CCH ORIENTE

GUÍA PARA EL EXAMEN EXTRAORDINARIO DE MATEMÁTICAS III

PANTALEÓN GÓMEZ CARRANZA
FERMAN ARELLANO CABEZAS
ALDO NICOLÁS ARENAS GARCÍA
FERNANDO TOVAR CHÁVEZ
MAURICIO ENRIQUE RODRÍGUEZ PÉREZ
JOSÉ LUIS HERNÁNDEZ HERNÁNDEZ

COORDINACIÓN
Pantaleón Gómez Carranza

CICLO 2023 - 2024

Es el documento impreso o en línea elaborado para apoyar la preparación de un examen extraordinario, con base en el Programa de Estudio de la asignatura. Será elaborado colegiadamente y deberá incluir: a) introducción; b) instrucciones; c) presentación de cada unidad, indicando los conceptos clave; d) sugerencias de actividades de aprendizaje teórico-prácticas; e) autoevaluación del aprendizaje con base en problemas y preguntas representativas de los aprendizajes y f) fuentes consultadas que deberán presentarse en formato APA. Debe estar aprobada por una instancia de Dirección correspondiente y ser utilizada, por lo menos, en un periodo de exámenes.

Introducción

El presente documento tiene el propósito de guiar al estudiante (en particular a los estudiantes del plantel Oriente) en la preparación del examen extraordinario de la asignatura de Matemáticas III, que se imparte en el Colegio de Ciencias y Humanidades. La hemos elaborado un grupo de profesores del Área de Matemáticas del plantel Oriente del CCH que compartimos el interés de apoyar a los alumnos que por una u otra razón adeuda la asignatura anteriormente señalada. Su contenido se basa (y cubre) los aprendizajes y temática contenidos en el programa indicativo y vigente de la asignatura ya antes señalada, también presenta las características que definen a una Guía para Examen Extraordinario en el Glosario de Términos del Protocolo de equivalencias del Colegio.

Cada unidad se subdivide en tres secciones, la primera sección inicia presentando los conceptos claves de toda la unidad, parte de los aprendizajes y temática, así como el desarrollo disciplinario y didáctico, de estos dos últimos aspectos. Utilizamos explicaciones teóricas formales, figuras y una gran cantidad y diversidad de ejemplos prácticos totalmente resueltos que permite al alumno apropiarse de los conceptos y un uso correcto de los algoritmos y conocimientos correspondientes. En su desarrollo disciplinario también proponemos un grupo de ejercicio con la finalidad de que el alumno practique lo aprendido. La estructura de las “segundas secciones solamente difiere de la estructura de las “primeras secciones” en que no incluir los conceptos clave. En las “terceras secciones” el alumno encontrará las soluciones de todos los ejercicios propuestos en las secciones 1 y 2; también observará un el examen (con las soluciones) de auto evaluación con el fin de que él mida los conocimientos y las habilidades que adquirió. En la parte final de la obra presentamos las referencias, en que el estudiante puede consultar los temas en los que desee profundizar; asimismo, a los docentes les servirá para enriquecer o incrementar la complejidad de los ejercicios y contenidos abarcados en esta guía.

LOS AUTORES

La Guía para el Examen Extraordinario de Matemáticas III ha sido escrita para que la utilices como apoyo y/o complemento en tu preparación para presentar el examen extraordinario de la asignatura del mismo nombre; para que repases, y/o conozcas los conceptos básicos y practiques a fondo los algoritmos de mayor representatividad en el estudio de la geometría analítica a nivel bachillerato. Debes leer la sección (o la parte de tu interés) antes de intentar resolver los problemas y/o actividades que te proponemos. Ten en cuenta que leer sobre matemáticas dista bastante de leer otro tipo de documentos, tales como una novela, un periódico o hasta libros de otras ramas del conocimiento. Regularmente las partes de textos de matemáticas (de interés para el lector), se leen y se releen varias veces para poder comprenderlas. Debes poner especial atención a los ejemplos resueltos y reconstruir su resolución; utiliza lápiz y papel a medida que los leas y, a continuación, intenta resolver los ejercicios propuesto en la sección. Siguiendo estos consejos seguramente podrás hacer tu tarea optimizando el tiempo e incrementando la comprensión de conceptos y habilidad en el uso de los algoritmos.

En un primer acercamiento a una unidad memoriza las definiciones y trata de comprender los conceptos, sin embargo, no debes cometer el error de tratar como reglas los ejercicios resueltos que observes. Las matemáticas no son simples memorizaciones, sino que son el *arte de modelar y posteriormente resolver problemas,* ¡no se trata de memorizar problemas resueltos! Para comprender significativamente una unidad o un tema, debes modelar y resolver problemas, muchos problemas; haz todos los que puedas, intenta escribir sus soluciones en una forma lógica y detalladamente, paso a paso. Por lo general, para resolver un problema en matemáticas se realizan varios intentos, no te rindas ante ellos, si no puedes resolverlo en los primeros intentos. Los primeros intentos en la resolución de problemas se relacionan con su comprensión y para ello se tienen que leer varias veces y relacionar con lo que ya aprendiste en tus cursos previos de matemáticas y de los ejemplos resueltos de la guía Lucha con cada problemas hasta que lo resuelvas; una vez que hayas hecho esto unas cuantas veces, comprenderás el papel de las matemáticas en los procesos mentales del aprendizaje.

Las respuestas de todos los ejercicios y a todas las preguntas de los exámenes propuestos de todas las secciones y todas las unidades se encuentran en las secciones de fracción .3. En caso de que tu respuesta a cierto ejercicio difiera de la que te proponemos, no concluyas de inmediato que estás en error, tu respuesta y la propuesta pueden ser equivalentes y estar enlazadas por medio de ciertas consideraciones y ambas ser correctas.

INDICE

1

ELEMENTOS DE TRIGONOMETRÍA

PROPÓSITOS

Al finalizar la unidad, el alumno:
Utilizará las razones e iden. tidades trigonométricas, así como las leyes de senos y cosenos mediante la resolución de problemas en distintos contextos que involucren triángulos con la finalidad de construir conocimientos que serán empleados en asignaturas posteriores.

CONCEPTOS CLAVE

Ángulo. Figura plana formada por dos segmentos de recta con el punto inicial común.

Triángulo. Figura geométrica formada por tres segmentos de recta determinados por tres puntos no colineales.

Triángulo rectángulo. Triángulo con un ángulo interior recto.

Cateto opuesto. En un triángulo rectángulo y seleccionado uno de sus ángulos agudos, el lado que no forma partes de este ángulo.

Cateto adyacente. En un triángulo rectángulo y seleccionado uno de sus ángulos agudos, el lado de menor longitud que forma partes de este ángulo.

Hipotenusa. En un triángulo rectángulo, el lado de mayor longitud.

Razón. Comparación de dos cantidades por medio de una división.

Triángulo oblicuo

Triángulo resuelto. Es el triángulo del que se conocen las amplitudes de sus tres ángulos interiores y las longitudes de sus tres lados.

Ángulo de elevación. El ángulo medido hacia arriba desde el rayo horizontal

Ángulo de depresión. El ángulo medido hacia abajo desde el rayo horizontal.

Ley. Propiedad o norma que describe el comportamiento de la combinación de elementos en una estructura matemática.

Identidad. Igualdad algebraica que se verifica para cualquier valor que se asigne a la(s) variable(s).

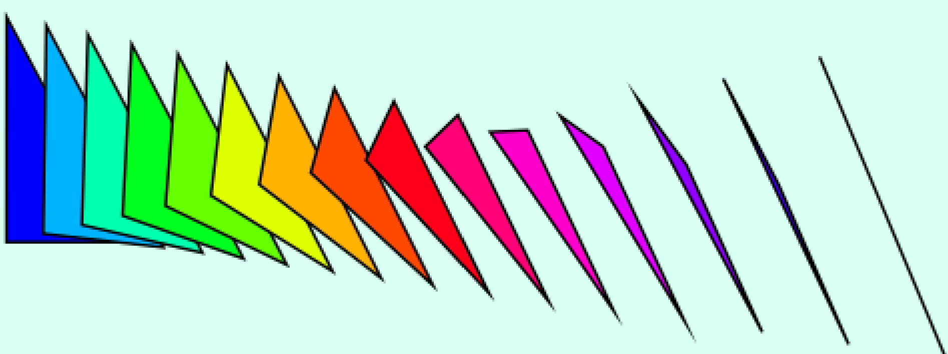
Teorema de Pitágoras. Propiedad que establece la relación entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo.

1.1 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS Y RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

APRENDIZAJES

EL ALUMNO:

1. Comprende que el concepto de razón trigonométrica se deriva de la relación de los lados de un triángulo rectángulo y que son correspondientemente invariantes en triángulos semejantes.
2. Determina los valores de las razones trigonométricas para los ángulos de 30°, 45° y 60° y emplea la calculadora para verificarlos.
3. Resuelve problemas que involucren triángulos rectángulos.
4. Comprende la deducción de algunas identidades trigonométricas.



Las razones trigonométricas se definen con base a un triángulo rectángulo de la siguiente forma; del triángulo rectángulo se selecciona como referencia uno de sus ángulos agudos y se identifica como "cateto opuesto" al lado que no forma parte del ángulo seleccionado, la hipotenusa es el lado de mayor longitud del triángulo, y el otro lado será el cateto adyacente.

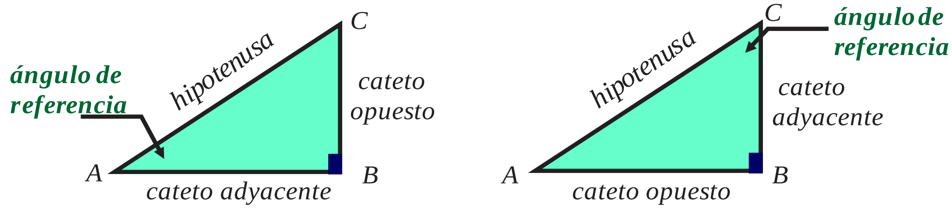


FIGURA 1.

Utilizaremos la siguiente convención para referirnos a los elementos de un triángulo rectángulo:

i. Con letras mayúsculas representaremos los ángulos interiores.

ii. Con letras minúsculas representaremos a los lados o a las longitudes de los lados (también a los lados).

iii. Dado un ángulo (representado con cierta letra mayúscula), la longitud del lado que se le opone la representaremos con la misma letra pero minúscula.

iv. Una vez seleccionado un ángulo de referencia, nos referiremos con:
CO al cateto opuesto, CA al cateto adyacente y con H a la hipotenusa.

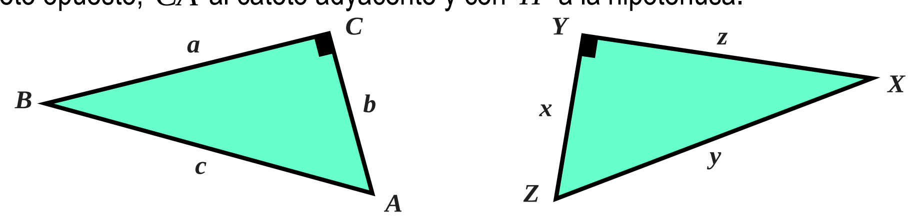


FIGURA 2.

Una razón es la comparación de dos cantidades por medio de una división definimos:

DEFINICIÓN 1. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Si A es la amplitud de un ángulo agudo (no recto) de un triángulo rectángulo:

$$seno\ A = \frac{longitud\ del\ cateto\ opuesto}{longitud\ de\ la\ hipotenusa}$$

$$coseno\ A = \frac{longitud\ del\ cateto\ adyacente}{longitud\ de\ la\ hipotenusa}$$

$$tangente\ A = \frac{longitud\ del\ cateto\ opuesto}{longitud\ del\ cateto\ adyacente}$$

$$cotangente\ A = \frac{longitud\ del\ cateto\ adyacente}{longitud\ del\ cateto\ opuesto}$$

$$secante\ A = \frac{longitud\ de\ la\ hipotenusa}{longitud\ del\ cateto\ adyacente}$$

$$cosecante\ A = \frac{longitud\ de\ la\ hipotenusa}{longitud\ del\ cateto\ opuesto}.$$

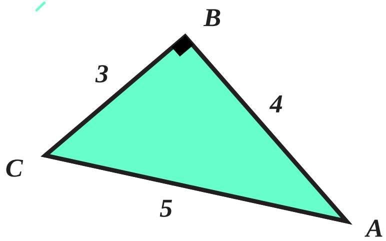
Simplificar la notación para referirnos a las razones trigonométricas de la definición 1, utilizaremos:

$$sen\,A=\frac{co}{h}\ ,\quad cos\,A=\frac{ca}{h}\ ,\quad tg\,A=\frac{co}{ca}\ ,\quad ctg\,A=\frac{ca}{co}\ ,\quad sec\,A=\frac{h}{ca}\ \text{ y }\ csc\,A=\frac{h}{co}\ ,$$

respectivamente.

EJEMPLO 1. CÁLCULO DE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

a. En la figura los valores de las razones trigonométricas son:

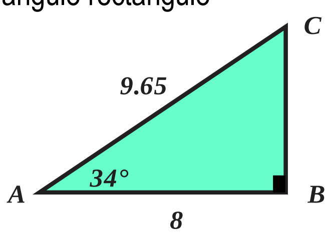


$$sen\,A=\frac{3}{5}=0.6 \qquad ctg\,A=\frac{4}{3}=1.\bar{3}$$

$$cos\,A=\frac{4}{5}=0.8 \qquad sec\,A=\frac{5}{4}=1.25$$

$$tg\,A=\frac{3}{4}=0.75 \qquad csc\,A=\frac{5}{3}=1.\bar{6}$$

b. Para el triángulo rectángulo



$$cos\,34°=\frac{8}{9.65} \qquad csc\,56°=\frac{9.65}{8}$$

$$sen\,56°=\frac{8}{9.65} \qquad sec\,34°=\frac{9.65}{8}$$

Con el valor de una razón trigonométrica se puede determinar la amplitud del ángulo que la definen, esto se consigue aplicando la razón trigonométrica inversa.

DEFINICIÓN 2. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Sea un triángulo rectángulo tal que r es la razón entre los dos lados que constituyen al ángulo agudo A con medida (o amplitud) $m\angle A$.

a. Si $sen\,A=r$, entonces $m\angle A=ang\ sen\,r$.

b. Si $cos\,A=r$, entonces $m\angle A=ang\ cos\,r$.

c. Si $tg\,A=r$, entonces $m\angle A=ang\ tg\,r$.

Las restantes razones trigonométricas también tiene asociada una razón trigonométrica inversa, sin embargo, por su escasa utilidad no las incluimos en la definición anterior. El cálculo de las razones trigonométricas inversa, por lo general, se realiza con una calculadora científica o una APP (pueden ser, Geogebra, Symbolab Calculator, o alguna otra). En el caso de una calculadora científica el proceso se realiza digitando una de las tres opciones; cabe señalar que digitar la palabra exe es equivalente a digitar $=$.

shift relación ángulo exe ***inv relación ángulo exe*** ***2nd relación ángulo exe***

EJEMPLO 2. CÁLCULO DE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

a. Sabemos que $cos\, 0^{\circ} = 1$, entonces, $ang\, cos\, 1 = 90°$

b. Si $sen\, 30^{\circ} = \frac{1}{2}$, entonces, $ang\, sen\, \frac{1}{2} = 30°$

c. Si $cos\, 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, entonces, $ang\, cos\, \frac{\sqrt{3}}{2} = 30°$

d. Si $tg\, 45° = 1$, entonces, $ang\, tg\, 1 = 45°$

e. Si $sen\, 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, entonces, $ang\, sen\, \frac{\sqrt{3}}{2} = 60°$

f. Si $cos\, A° = 0.28$, entonces, $m\angle A = ang\, cos\, 0.28$

g. Si $tg\, C° = 2$, entonces, $m\angle C = ang\, tg\, 2$

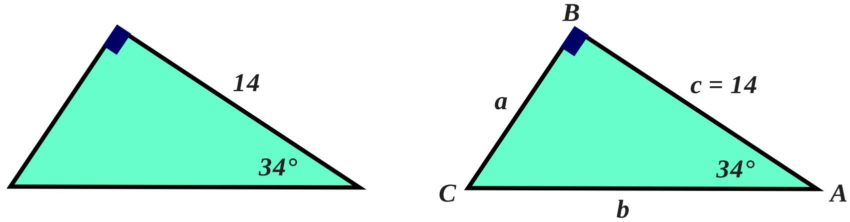
h. Si $sen\, A° = 0.4332$, entonces, $m\angle A = angsen\, 0.4332$

Los triángulos incluyen tres lados y tres ángulos interiores, entenderemos que el triángulo está resuelto cuando son conocidas las medidas de sus lados y las amplitudes de sus ángulos interiores; por otra parte, en el proceso de resolución de un triángulo rectángulo debemos tener en cuenta:

i. La suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es $180°$, o bien, la suma de las amplitudes de los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo es $90°$.
ii. El teorema de Pitágoras.
iii. Nombrar a sus elementos.
iv. Vincular dos elementos conocidos con uno desconocido utilizando una razón trigonométrica.

EJEMPLO 3. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

a. Resolución del triángulo rectángulo.



i. $34° + m\angle C = 90°$, de donde, $m\angle C = 56°$
ii. La relación $coseno$ vincula los elementos $m\angle A = 34°$ y $c = 14$ con b, entonces,

$$\cos 34° = \frac{14}{b}\text{, o bien, } b = \frac{14}{\cos 34°} = \frac{14}{0.8290} = 16.8870$$

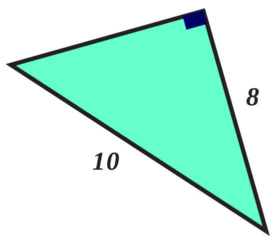
iii. La relación *seno* vincula los elementos $m\angle A = 34°$ y $b = 16.8870$ con a, entonces,

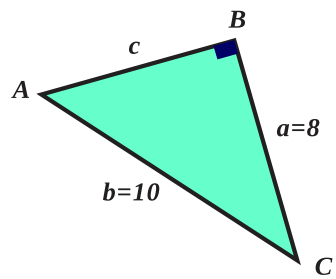
$$sen\, 34° = \frac{a}{16.8870}\text{, o bien, } a = (16.8870)sen 34° = 9.4431$$

iv. Resumen:

$m\angle A = 34°$, $m\angle B = 90°$, $m\angle C = 56°$, $a = 9.4431$, $b = 16.8871$ y $c = 14$

b. Resolución del triángulo rectángulo de la *figura.*





i. La relación *coseno* vincula los elementos conocidos (lados) $b = 10$ y $c = 8$ con el elemento (ángulo) desconocido $m\angle A$, entonces,

$$\cos A = \frac{8}{10} = 0.8\text{, entonces, } m\angle A = ang\cos 0.8 = 36.8699°$$

ii. $36.8699° + m\angle C = 90°$, de donde $m\angle C = 53.1301°$

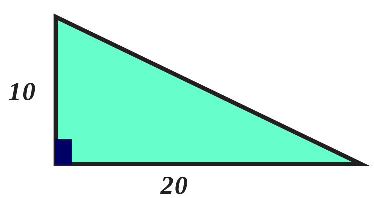
iii. La relación *seno* vincula los elementos conocidos $m\angle A = 36.8699°$ y $b = 10$ con a, entonces,

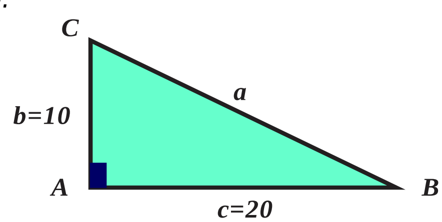
$$sen\ 36.8699° = \frac{a}{10}\text{, o bien, } a = (10)sen 36.8699° = 6$$

iv. Resumen:

$m\angle A = 36.8699°$, $m\angle B = 90°$, $m\angle C = 53.1301°$, $a = 6$, $b = 10$ y $c = 8$

c. Resolución del triángulo rectángulo de la *figura.*





i. La relación *tangente* vincula los elementos conocidos $b = 10$ y $c = 20$ con el elemento desconocido $m\angle C$, entonces, $tg\, C = \frac{20}{10} = 2$, luego, $m\angle C = ang\, tg\,(2) = 63.4349°$

ii. La amplitud del ángulo

$$\angle B \text{ es } m\angle B = 90° - 63.4349° = 26.5651°$$

iii. Por el teorema de Pitágoras:

$$a = \sqrt{10^2 + 20^2} = 22.3607$$

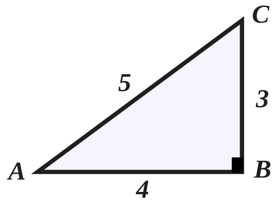
iv. Resumen:

$m\angle A = 90°$, $m\angle B = 26.5651°$, $m\angle C = 63.4349°$, $a = 22.3607$, $b = 10$ y $c = 20$

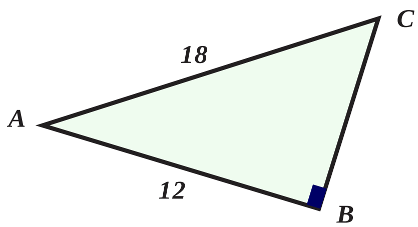
SECCIÓN 1.1
EJERCICIOS 1

1.

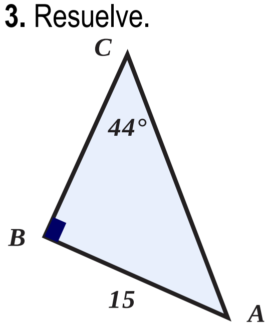
a. Calcula todas las razones trigonométricas del ángulo A.



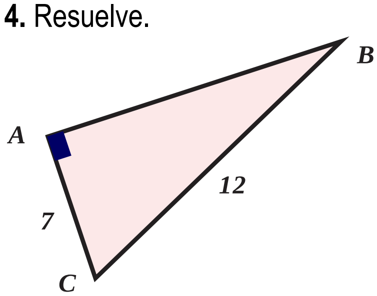
2. Resuelve.



3. Resuelve.

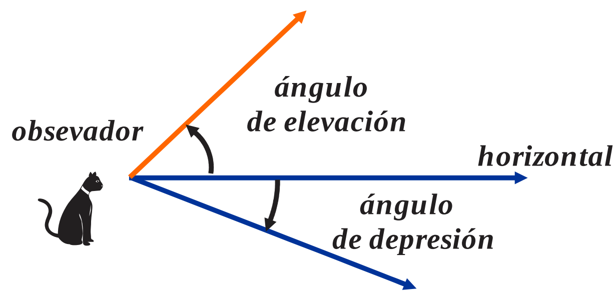


4. Resuelve.



La construcción de modelos que apoyan la resolución de problemas relacionados con las razones trigonométricas, usar "ángulos de elevación" y de los "ángulos de depresión" evita el uso de ángulos negativos

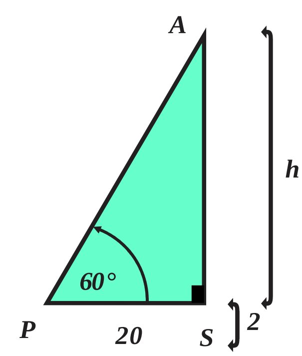
Si un ángulo se mide por debajo de la horizontal del punto de observación se llama ángulo de depresión, en caso de que se mida hacia arriba de la horizontal se conoce como ángulo de elevación.



