	0.9970
1.68	0.9535	0.0465	0.9070	2.33	0.9901	0.0099	0.9802	2.98	0.9986	0.0014	0.9971
1.69	0.9545	0.0455	0.9090	2.34	0.9904	0.0096	0.9807	2.99	0.9986	0.0014	0.9972
1.70	0.9554	0.0446	0.9109	2.35	0.9906	0.0094	0.9812	3.00	0.9987	0.0013	0.9973
1.71	0.9564	0.0436	0.9127	2.36	0.9909	0.0091	0.9817	3.01	0.9987	0.0013	0.9974
1.72	0.9573	0.0427	0.9146	2.37	0.9911	0.0089	0.9822	3.02	0.9987	0.0013	0.9975
1.73	0.9582	0.0418	0.9164	2.38	0.9913	0.0087	0.9827	3.03	0.9988	0.0012	0.9976
1.74	0.9591	0.0409	0.9181	2.39	0.9916	0.0084	0.9832	3.04	0.9988	0.0012	0.9976
1.75	0.9599	0.0401	0.9199	2.40	0.9918	0.0082	0.9836	3.05	0.9989	0.0011	0.9977
1.76	0.9608	0.0392	0.9216	2.41	0.9920	0.0080	0.9840	3.06	0.9989	0.0011	0.9978
1.77	0.9616	0.0384	0.9233	2.42	0.9922	0.0078	0.9845	3.07	0.9989	0.0011	0.9979
1.78	0.9625	0.0375	0.9249	2.43	0.9925	0.0075	0.9849	3.08	0.9990	0.0010	0.9979
1.79	0.9633	0.0367	0.9265	2.44	0.9927	0.0073	0.9853	3.09	0.9990	0.0010	0.9980
1.80	0.9641	0.0359	0.9291	2.45	0.9929	0.0071	0.9857	3.10	0.9990	0.0010	0.9981
1.81	0.9649	0.0351	0.9297	2.46	0.9931	0.0069	0.9861	3.11	0.9990	0.0010	0.9981
1.82	0.9656	0.0344	0.9312	2.47	0.9932	0.0068	0.9865	3.12	0.9991	0.0009	0.9982
1.83	0.9664	0.0336	0.9328	2.48	0.9934	0.0066	0.9869	3.13	0.9991	0.0009	0.9983
1.84	0.9671	0.0329	0.9342	2.49	0.9936	0.0064	0.9872	3.14	0.9991	0.0009	0.9983
1.85	0.9678	0.0322	0.9357	2.50	0.9938	0.0062	0.9876	3.15	0.9992	0.0008	0.9984
1.86	0.9686	0.0314	0.9371	2.51	0.9940	0.0060	0.9879	3.16	0.9992	0.0008	0.9984
1.87	0.9693	0.0307	0.9385	2.52	0.9941	0.0059	0.9883	3.17	0.9992	0.0008	0.9985
1.88	0.9699	0.0301	0.9399	2.53	0.9943	0.0057	0.9886	3.18	0.9992	0.0008	0.9985
1.89	0.9706	0.0294	0.9412	2.54	0.9945	0.0055	0.9889	3.19	0.9993	0.0007	0.9986
1.90	0.9713	0.0287	0.9426	2.55	0.9946	0.0054	0.9892	3.20	0.9993	0.0007	0.9986
1.91	0.9719	0.0281	0.9439	2.56	0.9948	0.0052	0.9895	3.21	0.9993	0.0007	0.9987
1.92	0.9726	0.0274	0.9451	2.57	0.9949	0.0051	0.9898	3.22	0.9994	0.0006	0.9987
1.93	0.9732	0.0268	0.9464	2.58	0.9951	0.0049	0.9901	3.23	0.9994	0.0006	0.9988
1.94	0.9738	0.0262	0.9476	2.59	0.9952	0.0048	0.9904	3.24	0.9994	0.0006	0.9988
1.95	0.9744	0.0256	0.9488	2.60	0.9953	0.0047	0.9907	3.25	0.9994	0.0006	0.9988
1.96	0.9750	0.0250	0.9500	2.61	0.9955	0.0045	0.9909	3.26	0.9994	0.0006	0.9988
1.97	0.9756	0.0244	0.9512	2.62	0.9956	0.0044	0.9912	3.27	0.9994	0.0006	0.9989
1.98	0.9761	0.0239	0.9523	2.63	0.9957	0.0043	0.9915	3.28	0.9995	0.0005	0.9990
1.99	0.9767	0.0233	0.9534	2.64	0.9959	0.0041	0.9917	3.29	0.9995	0.0005	0.9990
2.00	0.9772	0.0228	0.9545	2.65	0.9960	0.0040	0.9920	3.30	0.9995	0.0005	0.9990
2.01	0.9778	0.0222	0.9556	2.66	0.9961	0.0039	0.9922	3.31	0.9995	0.0005	0.9991
2.02	0.9783	0.0217	0.9566	2.67	0.9962	0.0038	0.9924	3.32	0.9995	0.0005	0.9991
2.03	0.9788	0.0212	0.9576	2.68	0.9963	0.0037	0.9926	3.33	0.9996	0.0004	0.9991