EJEMPLO 4. SITUACIONES QUE INVOLUCRAN TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

a. ALTURA A LA QUE VUELA UN ÁGUILA

Una persona (P) determina que el ángulo de elevación al lugar donde se encuentra un águila (A) es $60°$, la observación la efectúa a 2 metros del piso y la sombra (S) del águila se proyecta verticalmente sobre el suelo a una distancia de 20 metros del observador, ¿a qué altura se encuentra el águila?



i. Trazamos una figura que muestre esta situación.
ii. Sea h la longitud de la altura.
iii. La razón trigonométrica que relaciona el ángulo de elevación, la altura del águila y la distancia entre la sombra del águila y el observador es la tangente, por tanto,

$$tg\,60° = \frac{h}{20},$$

entonces,

$$h = (\ 20\ )tg\,60° = 34.6410 \text{ metros.}$$

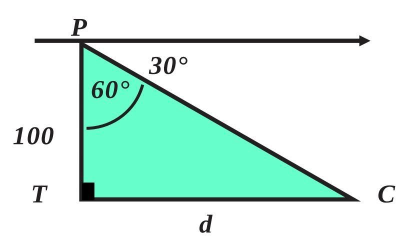
iv. Falta agregar la altura a la que se hizo la observación, entonces,

$$h = 2 + (\ 20\ )tg\,60° = 36.6410$$

metros.

b. DISTANCIA A UN CAMIÓN

Una persona (P) se encuentra sobre una torre, a una altura de 100 metros, observa un camión (C) con un ángulo de depresión de $30°$. ¿A qué distancia se encuentra el camión del pie de la torre?



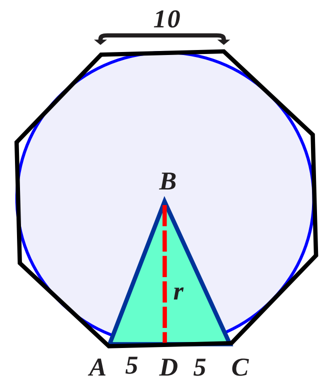
i. La *figura* ilustra la situación.
ii. Sea d la distancia entre el camión y el pie de la torre.

iii. La razón trigonométrica que vincula el ángulo de depresión, la distancia entre el camión y el pie de la torre, y su altura es la tangente, entonces,

$$tg\,60° = \frac{d}{100}, \text{ y } d = 100\,tg\,60° = 173.2051 \text{ metros.}$$

c. RADIO INTERIOR

Calcula la longitud del radio interior (de la base) de una caja con forma de "prisma octagonal regular", si la longitud de lado del octágono (de las bases) mide 10 unidades.



i. La figura muestra la base octogonal superior de la caja.

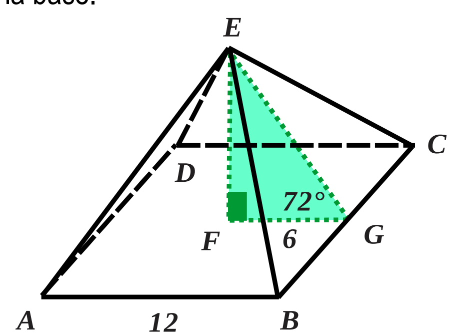
ii. El cateto BD (del triángulo ABD) es el radio r de la circunferencia inscrita la base octogonal. La hipotenusa AB biseca a uno de los ángulos interiores del octágono La amplitud de cada ángulo interno del octágono es $\frac{180(8-2)°}{8} = 135°$, por tanto, $m\angle BAD = 67.5°$

iii. Entonces, $r = |BD| = 5tg(67.5°) \approx 12.0711$ unidades.

d. ÁREA Y VOLUMEN DE UNA PIRÁMIDE DE BASE CUADRADA)

Calcula el volumen y el área de una pirámide regular con base cuadrada. Cada lado de la base mide 12 unidades y cada cara forma un ángulo de $72°$ respecto a la base.

i. La figura muestra la pirámide.



ii. El volumen de una pirámide cuadrangular es

$$V = \frac{1}{3}(\text{área de la base})(\text{altura}),$$

Se requiere la longitud de la altura. La base del triángulo mostrado en la *figura* (con líneas punteadas verdes) mide $|FG| = 6$ unidades; por tanto,

$$tg\,72° = \frac{|EF|}{6} \Leftrightarrow |EF| = 6 \cdot tg\,72° = 18.47,$$

Y $V = \frac{1}{3}(12)^2(18.47) = 886.56$ unidades cúbicas.

El área de la pirámide es la suma de las áreas de las caras con el área de la base, es decir,

$$A_{BEG} = \frac{1}{2}(12)\left(\frac{6}{\cos 72°}\right) = 116.4984 \text{ unidades cuadradas.}$$

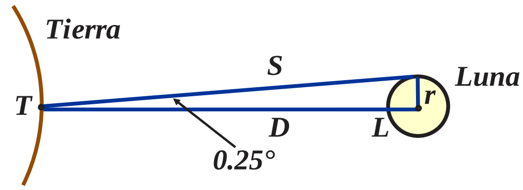
Por tanto,

$$A_{piramide} = 4(116.4984) + 12^2 = 609.9936 \text{ unidades cuadradas.}$$

e. DISTANCIA ENTRE LA TIERRA Y LA LUNA

El radio de la luna mide aproximadamente $|r| = 1738$ kilómetros.

Cuando la luna se observa desde la tierra, se puede contemplar totalmente bajo un ángulo de amplitud igual a $0.25°$. Calcula $|TL|$, distancia entre la tierra y la luna.



i. La *figura* muestra la situación antes descrita.
ii. Entonces,

$$tg(0.25°) = \frac{r}{D},$$

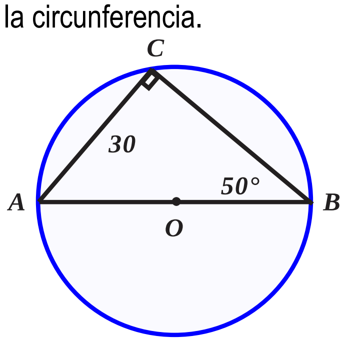
o bien, $D = \dfrac{1738}{tg(0.25°)} \approx 398317.7314$ kilómetros (distancia al centro de la luna).

iii. Para obtener la distancia a la luna se restan 1738 Kilómetros (el radio de la luna), por tanto,

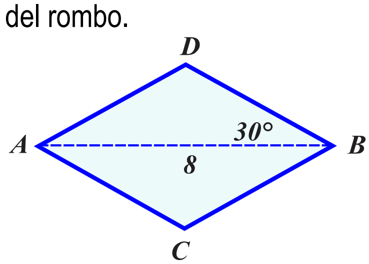
$$|TL| = 396579.7314 \text{ kilómetros.}$$

SECCIÓN 1.1
EJERCICIOS 2

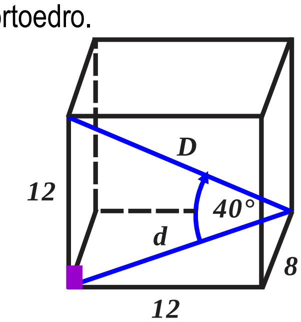
1. Calcula el perímetro de la circunferencia.



2. Obtén el área y el perímetro del rombo.



3. Calcula la longitud D de la diagonal y la longitud d de la diagonal de la base en el ortoedro.



4. Para subir un objeto a una carretera se utiliza un bloque metálico como una rampa de 20 metros de longitud. El ángulo que forma el tablón con el lugar en que se encuentra el objeto es de $30°$ ¿A qué distancia del precipicio de la carretera se apoya el bloque metálico?
5. Cuando los rayos del Sol tienen una inclinación de $54°$ sobre la horizontal, un árbol proyecta un sombra de 6.5 metros sobre el piso desde su base. Calcula la altura del árbol.
6. Una persona, cuyos ojos se encuentran a 1.7 metros de sus pies, determina que la medida del ángulo de elevación del asta bandera de San Ángel es $58°$, la medición la efectúa desde una loma de 4 metros de altura y a una distancia de 15 metros del asta. Determina la altura del asta bandera.
7. Dos barcos A y B parten de la misma bahía situada en un punto O. Sus desplazamientos tienen direcciones que forman un ángulo de $90°$. El barco A lleva una velocidad de 11 kilómetros por hora, mientras que el barco B lleva una velocidad de 18 kilómetros por hora. ¿Qué ángulos forma la trayectoria (respecto a la dirección de sus desplazamientos) que los une después de transcurrida media hora? (distancia es igual a la velocidad por tiempo).

DEFINICIÓN 1. IDENTIDAD TRIGONOMÉTRICA

Una "igualdad" de dos expresiones que involucran relaciones trigonométricas, y que es válida para todas las asignaciones posibles al asignarle al ángulo del que dependen, recibe el nombre de identidad trigonométrica.

Antes definimos:

$sen\,A=\dfrac{co}{h}$, $cos\,A=\dfrac{ca}{h}$, $tg\,A=\dfrac{co}{ca}$, $ctg\,A=\dfrac{ca}{co}$, $sec\,A=\dfrac{h}{cca.}$ y $csc\,A=\dfrac{h}{co}$, donde,

co es la longitud del cateto opuesto, ca es la longitud del cateto adyacente y h la longitud de la hipotenusa. La combinación de y/o rescritura de las definiciones anteriores conducen a la ***definición 2***.

DEFINICIÓN 2. IDENTIDADES RECÍPROCAS

a. Si $csc\,A\neq 0$, entonces, $sen\,A=\dfrac{1}{csc\ A}$, o bien, $csc\,A=\dfrac{1}{sen\ A}$, siempre que $sen\,A\neq 0$

b. Si $sec\,A\neq 0$, entonces, $cos\,A=\dfrac{1}{sec\ A}$, o bien, $sec\,A=\dfrac{1}{cos\ A}$, siempre que $cos\,A\neq 0$

c. Si $ctg\,A\neq 0$, entonces, $tg\,A=\dfrac{1}{ctg\ A}$, o bien, $ctg\,A=\dfrac{1}{tg\ A}$, si $tg\,A\neq 0$

Similarmente: **1.** $tg\,A=\dfrac{co}{ca}=\dfrac{\frac{co}{h}}{\frac{ca}{h}}=\dfrac{sen\ A}{cos\ A}$ **2.** $ctg\,A=\dfrac{c.a.}{c.o.}=\dfrac{\frac{c.a.}{h}}{\frac{c.o.}{h}}=\dfrac{cos\ A}{sen\ A}$

Con la *definición 3.* formalizamos las identidades anteriores.

DEFINICIÓN 3. IDENTIDADES DE COCIENTE

a. $tg\,A=\dfrac{sen\,A}{cos\ A}$, siempre que $cos\,A\neq 0$ **b.** $ctg\,A=\dfrac{cos\,A}{sen\ A}$, siempre que $sen\,A\neq 0$

Las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo se relacionan con el teorema de Pitágoras; en el triángulo de la *figura 1*. $sen\,A=\dfrac{a}{b}$, $cos\ A=\dfrac{c}{b}$, o bien, $a=b\cdot sen\,A$ y $c=b\cdot cos\ A$; asimismo,

$b^2=a^2+c^2$ (Teorema de Pitágoras).

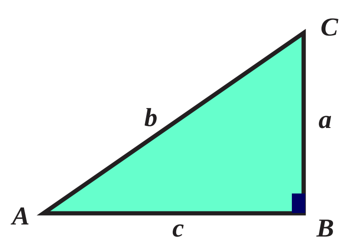


FIGURA 1.

Por tanto, $b^2=b^2\cdot sen^2A+b^2\cdot cos^2A$, o bien, $1=sen^2A+cos^2A$

Si dividimos $1=sen^2A+cos^2A$ por sen^2A o por cos^2A obtenemos las otras dos identidades trigonométricas de la ***definición 4***.

DEFINICIÓN 4. IDENTIDADES PITAGÓRICAS

a. $sen^2 A + cos^2 A = 1$ **b.** $1 + tg^2 A = sec^2 A$ **c.** $1 + ctg^2 A = csc^2 A$

En lo sucesivo se utiliza indistintamente:

$sen^2 A = (sen A)^2$, $cos^2 A = (cos A)^2$, $tg^2 A = (tg A)^2$, etcétera.

Otro grupo de identidades trigonométricas, cuya deducción requiere del uso de aspectos geométricos un poco más elaborados, pero de gran importancia se encuentran en la ***definición 5***.

DEFINICIÓN 5. IDENTIDADES DE SUMA DE ÁNGULOS

a. $sen(A \pm B) = sen\, A \cos B \pm cos\, A\, sen\, B$

b. $cos(A \pm B) = cos\, A \cos B \mp sen\, A\, sen\, B$

c. $tg(A + B) = \dfrac{tg\, A + tg\, B}{1 + tg\, A\, tg\, B}$

Aplicando las identidades trigonométricas de las *definiciones 1. a 5.* es posible deducir y/o simplificar otras identidades trigonométricas.

EJEMPLO 5. IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

a. Verificación de $sen\, A\, sec\, A = tg\, A$

AFIRMACIÓN	RAZÓN
$sen\, A\, sec\, A = sen\, A \dfrac{1}{cos\, A}$	Identidad recíproca para $sec\, A$
$= \dfrac{sen\, A}{cos\, A}$	Simplificación.
$= tg\, A$	Identidad de cociente.

b. Verificación de $cos\, A(tg\, A + ctg\, A) = csc\, A$

AFIRMACIÓN	RAZÓN
$cos\, A(tg\, A + ctg\, A) = cos\, A\left(\dfrac{sen\, A}{cos\, A} + \dfrac{cos\, A}{sen\, A}\right)$	Identidades de cociente.
$= cos\, A\left(\dfrac{sen^2 A + cos^2 A}{cos\, A\, sen\, A}\right)$	Operando con fracciones.
$= cos\, A\left(\dfrac{1}{cos\, A\, sen\, A}\right)$	Identidad pitagórica $sen^2 A + cos^2 A = 1$

$= \dfrac{1}{sen\,A}$	Simplificación.
$= csc\,A$	Identidad recíproca $csc\,A = \dfrac{1}{sen\,A}$

c. Verificación de $sen^2 A\left(1+(ctg\,A)^2\right)=1$

AFIRMACIÓN	RAZÓN
$sen^2 A\left(1+(ctg\,A)^2\right) = sen^2 A(csc\,A)^2$	Identidad pitagórica $1+ctg^2 A = csc^2 A$
$= sen^2 A \dfrac{1}{sen^2 A}$	Identidad recíproca $csc\,A = \dfrac{1}{sen\,A}$
$=1$	Simplificación algebraica.

d. Verificaremos: $3sen^2 A + 4cos^2 A = 3 + cos^2 A$

AFIRMACIÓN	RAZÓN
$3sen^2 A + 4cos^2 A = 3sen^2 A + 3cos^2 A + cos^2 A$	Separación de un sumandos.
$= 3\left(sen^2 A + cos^2 A\right) + cos^2 A$	Factorización.
$= 3 + cos^2 A$	Identidad pitagórica $sen^2 A + cos^2 A = 1$

e. Verificaremos la identidad: $\dfrac{cos\,A}{1-tg\,A} + \dfrac{sen\,A}{1-ctg\,A} = cos\,A + sen\,A$

AFIRMACIÓN	RAZÓN
$\dfrac{cos\,A}{1-tg\,A} + \dfrac{sen\,A}{1-ctg\,A} = \dfrac{cos\,A}{1-\dfrac{sen\,A}{cos\,A}} + \dfrac{sen\,A}{1-\dfrac{cos\,A}{sen\,A}}$	Identidades de cociente $tg\,A = \dfrac{sen\,A}{cos\,A}$ y $ctg\,A = \dfrac{cos\,A}{sen\,A}$
$= \dfrac{cos\,A}{\dfrac{cos\,A - sen\,A}{cos\,A}} + \dfrac{sen\,A}{\dfrac{sen\,A - cos\,A}{sen\,A}}$	Ejecución de “quebrados”.
$= \dfrac{cos^2 A}{cos\,A - sen\,A} + \dfrac{sen^2 A}{sen\,A - cos\,A}$	Simplificación.
$= \dfrac{cos^2 A - sen^2 A}{cos\,A - sen\,A}$	Simplificación.
$= \dfrac{(cos\,A - sen\,A)(cos\,A + sen\,A)}{cos\,A - sen\,A}$	Factorización en binomios conjugados.
$= cos\,A + sen\,A.$	Simplificación.

f. Verifiquemos: $tg\,A + ctg\,A = sec\,A\,csc\,A$

AFIRMACIÓN	RAZÓN

$tg\,A + ctg\,A = \dfrac{sen\ A}{cos\,A} + \dfrac{cos\ A}{sen\,A}$	Identidades de cociente $tg\,A = \dfrac{sen\,A}{cos\ A}$ y $ctg\,A = \dfrac{cos\,A}{sen\ A}$
$= \dfrac{sen^2\ A + cos^2\ A}{cos\,A\,sen\,A}$	Ejecución del "quebrado".
$= \dfrac{1}{cos\,A\,sen\,A}$	Identidad pitagórica $sen^2 A + cos^2 A = 1$
$= \dfrac{1}{cos\,A}\,\dfrac{1}{sen\,A}$	Propiedades de los "quebrados".
$= sec\,A\,csc\,A$	Identidades recíprocas: $sen\,A = \dfrac{1}{csc\ A}$, $sec\,A = \dfrac{1}{cos\ A}$

g. Verifiquemos: $sen\,2A = 2\,sen\,A\,cos\,A$

AFIRMACIÓN	RAZÓN
$sen\,2A = sen(\ A + A\ )$	Suma de términos semejantes.
$= sen\ A\,cos\,A + cos A\,sen\,A$	Identidades de suma de ángulos: $sen(\ A + B\ ) = sen\ A\,cos\,B + cos\ A\,sen\,B$
$= 2\,sen\ A\,cos\ A$	Suma de términos semejantes.

h. Verifiquemos: $cos\ 2A = 1 - 2\ sen^2 A$

AFIRMACIÓN	RAZÓN
$cos\ 2A = cos(\ A + A\ )$	Propiedad de la suma.
$= cos\ A\,cos\,A - sen\,A\,sen\,A$	Identidades de suma de ángulos $cos(\ A + B\ ) = cos\ A\,cos\,B - sen\ A\,sen\,B$
$= cos^2 A - sen^2 A$	Simplificación.
$= 1 - sen^2 A - sen^2 A$	Identidad pitagórica $sen^2 A + cos^2 A = 1$
$= 1 - 2sen^2\ A$	Simplificación.

i. Verifiquemos: $tg\,2A = \dfrac{2\,tg\,A}{1 - tg^2\ A}$

AFIRMACIÓN	RAZÓN
$tg(\ A + A\ ) = \dfrac{tg\ A + tg\ A}{1 - tg\ A\,tg\ A}$	Identidad $tg(\ A + B\ ) = \dfrac{tg\,A + tg\,B}{1 + tg\,A\,tg\,B}$
$tg(\ 2A\ ) = \dfrac{2\ tg\,A}{1 + tg^2 A}$	Simplificación.

SECCIÓN 1.1
EJERCICIOS 3

1. Verifica las identidades.

a. $tg\ A\ csc\ A = sec\ A$

b. $sen\ A\ cos\ A\left(tg\ A + ctg\ A\right) = 1$

c. $cscA - sen\ A = cos\ A\ ctg\ A$

d. $sen^2\ A\left(1 + ctg^2\ A\ \right) = 1$

e. $1 - tg\ A = \dfrac{cos\ A - sen\ A}{cos\ A}$

f. $\dfrac{1}{1 + cos\ A} = csc^2\ A - csc\ A\ ctg\ A$

1.2 TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

APRENDIZAJES

EL ALUMNO:

5. Comprenderá el proceso de deducción de las leyes de senos y de cosenos, para resolver problemas sobre triángulos oblicuángulos.

Las razones trigonométricas se utilizan en la resolución de triángulos no rectángulos (también conocidos como oblicuángulos). La combinación de los aspectos tratados en la sección anterior junto con otros aspectos, tanto algebraicos como geométricos justifican las propiedades conocidas como:"Ley de los senos" y "ley de los cosenos".

Las propiedades (teoremas) **1.**, **2.**, y **3.** se refieren a la ***figura 1.***, en donde las letras minúsculas a, b y c indican longitudes de lados contiguos y las mayúsculas A, B y C amplitudes de los ángulos interiores.

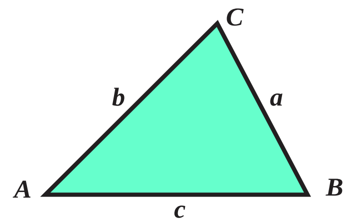


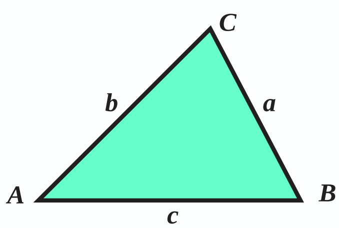
FIGURA 1.

PROPIEDAD 1. SUMA DE LOS ÁNGULOS INTERIORES DE UN TRIÁNGULO

La suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo es $180°$

PROPIEDAD 2. LEY DE LOS SENOS

En el triángulo

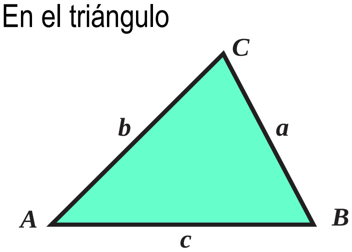


se cumple la relación:

$$\frac{a}{sen\ A} = \frac{b}{sen\ B} = \frac{c}{sen\ C}$$

PROPIEDAD 3. LEY DE LOS COSENOS

En el triángulo



se cumplen:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$

En la resolución de triángulos, la ley de los senos es útil si se conocen:
i. La amplitudes de dos de los ángulos interiores y la longitud de un lado.
ii. Las longitudes de dos lados y la amplitud de un ángulo opuesto a uno de los lados conocidos.

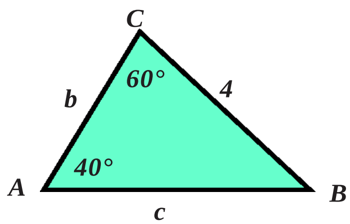
La ley de los cosenos es aplicable sí:
i. Se conocen: la amplitud de un ángulo y las longitudes de los lados que lo forman.
iii. Las longitudes de los tres lados.

Con el *ejemplo 1.* mostramos la forma de el uso de las propiedades anteriores

EJEMPLO 1. APLICACIÓN DE LAS LEYES: DE LOS SENOS Y DE LOS COSENOS

Resuelve los triángulos.

a.



La suma de las amplitudes de sus ángulos interiores es $180°$, entonces,

$$40° + m\angle B + 60° = 180° \;\Leftrightarrow\; m\angle B = 80°$$

Sustituimos los valores de los elementos conocidos en la ley de los senos, obtenemos

$$\frac{sen\,40°}{4} = \frac{sen\,80°}{b} = \frac{sen\,60°}{c},$$

o bien, (utilizando una calculadora),

$$\frac{0.6428}{4} = \frac{0.9848}{b} = \frac{0.8660}{c},$$

por tanto, tenemos las ecuaciones:

$$\frac{0.6428}{4} = \frac{0.9848}{b} \text{ y } \frac{0.6428}{4} = \frac{0.8660}{c},$$

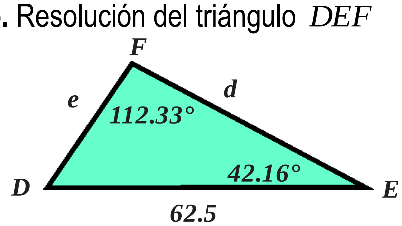
sus soluciones son

$$b = \frac{0.9848}{0.6428}(4) = 6.13 \text{ y } c = \frac{0.8660}{0.6428}(4) = 5.39, \text{ respectivamente.}$$

La tabla anexa sintetiza los resultados obtenidos.