2.04	0.9793	0.0207	0.9586	2.69	0.9964	0.0036	0.9929	3.34	0.9996	0.0004	0.9992
2.05	0.9798	0.0202	0.9596	2.70	0.9965	0.0035	0.9931	3.35	0.9996	0.0004	0.9992
2.06	0.9803	0.0197	0.9606	2.71	0.9966	0.0034	0.9933	3.36	0.9996	0.0004	0.9992
2.07	0.9808	0.0192	0.9615	2.72	0.9967	0.0033	0.9935	3.37	0.9996	0.0004	0.9992
2.08	0.9812	0.0188	0.9625	2.73	0.9968	0.0032	0.9937	2.38	0.9996	0.0004	0.9993
2.09	0.9817	0.0183	0.9634	2.74	0.9969	0.0031	0.9939	3.39	0.9997	0.0003	0.9993
2.10	0.9821	0.0179	0.9643	2.75	0.9970	0.0030	0.9940	3.40	0.9997	0.0003	0.9993
2.11	0.9826	0.0174	0.9651	2.76	0.9971	0.0029	0.9942	3.41	0.9997	0.0003	0.9994
2.12	0.9830	0.0170	0.9660	2.77	0.9972	0.0028	0.9944	3.42	0.9997	0.0003	0.9994
2.13	0.9834	0.0166	0.9668	2.78	0.9973	0.0027	0.9946	3.43	0.9997	0.0003	0.9994
2.14	0.9838	0.0162	0.9976	2.79	0.9974	0.0026	0.9947	3.44	0.9997	0.0003	0.9994
2.15	0.9842	0.0158	0.9684	2.80	0.9974	0.0026	0.9949	2.45	0.9997	0.0003	0.9994
2.16	0.9846	0.0154	0.9692	2.81	0.9975	0.0025	0.9950	3.46	0.9997	0.0003	0.9995
2.17	0.9850	0.0150	0.9700	2.82	0.9976	0.0024	0.9952	3.47	0.9997	0.0003	0.9995
2.18	0.9854	0.0146	0.9707	2.83	0.9977	0.0023	0.9953	3.48	0.9997	0.0003	0.9995
2.19	0.9857	0.0143	0.9715	2.84	0.9977	0.0023	0.9955	3.49	0.9998	0.0002	0.9995
2.20	0.9861	0.0139	0.9722	2.85	0.9978	0.0022	0.9956	3.50	0.9998	0.0002	0.9995
2.21	0.9864	0.0136	0.9729	2.86	0.9979	0.0021	0.9958	3.51	0.9998	0.0002	0.9996
2.22	0.9868	0.0132	0.9736	2.87	0.9979	0.0021	0.9959	3.52	0.9998	0.0002	0.9996
2.23	0.9871	0.0129	0.9743	2.88	0.9980	0.0020	0.9960	3.53	0.9998	0.0002	0.9996
2.24	0.9875	0.0125	0.9749	2.89	0.9981	0.0019	0.9961	3.54	0.9998	0.0002	0.9996
2.25	0.9878	0.0122	0.9756	2.90	0.9981	0.0019	0.9963	3.55	0.9998	0.0002	0.9996
2.26	0.9881	0.0119	0.9762	2.91	0.9982	0.0018	0.9964	3.56	0.9998	0.0002	0.9996
2.27	0.9884	0.0116	0.9768	2.92	0.9982	0.0018	0.9965	3.57	0.9998	0.0002	0.9996
2.28	0.9887	0.0113	0.9774	2.93	0.9983	0.0017	0.9966	3.58	0.9998	0.0002	0.9997
2.29	0.9890	0.0110	0.9780	2.94	0.9984	0.0016	0.9967	3.59	0.9998	0.0002	0.9997

A.3 PERCENTILES NORMALES

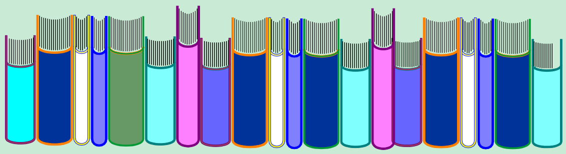


%	z (Φ)	%	z (Φ)	%	z (Φ)	%	z (Φ)	%	z (Φ)	%	z (Φ)	%	z (Φ)	%	z (Φ)	%	z (Φ)
0.0	- ∞	5.0	-1.645	10.0	-1.282	15.0	-1.036	20.0	-0.842	25.0	-0.674	30.0	-0.524	35.0	-0.385	40.0	-0.253
0.1	-3.090	5.1	-1.635	10.1	-1.276	15.1	-1.032	20.1	-0.838	25.1	-0.671	30.1	-0.522	35.1	-0.383	40.1	-0.251
0.2	-2.878	5.2	-1.626	10.2	-1.270	15.2	-1.028	20.2	-0.834	25.2	-0.668	30.2	-0.519	35.2	-0.380	40.2	-0.248
0.3	-2.748	5.3	-1.616	10.3	-1.265	15.3	-1.024	20.3	-0.831	25.3	-0.665	30.3	-0.516	35.3	-0.377	40.3	-0.246
0.4	-2.652	5.4	-1.607	10.4	-1.259	15.4	-1.019	20.4	-0.827	25.4	-0.662	30.4	-0.513	35.4	-0.375	40.4	-0.243
0.5	-2.576	5.5	-1.598	10.5	-1.254	15.5	-1.015	20.5	-0.824	25.5	-0.659	30.5	-0.510	35.5	-0.372	40.5	-0.240