Longitudes de los lados	$a = 4$	$b = 6.13$	$c = 5.39$
Amplitudes de los ángulos	$m\angle A = 40°$	$m\angle B = 80°$	$m\angle C = 60°$

b. Resolución del triángulo DEF



La suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo es $180°$, luego:

$$m\angle D + 42.16° + 112.33° = 180° \;\Leftrightarrow\; m\angle D = 25.51°$$

Si sustituimos los valores de los elementos conocidos en la ley de los senos, obtenemos:

$$\frac{sen\,25.51°}{d} = \frac{sen\,42.16°}{e} = \frac{sen\,112.33°}{62.5},$$

o bien, (empleando una calculadora)

$$\frac{0.4307}{d} = \frac{0.6712}{f} = \frac{0.9250}{62.5},$$

Posteriormente obtenemos las ecuaciones: $\dfrac{0.4307}{d} = \dfrac{0.9250}{62.5}$ y $\dfrac{0.6712}{e} = \dfrac{0.9250}{62.5}$,

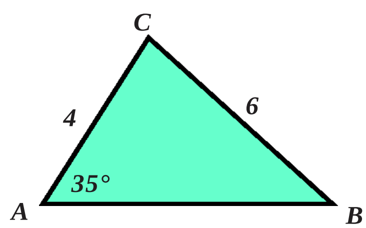
sus soluciones son:

$$d=\frac{0.4307}{0.9250}(62.5)=29.10 \text{ y } e=\frac{0.6712}{0.9250}(62.5)=45.35$$

La tabla anexa sistematiza los resultados obtenidos.

Longitudes de los lados	$d=29.10$	$e=45.35$	$f=62.5$
Amplitudes de los ángulos	$m\angle D=25.51°$	$m\angle E=42.16°$	$m\angle F=112.33°$

c.



Son conocidos: la amplitud del ángulo $\angle A$ y la longitud de su lado opuesto ($\overline{BC}$), por tanto, es aplicable la ley de los senos. Sustituyendo datos conocidos:

$$\frac{sen\,35°}{6}=\frac{sen\,B}{4}=\frac{sen\,C}{c},$$

sólo es útil la parte

$$\frac{sen\,35°}{6}=\frac{sen\,B}{4}, \text{ o bien, } sen\,B=4(0.096),$$

Utilizando una calculadora,

$$m\angle B=sen^{-1}(0.384)=22.58°$$

Por la propiedad referente a la suma de las amplitudes de los ángulos interiores obtenemos:

$$35°+22.48°+m\angle C=180° \Leftrightarrow m\angle C=122.52°$$

Una nueva aplicación de la ley de los senos da

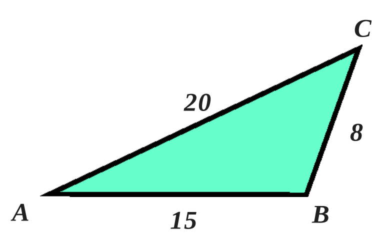
$$\frac{sen\,35°}{6}=\frac{sen\,22.58°}{4}=\frac{sen122.52°}{c},$$

de la ecuación $\frac{sen122.52°}{c}=\frac{sen\,22.52°}{4}$ obtenemos $c=(4)\frac{sen122.52°}{0.3839}=8.7856$

La tabla anexa sistematiza los resultados obtenidos.

Longitudes de los lados	$a=6$	$b=4$	$c=8.7856$
Amplitudes de los ángulos	$m\angle A=35°$	$m\angle B=22.52°$	$m\angle C=122.52°$

d.



En el triángulo de la *figura* se conocen las longitudes de los tres lados (inicialmente la ley de los senos carece de utilidad). Aplicamos la ley de los cosenos para calcular la medida del ángulo $\angle A$ obtenemos:

$$cos\,A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{20^2+15^2-8^2}{2(20)(15)}=\frac{561}{600}=0.935,$$

entonces,

$$m\angle A=\cos^{-1}0.935=20.77°.$$

La amplitud del $\angle B$ se determina en forma similar:

$$cos\,B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{8^2+15^2-20^2}{2(8)(15)}=\frac{-111}{240}=-0.4625,$$

por tanto,

$$m\angle B = \cos^{-1}(-0.4625) = 117.54°$$

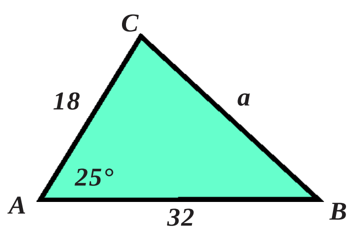
De la propiedad sobre la suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo obtenemos:

$$20.77° + 117.54° + m\angle C = 180°\text{, entonces, } m\angle C = 41.68°$$

En la tabla sintetizamos los resultados obtenidos.

Longitudes de los lados	$a = 8$	$b = 20$	$c = 15$
Amplitudes de los ángulos	$m\angle A = 20.77°$	$m\angle B = 117.55°$	$m\angle C = 41.68°$

e.



Son conocidos: las longitudes de dos lados y la medida del ángulo que forman, por tanto, no es aplicable la ley de los senos. Con la ley de los cosenos podemos determinar los valores de los elementos desconocidos.

La longitud del lado $\overline{BC}$ es

$$a^2 = 18^2 + 32^2 - 2(18)(32)\cos 25° = 303.93\text{, o bien,}$$

$$a = 17.43$$

La medida de $\angle C$ la obtenemos con la ley de los cosenos,

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{17.43^2 + 18^2 - 32^2}{2(17.43)(18)} = \frac{-396.19}{627.48} = -0.63$$

y

$$m\angle C = \cos^{-1}(-0.63) = 129.05°$$

Puesto que

$$25° + m\angle B + 129.05° = 180° \Leftrightarrow m\angle B = 25.95°$$

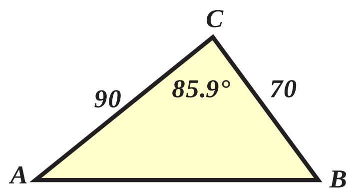
En la tabla anexamos los resultados obtenidos.

Longitudes de los lados	$a = 17.43$	$b = 18$	$c = 32$
Amplitudes de los ángulos	$m\angle A = 25°$	$m\angle B = 25.95°$	$m\angle C = 129.05°$

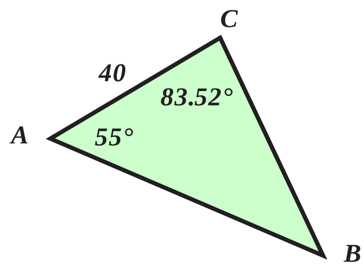
SECCIÓN 1.2
EJERCICIOS 1

1. Aplica la ley de los senos y/o la ley de los cosenos y resuelve los triángulos.

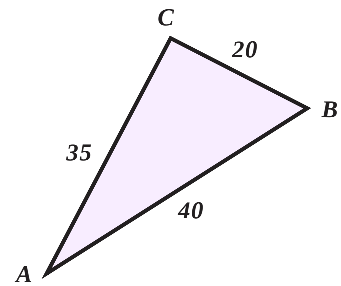
a.



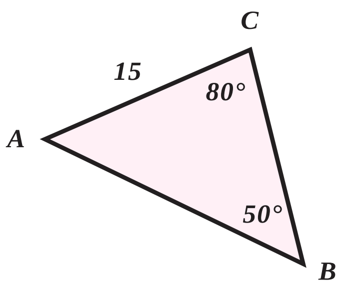
b.



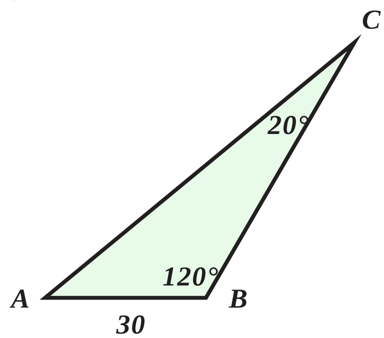
c.



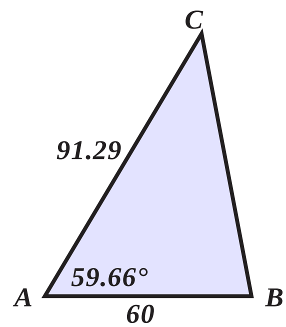
d.



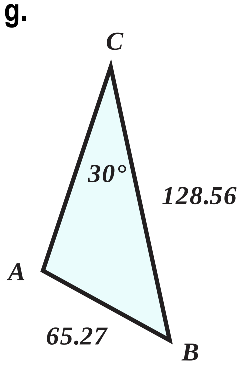
e.



f.



g.



El cálculo de longitudes en estructuras arquitectónicas (pirámides, edificios, puentes, ventanas) suele realizarse resolviendo uno o más triángulos oblicuángulos; los problemas que requieren el cálculo de distancias o longitudes de carácter inaccesible, por ejemplo, distancia a nubes, distancias entre cuerpos celestes suelen requerir en su estudio la resolución de triángulos oblicuángulos. En física es fundamental en la medición de distancias geográficas y establecimiento rutas, elementos de tráfico, límites de velocidad, etcétera y esto puede requerir de la resolución de un triángulo oblicuángulo.

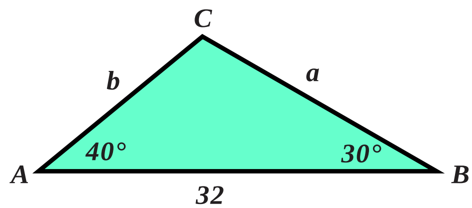
EJEMPLO 2. APLICACIONES DE LOS TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

Construye un modelo que describa la situación y de respuesta a la pregunta.

a. Calcula la distancia que recorrió un estibador al subir y bajar una rampa si su base mide 32 metros, el ángulo de inclinación de la subida es $40°$ y el de bajada es $30°$.

i. Modelamos la rampa con un triángulo no rectángulo.

ii. La *figura* representa la rampa. La distancia recorrida es la suma de las longitudes de los lados no horizontales.



iii. De $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$ y los datos del problema obtenemos $m\angle C = 110°$

Para determinar a aplicamos la ley de los senos, entonces,

$$\frac{a}{sen\,40} = \frac{32}{sen\,110} \Leftrightarrow a = \frac{32}{sen\,110}\,sen\,40 = 21.89$$

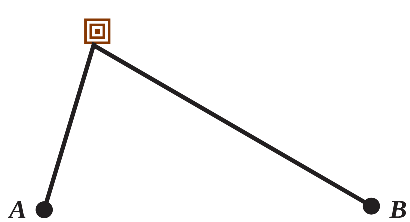
Para determinar b aplicamos nuevamente la ley de los senos

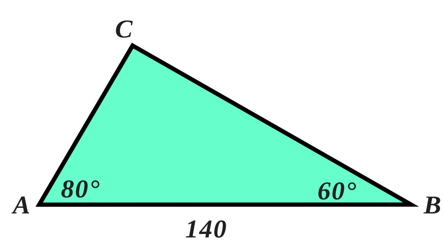
$$\frac{21.89}{sen\,40} = \frac{b}{sen\,30} \Leftrightarrow b = sen\,30\,\frac{21.89}{sen\,40} = 17.027$$

iv . El estibador recorre $D = 21.89 + 17.027 = 38.917$ metros.

b. Un globo aerostático se encuentra anclado en el suelo por dos cuerdas (formando segmentos rectilíneos) en los puntos A y B a una distancia de 140 metros entre ellos, y formando ángulos de $80°$ y $60°$ entre el suelo y la base del globo. ¿Cuál es la longitud de la cuerda que sujeta al globo?

i. La ***figura muestra*** un esquema de la situación. La longitud de la cuerda utilizada es la suma de las longitudes de los lados que definen los segmentos de la cuerda.





ii. La longitud l de la cuerda es la suma de las longitudes de los segmentos de recta $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$.

Los ángulos del triángulo de la derecha satisface la relación $80° + 60° + m\angle C° = 180°$, entonces,

$$m\angle C° = 180° - 80° - 60° = 40°$$

Aplicando la ley de los senos, obtenemos: $\dfrac{sen\,80°}{a} = \dfrac{sen\,60°}{b} = \dfrac{sen\,40°}{140}$, o bien,

$$\frac{sen\,80°}{a} = \frac{sen\,40°}{140} \text{ y } \frac{sen\,60°}{b} = \frac{sen\,40°}{140},$$

así

$$a = (140)\frac{sen\,80°}{sen\,40°} = 214.49 \text{ y } b = 140\frac{sen\,60°}{sen\,40°} = 188.62$$

iii. La longitud de la cuerda es $l = 214.49 + 188.62 = 403..11$ metros.

c. Un halcón vuela del árbol A al árbol B (en línea recta); que se encuentra a una distancia de 1.5 kilómetros y posteriormente gira $50°$ y se dirige hacia el árbol C, que se encuentra a una distancia de 1 kilómetro del árbol B.
Determina la distancia entre los árboles A y C. ¿A qué ángulo debe girar la águila en el árbol C para regresar al árbol A?
i. La trayectoria que sigue el halcón es un triángulo no rectángulo.
ii. La muestra la trayectoria seguida por el águila.

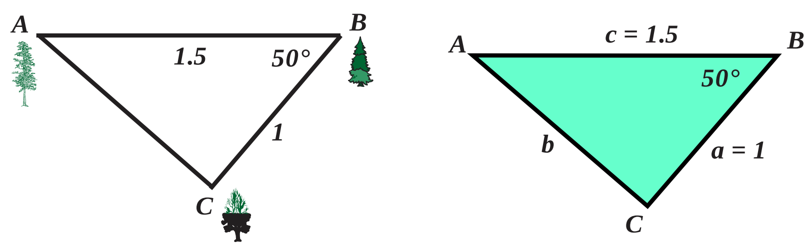


FIGURA 4.

iii. Si b representa la distancia entre los árboles A y C, aplicamos la ley de los cosenos para calcularla,

$$b^2 = 1^2 + 1.5^2 - 2(1)(1.5)\cos 50° = 3.25 - 3(0.64) = 1.33 \text{ y } b = \sqrt{1.33} = 1.15 \text{ kilómetros.}$$

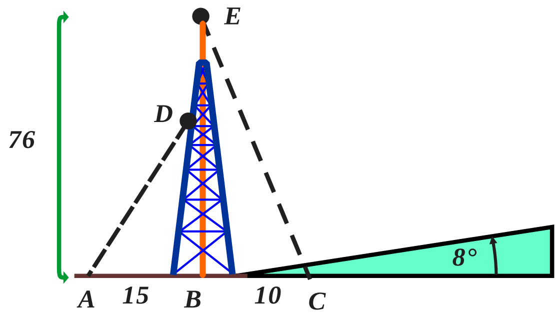
iv. Para calcular $m\angle C$, aplicamos la ley de los cosenos,

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1^2 + 1.15^2 - 1.5^2}{2(1)(1.15)} = \frac{0.08}{2.30} = 0.0348, \text{ donde,}$$

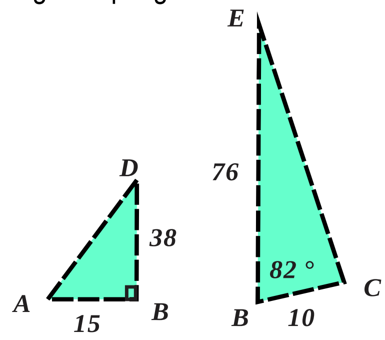
$$m\angle C = \cos^{-1} 0.0348 = 88.006°$$

d. Una torre tiene altura de 76 metros y el piso a su derecha tiene está inclinado positivamente $8°$.
¿Cuál es la longitud de un cable de soporte si une el punto más alto de la torre con un punto que se encuentra a 10 metros a la derecha de su base y sobre el piso inclinado? ¿Cuál es la longitud de otro cable de soporte, si este se fija a la mitad de la torre y se asegura en un punto a 15 metros a la izquierda de su base?
i. Los cables de soporte y el eje de la torre forman dos triángulos, uno es rectángulo y el otro no es rectángulo.

ii. La ***figura*** muestra los cables de soporte de la torre y los triángulos que generan.



a.



b.

iii. Calculemos la longitud del cable de soporte derecho. Sea b la longitud del cable que va del punto C al punto E, aplicando la ley de los cosenos obtenemos:

$$b^2 = 10^2 + 76^2 - 2(10)(76)\cos 82° = 5876 - 211.54 = 5664.46,$$

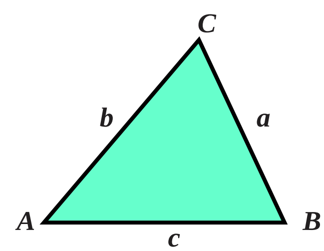
entonces,

$$b = \sqrt{5664.46} = 75.26 \text{ metros.}$$

iv. Calculemos la longitud del cable de soporte izquierdo. Sea l la longitud del cable que va del punto A al punto D, aplicamos el teorema de Pitágoras y obtenemos:

$$l^2 = 15^2 + 38^2 = 1669, \text{ de donde, } l = 40.85 \text{ metros.}$$

e. Deduce una "fórmula" para obtener el área de una región triangular en términos de: la amplitud del ángulo $m\angle A$ y los lados que lo forman.



i. El área de una región triangular se calcula con

$$A_T = \frac{1}{2}(base)(altura).$$

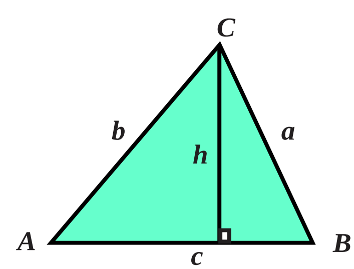
ii. La altura del triángulo de la figura es el segmento rectilíneo que "baja" del vértice C a la base $\overline{AB}$ (de longitud c).

iii. En la ***figura***:

$$sen\ A = \frac{h}{b}, \text{ es decir, } h = b \cdot sen\ A$$

iv. Sustituimos $h = b \cdot sen\ A$ y la longitud de la base en $A_T = \frac{1}{2}(base)(altura)$ y obtenemos:

$$A_T = \frac{1}{2}(c)(b \cdot senA) = \frac{1}{2}bc \cdot senA$$



SECCIÓN 1.2
EJERCICIOS 2

1. La envergadura distancia entre los puntos extremos de las alas delanteras de un avión es 30 metros. Las alas delanteras de un avión forman ángulos de $48°$ respecto a la línea de la envergadura (línea media del fuselaje). Calcula la longitud máxima de cada ala.

2. Para medir la altura de la base de las nubes que cubren un aeropuerto, un trabajador dirige un reflector hacia arriba a un ángulo de $75°$ respecto a la horizontal. Un observador a 600 metros (del trabajador) mide el ángulo de elevación hasta el punto de luz y observa que tiene amplitud de $45°$. Determina la altura de la base de las nubes.

3. Las diagonales de un paralelogramo miden 20 y 26 centímetros, y se cortan formando un ángulo de $50°$. Determina el perímetro del paralelogramo.

4. Un automóvil se desplaza por una carretera (recta) en dirección "este" durante 1 hora, luego gira $140°$ y toma una carretera hacia el noreste por la que se desplaza durante 30 minutos. Si el automóvil se desplaza a velocidad constante de 60 kilómetros por hora, ¿qué tan lejos está de su posición de partida al terminar el recorrido?

5. Un helicóptero es visto simultáneamente por dos personas, una de ellas se encuentra en el Metro Chabacano y lo observa a un ángulo de $80°$, la otra en el Metro Villa de Cortés y lo observa a un ángulo de $48°$, si la distancia entre ambas estaciones del metro es de 2.9 kilómetros, ¿a qué distancia se encuentra el helicóptero de ambas estaciones del Metro?

6. Un jardinero planea construir una cerca triangular, si dos de los lados deben medir 32 y 35 metros, también, deben formar un ángulo de medida $68°$. Calcula la longitud de la cerca.

7. Desde un punto una persona observa la parte más alta de un ahuehuete con un ángulo de $36°$, si avanza en línea recta hacia el ahuehuete y vuelve a observar el punto más alto del ahuehuete el ángulo tiene amplitud de $50°$. ¿Qué altura tiene el ahuehuete?

8. Dos policías p_1 y p_2 se encuentran a una distancia de 150 metros (en línea recta). El policía p_1 observa un asalto en el punto c con dirección de $15°$ respecto a la línea que lo une con el policía p_2. El policía p_2 lo observa a un ángulo de $25°$ respecto a la línea antes señalada. ¿A qué distancia se encuentra cada policía del asalto?

9. Tres depósitos A, B y C están unidos por carreteras rectas y planas. La distancia entre los sitios A y B es 6 kilómetros, la distancia entre B y C es 9 kilómetros y la amplitud del ángulo que forman los segmentos rectilíneos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ es $120°$. ¿Cuál es la distancia entre los sitios A y C?

10. Un carpintero debe construir una mesa triangular de forma que un lado mida 2 metros, otro de ellos 1.5 metros y el ángulo opuesto al primer lado debe tener amplitud de $40°$. ¿Lo conseguirá? Explica tu respuesta.

11. Deduce una "fórmula" para obtener el área de una región triangular en términos de: la amplitud del ángulo $m\angle B$ y los lados que lo forman.

1.3 SOLUCIONES Y EVALUACIÓN

SOLUCIÓN A EJERCICIOS PROPUESTOS

EXAMEN DE LA UNIDAD

SOLUCIONES DEL EXAMEN DE LA UNIDAD 1

SECCIÓN 1.1 EJERCICIOS 1 SOLUCIONES

1. a. $sen\,A=\frac{3}{5}$, $cos\,A=\frac{4}{5}$, $tg\,A=\frac{3}{4}$, $ctg\,A=\frac{4}{3}$, $sec\,A=\frac{5}{4}$, $csc\,A=\frac{5}{3}$

2. $m\angle A=°$ $m\angle B=90°$ $m\angle C=°$ $a=b=18$ $c=12$.

3. $m\angle A=46°$ $m\angle B=90°$ $m\angle C=44°$ $a=15.533$ $b=21.593$

4. $m\angle A=90°$ $m\angle B=35.69°$ $m\angle C=54.31°$ $a=12$ $b=7$ $c=9.75$

SECCIÓN 1.1 EJERCICIOS 2 SOLUCIONES

1. $\frac{30\pi}{sen\,50°}$ unidades.

2. a. $32tg\,30°$ unidades cuadradas. **b.** $p=\frac{16}{cos\,30°}$ unidades.

3. a. $D=12sen40°$ unidades. **b.** $d=\sqrt{208}$ unidades.

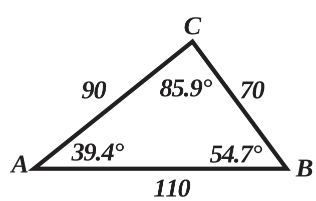
4. 17.321 metros. **5.** 8.9464 metros. **6.** 28.705 metros. **7.** $58.572°$ y $31.428°$

SECCIÓN 1.1 EJERCICIOS 3 SOLUCIONES

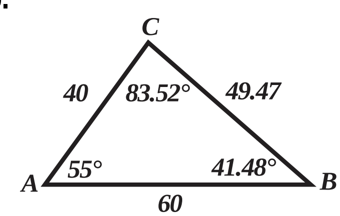
Varias.

SECCIÓN 2.1 EJERCICIOS 1 SOLUCIONES

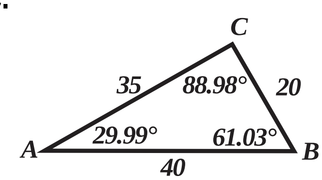
a.



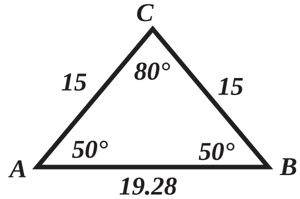
b.



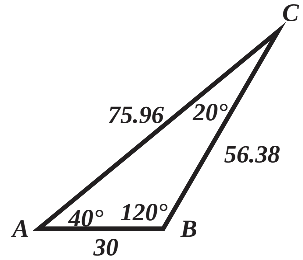
c.



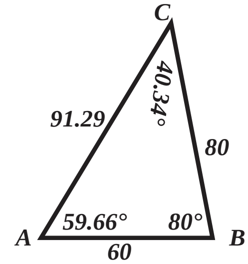
d.



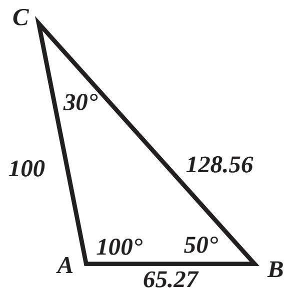
e.



f.



g.



SECCIÓN 1.2
EJERCICIOS 2 SOLUCIONES

1. 22.417 metros.
2. 473.205 metros.
3. 61.954 centímetros.
4. 85.192 kilómetros.
5. 3.624 y 2.735 kilómetros
6. 104.548 metros.
7. 3.156 metros.
8. 60.397 y 98.622 metros.
9. 13.076 kilómetros.
10. Sí, el lado restante debe medir 2.901 metros.
11. $A_T = \frac{1}{2} ac \cdot senB$

UNIDAD 1 EXAMEN

CONCEPTOS

1. ¿Qué es una razón?

2. ¿Cómo se denominan los lados de un triángulo rectángulo?

3. En un triángulo rectángulo, ¿cómo se identifica el cateto opuesto?

4. En un triángulo rectángulo, ¿qué nombre recibe la razón hipotenusa a cateto adyacente?

5. ¿Qué significa resolver un triángulo?

6. ¿Cuál es el significado de la razón inversa del $seno$?

7. ¿Qué es un ángulo de elevación?

8. ¿Qué es una identidad trigonométrica?

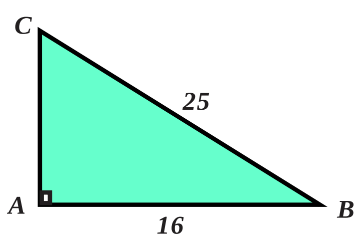
9. ¿Para qué amplitud de ángulo coinciden las razones $seno$ y $coseno$?

10. ¿Qué condición debe cumplirse para que la ley de los cosenos coincida con el teorema de Pitágoras?

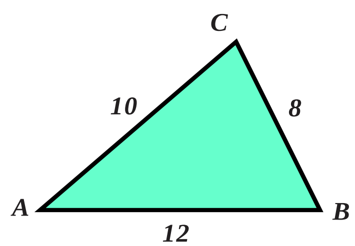
DESARROLLOS OPERATIVOS

11. Resuelve.

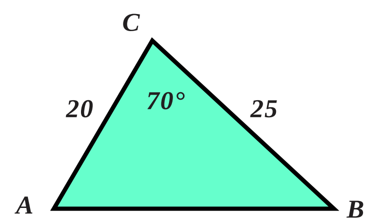
11. Resuelve.



12. Resuelve.



13. Resuelve.



14. Verifica la identidad $\frac{1}{\cos^2 A} - 1 = tg^2 A$

PARA PENSAR

15. Dos personas A y B observan la parte más alta de una antena con ángulos de elevación de $60°$ y $50°$ respectivamente. La longitud de la visual de la persona A mide 12 metros. Si la altura de los ojos de las personas es la misma, ¿a qué distancia se encuentran las personas?

16. Dos avenidas rectas se intersecan formando un ángulo de amplitud $40°$. Sobre la primera de las avenidas se encuentra un edificio a 35 metros del punto de intersección de las avenidas, en la otra avenida está una tienda a 42 metros del punto de cruce de las avenidas. Calcula la distancia entre el edificio y la tienda.

17. Una antena está situada en la parte superior de un edificio de altura 45 metros. Desde un punto en el mismo plano horizontal de la base del edificio los ángulos de elevación a los extremos superior e inferior de la antena son $65°$ y $48°$. Calcula la longitud de la antena.

ESCALA

Preguntas 1 a 10., un punto cada una.
Problemas 11. a 14. tres puntos cada uno.
Problemas 15. a 17. cuatro puntos cada uno.

Para acreditar se necesita un mínimo de 23 puntos

UNIDAD 1 SOLUCIONES AL EXAMEN

CONCEPTOS

1. Cociente o comparación por cociente de dos cantidades.

2. Hipotenusa y catetos.

3. Es el lado del triángulo que no forma parte del ángulo al que es opuesto.

4. $secante$.

5. Conocer o determinar: las amplitudes de sus tres ángulos interiores y las longitudes de sus tres lados.

6. Es la amplitud del ángulo al cual corresponde una razón específica.

7. Aquel que tiene como lado inicial la horizontal y se abre en forma positiva (hacia arriba).

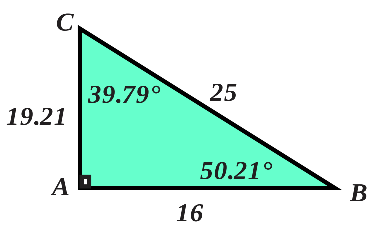
8. Una ecuación que incluye razones trigonométricas y que es válida para cualquier ángulo.

9. $45°$

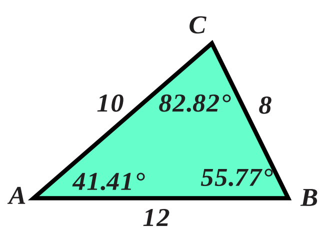
10. El ángulo que incluye debe medir $90°$

DESARROLLOS OPERATIVOS

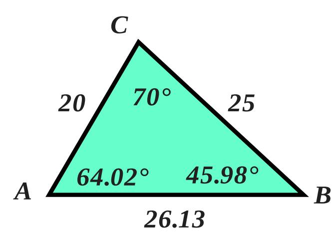
11.



12.



1 3.



14. Una forma es $\frac{1}{cos^2 A} - 1 = \frac{1 - cos^2 A}{cos^2 A} = \frac{sen^2 A}{cos^2 A} = tg^2 A$

PARA PENSAR

15. 13.021 metros. **16.** 27.14 metros. **17.** 10.778 metros.

2

ELEMENTOS BÁSICOS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

PROPÓSITOS

Al finalizar la unidad, el alumno:
Será capaz de manejar algebraicamente algunos conceptos básicos de la geometría euclidiana y algunos lugares geométricos con la finalidad de introducir el método analítico.

CONCEPTOS CLAVE

Geometría analítica.

Estudia las relaciones entre pares de números y puntos.

Plano cartesiano. Se construye intersecando dos líneas rectas numéricas perpendiculares en el punto que corresponde al cero (el punto de intersección es llamado origen y corresponde al número 0 de cada línea recta).

Ejes coordenados. Cada una de las líneas rectas que generan el plano cartesiano.

Cuadrante. Cada una de las partes en que los ejes coordenados separan al plano cartesiano.

Punto. Se interpreta como un par ordenado $(x\ ,\ y)$ en el que los números x e y se denominan coordenadas, abscisa y ordenada respectivamente.

Segmento rectilíneo. La sección de una línea limitada por dos de sus puntos.

Segmento rectilíneo dirigido. Segmento rectilíneo en el que se distingue el punto inicial del punto final.

Pendiente de un segmento rectilíneo. Razón constituida por la diferencia de ordenadas y la diferencia de abscisas de los puntos que constituyen a un segmento rectilíneo.

Angulo de inclinación. El ángulo con lado inicial en el eje de las abscisas y lado final en el segmento rectilíneo (pude ser la prolongación del segmento rectilíneo.

Razón. Comparación de las longitudes de dos segmentos rectilíneos utilizando una división.

Punto $p_r\,(x_r\ ,\ y_r\,)$de división de un segmento rectilíneo dirigido en una razón r. Divide a un segmento rectilíneo en $a+b$ partes, a partes desde su inicio a él, y b partes desde el al punto final des segmento rectilíneo.

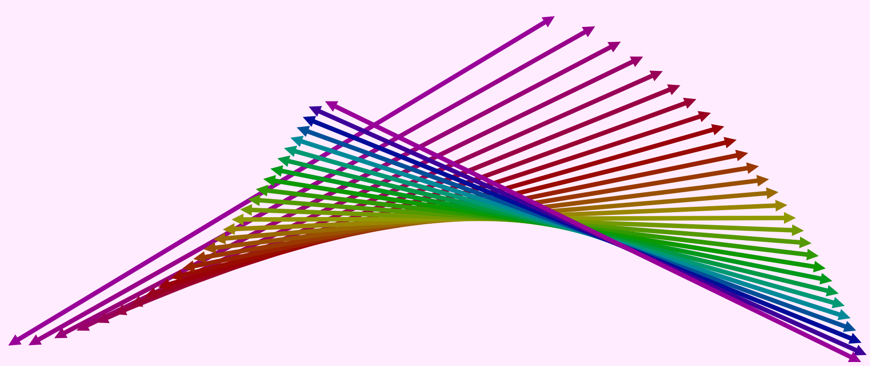
Lugar geométrico. Conjunto de puntos del plano cartesiano tal que las coordenadas satisfacen una condición específica.

2.1 EL PUNTO Y EL SEGMENTO DE RECTA EN EL PLANO CARTESIANO

APRENDIZAJES

EL ALUMNO:

1. Representa la ubicación de un punto en el plano utilizando un sistema de referencia cartesiano y viceversa.
2. Localiza un segmento rectilíneo en el plano cartesiano y proporciona la información suficiente para que otro alumno lo pueda hacer.
3. Deduce la fórmula para determinar la longitud de un segmento rectilíneo, dados sus puntos extremos y la aplica en diferentes situaciones.
4. Comprende el concepto de ángulo de inclinación de un segmento rectilíneo.
5. Calcula el ángulo de inclinación a partir de las coordenadas de los extremos de un segmento rectilíneo.
6. Localiza un segmento rectilíneo dadas condiciones necesarias y suficientes distintas a su determinación por sus puntos extremos.
7. Localiza los puntos de división de un segmento rectilíneo.



El plano cartesiano se utiliza como para referir la posición de objetos geométricos constituidos por puntos; se compone de dos líneas rectas perpendiculares llamadas ejes cartesianos, su punto de intersección se llama origen y se representa por $O(0,0)$. En el plano cartesiano:

i. La línea recta vertical se llama "eje de las ordenadas" y suele representarse por la letra "Y".
ii. La línea recta horizontal es el eje "X" o "eje de las abscisas".
iii. El eje de las ordenadas y el eje de las abscisas generan cuatro cuadrantes, que se enumeran en sentido y se tal "levógiro" tal como lo muestra la ***figura 1.***
iv. Cada uno de sus puntos tiene asociado un "par ordenado de números" y se representa por $p(x,y)$, en donde x es la ordenada e y la abscisa.

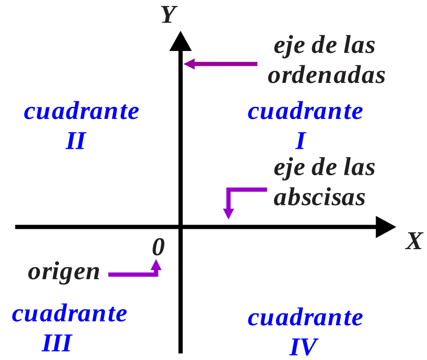


FIGURA 1.

Por otra parte, para representar el punto $p_0(x_0, y_0)$ en el plano cartesiano, se procede de la siguiente forma:

i. Localizamos el número x_0 en el eje horizontal y el número y_0 en el eje vertical.
ii. Posteriormente imaginamos líneas rectas perpendiculares a los ejes coordenados que contengan a los números antes señalados, entonces, el punto $p_0(x_0, y_0)$ se localiza en la intersección de las líneas rectas antes imaginadas, observa la ***figura 2***.

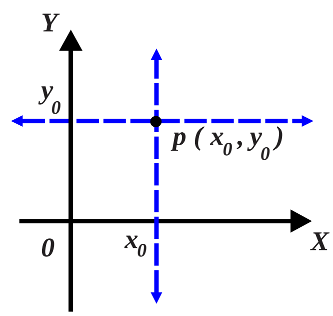
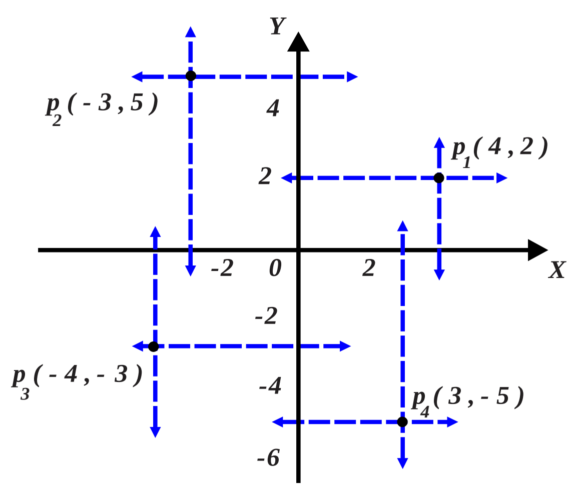


FIGURA 2.

EJEMPLO 1. LOCALIZACIÓN DE PUNTOS EN ELE PLANO CARTESIANO

1. Si:
i. $p_1(4,2)$: abscisa $x_1 = 4$, ordenada $y_1 = 2$, se encuentra en el cuadrante I.
ii. $p_2(-3,5)$: abscisa $x_2 = -3$, ordenada $y_2 = 5$, se ubica en el cuadrante II.
iii. $p_3(-4,-3)$: abscisa $x_3 = -4$, ordenada $y_3 = -3$, se localiza en el cuadrante III.
iv. $p_4(3,-5)$: abscisa $x_4 = 3$, ordenada $y_1 = -5$, se encuentra en el cuadrante IV.



SEGMENTO RECTILÍNEO EN EL PLANO CARTESIANO

En geometría analítica se interpreta a un "segmento rectilíneo" como la parte de la línea recta limitada por dos de sus puntos, a cada segmento de recta se le asocia como longitud (medida) la distancia entre los dos puntos que lo definen.

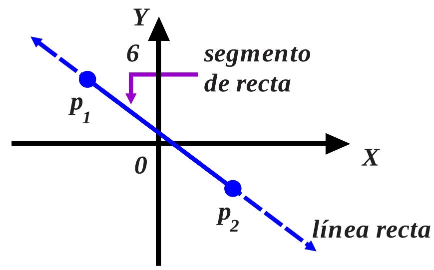


FIGURA 3.

Una aplicación directa del teorema de Pitágoras justifica la ***propiedad 1***.

PROPIEDAD 1. LONGITUD (MEDIDA) DE UN SEGMENTO RECTILÍNEO O DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

Sean

$$p_1(x_1, y_1) \text{ y } p_2(x_2, y_2)$$

dos puntos en el plano cartesiano, entonces:

a. Su distancia es el número real no negativo $d(p_1, p_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

b. La longitud del segmento rectilíneo que definen es $d(p_1, p_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

La expresión (fórmula) $d(p_1, p_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ es equivalente a:

$d(p_1, p_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, o bien, $d(p_1, p_2) = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$

EJEMPLO 2. LONGITUDES DE SEGMENTOS RECTILÍNEOS

a. Trazar el segmento rectilíneo y calcula su longitud o medida.

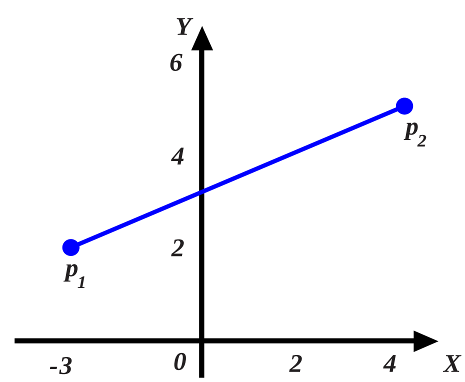
i. La distancia entre los puntos

$$p_1(-3, 2) \text{ y } p_2(4, 5)$$

es:

$$d(p_1, p_2) = \sqrt{(-3-4)^2 + (2-5)^2}$$
$$= \sqrt{(-7)^2 + (-3)^2}$$
$$= \sqrt{58}$$

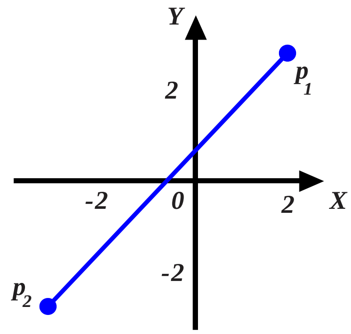
unidades.



ii. El segmento de recta con extremos en $P_1(2,3)$ y $P_2(-3,-3)$, tiene longitud

$$d(p_1, p_2) = \sqrt{(2-(-3))^2 + (3-(-3))^2}$$
$$= \sqrt{(5)^2 + (6)^2}$$
$$= \sqrt{61}$$

unidades.



b. la longitud del segmento de recta $\overline{AB}$ es 4 unidades, sus extremos son los puntos $A(-2,3)$ y $P_2(3,y)$, entonces, una forma de calcular la coordenada desconocida y es:

$$d(A,B) = 4 = \sqrt{(-2-(-3))^2 + (3-y)^2}$$
$$= \sqrt{(1)^2 + (3-y)^2}$$
$$= \sqrt{1 + (3-y)^2}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación anterior obtenemos

$16 = 1 + (3-y)^2 \Leftrightarrow (y-3)^2 = 15$, entonces, $y-3 = \sqrt{15}$ o $y-3 = -\sqrt{15}$

Por tanto,

$y = 3 + \sqrt{15}$, o bien, $y = 3 - \sqrt{15}$

c. El triángulo ABC tiene vértices en $A(-2,1)$, $B(3,4)$ y $C(5,-1)$, calcula su perímetro.

Su perímetro tiene longitud

$p = d(A,B) + d(A,C) + d(B,C)$ unidades.

Donde:

$$d(A,B) = \sqrt{(-2-3)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{34}$$

unidades,

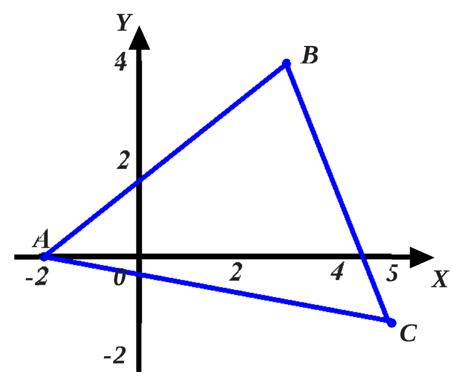
$$d(A,C) = \sqrt{(-2-5)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{53}$$

unidades,

$$d(B,C) = \sqrt{(3-5)^2 + (4-(-1))^2} = \sqrt{29}$$

unidades, por tanto,

$p = \sqrt{34} + \sqrt{53} + \sqrt{29}$ unidades.



d. Las proyecciones perpendiculares del punto $p(-2,6)$ sobre los ejes coordenados son los puntos:

En el eje y $p_y(0,6)$ y en el eje x $p_x(-2,0)$

SECCIÓN 2.1
EJERCICIOS 1

1. Traza el segmento rectilíneo (o la figura) en el plano cartesiano y calcula su longitud (y/o perímetro).

a. La distancia entre los puntos $A(-1,2)$ y $B(2,4)$ es:

b. El segmento de recta con extremos en los puntos $R(-4,1)$ y $S(2,2)$ tiene longitud:

c. Un triángulo tiene vértices en los puntos $A(-1,1)$, $B(3,2)$ y $C(4,-1)$, trázalo y calcula su perímetro.

d. Los vértices de un cuadrilátero son los puntos

$$A(-2,-1),\ B(1,-2),\ C(4,0) \text{ y } D(1,1),$$

calcula la longitud de sus dos diagonales y su perímetro.

e. Un segmento de recta mide 8 unidades, sus extremos son los puntos $P(-4,0)$ y $Q(x,1)$, calcula la coordenada desconocida.

f. Un segmento de recta tiene longitud de 3 unidades, sus extremos son los puntos $A(1,y)$ y $B(-2,-3)$, calcula la coordenada desconocida.

g. Obtén los puntos de proyección sobre los ejes coordenados.

i. $p(4,2)$

ii. $r(-3,-5)$

Un ángulo:

i. Está formado por dos segmentos de recta (lados) con un punto común llamado vértice.

ii. Para representarlo utilizaremos el símbolo $\angle$, por ejemplo, representaremos al ángulo con vértice en el punto A simbólicamente por $\angle A$.

ii. Tiene asociada una medida (o amplitud) y nos referiremos a ella utilizando el símbolo $m\angle A$.

En la ***figura 3.***, el segmento rectilíneo $\overline{p_1 p_2}$ tiene asociado un ángulo de inclinación, mismo que hemos representado por la letra mayúscula A); su amplitud se mide respecto al eje horizontal e de las abscisas y puede calcularse utilizando las coordenadas de los puntos extremos de $\overline{p_1 p_2}$ (o cualquier otro par de sus puntos).

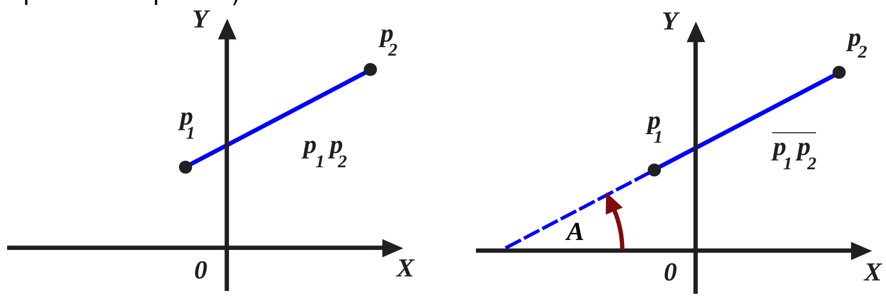


FIGURA 3.

DEFINICIÓN 1. PENDIENTE Y ÁNGULO DE INCLINACIÓN DE UN SEGMENTO DE RECTA

Sea el segmento de recta $\overline{p_1p_2}$ con extremos en los puntos $p_1(x_1, y_1)$ y $p_2(x_2, y_2)$:

a. Su pendiente es la razón: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, siempre que $x_1 \neq x_2$

b. Si $x_2 = x_1$, la pendiente del segmento de recta no está definida (suele decirse que es infinita).

c. Si $\angle A$ representa su ángulo de inclinación, entonces, $m\angle A = tg^{-1}\left(\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)$ grados.

La *figura 4.* muestra el significado de la pendiente de un segmento de recta.

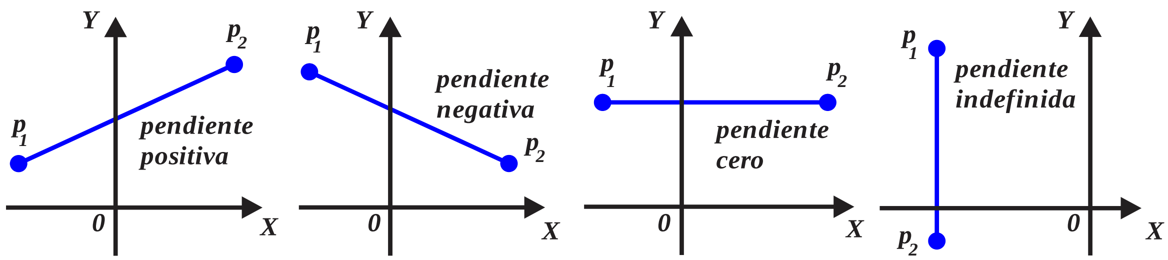


FIGURA 4.