0.6	-2.512	5.6	-1.589	10.6	-1.248	15.6	-1.011	20.6	-0.820	25.6	-0.656	30.6	-0.507	35.6	-0.369	40.6	-0.238
0.7	-2.457	5.7	-1.580	10.7	-1.243	15.7	-1. 07	20.7	-0.817	25.7	-0.653	30.7	-0.504	35.7	-0.366	40.7	-0.235
0.8	-2.409	5.8	-1.572	10.8	-1.237	15.8	-1.003	20.8	-0.813	25.8	-0.650	30.8	-0.502	35.8	-0.364	40.8	-0.233
0.9	-2.366	5.9	-1.563	10.9	-1.232	15.9	-0.999	20.9	-0.810	25.9	-0.646	30.9	-0.499	35.9	-0.361	40.9	-0.230
1.0	-2.326	6.0	-1.555	11.0	-1.227	16.0	-0.994	21.0	-0.806	26.0	-0.643	31.0	-0.496	36.0	-0.358	41.0	-0.228
1.1	-2.290	6.1	-1.546	11.1	-1.221	16.1	-0.990	21.1	-0.803	26.1	-0.640	31.1	-0.493	36.1	-0.356	41.1	-0.225
1.2	-2.257	6.2	-1.538	11.2	-1.216	16.2	-0.986	21.2	-0.800	26.2	-0.637	31.2	-0.490	36.2	-0.353	41.2	-0.222
1.3	-2.226	6.3	-1.530	11.3	-1.211	16.3	-0.982	21.3	-0.796	26.3	-0.634	31.3	-0.487	36.3	-0.350	41.3	-0.220
1.4	-2.197	6.4	-1.522	11.4	-1.206	16.4	-0.978	21.4	-0.793	26.4	-0.631	31.4	-0.485	36.4	-0.348	41.4	-0.217
1.5	-2.170	6.5	-1.514	11.5	-1.200	16.5	-0.974	21.5	-0.789	26.5	-0.628	31.5	-0.482	36.5	-0.345	41.5	-0.215
1.6	-2.144	6.6	-1.506	11.6	-1.195	16.6	-0.970	21.6	-0.786	26.6	-0.625	31.6	-0.479	36.6	-0.342	41.6	-0.212
1.7	-2.120	6.7	-1.499	11.7	-1.190	16.7	-0.966	21.7	-0.782	26.7	-0.622	31.7	-0.476	36.7	-0.340	41.7	-0.210
1.8	-2.097	6.8	-1.491	11.8	-1.185	16.8	-0.962	21.8	-0.779	26.8	-0.619	31.8	-0.473	36.8	-0.337	41.8	-0.207
1.9	-2.075	6.9	-1.483	11.9	-1.180	16.9	-0.958	21.9	-0.776	26.9	-0.616	31.9	-0.470	36.9	-0.335	41.9	-0.204
2.0	-2.054	7.0	-1.476	12.0	-1.175	17.0	-0.954	22.0	-0.772	27.0	-0.613	32.0	-0.468	37.0	-0.332	42.0	-0.202
2.1	-2.034	7.1	-1.468	12.1	-1.170	17.1	-0.950	22.1	-0.769	27.1	-0.610	32.1	-0.465	37.1	-0.329	42.1	-0.199
2.2	-2.014	7.2	-1.461	12.2	-1.165	17.2	-0.946	22.2	-0.765	27.2	-0.607	32.2	-0.462	37.2	-0.327	42.2	-0.197
2.3	-1.995	7.3	-1.454	12.3	-1.160	17.3	-0.942	22.3	-0.762	27.3	-0.604	32.3	-0.459	37.3	-0.324	42.3	-0.194
2.4	-1.977	7.4	-1.447	12.4	-1.155	17.4	-0.938	22.4	-0.759	27.4	-0.601	32.4	-0.457	37.4	-0.321	42.4	-0.192
2.5	-1.960	7.5	-1.440	12.5	-1.150	17.5	-0.935	22.5	-0.755	27.5	-0.598	32.5	-0.454	37.5	-0.319	42.5	-0.189
2.6	-1.943	7.6	-1.433	12.6	-1.146	17.6	-0.931	22.6	-0.752	27.6	-0.595	32.6	-0.451	37.6	-0.316	42.6	-0.187
2.7	-1.927	7.7	-1.426	12.7	-1.141	17.7	-0.927	22.7	-0.749	27.7	-0.592	32.7	-0.448	37.7	-0.313	42.7	-0.184
2.8	-1.911	7.8	-1.419	12.8	-1.136	17.8	-0.923	22.8	-0.745	27.8	-0.589	32.8	-0.445	37.8	-0.311	42.8	-0.181
2.9	-1.896	7.9	-1.412	12.9	-1.131	17.9	-0.919	22.9	-0.742	27.9	-0.586	32.9	-0.443	37.9	-0.308	42.9	-0.179
3.0	-1.881	8.0	-1.405	13.0	-1.126	18.0	-0.915	23.0	-0.739	28.0	-0.583	33.0	-0.440	38.0	-0.305	43.0	-0.176
3.1	-1.866	8.1	-1.398	13.1	-1.122	18.1	-0.912	23.1	-0.736	28.1	-0.580	33.1	-0.437	38.1	-0.303	43.1	-0.174
3.2	-1.852	8.2	-1.392	13.2	-1.117	18.2	-0.908	23.2	-0.732	28.2	-0.577	33.2	-0.434	38.2	-0.300	43.2	-0.171