EJEMPLO 3. LOCALIZACIÓN DE PUNTOS EN ELE PLANO CARTESIANO

a. Obtén la pendiente y el ángulo de inclinación.

i. Del segmento de recta $\overline{p_1p_2}$ son los puntos $p_1(-7, 3)$ y $p_2(4, 5)$.

$x_1 = (-7)$, $y_1 = 3$, $x_2 = 4$ y $y_2 = 5$, por tanto, $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{5-3}{4-(-7)} = \dfrac{2}{11}$

su ángulo de inclinación mide $m\angle A = tg^{-1}\left(\dfrac{2}{11}\right) = 10.305°$

ii. De $\overline{p_1p_2}$ con extremos $p_1(-4, 5)$ y $p_2(7, -8)$. Sean $x_1 = (-4)$, $y_1 = 5$, $x_2 = 7$ y $y_2 = (-8)$, entonces,

$$m = \frac{(-8)-5}{7-(-4)} = \frac{13}{11} \text{ y } m\angle A = tg^{-1}\left(\frac{13}{11}\right) \approx 49.764°$$

iii. De $\overline{RS}$ con extremos en los puntos $R(-3, 6)$ y $S(0, 6)$.

$$x_1 = (-3),\ y_1 = 6,\ x_2 = 0 \text{ y } y_2 = 6,$$

por tanto, $m = \dfrac{6-6}{0-(-3)} = 0$ y $m\angle A = tg^{-1}(0) = 0$. $\overline{RS}$ es paralelo al eje de las abscisas.

b. El segmento de recta $\overline{BC}$ forma un ángulo de amplitud $m\angle A = 45°$ respecto al eje de las abscisas, por tanto, su pendiente es $m = tg(45°) = 1$

c. Sea $\overline{DE}$ el segmento de recta $\overline{DE}$ con extremos en $D(-2,4)$, $E(x,8)$ con ángulo de inclinación con $m\angle A=45°$. Si $m\angle A=45°$, entonces,

$$m=tg(45°)=1, \text{ por tanto, } 1=\frac{8-4}{x-(-2)} \Leftrightarrow x+2=4, \text{ o bien, } x=2$$

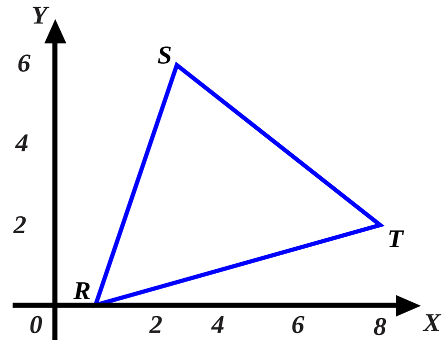
d. Calculemos las pendientes de los lados del triángulo con vértices en los puntos:

$R(1,0)$, $S(3,6)$ y $T(8,2)$.

Sean: m_{RS}, m_{RT} y m_{ST} las pendientes de los lados RS, RT y ST, respectivamente, entonces:

En m_{RS}: $x_1=1$, $y_1=0$, $x_2=3$ y $y_2=6$, luego

$$m_{RS}=\frac{6-0}{3-1}=3$$



En m_{RT}: $x_1=1$, $y_1=0$, $x_2=8$ y $y_2=2$, por tanto, $m_{RT}=\frac{2-0}{8-1}=\frac{2}{7}$

En m_{ST}: $x_1=3$, $y_1=6$, $x_2=8$ y $y_2=2$, entonces, $m_{ST}=\frac{2-6}{8-3}=-\frac{4}{5}$

SECCIÓN 2.1
EJERCICIOS 2

1.

a. Calcula: la pendiente y el ángulo de inclinación, de los segmentos rectilíneos.

i. Extremos en los puntos $A(0,2)$ y $B(2,4)$

ii. Extremos en los puntos $P(0,-1)$ y $Q(5,2)$

iii. Extremos en los puntos $Q(4,0)$ y $T(0,4)$

b. Calcula la coordenada desconocida.

i. Extremos en los puntos $A(x,2)$, $B(2,4)$ y $m\angle A=45°$.

ii. Extremos en los puntos $M(-2,2)$, $N(x,-3)$ y $m\angle A=60°$

iii. Extremos en los puntos $U(-4,y)$, $V(-2,6)$ y $m\angle A=30°$

c.

i. Un segmento rectilíneo tiene extremos en los puntos $A(x,0)$, $B(6,3)$. ¿Qué valor debe tomar la coordenada x para que sea vertical?

ii. Un segmento rectilíneo tiene extremos en los puntos $A(-2,2)$, $B(4,y)$. ¿Cuál debe ser la coordenada y para que sea horizontal?

iii. Un segmento rectilíneo tiene extremos en los puntos $A(3,0)$, $B(x,-3)$. ¿Cuál debe ser la coordenada x para que sea vertical?

d. Un triángulo tiene vértices en los puntos $A(1,-1)$, $B(-3,3)$ y $C(4,4)$, trázalo, calcula: la pendiente de cada lado y las amplitudes de los ángulos que forma cada lado respecto al eje de las abscisas**.**

Asignar una dirección a un segmento rectilíneo implica establecer el punto de inicio y el punto final, por tanto, representaremos con $\overrightarrow{AB}$ al un segmento rectilíneo dirigido con punto inicial A y punto terminal B, ***figura 4***.

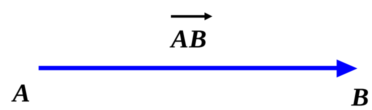
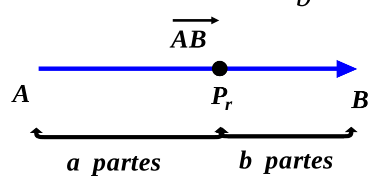


FIGURA 4.

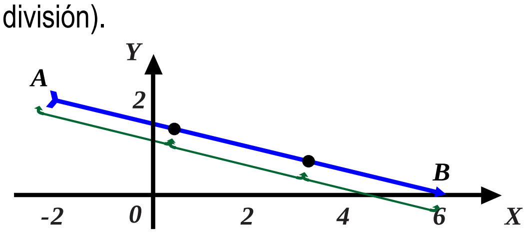
Si P_r es un punto de $\overrightarrow{AB}$, entonces $\overrightarrow{AB}$ este queda dividido en los segmentos rectilíneos: $\overrightarrow{AP_r}$ con longitud a y $\overrightarrow{P_rB}$ con longitud b, por tanto, $r=\frac{a}{b}$, observa la ***figura 5***.

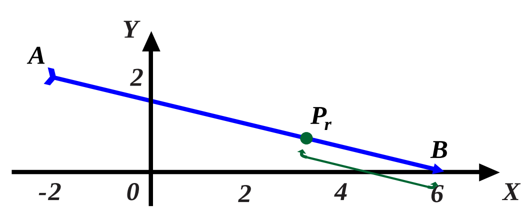


El ***ejemplo 4.*** aclara este concepto.

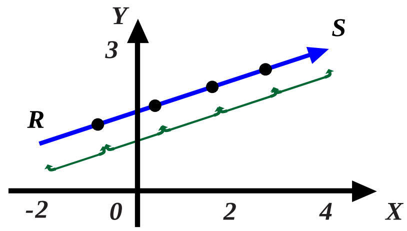
EJEMPLO 4. DIVISIÓN DE UN SEGMENTO RECTILÍNEO DIRIGIDO EN LA RAZÓN r

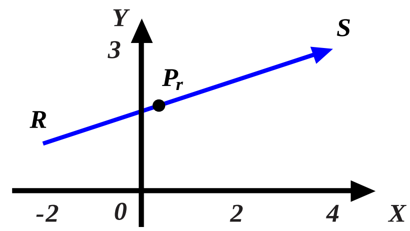
1. Si el segmento rectilíneo $\overrightarrow{AB}$ con extremos en $A(-2,2)$ y $B(6,0)$, es dividido en la razón $r=2=\frac{2}{1}$, entonces, el número de partes (congruentes) es $2+1$. La figura muestra el punto P_r (de división).



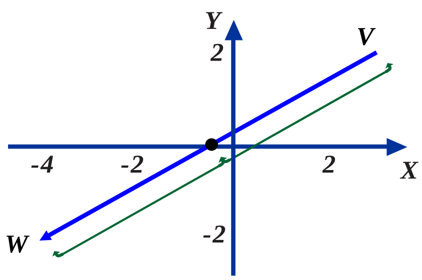


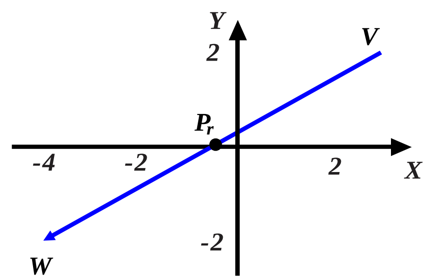
2. Localicemos el punto P_r que divide al segmento rectilíneo $\overrightarrow{RS}$, con extremos en $R(-2,1)$ y $S(4,3)$, en la razón $r=\frac{2}{3}$. El número de partes congruentes es $2+3=5$. La figura muestra el punto P_r (de división).



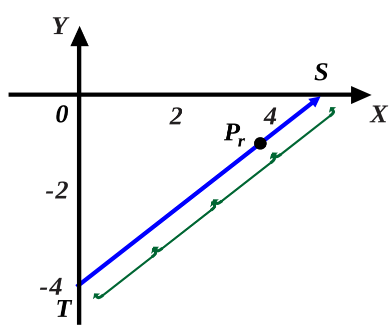


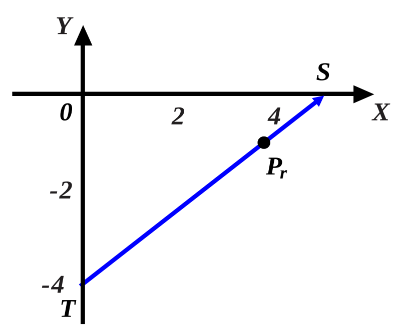
3. El segmento rectilíneo dirigido $\overrightarrow{VW}$ con extremos en $V(3,2)$ y $W(-4,-2)$, fue dividido en la razón $r=1=\frac{1}{1}$, es decir, en $1+1=2$ partes congruentes. En este caso P_r recibe el nombre de punto medio.





4. El punto P_r divide segmento rectilíneo dirigido $\overrightarrow{TS}$ con extremos en $S(5,0)$ y $T(0,-4)$, en la razón $r=\frac{3}{1}$, es decir, en 4 cuatro partes congruentes, observa la siguiente figura.





PROPIEDAD 2. COORDENADAS DEL PUNTO p_r DE DIVISIÓN DE $\overrightarrow{P_1P_2}$ EN LA RAZON r

Sea $\overrightarrow{P_1P_2}$ con extremos en $p_1(x_1, y_1)$ y $p_2(x_2, y_2)$, entonces:

a. Las coordenadas del punto $p_r(x_r, y_r)$ que divide a $\overrightarrow{P_1P_2}$ en la razón r son:

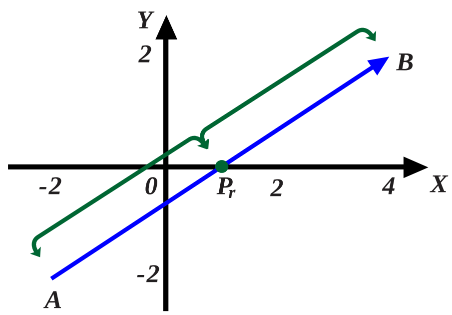
$$x_r = \frac{x_1 + rx_2}{1+r} \text{ y } y_r = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}$$

b. Las coordenadas del punto medio $p_M(x_M, y_M)$ son $x_M = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ y $y_r = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$

Los siguientes ejemplos muestran el uso de la ***propiedad 2***.

EJEMPLO 5. PUNTO DE DIVISIÓN DE UN SEGMENTO RECTILÍNEO DIRIGIDO

i. El punto P_r divide a $\overrightarrow{AB}$,con extremos en $A(-2,-2)$ y $B(4,2)$, en la razón $r=1$.Traza: el segmento rectilíneo $\overrightarrow{AB}$, obtén las coordenadas de P_r.



Sean $x_1 = -2$, $x_2 = 4$, $y_1 = -2$, $y_2 = 2$, sustituimos en:

$$x_r = \frac{x_1 + rx_2}{1+r} \text{ y } y_r = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}, \text{ obtenemos,}$$

$$x_r = \frac{-2+1(4)}{1+1} = 1 \text{ e } y_r = \frac{-2+1(2)}{1+1} = 0,$$

entonces, $P_r(1,0)$

ii. El punto P_r divide a $\overrightarrow{CD}$, con extremos en $C(-2,4)$ y $D(5,0)$, en la razón $r = \dfrac{1}{2}$. Traza: $\overrightarrow{CD}$ y obtén las coordenadas de P_r.

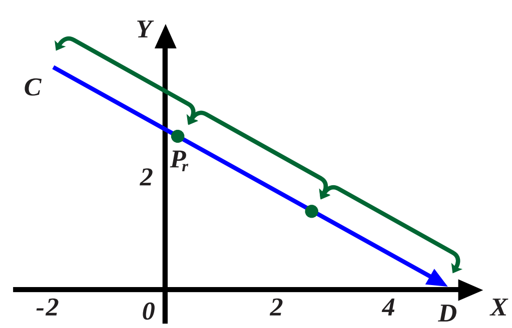
Sean $x_1 = -2$, $x_2 = 5$, $y_1 = 4$, $y_2 = 0$,

sustituimos en: $x_r = \dfrac{x_1 + rx_2}{1+r}$ y $y_r = \dfrac{y_1 + ry_2}{1+r}$,

obtenemos,

$$x_r = \frac{-2+\frac{1}{2}(5)}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \text{ e } y_r = \frac{4+\frac{1}{2}(0)}{1+\frac{1}{2}} = \frac{8}{3},$$

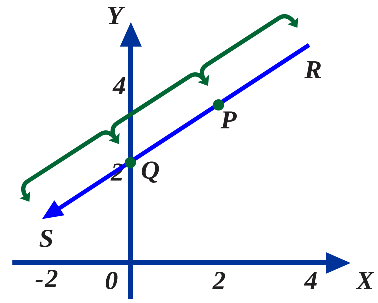
luego $P_r\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{8}{3}\right)$



iii. Se triseca (se divide en tres partes congruentes) $\overrightarrow{RS}$ ($R(4,5)$ y $S(-2,1)$). Calculemos los puntos de trisección.

Sean P y Q los puntos de trisección. En ambos casos $x_1=4$, $x_2=-2$, $y_1=5$, $y_2=1$.

En P la razón es $r=\frac{1}{2}$, por tanto,



$$x_r=\frac{4+\frac{1}{2}(-2)}{1+\frac{1}{2}}=2 \text{ e } y_r=\frac{5+\frac{1}{2}(1)}{1+\frac{1}{2}}=\frac{11}{3},$$

luego, $P\left(2,\frac{11}{3}\right)$.

En Q, $r=2$, entonces, $x_r=\frac{4+2(-2)}{1+2}=0$ e $y_r=\frac{5+2(1)}{1+2}=\frac{7}{3}$, o bien, $Q\left(0,\frac{7}{3}\right)$

iv. $\overrightarrow{P_1P_2}$ tiene: un extremo en $P_1(-4,4)$ y punto medio en $P_m(2,2)$ calcula las coordenadas del punto extremo desconocido. Puesto que $x_1=-4$, $x_m=2$ y $x_m=\frac{x_1+x_2}{2}$, entonces,

$$2=\frac{-4+x_2}{2}, \text{ o bien, } 4=-4+x_2, \text{ por tanto, } x_2=8.$$

Similarmente, $y_1=4$, $y_m=2$ y $y_m=\frac{y_1+y_2}{2}$, entonces, $2=\frac{-4+y_2}{2}$, o bien,

$$4=4+y_2, \text{ por tanto, } y_2=0$$

El otro extremo del segmento rectilíneo $\overrightarrow{P_1P_2}$ es $p_2(8,0)$

SECCIÓN 2.1 EJERCICIOS 3

1.

a. Si $P_1(5,3)$ y $P_2(-2,8)$. Calcula las coordenadas de $P_r(x_r,y_r)$, si divide al segmento rectilíneo $\overrightarrow{P_1P_2}$ en la razón $r=\frac{3}{4}$

b. Si $A(-6,2)$ y $B(2,-2)$, determina $P_r(x_r,y_r)$, si divide al segmento rectilíneo $\overrightarrow{AB}$ en la razón $r=\frac{1}{3}$

c. El segmento rectilíneo dirigido $\vec{AB}$ tiene por extremos: $A(6,-3)$ y $B(1,6)$, si $r=4$, determina $P_r(x_r, y_r)$

d. Grafica y calcula las coordenadas que dividen al segmento rectilíneo $\vec{PQ}$ (extremos en $P(-3,2)$ y $Q(1,6)$), en cuatro partes iguales.

e. Calcula los puntos que trisecan al segmento rectilíneo $\vec{AB}$ con extremos en $A(-1,-3)$ y $B(5,6)$

f. El trayecto entre los puntos $A(2,5)$ y $B(8,-1)$ es el segmento rectilíneo $\vec{AB}$, si el punto $P_r(x_r, y_r)$ se encuentra a un tercio del trayecto, ¿cuáles son sus coordenadas?

g. Si $A(-1,1)$ y $B(6,15)$, ¿en qué razón divide el punto $P_r\ (2,7)$ a $\vec{AB}$?

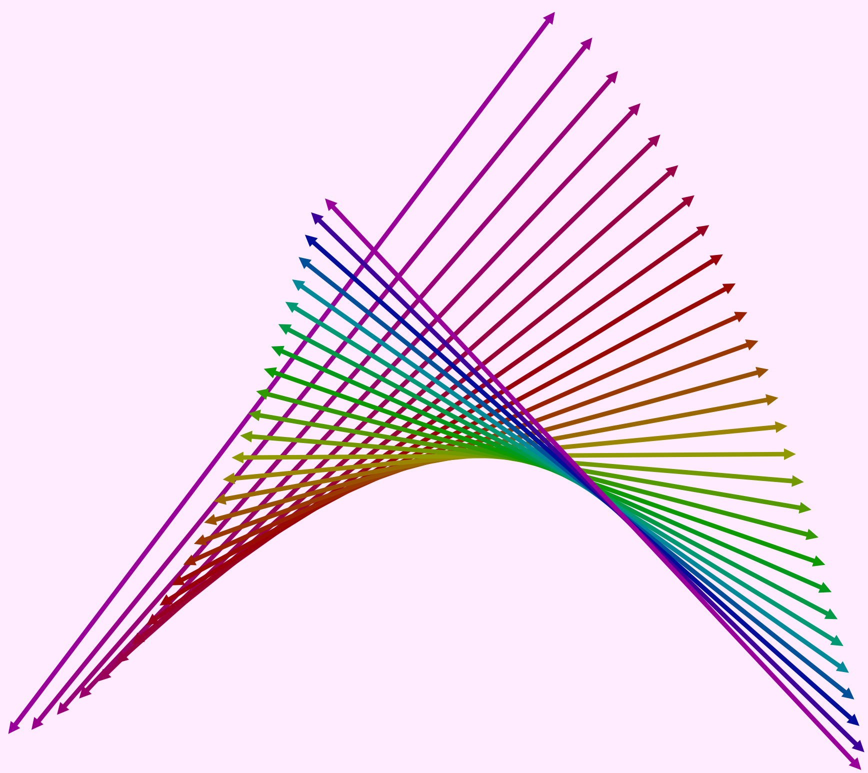
h. Si $A(-3,-2)$, $B(6,1)$ y $P_r\ (3,0)$ calcula r en $\vec{AB}$.

2.2 LUGARES GEOMÉTRICOS
EL PLANO CARTESIANO

APRENDIZAJES

EL ALUMNO:

8. Obtiene la expresión algebraica y la gráfica de un lugar geométrico.



El propósitos básico de la geometría analítica consiste en el estudio de la relación entre: una ecuación algebraica y un conjunto de puntos en el plano cartesiano, es decir:

i. Asociar a una figura en el plano cartesiano una “ecuación” con las variables x e y.

ii. A una “ecuación” en las variables x e y identificar la figura que le corresponde.

DEFINICIÓN 1. (LUGAR GEOMÉTRICO)

Un “lugar geométrico” es el conjunto de todos los puntos en el plano cartesiano que cumplen una condición (generalmente dada por una ecuación) específica.

Con los símbolos

$$LG=\{\,(x,y)\in IR^2 \mid p(x,y)=0\,\}$$

escribiremos formalmente un lugar geométrico del plano cartesiano; interpretaremos:

“El conjunto de los puntos en el plano cartesiano que satisfacen la condición $p(x,y)=0$”,

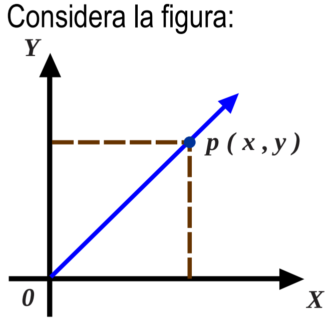
o bien,

“El conjunto de los puntos en el plano cartesiano, tales que, satisfacen la condición $p(x,y)=0$”.

EJEMPLO 1. IDENTIFICACIÓN DE LUGARES GEOMÉTRICOS

1. Analiza la curva en el plano cartesiano y obtén una relación (viable) entre las variables x e y.

a. Considera la figura:



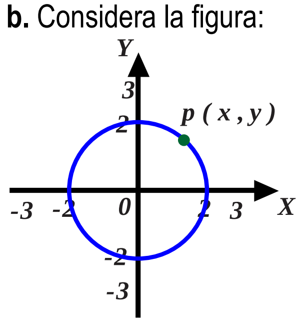
Los puntos $p(x,y)$ pertenecen al primer cuadrante del plano cartesiano y se encuentran a la misma distancia de ambos ejes coordenados, por tanto, $x=y$, con $x,\ y$ positivas, o bien,

$$x-y=0$$

El lugar geométrico puede escribirse en la forma:

$$LG=\{\,(x,y)\in IR^2 \mid x-y=0 \ con\ x,\ y\ positivas\,\}$$

b. Considera la figura:



Los puntos $p(x,y)$ se encuentran a tres unidades, del punto $O(0,0)$, por tanto,

$$d(p,O)=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=2,$$

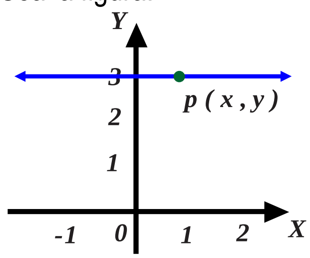
o bien,

$(x-0)^2+(y-0)^2=2^2$, de donde, $x^2+y^2-9=0$.

Por tanto,

$$LG=\{\,(x,y)\in IR^2 \mid x^2+y^2-4=0\,\}$$

c. Sea la figura:



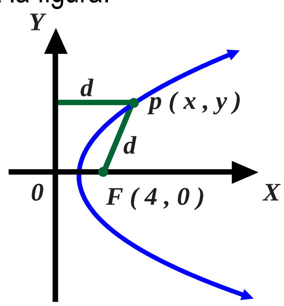
En los puntos $p(x, y)$ de la curva, la ordenada y se mantiene constante con valor

$$y = 3,$$

mientras que la coordenada x es variable, por tanto,

$$LG = \{ (x, y) \in IR^2 \mid y - 3 = 0 \}$$

d. Sea la figura:



El punto $F(4, 0)$ es fijo, en el eje Y, los puntos son de la forma $L(0, y)$, el punto

$$p(x, y)$$

se desplaza de manera que siempre se encuentra a la misma distancia de $L(0, y)$ y $F(4, 0)$

Para obtener la ecuación (condición) que describe el punto $p(x, y)$ notemos:

i. Su distancia al eje Y, es

$$d(L, P) = x$$

ii. Su distancia al punto F es:

$$d(P, F) = \sqrt{(x-4)^2 + y^2},$$

o bien,

$$d(P, F) = x^2 - 8x + 16 + y^2$$

iii. De la condición $d(P, L) = d(P, F)$

obtenemos $x = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}$,

o bien,

$$x^2 = x^2 - 8x + 16 + y^2$$

$$y^2 - 8x + 16 = 0$$

Luego $LG = \{ (x, y) \in IR^2 \mid y^2 - 8x + 16 = 0 \}$

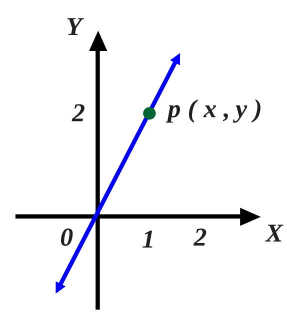
e. Sea $y - 2x = 0$ la condición que cumplen los puntos de un lugar geométrico en el plano cartesiano.
Su expresión es:

$$LG = \{ (x, y) \in IR^2 \mid y - 2x = 0 \}$$

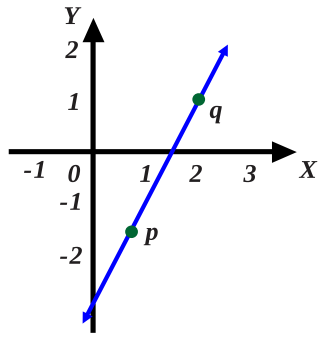
Puesto que

$$y - 2x = 0$$

es equivalente a $y = 2x$, entonces, la variable x es "la mitad" de la variable y, equivalentemente, "la ordenada y es el doble de la abscisa x".



f. Traza y escribe formalmente el lugar geométrico de los puntos $p(x, y)$ tales que: $p(x, y)$ se desplaza de manera que la pendiente que forma con el punto fijo $q(2, 1)$ se mantiene constante y esta tiene valor $m = 2$



ii. Puesto que $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, entonces,

$2=\dfrac{y-1}{x-2}$, de donde $2(x-2)=y-1$,

es decir,

$2x-4=y-1$, o bien, $y-2x+3=0$

iii. Su expresión es:

$LG=\{(x,y)\in IR^2 \mid y-2x+3=0\}$

g. Determina la expresión formal para el lugar geométrico de los puntos $p(x,y)$ tales que: $p(x,y)$ se encuentra a la misma distancia (equidista) de los puntos $A(-2,0)$, $B(0,2)$.

i. Sea el punto $p(x,y)$ el que genera el lugar geométrico, a condición indica

$$d(P,A)=d(P,B), \text{ o bien, } \sqrt{(x+2)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x-0)^2+(y-2)^2}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación, $(x+2)^2+y^2=x^2+(y-2)^2$,

por tanto, $x^2+4x+4+y^2=x^2+y^2-4y+4$, de donde $x+y=0$

ii. La expresión es: $LG=\{(x,y)\in IR^2 \mid y=-x\}$

SECCIÓN 2.1
EJERCICIOS 1

1. Traza y escribe formalmente el lugar geométrico de los puntos $p(x,y)$ en el plano cartesiano:

a. $p(x,y)$ se desplaza de manera que la pendiente que determina con el punto fijo $B(-2,3)$ se mantiene constante con valor $m=1$

b. $p(x,y)$ que equidistan del punto fijo $C(0,1)$ en 1 unidad.

c. $p(x,y)$ se encuentran a la misma distancia de los extremos del segmento rectilíneo definido por los puntos $A(-3,0)$ y $B(0,3)$.

d. $p(x,y)$ se encuentran en los cuadrantes II y IV, y equidista de los ejes cartesianos.

e. $p(x,y)$ tales que, la ordenada es variable y la abscisa tiene valor -2.

f. La ordenada es un tercio de la abscisa.

g. La distancia $A(0,0)$ es el doble que su distancia a $B(-1,0)$

h. Equidista de los puntos $p_1(1,2)$ y $p_2(2,-1)$, extremos del segmento de recta $\overline{p_1p_2}$

i. La primera coordenada es 2 unidades mayor que la segunda.

j. Tales que: la suma de los cuadrados de sus coordenadas es 6.

k. Define un segmento rectilíneo con pendiente $m=\dfrac{3}{2}$ con el punto $p_0(1,2)$

2.3 SOLUCIONES Y EVALUACIÓN

SOLUCIÓN A EJERCICIOS PROPUESTOS

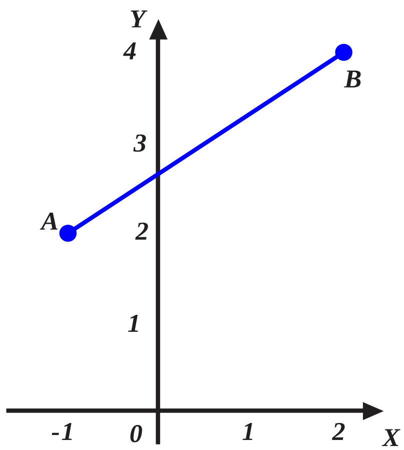
EXAMEN DE LA UNIDAD

SOLUCIONES DEL EXAMEN DE LA UNIDAD 2

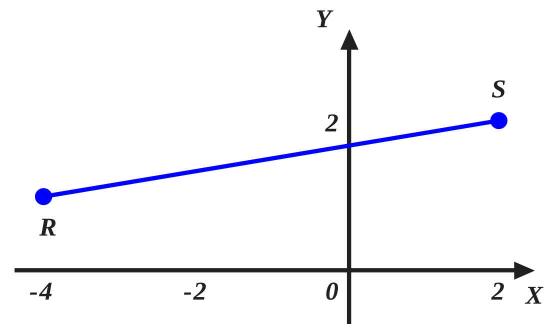
SECCIÓN 2.1
EJERCICIOS 1 SOLUCIONES

1.

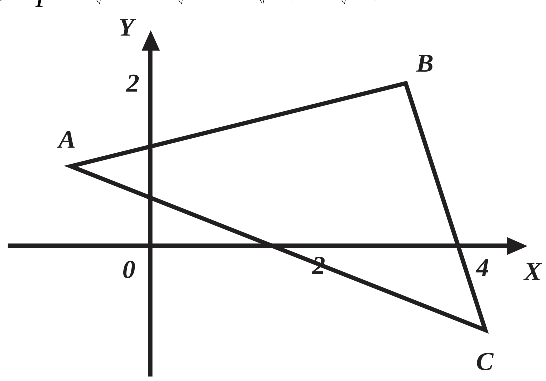
a. $\sqrt{13}$



b. $\sqrt{37}$

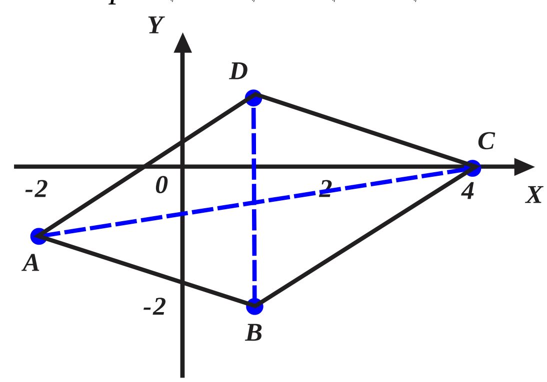


c.. $p = \sqrt{17} + \sqrt{10} + \sqrt{10} + \sqrt{29}$



d. $d_{AC} = 6.08$, $d_{BD} = 3$ y

$p = \sqrt{10} + \sqrt{13} + \sqrt{10} + \sqrt{13}$



e. $x = -4 + \sqrt{7}$, también $x = -4 - \sqrt{7}$

f. $y = -3$.

g.

i. En el eje y $p_y\left(0,2\right)$ y en el eje x $p_x\left(4,0\right)$

ii. En el eje y $r_y\left(0,-5\right)$ y en el eje x $r_x\left(-3,0\right)$

SECCIÓN 2.1
EJERCICIOS 2 SOLUCIONES

1.

a.

i. $m = 1$

ii. $m = \frac{3}{5}$

iii $m = -1$

b.

i. $x = 0$

ii. $x = -2 - \frac{\sqrt{3}}{3}$

iii. $y = 6 - \frac{2\sqrt{3}}{3}$

c.

i. $x = -6$

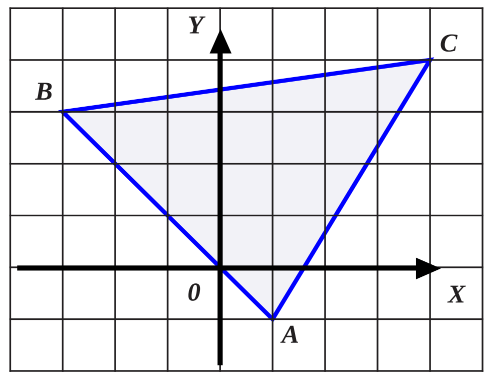
ii. $y = 2$

iii. $x = 3$

d. $m_{AB} = -1$, $m_{AC} = \frac{5}{3}$ y $m_{BC} = \frac{1}{7}$

$m\angle L_{AB} = 135°$, $m\angle L_{AC} = 53.036°$

$m\angle L_{BC} = 8.213°$



SECCIÓN 2.1
EJERCICIOS 2 SOLUCIONES

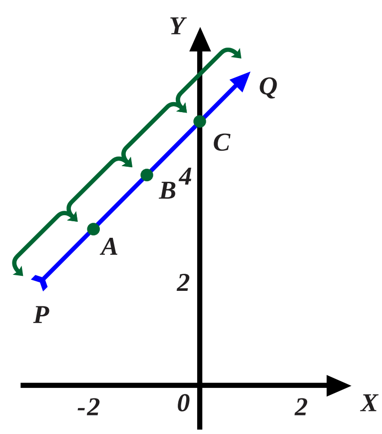
1.

a. $P_r\left(2, \frac{36}{7}\right)$

b. $P_r\left(4, 1\right)$

c. $P_r\left(\frac{10}{5}, \frac{21}{5}\right)$

d. $A(-2, 3)$, $B(-1, 4)$, $C(0, 5)$



e. $T_1(1, 0)$ y $T_2(3, 3)$

f. $P_r(4, 3)$

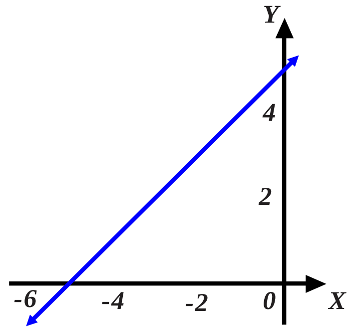
g. $r = \frac{3}{4}$

h. $r = 2$

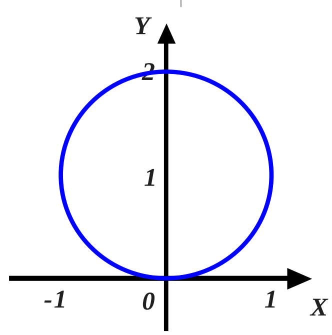
SECCIÓN 2.2
EJERCICIOS 1 SOLUCIONES

1.

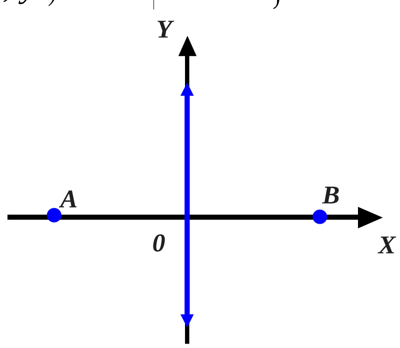
a. $LG = \left\{ (x, y) \in IR^2 \;\middle|\; x - y + 5 = 0 \right\}$



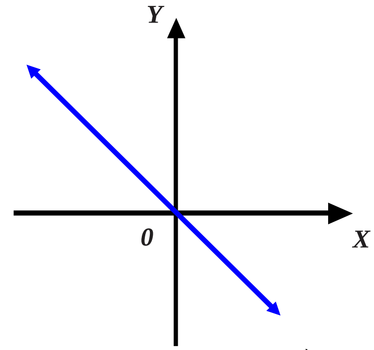
b.
$LG = \left\{ (x, y) \in IR^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 - 2y = 0 \right\}$



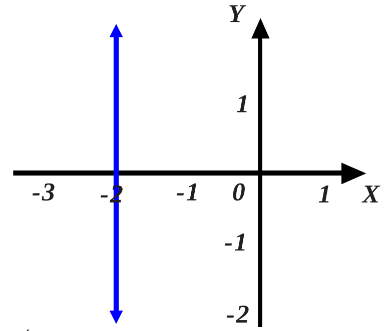
c. $LG = \left\{ (x, y) \in IR^2 \;\middle|\; x = 0 \right\}$



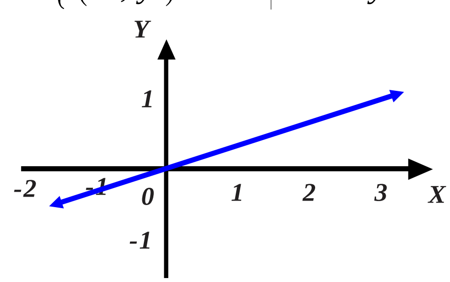
d. $LG = \left\{ (x, y) \in IR^2 \;\middle|\; x + y = 0 \right\}$



e. $LG = \left\{ (x, y) \in IR^2 \;\middle|\; x + 2 = 0 \right\}$



f. $LG = \left\{ (x, y) \in IR^2 \;\middle|\; x - 3y = 0 \right\}$



g. $LG = \left\{ (x, y) \in IR^2 \;\middle|\; 3x^2 + 3y^2 + 2x - 1 = 0 \right\}$

h. $LG = \left\{ (x, y) \in IR^2 \;\middle|\; x - 3y = 0 \right\}$

i. $LG = \left\{ (x, y) \in IR^2 \;\middle|\; x - y - 2 = 0 \right\}$

j. $LG = \left\{ (x, y) \in IR^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 - 6 = 0 \right\}$

k. $LG = \left\{ (x, y) \in IR^2 \;\middle|\; 3x - 2y + 1 = 0 \right\}$

UNIDAD 2 SOLUCIONES AL EXAMEN

CONCEPTOS

1. ¿Cómo se interpreta un punto en el plano cartesiano?

2. ¿Cómo se define el ángulo de inclinación de un segmento rectilíneo?

3. ¿Cómo se interpreta la pendiente de un segmento rectilíneo?

4. ¿Qué valor tiene la pendiente de un segmento rectilíneo vertical?

5. ¿Qué valor tiene la pendiente de un punto?

6. ¿Si un segmento rectilíneo dirigido se divide en tres partes congruentes, entonces, la razón puede tomar los valores?

7. ¿Si un segmento rectilíneo dirigido se divide dos partes congruentes, entonces, el punto de división se conoce cómo?

8. ¿Cómo se define formalmente un lugar geométrico del plano cartesiano?

DESARROLLOS OPERATIVOS

9. Calcula la longitud del perímetro del triángulo con vértices en $A(-2,0)$, $B(1,4)$, $C(3,6)$

10. Sea el triángulo con vértices en los puntos $A(-2,0)$, $B(1,4)$, $C(1,6)$. Calcula las pendientes y los puntos medios de los lados

11. Traza y escribe formalmente el lugar geométrico de los puntos que satisfacen la condición:
El punto $A(4,-1)$ es fijo y el punto $P(x,y)$ se desplaza de manera que todos los segmentos rectilíneos que definen tienen pendiente $m=\frac{1}{3}$

PARA PENSAR

12. El perímetro de un cuadrado es $4\sqrt{8}$ unidades, si sus diagonales se encuentran sobre los ejes coordenados, ¿cuáles son sus vértices?

13. Determina la condición que satisface el lugar geométrico del plano tal que: el desplazamiento del punto $p(x, y)$ forma segmentos rectilíneos de pendiente m con el punto $p_1(x_1, y_1)$.

ESCALA

Preguntas 1 a 8., un punto cada una.
Problemas 9. a 11. tres puntos cada uno.
Problemas 12. a 13. cuatro puntos cada uno.

Para acreditar se requieren un mínimo de 15 puntos

UNIDAD 2 SOLUCIONES AL EXAMEN

CONCEPTOS

1. Un par ordenado (de números reales).

2. Ángulo con lado inicial el eje de las abscisas, lado final: segmento rectilíneo y vértice el punto donde se interseca el eje de las abscisas y el segmento rectilíneo (o su prolongación).

3. Se relaciona con el ángulo de inclinación del segmento rectilíneo y proporciona una idea sobre su inclinación.

4. Está indefinida (o es infinita).

5. Está indefinida.

6. $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{1}$

7. Punto medio.

8. $LG = \{ (x, y) \in IR^2 \mid p(x, y) = 0 \}$

DESARROLLOS OPERATIVOS

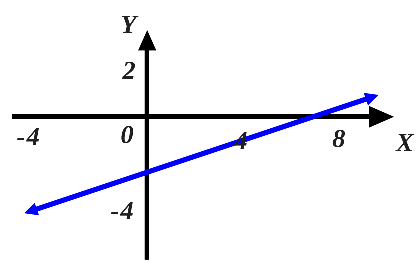
9. $d = 5 + \sqrt{61} + \sqrt{8}$ unidades.

10. $m_{AB} = \frac{4}{3}$, $m_{AC} = 2$ y m_{BC} indefinida.

$PM_{AB}\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$, $PM_{BC}(1, 5)$ y

$PM_{AC}\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$

11. $LG = \{ (x, y) \in IR^2 \mid x - 3y - 7 = 0 \}$



PARA PENSAR

12. $(-2, 0)$, $(2, 0)$, $(0, -2)$ y $(0, 2)$

13. $mx - y - mx_1 + y_1 = 0$

3

LA LÍNEA RECTA Y SU ECUACIÓN CARTESIANA

PROPÓSITOS

Al finalizar la unidad, el alumno:
Será capaz de obtener la ecuación cartesiana de la línea recta, dados diversos elementos definitorios. Resolverá problemas geométricos en diversos contextos, a fin de que se avance en la comprensión del método analítico.

CONCEPTOS CLAVE

Lugar geométrico. Conjunto de puntos en el plano que satisfacen cierta condición.

Línea recta. Lugar geométrico generado por dos puntos, uno fijo y otro que desplaza de manera que la pendiente que definen permanece constante.

Pendiente. Dados dos puntos, ranzón entre la diferencia de ordenadas y la diferencia de abscisas.

Formas de una línea recta. Su representación algebraica**.**

Ángulo formado por dos líneas rectas. El ángulo agudo que definen las dos líneas rectas.

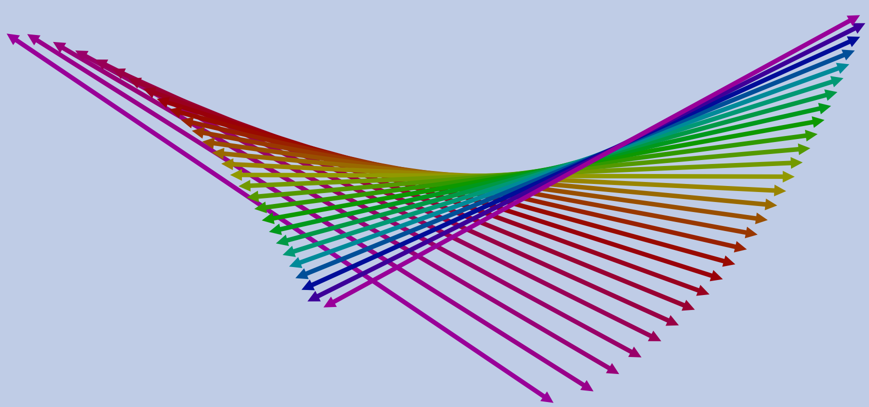
Distancia entre una línea recta y un punto exterior. Longitud del segmento rectilíneo perpendicular a la línea recta, sus extremos: el punto exterior y un punto de la línea recta.

3.1 LA LÍNEA RECTA EN EL PLANO CARTESIANO

APRENDIZAJES

EL ALUMNO:

1. Describe a la recta como un lugar geométrico, identificando los elementos que la definen.
2. Entenderá a la pendiente de una línea recta, como un invariante.
3. Obtiene la ecuación de una línea recta, dadas dos condiciones.
4. Determina el ángulo que se forma cuando dos líneas rectas se cortan, en términos de sus pendientes.
5. Identifica y transita en las diferentes formas la ecuación de la línea recta (ordinaria o canónica, general y simétrica).
6. Determina cuando dos rectas son paralelas, perpendiculares o ninguna de las dos, a partir de sus ecuaciones.
7. Dada la ecuación de una recta el alumno es capaz de encontrar las ecuaciones de rectas paralelas y/o perpendiculares a ella.



En geometría analítica la línea recta se trata como un lugar geométrico, para definirla se utilizan: un punto fijo, un punto que se desplaza y la pendiente que generan los puntos antes señalados

DEFINICIÓN 1. (LÍNEA RECTA)

La línea recta es el lugar geométrico generado por un punto fijo y un punto que se desplaza, de manera que la pendiente (de todos los segmentos de recta que generan) permanece constante.

Bajo las condiciones dadas en la ***definición 1.***, con $p_0\,(\,x_0\,,y_0\,)$ como punto fijo, $p\,(\,x\,,y\,)$ como punto variable y m pendiente constante se obtienen las ecuaciones de la ***propiedad 1***.

PROPIEDAD 1. (ECUACIONES DE UNA LÍNEA RECTA)

a. $y-y_0=m(\,x-x_0\,)$ es la "ecuación de la línea recta dado uno de sus puntos y su pendiente".

b. $y-y_0=\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(\,x-x_0\,)$ es la "ecuación de la línea recta dados dos de sus puntos".

EJEMPLO 1. CONDICIONES QUE DEFINEN A UNA LÍNEA RECTA

a. Sean los puntos:

$$p_0\,(\,2\,,-1\,)\text{ y }p_1\,(\,-1\,,5\,),$$

entonces,

$x_0=2$, $y_0=-1$, $x_1=-1$, $y_1=5$. Si sustituimos estos valores en $y-y_0=\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(\,x-x_0\,)$

obtenemos

$$y+1=\frac{5+1}{-1-2}(\,x-2),\text{ o bien },\ y+1=-2(\,x-2)$$

b. Si

$$p_0\left(\,0\,,\frac{1}{2}\right)\text{ y }p_1\left(\,\frac{3}{4}\,,2\,\right),$$

entonces,

$x_0=0$, $y_0=\dfrac{1}{2}$, $x_1=\dfrac{3}{4}$, $y_1=2$. Si sustituimos estos valores en $y-y_0=\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(\,x-x_0\,)$

obtenemos

$$y-\frac{1}{2}=\frac{2-\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}-0}(\,x-0\,),\text{ es decir, }y-\frac{1}{2}=2x$$

c. La pendiente $m=-\frac{2}{5}$ y el punto $p_0\ (\ 2\ ,3\ )$ determinan la línea recta de ecuación

$$y-3=-\frac{2}{5}(\ x-2\ )$$

d. La pendiente $m=-1$ y el punto $p_0\ (\ -4\ ,0\ )$ determinan la línea recta de ecuación

$$y=-(\ x+4\ )$$

Podemos rescribir las ecuaciones $y-y_0=m(\ x-x_0\ )$ y $y-y_0=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(\ x-x_0\ )$ (aplicando un proceso algebraico adecuado) en las formas que señala la ***propiedad 2***, si éste es el caso tienen un nombre específico.