3.3	-1.838	8.3	-1.385	13.3	-1.112	18.3	-0.904	23.3	-0.729	28.3	-0.574	33.3	-0.432	38.3	-0.298	43.3	-0.169
3.4	-1.825	8.4	-1.379	13.4	-1.108	18.4	-0.900	23.4	-0.726	28.4	-0.571	33.4	-0.429	38.4	-0.295	43.4	-0.166
3.5	-1.812	8.5	-1.372	13.5	-1.103	18.5	-0.896	23.5	-0.722	28.5	-0.568	33.5	-0.426	38.5	-0.292	43.5	-0.164
3.6	-1.799	8.6	-1.366	13.6	-1.098	18.6	-0.893	23.6	-0.719	28.6	-0.565	33.6	-0.423	38.6	-0.290	43.6	-0.161
3.7	-1.787	8.7	-1.359	13.7	-1.094	18.7	-0.889	23.7	-0.716	28.7	-0.562	33.7	-0.421	38.7	-0.287	43.7	-0.159
3.8	-1.774	8.8	-1.353	13.8	-1.089	18.8	-0.885	23.8	-0.713	28.8	-0.559	33.8	-0.418	38.8	-0.285	43.8	-0.156
3.9	-1.762	8.9	-1.347	13.9	-1.085	18.9	-0.882	23.9	-0.710	28.9	-0.556	33.9	-0.415	38.9	-0.282	43.9	-0.154
4.0	-1.751	9.0	-1.341	14.0	-1.080	19.0	-0.878	24.0	-0.706	29.0	-0.553	34.0	-0.412	39.0	-0.279	44.0	-0.151
4.1	-1.739	9.1	-1.335	14.1	-1.076	19.1	-0.874	24.1	-0.703	29.1	-0.550	34.1	-0.410	39.1	-0.277	44.1	-0.148
4.2	-1.728	9.2	-1.329	14.2	-1.071	19.2	-0.871	24.2	-0.700	29.2	-0.548	34.2	-0.407	39.2	-0.274	44.2	-0.146
4.3	-1.717	9.3	-1.323	14.3	-1.067	19.3	-0.867	24.3	-0.697	29.3	-0.545	34.3	-0.404	39.3	-0.272	44.3	-0.143
4.4	-1.706	9.4	-1.317	14.4	-1.063	19.4	-0.863	24.4	-0.693	29.4	-0.542	34.4	-0.402	39.4	-0.269	44.4	-0.141
4.5	-1.695	9.5	-1.311	14.5	-1.058	19.5	-0.860	24.5	-0.690	29.5	-0.539	34.5	-0.399	39.5	-0.266	44.5	-0.138
4.6	-1.685	9.6	-1.305	14.6	-1.054	19.6	-0.856	24.6	-0.687	29.6	-0.536	34.6	-0.396	39.6	-0.264	44.6	-0.136
4.7	-1.675	9.7	-1.299	14.7	-1.049	19.7	-0.852	24.7	-0.684	29.7	-0.533	34.7	-0.393	39.7	-0.261	44.7	-0.133
4.8	-1.665	9.8	-1.293	14.8	-1.045	19.8	-0.849	24.8	-0.681	29.8	-0.530	34.8	-0.391	39.8	-0.259	44.8	-0.131
4.9	-1.655	9.9	-1.287	14.9	-1.041	19.9	-0.845	24.9	-0.678	29.9	-0.527	34.9	-0.388	39.9	-0.256	44.9	-0.128

%	$z(\Phi)$	%	$z(\Phi)$	%	$z(\Phi)$	%	$z(\Phi)$	%	$z(\Phi)$	%	$z(\Phi)$	%	$z(\Phi)$	%	$z(\Phi)$	%	$z(\Phi)$
45.0	-0.126	51.5	0.038	58.0	0.202	64.5	0.372	71.0	0.553	77.5	0.755	84.5	1.015	91.0	1.341	97.5	1.960
45.1	-0.123	51.6	0.040	58.1	0.104	64.6	0.375	71.1	0.556	77.6	0.759	84.6	1.019	91.1	1.347	97.6	1.977
45.2	-0.121	51.7	0.043	58.2	0.107	64.7	0.377	71.2	0.559	77.7	0.762	84.7	1.024	91.2	1.353	97.7	1.995
45.3	-0.118	51.8	0.045	58.3	0.110	64.8	0.380	71.3	0.562	77.8	0.765	84.8	1.028	91.3	1.359	97.8	2.014
45.4	-0.116	51.9	0.048	58.4	0.112	64.9	0.383	71.4	0.565	77.9	0.769	84.9	1.032	91.4	1.366	97.9	2.034
45.5	-0.113	52.0	0.050	58.5	0.115	65.0	0.385	71.5	0.568	78.0	0.772	85.0	1.036	91.5	1.372	98.0	2.054
45.6	-0.111	52.1	0.053	58.6	0.117	65.1	0.388	71.6	0.571	78.1	0.776	85.1	1.041	91.6	1.379	98.1	2.075
45.7	-0.108	52.2	0.055	58.7	0.120	65.2	0.391	71.7	0.574	78.2	0.779	85.2	1.045	91.7	1.385	98.2	2.097
45.8	-0.105	52.3	0.058	58.8	0.122	65.3	0.393	71.8	0.577	78.3	0.782	85.3	1.049	91.8	1.392	98.3	2.120
45.9	-0.103	52.4	0.060	58.9	0.125	65.4	0.396	71.9	0.580	78.4	0.786	85.4	1.054	91.9	1.398	98.4	2.144
46.0	-0.100	52.5	0.063	59.0	0.128	65.5	0.399	72.0	0.583	78.5	0.789	85.5	1.058	92.0	1.405	98.5	2.170
46.1	-0.098	52.6	0.065	59.1	0.130	65.6	0.402	72.1	0.586	78.6	0.793	85.6	1.063	92.1	1.412	98.6	2.197
46.2	-0.100	52.7	0.068	59.2	0.133	65.7	0.404	72.2	0.589	78.7	0.796	85.7	1.067	92.2	1.419	98.7	2.226
46.3	-0.095	52.8	0.070	59.3	0.135	65.8	0.407	72.3	0.592	78.8	0.800	85.8	1.071	92.3	1.426	98.8	2.257
46.4	-0.093	52.9	0.073	59.4	0.138	65.9	0.410	72.4	0.595	78.9	0.803	85.9	1.076	92.4	1.433	98.9	2.290
46.5	-0.090	53.0	0.075	59.5	0.140	66.0	0.412	72.5	0.598	79.0	0.806	86.0	1.080	92.5	1.440	99.0	2.326
46.6	-0.088	53.1	0.078	59.6	0.143	66.1	0.415	72.6	0.601	79.1	0.810	86.1	1.085	92.6	1.447	99.1	2.366
46.7	-0.085	53.2	0.080	59.7	0.146	66.2	0.418	72.7	0.604	79.2	0.813	86.2	1.089	92.7	1.454	99.2	2.409
46.8	-0.083	53.3	0.083	59.8	0.148	66.3	0.421	72.8	0.607	79.3	0.817	86.3	1.094	92.8	1.461	99.3	2.457
46.9	-0.078	53.4	0.085	59.9	0.151	66.4	0.423	72.9	0.610	79.4	0.820	86.4	1.098	92.9	1.468	99.4	2.512
47.0	-0.075	53.5	0.088	60.0	0.253	66.5	0.426	73.0	0.613	79.5	0.824	86.5	1.103	93.0	1.476	99.5	2.576
47.1	-0.073	53.6	0.090	60.1	0.256	66.6	0.429	73.1	0.616	79.6	0.827	86.6	1.108	93.1	1.483	99.6	2.652
47.2	-0.070	53.7	0.093	60.2	0.259	66.7	0.432	73.2	0.619	79.7	0.831	86.7	1.112	93.2	1.491	99.7	2.748
47.3	-0.068	53.8	0.095	60.3	0.261	66.8	0.434	73.3	0.622	79.8	0.834	86.8	1.117	93.3	1.499	99.8	2.878
47.4	-0.065	53.9	0.098	60.4	0.264	66.9	0.437	73.4	0.625	79.9	0.838	86.9	1.122	93.4	1.506	99.9	3.090
47.5	-0.063	54.0	0.100	60.5	0.266	67.0	0.440	73.5	0.628	80.0	0.842	87.0	1.126	93.5	1.514		
47.6	-0.060	54.1	0.103	60.6	0.269	67.1	0.443	73.6	0.631	80.1	0.845	87.1	1.131	93.6	1.522		
47.7	-0.058	54.2	0.105	60.7	0.272	67.2	0.445	73.7	0.634	80.2	0.849	87.2	1.136	93.7	1.530		
47.8	-0.055	54.3	0.108	60.8	0.274	67.3	0.448	73.8	0.637	80.3	0.852	87.3	1.141	93.8	1.538		
47.9	-0.053	54.4	0.111	60.9	0.277	67.4	0.451	73.9	0.640	80.4	0.856	87.4	1.146	93.9	1.546		
48.0	-0.050	54.5	0.113	61.0	0.279	67.5	0.454	74.0	0.643	80.5	0.860	87.5	1.150	94.0	1.555		
48.1	-0.048	54.6	0.116	61.1	0.282	67.6	0.457	74.1	0.646	80.6	0.863	87.6	1.155	94.1	1.563		
48.2	-0.045	54.7	0.118	61.2	0.285	67.7	0.459	74.2	0.650	80.7	0.867	87.7	1.160	94.2	1.572		
48.3	-0.043	54.8	0.121	61.3	0.287	67.8	0.462	74.3	0.653	80.8	0.871	87.8	1.165	94.3	1.580		
48.4	-0.041	54.9	0.123	61.4	0.290	67.9	0.465	74.4	0.656	80.9	0.874	87.9	1.170	94.4	1.589		
48.5	-0.038	55.0	0.126	61.5	0.292	68.0	0.468	74.5	0.659	81.0	0.878	88.0	1.175	94.5	1.598		
48.6	-0.035	55.1	0.128	61.6	0.295	68.1	0.470	74.6	0.662	81.1	0.882	88.1	1.180	94.6	1.607		
48.7	-0.033	55.2	0.131	61.7	0.298	68.2	0.473	74.7	0.665	81.2	0.885	88.2	1.185	94.7	1.616		
48.8	-0.030	55.3	0.133	61.8	0.300	68.3	0.476	74.8	0.668	81.3	0.889	88.3	1.190	94.8	1.626		