PROPIEDAD 2. (FORMAS DE UNA LÍNEA RECTA)

La ecuación:

a. Si A y B no son cero simultáneamente, entonces, $Ax+By+C=0$ es la "forma general de la línea recta".

b. $y=mx+b$ es la "forma pendiente ordenada al origen de la línea recta".

c. Si a y b son distintos de cero, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ es la "forma simétrica de la línea recta".

EJEMPLO 2. TRÁNSITO ENTRE LAS FORMAS DE UNA LÍNEA RECTA

Obtengamos las formas de la línea recta solicitada.

a. Los puntos $p_0\left(\ 0\ ,\frac{1}{2}\right)$ y $p_1\left(\ \frac{3}{4}\ ,2\ \right)$ determinan la línea recta con ecuación

$$y-\frac{1}{2}=\frac{2-\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}-0}(\ x-0\ ),\text{ o bien },\ y-\frac{1}{2}=2x$$

i. Forma general:

Multiplicamos $y-\frac{1}{2}=2x$ por 2 y reacomodamos términos, obtenemos:

$$4x-2y+1=0\text{, con }A=2\ ,\ B=-1\text{ y }C=-2$$

ii. Forma pendiente ordenada al origen.

Reacomodando $y-\frac{1}{2}=2x$, obtenemos la forma pendiente ordenada al origen:

$$y = 2x + \frac{1}{2}\text{, en donde, } m = 2 \text{ y } b = \frac{1}{2}$$

iii. Forma simétrica.

$y - \frac{1}{2} = 2x \Leftrightarrow 2x - y = -\frac{1}{2}$, o bien, $-4x + 2y = 1$, entonces, $\frac{x}{-\frac{1}{4}} + \frac{y}{\frac{1}{2}} = 1$, con

$$a = -\frac{1}{4} \text{ y } b = \frac{1}{2}$$

b. La pendiente $m = \frac{2}{3}$ y el punto $p_0\,(\,2\,,\,2\,)$ determinan la línea recta de ecuación

$$y - 2 = \frac{2}{3}(\,x - 2\,)\text{, por tanto:}$$

i. Forma general.

Desarrollando $y - 2 = \frac{2}{3}(\,x - 2\,) \Leftrightarrow 3y - 6 = 2x - 4$, por tanto, $2x - 3y + 2 = 0$ con

$$A = 2\,,\ B - 3 \text{ y } C = 2$$

ii. Forma pendiente ordenada al origen.

Con $2x - 3y + 2 = 0$ obtenemos: $3y = 2x + 2$, o bien $y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$, luego

$$m = -\frac{2}{5} \text{ y } b = \frac{19}{5}$$

iii. Forma simétrica:

$2x - 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y = -2$, dividimos cada término por -2, obtenemos,

$$-x + \frac{3}{2}y = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{-1} + \frac{y}{\frac{2}{3}} = 1\text{, y } a = -1 \text{ y } b = \frac{2}{3}$$

c. Si $2x + 3y - 12 = 0$, entonces:

i. Para obtener la forma pendiente ordenada al origen despejamos y.

$$2x + 3y - 12 = 0 \Leftrightarrow 3y = -2x + 12 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + 4\,,$$

$$\text{con: } m = -\frac{2}{3} \text{ y } b = 4$$

ii. Forma simétrica**.**

De l $2x + 3y - 12 = 0$, obtenemos,

$$2x + 3y = 12 \Leftrightarrow \frac{2x}{12} + \frac{3y}{12} = \frac{12}{12} \Leftrightarrow \frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1$$

4. Sea $y = 5x + 2$.

i. Forma general:

$$y=5x+2 \iff 0=5x-y+2 \iff 5x-y+2=0$$

ii. Forma simétrica:

$$y=5x+2 \iff 5x-y=-2 \iff -\frac{5}{2}x-\frac{y}{-2}=\frac{-2}{-2}\text{, o bien, }\frac{x}{-\frac{2}{5}}+\frac{y}{2}=1$$

5. Si $\frac{x}{5}+\frac{y}{4}=1$, entonces:

i. Forma general:

Multiplicamos los términos de la ecuación por $(5)(4)=20$, obtenemos

$$4x+5y=20 \iff 2x+5y-20=0$$

ii. Forma pendiente ordenada al origen:

$$\frac{x}{5}+\frac{y}{4}=1 \iff \frac{y}{4}=-\frac{x}{5}+1 \iff y=-\frac{4}{5}x+4$$

SECCIÓN 3.1 EJERCICIOS 1

1.

Obtén las tres formas las líneas rectas con las características indicadas.

a. Los puntos $p_0(1,0)$ y $p_1(-1,4)$

b. Los puntos $p_0(-2,-2)$ y $p_1(4,5)$

c. Los puntos $p_0(-3,-4)$ y $p_1(0,6)$

d. La pendiente $m=1$ y el punto $p_0(-2,1)$

e. La pendiente $m=-2$ y el punto $p_0(-4,-3)$

f. La pendiente $m=\frac{1}{4}$ y el punto $p_0(0,4)$

El trazo de una línea recta (en el plano cartesiano) se efectúa con cualquiera de sus formas.

1. Forma general: Se seleccionan dos abscisas y se evalúan en la ecuación, se forman dos puntos.

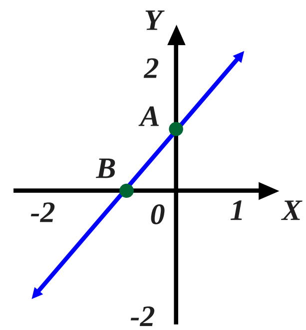
2. Forma pendiente ordenada al origen: Se utiliza una abscisa, se evalúa en la ecuación para generar un punto, se utiliza la ordenada al origen y un punto.

3. Forma simétrica: Los divisores se localizan en los ejes coordenados y por los puntos que definen se traza la línea recta.

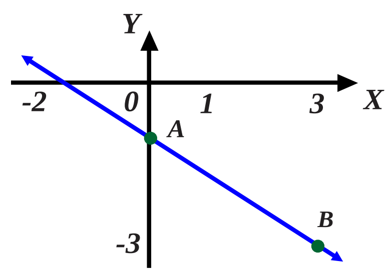
EJEMPLO 3. TRAZO DE UNA LÍNEA RECTA

a. Trazo de la línea recta utilizando su forma general.
$3x-4y+4=0$

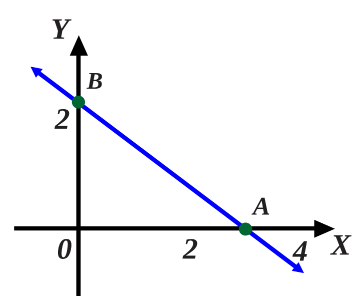
i. Sea $x=0$, entonces, $3(\ 0\ )-4y+4=0$,
$3(\ 0\ )-4y+4=0 \Leftrightarrow -4y+4=0 \Leftrightarrow y=1$
La línea recta contiene al punto $A(\ 0\ ,1\ )$
ii. Sea $y=0$, entonces, $3x-4(\ 0\ )+4=0$,
es decir, $3x+4=0 \Leftrightarrow x=-\frac{4}{3}$
La línea recta contiene al punto $B\left(-\frac{4}{3},0\right)$



b. Trazo de una línea recta utilizando su forma pendiente ordenada al origen.
$y=-\frac{2}{3}x-1$
i. Contiene al punto
$A(\ 0\ ,-1\ )$
ii. Sea $x=3$, entonces,
$y=-\frac{2}{3}(\ 3\ )-1 \Leftrightarrow y=-3$.
La línea recta contiene al punto
$B(\ 3\ ,-3\ )$



c. Trazo de una línea recta utilizando su forma simétrica.
Si $\frac{x}{3}+\frac{y}{\frac{7}{3}}=1$, entonces, línea recta contiene a
los puntos
$A(\ 3\ ,0\ )$ y $B\left(\ 0\ ,\frac{7}{3}\right)$.



SECCIÓN 3.1
EJERCICIOS 2

1. Traza la línea recta.

a. $x+2y+2=0$ **b.** $\frac{x}{-2}+\frac{y}{4}=1$ **c.** $y=3x+2$ **d.** $x+3y+2=0$

e. $y=-\frac{2}{3}x-1$ **f.** $2x-3y+4=0$ **g.** $\frac{x}{1}+\frac{y}{3}=1$ **h.** $\frac{x}{-2}+\frac{y}{\frac{4}{3}}=1$

Con el eje de las abscisas y una línea recta podemos construir un ángulo en el plano cartesiano, este ángulo tiene lado inicial al eje de las abscisas y lado terminal a la línea recta.

DEFINICIÓN 2. (ÁNGULO ASOCIADO A UNA LÍNEA RECTA)

El ángulo asociado a una línea recta tiene:
Lado inicial, el eje de las abscisas.
Lado terminal, la línea recta.
Se mide en sentido levógiro (giro en sentido opuesto a las manecillas de un reloj) y es positivo.

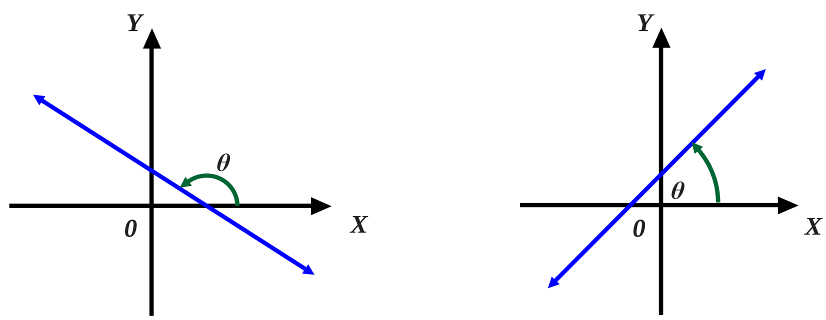


FIGURA 1.

El ángulo asociado a una línea recta está asociado con su pendiente m; puede justificarse: sí $\angle\theta$ es tal ángulo, entonces, su amplitud o medida (representado con $M\angle\theta$) es $M\angle\theta = tg^{-1}(\ m\ )$ grados. A una línea recta vertical se le asocia un ángulo de $90°$ y a una línea recta paralela al eje de las abscisas tiene un ángulo de medida $0°$.

PROPIEDAD 3. (MEDIDA DEL ÁNGULO ASOCIADO A UNA LÍNEA RECTA)

La línea recta con pendiente m tiene asociado un ángulo de amplitud $M\angle\theta = tg^{-1}(\ m\ )$ grados.

En la expresión $M\angle\theta = tg^{-1}(\ m\ )$, el término $tg^{-1}(\ m\ )$ se refiere a la función “tangente inversa (también llamada ángulo tangente o arco tangente) y su valor suele calcularse utilizando una calculadora científica o alguna aplicación que la incluya).

EJEMPLO 5. MEDIDA DEL ÁNGULO DE INCLINACIÓN DE UNA LINEA RECTA

a. Si $y = x + 4$, entonces, $m = 1$ y $M\angle\theta = tg^{-1}(1) = 45°$

b. Si $y = -x - \frac{3}{2}$, entonces, $m = -1$ y $M\angle\theta = tg^{-1}(-1) = 135°$

c. Si $\frac{x}{-2} + \frac{y}{4} = 1$, entonces, $m = \frac{1}{2}$ (verifícalo) y $M\angle\theta = tg^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 63.435°$

d. Si $3x - 4y + 4 = 0$, entonces, $m = \frac{3}{4}$ (verifícalo) y $M\angle\theta = tg^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = 36.869°$

Dos líneas rectas (no paralelas) generan pares de ángulos opuestos por el vértice, si las rectas no son perpendiculares, los ángulos agudos son congruentes, también lo son los ángulos obtusos. Llamaremos al ángulo agudo "ángulo entre las líneas rectas", ***figura 2***.

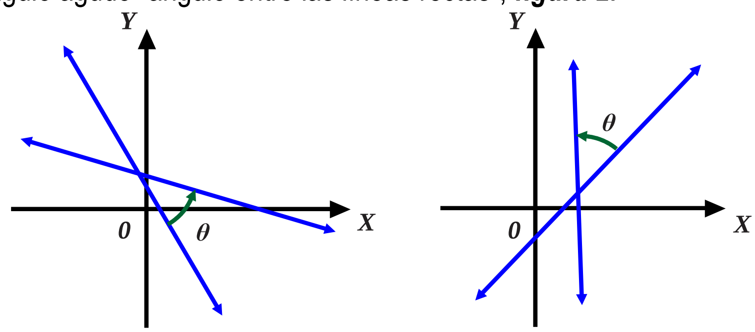


FIGURA 2.

Si dos líneas rectas

L_1 y L_2 forman ángulos de medidas (amplitudes) $m\angle\theta_1$ y $m\angle\theta_2$

con respecto al eje x de manera que

$$m\angle\theta_1 < m\angle\theta_2 \text{ y } m\angle\theta_2 - m\angle\theta_1 < \frac{\pi}{2},$$

el ángulo generado por las dos rectas tiene medida: $m\angle\theta = m\angle\theta_2 - m\angle\theta_1$

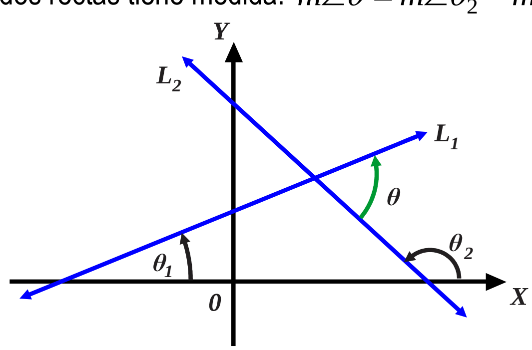


FIGURA 3.

Utilizando la identidad trigonométrica para la tangente de la diferencia de dos ángulos, obtenemos la ***proposición 3***.

PROPIEDAD 3. (MEDIDA DEL ÁNGULO FORMADO POR DOS LÍNEAS RECTAS)

Sean las líneas rectas L_1 y L_2 (no perpendiculares) con pendientes m_1 y m_2 respectivamente, y $\angle\theta$ el ángulo agudo que generan.

a. Si $m_1 \neq m_2$, entonces, $m\angle\theta = tg^{-1}\left(\left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} \right| \right)$

b. Si $m_1 = m_2$, entonces, $m\angle\theta = 0°$

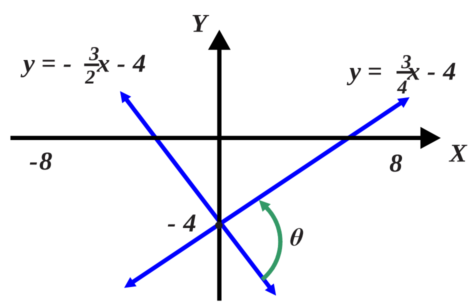
c. Si $m_1 \cdot m_2 \neq -1$, entonces, $m\angle\theta = 90°$

EJEMPLO 5. MEDIDA DEL ÁNGULO FORMADO POR DOS LINEAS RECTAS

1. Las líneas rectas con ecuaciones: $y = \frac{3}{4}x - 4$ y $y = -\frac{3}{2}x - 4$ tienen pendientes $m_1 = \frac{3}{4}$ y $m_2 = -\frac{3}{2}$, respectivamente, por tanto, forman un ángulo de amplitud:

$$m\angle\theta = tg^{-1}\left(\left| \frac{\left(-\frac{3}{2}\right) - \left(\frac{3}{4}\right)}{1 + \left(\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)} \right| \right)$$

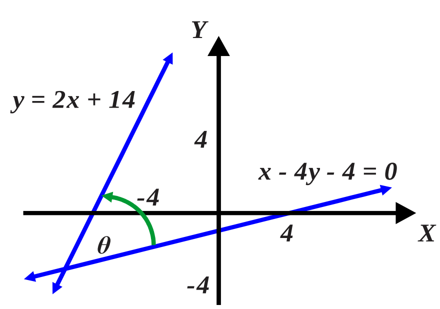
$$= tg^{-1}(18°) = 86.62°$$



2. Las pendientes de las líneas rectas con ecuaciones $y = 2x + 14$ y $x - 4y - 4 = 0$ son 2 y $\frac{1}{4}$, por tanto, la amplitud del ángulo que definen es:

$$m\angle\theta = tg^{-1}\left(\left| \frac{\frac{1}{4} - 2}{1 + (2)\left(\frac{1}{4}\right)} \right| \right)$$

$$= tg^{-1}\left(\frac{7}{6}\right) = 49.4°$$



SECCIÓN 3.1
EJERCICIOS 3

1.

a. Calcula la medida del ángulo de inclinación de la línea recta con ecuación:

i. $y = \frac{1}{4}x + 2$

ii. $2x - y + 1 = 0$

iii. $\frac{x}{1} + \frac{y}{3} = 1$

iv. Contiene a los puntos $A(3, 0)$ y $B\left(0, \frac{8}{5}\right)$

b. Calcula la medida del ángulo que forman las líneas rectas con ecuaciones:

i. $x + y - 2 = 0$ y $x - 4y = 0$

ii. $\frac{3x}{4} - \frac{y}{4} = 1$ y $2x - 3y - 3 = 0$

iii. $y = \frac{3}{2}x + 3$ y $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$

iv. $2x + y - 2 = 0$ y $y = -3x$

Con la propiedad 3. es posible generar nuevas líneas rectas.

EJEMPLO 6. LÍNEAS RECTAS PERPENDICULARES Y LÍNEAS RECTAS PARALELAS

1. Obtén la ecuación: de la línea recta paralela y de la línea recta perpendicular que contiene al punto indicado. Trázalas.

a. A la línea recta de ecuación $2x - 4y - 1 = 0$ y pasa por $p_0(-1, -1)$

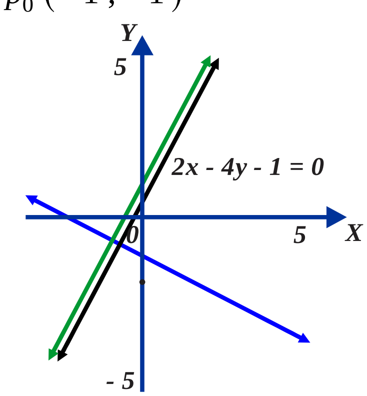
La pendiente de $2x - 4y - 1 = 0$ es $m = \frac{1}{2}$,

por tanto:

i. La línea recta paralela a ella tiene la misma pendiente $m = \frac{1}{2}$ y pasa por $p_0(-1, -1)$,

luego

$y + 1 = \frac{1}{2}(x + 1)$, entonces, $x - 2y - 1 = 0$



ii. La línea recta perpendicular a ella tiene pendiente $m_{\perp} = -2$ y pasa por $p_0(-1, -1)$, así

$$y + 1 = -2(x + 1), \text{ o bien, } 2x + y + 3 = 0$$

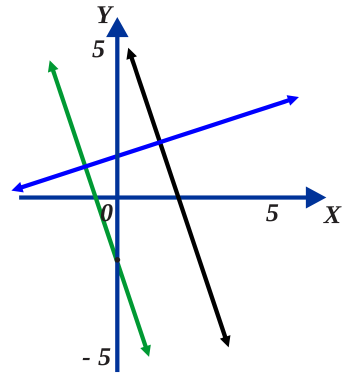
b. A la línea recta de ecuación $\frac{x}{2}+\frac{y}{6}=1$ y contiene al punto $p_0\,(-1\,,\,1)$.

Si $\frac{x}{2}+\frac{y}{6}=1$, entonces, $m=-3$, por tanto:

i. La línea recta paralela tiene ecuación $y-1=-3(x+1)$, o bien. $y=-3x-2$.

ii. En la línea recta perpendicular $m_{\perp}=\frac{1}{3}$ y pasa por $p_0\,(-1\,,\,1)$, su ecuación es

$$y-1=\frac{1}{3}(x+1),\text{ o bien, } y=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$$



SECCIÓN 3.1
EJERCICIOS 4

1. Obtén las ecuaciones (generales) de: la línea recta paralela y de la línea recta perpendicular que contiene al punto indicado. Trázalas.

a. A la línea recta con ecuación $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1$ y contiene al punto $p_0\,(0\,,\,-3)$.

b. A la línea recta con ecuación $2x+4y+1=0$ y contiene al punto $p_0\,(3\,,\,-2)$.

c. A la línea recta con ecuación $y=\frac{2}{3}x+2$ y contiene al punto $p_0\,(3\,,\,-2)$.

INTERSECCIÓN DE DOS LÍNEAS RECTAS

En un contexto algébrico, las ecuaciones de un par de líneas rectas equivalen a un sistema de ecuaciones lineales, su solución (/en caso de existir) corresponde al punto (puntos) de intersección de las líneas rectas.

EJEMPLO 7. INTERSECCIÓN DE DOS LÍNEAS RECTAS

En caso de existir obtén el punto de intersección.

a. De las líneas rectas con ecuaciones $y=-2x-3$ y $y=5x-2$.

Algebraicamente son equivalentes a:

$$\begin{cases} y=-2x-3 \\ y=4x-2 \end{cases}$$

Igualándolas obtenemos la ecuación

$$-2x-3=4x-2 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{6}.$$

La sustitución de $x=-\frac{1}{6}$ en la segunda ecuación da

$$y=\left(-\frac{1}{6}\right)-2\text{, o bien, } y=-\frac{8}{3}$$

Las líneas rectas con ecuaciones $y=-2x-3$ y $y=4x-2$ se intersecan en $I_0\left(-\frac{1}{6}, -\frac{8}{3}\right)$

b. De las líneas rectas con ecuaciones $2x+4y+8=0$ y $y=x$.
Algebraicamente equivalen al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x+4y+8=0 \\ y=x \end{cases}$$

Si sustituimos $y=x$ en $2x+4y+8=0$ obtenemos

$$2x+4x+8=0 \Leftrightarrow x=-\frac{4}{3}\text{, también } y=-\frac{4}{3}$$

Las líneas rectas se intersecan en $I_0\left(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right)$

c. De las líneas rectas con ecuaciones $x+y+1=0$ y $2x+2y-1=0$.

Podemos tratarlas como sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+y+1=0 \\ 2x+2y-1=0 \end{cases}$

Si $\begin{cases} x+y+1=0 \\ 2x+2y-1=0 \end{cases}$, entonces, $\begin{matrix} -2 \\ 1 \end{matrix}\begin{cases} x+y+1=0 \\ 2x+2y-1=0 \end{cases}$, o bien, $\begin{cases} -2x-2y-2=0 \\ 2x+2y-1=0 \end{cases}$

La suma de las ecuaciones conduce a la contradicción $-3=0$, entonces,
"las líneas rectas con ecuaciones $x+y+1=0$ y $2x+2y-1=0$ no se intersecan".

d. Obtén el punto de intersección de las líneas rectas con ecuaciones $3x+3y-3=0$ y $2x+2y-2=0$.