48.9	-0.028	55.4	0.136	61.9	0.303	68.4	0.479	74.9	0.671	81.4	0.893	88.4	1.195	94.9	1.635		
49.0	-0.025	55.5	0.138	62.0	0.305	68.5	0.482	75.0	0.674	81.5	0.896	88.5	1.200	95.0	1.645		
49.1	-0.023	55.6	0.141	62.1	0.308	68.6	0.485	75.1	0.678	81.6	0.900	88.6	1.206	95.1	1.655		
49.2	-0.020	55.7	0.143	62.2	0.311	68.7	0.487	75.2	0.681	81.7	0.904	88.7	1.211	95.2	1.665		
49.3	-0.018	55.8	0.146	62.3	0.313	68.8	0.490	75.3	0.684	81.8	0.908	88.8	1.216	95.3	1.675		
49.4	-0.015	55.9	0.148	62.4	0.316	68.9	0.493	75.4	0.687	81.9	0.912	88.9	1.221	95.4	1.685		
49.5	-0.013	56.0	0.151	62.5	0.319	69.0	0.496	75.5	0.690	82.0	0.915	89.0	1.227	95.5	1.695		
49.6	-0.010	56.1	0.154	62.6	0.321	69.1	0.499	75.6	0.693	82.1	0.919	89.1	1.232	95.6	1.706		
49.7	-0.008	56.2	0.156	62.7	0.324	69.2	0.502	75.7	0.697	82.2	0.923	89.2	1.237	95.7	1.717		
49.8	-0.005	56.3	0.159	62.8	0.327	69.3	0.504	75.8	0.700	82.3	0.927	89.3	1.243	95.8	1.728		
49.9	-0.003	56.4	0.161	62.9	0.329	69.4	0.507	75.9	0.703	82.4	0.931	89.4	1.248	95.9	1.739		
50.0	0.000	56.5	0.164	63.0	0.332	69.5	0.510	76.0	0.706	82.5	0.935	89.5	1.254	96.0	1.751		
50.1	0.003	56.6	0.166	63.1	0.335	69.6	0.513	76.1	0.710	82.6	0.938	89.6	1.259	96.1	1.762		
50.2	0.005	56.7	0.169	63.2	0.337	69.7	0.516	76.2	0.713	82.7	0.942	89.7	1.265	96.2	1.774		
50.3	0.008	56.8	0.171	63.3	0.340	69.8	0.519	76.3	0.716	82.8	0.946	89.8	1.270	96.3	1.787		
50.4	0.010	56.9	0.174	63.4	0.342	69.9	0.522	76.4	0.719	82.9	0.950	89.9	1.276	96.4	1.799		
50.5	0.013	57.0	0.176	63.5	0.345	70.0	0.524	76.5	0.722	83.0	0.954	90.0	1.282	96.5	1.812		
50.6	0.016	57.1	0.179	63.6	0.348	70.1	0.527	76.6	0.726	83.1	0.958	90.1	1.287	96.6	1.825		
50.7	0.018	57.2	0.181	63.7	0.350	70.2	0.530	76.7	0.729	83.2	0.962	90.2	1.293	96.7	1.838		
50.8	0.020	57.3	0.184	63.8	0.353	70.3	0.533	76.8	0.732	83.3	0.966	90.3	1.299	96.8	1.852		
50.9	0.023	57.4	0.187	63.9	0.356	70.4	0.536	76.9	0.736	83.4	0.970	90.4	1.305	96.9	1.866		
51.0	0.025	57.5	0.189	64.0	0.358	70.5	0.539	77.0	0.739	83.5	0.974	90.5	1.311	97.0	1.881		
51.1	0.028	57.6	0.192	64.1	0.361	70.6	0.542	77.1	0.742	83.6	0.978	90.6	1.317	97.1	1.896		
51.2	0.030	57.7	0.194	64.2	0.364	70.7	0.545	77.2	0.745	83.7	0.982	90.7	1.323	97.2	1.911		
51.3	0.033	57.8	0.197	64.3	0.366	70.8	0.548	77.3	0.749	83.8	0.986	90.8	1.329	97.3	1.927		
51.4	0.035	57.9	0.199	64.4	0.369	70.9	0.550	77.4	0.752	83.9	0.990	90.9	1.335	97.4	1.943		

A.4 NÚMEROS ALEATORIOS

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	700561	429895	217104	218677	567334	003001	692333	623286	511897	560710	947700	581272	892269	194856	899909
2	953253	116896	256672	987367	391141	613091	385515	359883	628354	281127	164162	453877	738176	840473	505576
3	146597	948656	969995	536114	482259	483693	568088	406930	677122	232632	895770	571568	587830	293007	837035
4	393757	305931	764895	254489	740470	367769	078251	716074	777945	412522	590942	860850	620390	068922	100612
5	556681	380806	114612	822628	327827	800591	821450	672152	418506	366484	458203	223602	207323	330671	735324
6	242094	820952	790724	917318	836032	887349	869979	278548	834419	042696	532080	775858	919687	464217	296160
7	193683	373992	195850	662549	805229	367985	196077	884256	494809	734921	879705	800133	327204	685752	989692
8	105184	232459	197360	490865	982324	617182	556061	295526	573497	530911	292036	302428	365701	768207	773472
9	005704	237486	567025	968434	487453	490858	935283	630944	720707	283474	213827	211969	965455	953211	699539
10	201752	621609	042032	011775	393467	453945	409456	483555	210939	848324	601616	687443	591060	021307	471107
11	860494	126846	968123	153022	958557	199688	352858	635665	082087	393962	318630	484067	237323	967020	323363
12	043875	109348	125766	362950	963770	402256	777289	967660	609690	977026	589341	137330	931666	107371	703442
13	749039	528352	157877	721796	715594	068795	856108	053395	609945	481209	165865	178868	881382	270790	643012
14	972200	193797	497306	255735	233347	913606	738815	117994	034329	363395	113632	194864	978820	203025	127196
15	790908	725136	776919	333383	412548	852572	321049	235985	822736	307234	561131	088278	199382	350930	697968
16	367864	006219	290149	764793	962166	646007	651655	117675	898984	138622	618686	326681	546780	139209	391424
17	252290	959955	932209	443727	386994	888318	384009	569523	501074	261959	912667	520087	994215	404934	075205
18	063037	298261	439613	655863	801290	681684	036047	233491	329489	131810	721363	721944	424282	087097	593660
19	450227	896972	378760	015355	554738	296902	093823	648124	443282	688333	331497	846850	128725	424200	280487
20	020000	639060	420223	228070	879721	956146	529351	968049	430192	133112	509865	602944	730328	763600	532697
21	090193	002341	211617	507997	829614	852850	051541	402467	841991	409857	421821	916788	990886	710562	645869
22	251447	677722	125940	071189	297680	730161	125052	347591	902626	902032	072782	011802	121947	861980	717136
23	360327	989667	736858	902819	210335	912945	250814	456135	918955	268658	706061	437588	763668	195399	228716
24	797700	428077	360590	569032	433008	787220	508237	607056	114165	426201	932514	431805	974179	623711	678887
25	679414	742560	901020	132025	570222	365321	031644	996412	980456	276003	842732	690139	072026	588191	838961
26	829049	308372	739279	679220	656802	665534	428163	202214	155292	338099	682708	086680	501406	526442	407662
27	838008	296018	404800	753194	863795	548462	658295	332611	793188	119242	294443	943580	116497	335882	917755
28	333383	371074	532939	209425	484026	830697	493859	409291	863097	695280	565883	751583	513477	078256	772890
29	975925	771280	960223	564599	767321	078531	467164	229456	700404	887108	499367	499947	193148	126250	113423
30	146530	291494	983568	833403	142488	591997	216888	274084	996248	365018	060457	966026	554962	494418	895941
31	064484	512854	954334	734333	253063	545049	138762	000771	783684	779294	662083	535612	458834	422390	511618
32	101794	938685	045272	837017	818366	392863	527996	665406	169465	531363	731337	672954	299647	047967	297132
33	563515	494939	014195	628033	345188	302902	012345	460672	472543	058729	990361	546771	054402	495584	345655
34	127191	361074	327989	395317	891145	148704	639813	817497	850915	053116	871100	287673	452147	752893	377916
35	623327	914418	711116	084170	732938	397434	415132	224352	577074	662749	069661	358696	967847	437366	591683
36	848523	559717	196571	742642	132864	069626	015991	267319	553334	510164	533140	182048	105015	573220	809120
37	707603	590165	224084	941023	586685	051759	540696	389954	958684	455866	271806	627559	474929	496693	235588
38	002882	521312	017676	807632	921649	728107	954679	118075	835179	504841	255977	161729	553639	507513	497379
39	972329	461344	074868	499772	975743	988165	985911	851249	336532	299715	715218	369329	393897	679243	065742
40	476600	904941	642132	594953	864838	793250	720262	910517	401133	747257	031543	997706	684459	284700	250101
41	249698	504955	380935	377752	459782	735663	158454	395734	720856	746254	173825	350662	064640	040768	598908
42	114692	602072	161895	185625	088672	064924	837977	990466	581949	539139	101327	351090	272313	598218	312989
43	236406	957872	473846	859209	076861	068589	833351	559430	383174	365590	673838	974440	192078	617353	241475
44	507483	202044	495026	864652	742448	794322	252004	142715	824430	939186	959208	602138	817373	633356	400899
45	965648	847388	412525	626529	445281	318995	062214	220554	274059	750344	349528	926117	607809	509996	883767
46	354173	544452	274929	290963	692740	618686	335924	323726	530364	922681	870912	441085	112825	275353	458242
47	761193	895761	486614	251322	609146	640713	660289	913736	022324	460967	373343	817763	465691	771386	997849
48	445419	678327	064966	248172	091037	287304	825832	708678	139179	089548	670160	861658	558921	382802	712006
49	518025	735547	020738	886721	826410	392895	835956	139415	414353	580760	862800	775012	608644	713373	256060
50	701013	867803	907550	264686	980945	081653	134247	653229	574019	656850	139864	824223	913761	266883	276484



BIBLIOGRAFÍA

Christensen, H. (1997). ***Estadística paso a paso.*** México: **Trillas.**

Chao, L. (1987). *Introducción a la Estadística.* **México: CECSA.**

Triola, M., (2018). *Estadística Doceava Edición.* **México: Pearson.**

Mendenhall, W. (2014). *Introducción a la probabilidad y a la estadística.* México: **Cengage Learning.**

Mendenhall, W. (2010). *Estadística matemática con aplicaciones Décima Edición.* **México: Cengage Learning**

Johnson, R. (2008). *Estadística Elemental Décima Edición*. **México: Cengage Learning.**

Walpole, R. (2012). *Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Novena Edición.* **México: Pearson Educación.**