Con ambas ecuaciones formamos el sistema

$$\begin{cases} 3x+3y-3=0 \\ 2x+2y-2=0 \end{cases}$$

Entonces,

$$\begin{matrix} 2 \\ -3 \end{matrix}\begin{cases} 3x+3y-3=0 \\ 2x+2y-2=0 \end{cases}\text{, o bien, } \begin{cases} 6x+6y-6=0 \\ -6x-6y+6=0 \end{cases}$$

La suma de las dos últimas ecuaciones conduce a la identidad $0=0$, esto significa que ambas ecuaciones representan a la misma línea recta.

SECCIÓN 3.1
EJERCICIOS 5

1. En caso de existir obtén el punto de intersección.

a. $x+y+2=0$ y $x-3y-2=0$

b. $\frac{x}{-2}+\frac{y}{1}=1$ y $y=-2x$

c. $y=\frac{1}{3}x$ y $x-3y-3=0$

d. $x-3y=0$ y $\frac{x}{-2}+\frac{y}{4}=1$

DISTANCIA ENTRE UN PUNTO Y UNA LÍNEA RECTA

La distancia entre la línea recta de ecuación $Ax+By+C=0$ y un punto $P_0\left(x_0\ ,y_0\right)$, (no perteneciente a ella) se interpreta como: la longitud del segmento rectilíneo perpendicular a ella y que tiene sus extremos en $P_0\left(x_0\ ,y_0\right)$ y ella.

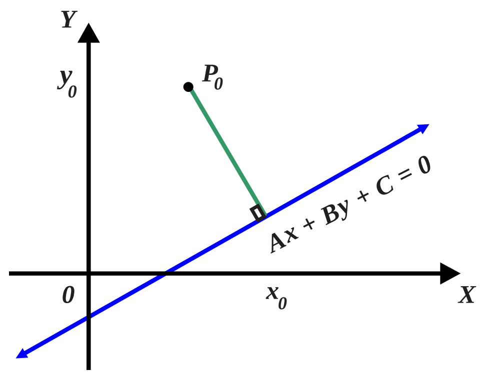


FIGURA 4.

La propiedad 4. proporciona los elementos necesarios en el cálculo de la distancia entre un punto y una línea recta.

PROPIEDAD 4. (DISTANCIA ENTRE UNA LÍNEA RECTA Y UN PUNTO)

La distancia entre la línea recta de ecuación $R:\ Ax+By+C=0$ y el punto $P_0\left(x_0\ ,y_0\right)$, es

$$d=\left|\ RP_0\ \right|=\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

el signo del numerador se toma de manera que d sea positiva.

EJEMPLO 6. DISTANCIA ENTRE UNA LÍNEA RECTA Y UN PUNTO

a. La distancia entre la línea recta de ecuación $4x+3y+8=0$ y el punto $p_0\left(0\ ,\ 4\right)$ es

$$d=\frac{\left|\left(4\right)\left(0\right)+\left(3\right)\left(4\right)+\left(8\right)\right|}{\sqrt{\left(4\right)^2+\left(3\right)^2}}=4 \text{ unidades.}$$

b. Para calcular **l**a distancia entre la línea recta de ecuación $y=-2x$ y el punto $P_0(-2\ ,\ -2)$; rescribimos $y=-2x+3$ en la forma general $2x+y=0$, por tanto,

$$d=\frac{|(2)(-2)+(1)(-2)+(0)|}{\sqrt{(2)^2+(1)^2}}=\frac{6}{\sqrt{5}}\ \text{unidades.}$$

c. Para calcular **l**a distancia entre la línea recta de ecuación $\frac{x}{2}+\frac{y}{1}=1$ y el punto $P_0(0\ ,\ 0)$, primero rescribimos $\frac{x}{4}+\frac{y}{1}=1$ en la forma general, entonces, $x+4y-4=0$, luego

$$d=\frac{|(1)(0)+(4)(0)+(-4)|}{\sqrt{(1)^2+(4)^2}}=\frac{4}{\sqrt{17}}\ \text{unidades.}$$

SECCIÓN 3.1
EJERCICIOS 6

1. Calcula la distancia entre la línea recta y el punto.

a. $2x+5y+5=0$ y el punto $p_0(0\ ,\ 4)$

b. $4x+3y+15=0$ y el punto $p_0(1\ ,\ 1)$

c. $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$ y el punto $p_0(-1\ ,\ 0)$

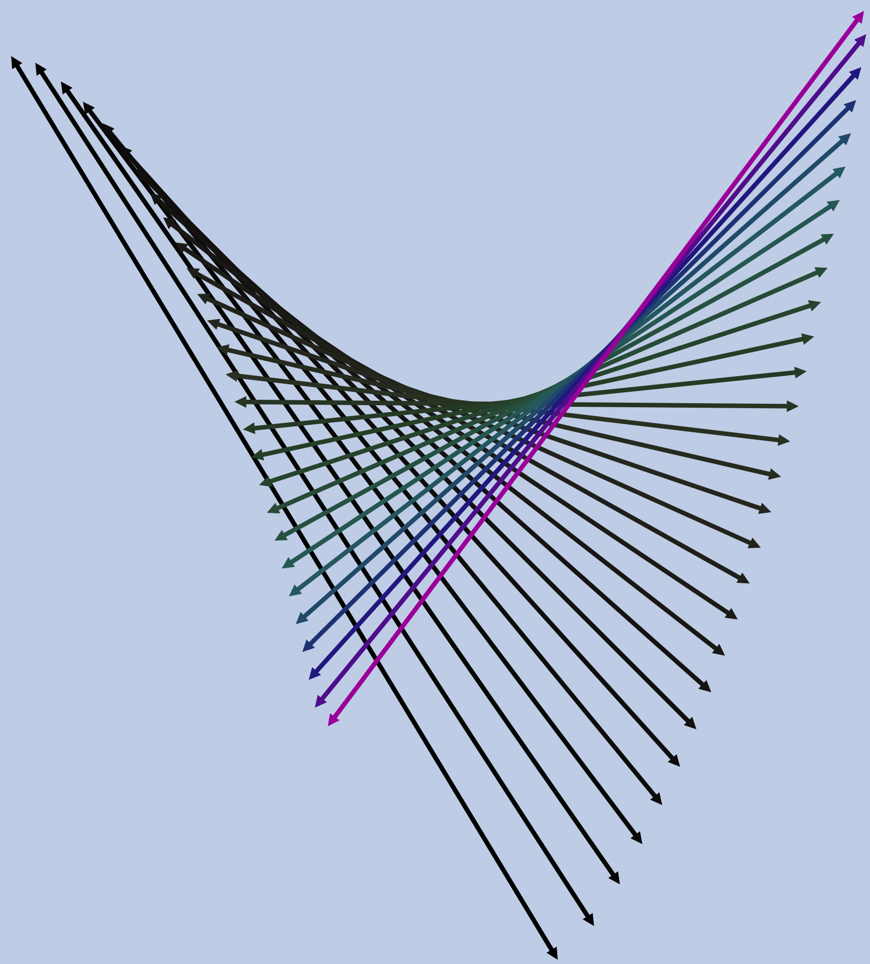
d. $y=\frac{3}{4}x+4$ y el punto $p_0(3\ ,\ 2)$

3.2 LA LÍNEA RECTA Y APLICACIONES DE CORTE EUCLIDIANO

APRENDIZAJE

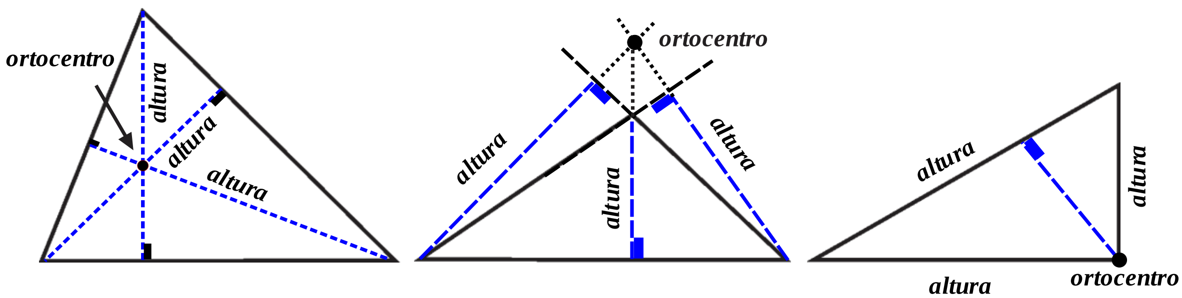
EL ALUMNO:

8. Resuelve problemas de corte euclidiano usando geometría analítica.

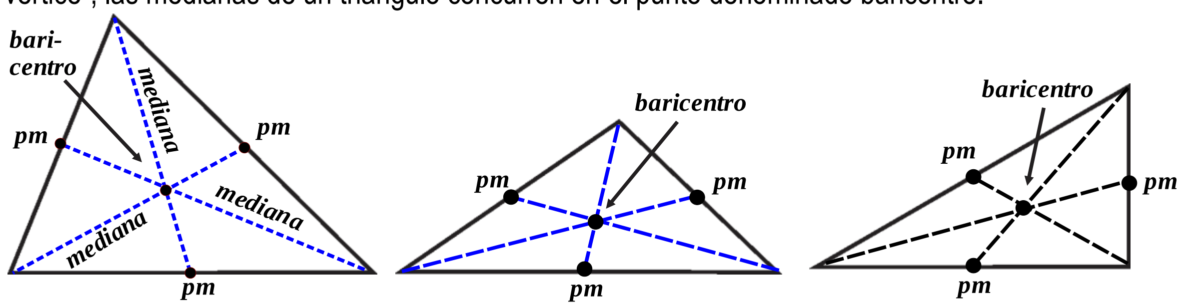


Los segmentos de recta (o líneas rectas) notables relacionados con un triángulo se definen en términos de los puntos medios de los lados o de intersecciones de líneas rectas que los contienen.

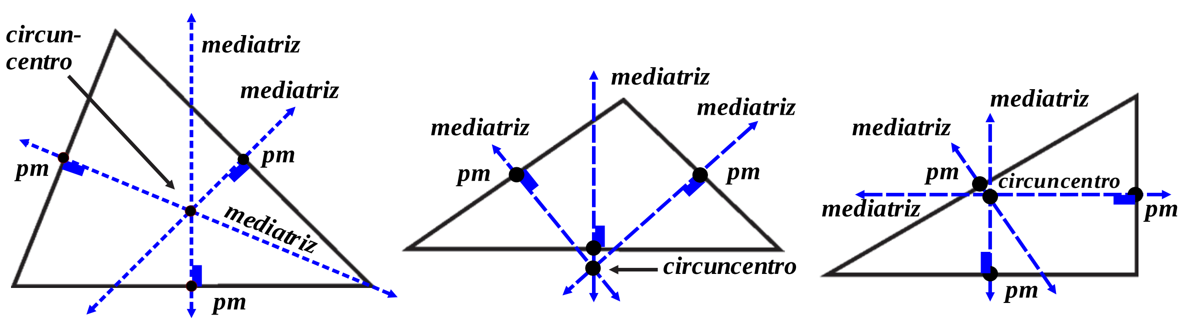
i. Alturas: son segmentos de líneas rectas perpendiculares a los lados (o a su prolongación) con extremos en un vértice y el lado opuesto.; las alturas concurren en un punto llamado ortocentro.



ii. Medianas: Segmentos de recta con extremos en: un vértice y el punto medio del lado opuesto al vértice"; las medianas de un triángulo concurren en el punto denominado baricentro.



iii. Mediatrices: Líneas rectas que intersecan en el punto medio a los lados y a la vez son perpendiculares a ellos, estas líneas concurren en el punto llamado circuncentro.



EJEMPLO 1. ECUACIONES DE LOS LADOS DE UN TRIÁNGULO

1. Los lados de un triángulo forman parte de las líneas rectas con ecuaciones

$$R_1 : 3x - 4y + 6 = 0, \ R_2 : x + 5y + 2 = 0 \text{ y } R_3 : 4x + y - 11 = 0$$

a. Sus vértices son las soluciones de los sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x-4y+6=0 \\ x+5y+2=0 \end{cases}, \begin{cases} 3x-4y+6=0 \\ 4x+y-11=0 \end{cases}$$

y $\begin{cases} x+5y+2=0 \\ 4x+y-11=0 \end{cases}$

es decir,

$A(-2,0)$, $B(2,3)$ y $C(3,-1)$,

respectivamente.

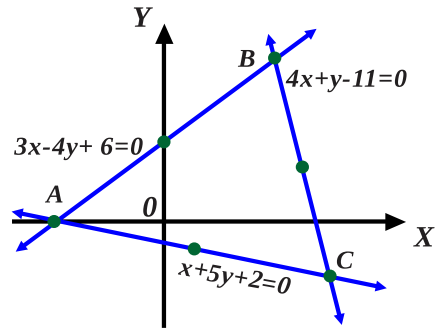
b. De $3x-4y+6=0$, $x+5y+2=0$ y $4x+y-11=0$,

obtenemos

$y=\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}$, $y=-\frac{1}{5}x-\frac{1}{5}$ y $y=-4x+11$,

con pendientes:

son: $m_{AB}=\frac{3}{4}$, $m_{AC}=-\frac{1}{5}$, $m_{BC}=-4$



c. De $A(-2,0)$, $B(2,3)$ y $C(3,-1)$ obtenemos los puntos medios de los lados:

$PM_{AB}\left(0,\frac{3}{2}\right)$, $PM_{AC}\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ y

$PM_{BC}\left(\frac{5}{2},1\right)$

EJEMPLO 2. LÍNEAS Y PUNTOS NOTABLES EN UN TRIÁNGULO

2. Los vértices de un triángulo son los puntos $A(-2,0)$, $B(2,2)$ y $C(4,-1)$.

a. Ecuaciones generales de las líneas rectas que contienen a los lados:

Lado que contiene a los vértices $A(-2,0)$, $B(2,2)$:

$$y-2=\frac{2-0}{2-(-2)}(x-2)\text{, entonces, } x-2y+2=0 \text{ y } m_{AB}=\frac{1}{2}$$

Lado que contiene a los vértices $A(-2,0)$, $C(4,-1)$:

$$y-(-1)=\frac{-1-0}{4-(-2)}(x-4)\text{, entonces, } x+6y+2=0 \text{ y } m_{AC}=-\frac{1}{6}$$

Lado que contiene a los vértices

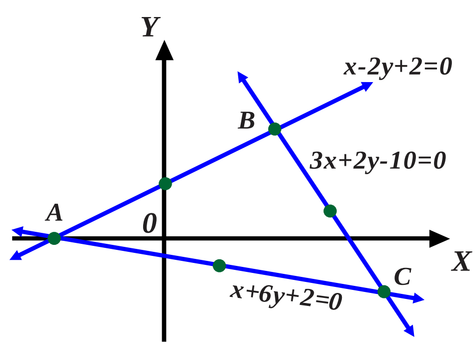
$B(2,2)$, $C(4,-1)$:

$$y-(-1)=\frac{-1-2}{4-2}(x-4),$$

o bien, $3x+2y-10=0$ y $m_{BC}=-\frac{3}{2}$

b. Puntos medios de los lados:

$PM_{AB}(0,1)$, $PM_{AC}\left(1,-\frac{1}{2}\right)$, $PM_{BC}\left(3,\frac{1}{2}\right)$



c. Ortocentro.

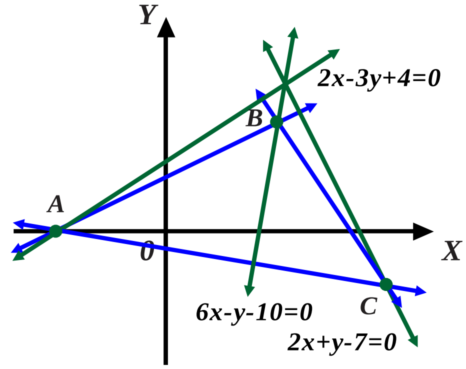
Altura contenida en la línea recta que pasa por $A(-2,0)$ y perpendicular al lado $\overline{AB}$ (parte de la línea recta $3x+2y-10=0$):pendiente $m_{BC}=-\frac{3}{2}$, luego, $y-0=\frac{2}{3}(x-(-2))$, o

$$2x-3y+4=0$$

Altura contenida en la línea recta que pasa por $B(2,2)$ y perpendicular al lado contenido en la línea recta : $x+6y+2=0$:pendiente $m_{AC}=-\frac{1}{6}$, entonces, $y-2=6(x-2)$, es decir, $6x-y-10=0$

Altura contenida en la línea recta que pasa por $C(4,-1)$ y es perpendicular a la línea recta $x-2y+2=0$ (pendiente $m_{AB}=\frac{1}{2}$):

$y+1=-2(x-4)$, por tanto, $2x+y-7=0$



El *ortocentro* es la solución del sistema de ecuaciones lineales asociado a dos medianas:

$$\begin{cases} 6x-y-10=0 \\ 2x+y-7=0 \end{cases}$$, entonces, $8x=17$, o bien,

$$x=\frac{17}{8} \text{ y } y=\frac{22}{8},\ OR\left(\frac{17}{8},\frac{22}{8}\right).$$

d. Baricentro.

La mediana que contiene: vértice $A(-2,0)$ y al punto medio $PM_{BC}\left(3,\frac{1}{2}\right)$ tiene ecuación

$$y-0=\frac{\frac{1}{2}-0}{3-(-2)}(x-(-2))$$, su forma general es $x-10y+2=0$

La mediana que contiene: el vértice $B(2,2)$ y al punto medio $PM_{AC}\left(1,-\frac{1}{2}\right)$ es

$$y-2=\frac{-\frac{1}{2}-2}{1-2}(x-2)$$, en su forma general es $5x-2y-6=0$

La mediana que contiene al vértice $C(4,-1)$ y al punto medio $PM_{AB}(0,1)$ es $y-1=\frac{1-(-1)}{0-4}(x-0)$, en la forma general $x+2y-2=0$

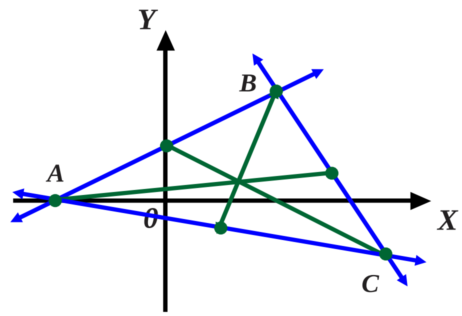
Baricentro lo obtenemos resolviendo el sistema de ecuaciones lineales generado por dos medianas, luego

$$\begin{cases} x-10y+2=0 \\ x+2y-2=0 \end{cases}$$

de donde $12y-4=0$, o bien,

$$x=\frac{4}{3} \text{ y } y=\frac{1}{3}.$$

El baricentro es el punto $BA\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$



e. Circuncentro.

La mediatriz perpendicular al lado AB y que contiene al punto medio $PM_{AB}(0,1)$ tiene pendiente $m_{AB\perp}=-2$, su ecuación es

$$y-1=-2(x-0)\text{, en la forma general}$$

$$2x+y-1=0.$$

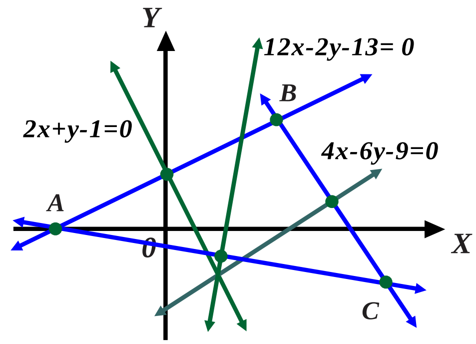
La mediatriz perpendicular al lado AC y contiene que contiene al punto medio $PM_{AC}\left(1,-\frac{1}{2}\right)$ tiene pendiente $m_{AC\perp}=6$, su ecuación es

$y+\frac{1}{2}=6(x-1)$, o bien, $12x-2y-13=0$

La mediatriz perpendicular del lado BC que contiene al punto medio $PM_{BC}\left(3,\frac{1}{2}\right)$ tiene pendiente $m_{BC\perp}=\frac{2}{3}$, por tanto,

$$y-\frac{1}{2}=\frac{2}{3}(x-3),$$

o bien, $4x-6y-9=0$



La intersección de dos medianas es solución del sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x+y-1=0 \\ 4x-6y-9=0 \end{cases},$$

de donde $16x+15=0$, o bien ,

$x=\frac{15}{16}$, $y=-\frac{7}{8}$ y circuncentro

$$CR\left(\frac{15}{16},-\frac{7}{8}\right).$$

EJEMPLO 3. ÁREA DE UN TRIÁNGULO

Área del triángulo con vértices en los puntos $A(-2,-1)$, $B(2,-2)$ y $C(1,3)$.

Sea la base el segmento rectilíneo $\overline{BC}$. Con $B(2,-2)$ y $C(1,3)$ obtenemos la longitud de la base,

$$b=|BC|=\sqrt{(2-1)^2+(-2-3)^2}=\sqrt{26}\text{ unidades.}$$

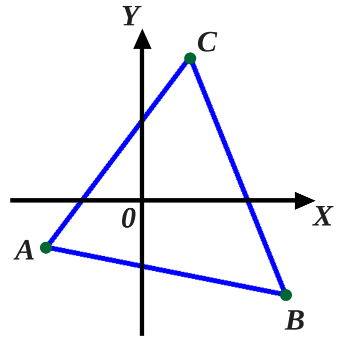
Por otro lado

$$y+2=\frac{3-(-2)}{1-(2)}(x-2)\text{, o bien, }5x+y-2=0.$$

La altura del triángulo es la distancia entre la línea recta de ecuación $5x+y-2=0$ y el vértice $A(-2,-1)$,

luego, $h=\dfrac{|5(-2)+1(-1)-8|}{\sqrt{(5)^2+(1)^2}}=\dfrac{|-19|}{\sqrt{26}}=\dfrac{19}{\sqrt{26}}$ por tanto, el área es

$$A=\frac{1}{2}\left(\sqrt{26}\right)\left(\frac{19}{\sqrt{26}}\right)=9.5 \text{ unidades cuadradas.}$$



SECCIÓN 3.2
EJERCICIOS 1

1. Los vértices de un triángulo son los puntos $A(0,2)$, $B(3,4)$ y $C(4,0)$ obtén.
a. Las ecuaciones (generales) de las líneas rectas que contienen a los lados.
b. Los puntos medios y las ecuaciones de las líneas rectas de las que forman parte las medianas.
c. El punto donde concurren las líneas rectas que contienen a las medianas.
2. Los vértices de un triángulo son los puntos $A(-2,0)$, $B(0,2)$ y $C(4,-2)$
a. Calcula las ecuaciones de las líneas rectas que contienen a los lados.
b. Las ecuaciones de las líneas rectas que contienen a las alturas.
c. Calcula el punto en que concurren las alturas.
3. Los vértices de un triángulo son los puntos $A(-4,4)$, $B(2,4)$ y $C(4,0)$.
a. Obtén las ecuaciones de las líneas rectas que contienen a los lados.
b. Calcula las ecuaciones de las líneas rectas mediatrices y el punto en que se intersecan.
4. Los vértices de un triángulo son los puntos $A(-2,0)$, $B(4,2)$ y $C(3,3)$, calcula su área.
5. Los vértices de un triángulo son los puntos $A(-3,0)$, $B(1,-2)$ y $C(5,2)$, calcula su área.

3.3 SOLUCIONES Y EVALUACIÓN

SOLUCIÓN A EJERCICIOS PROPUESTOS

EXAMEN DE LA UNIDAD

SOLUCIONES DEL EXAMEN DE LA UNIDAD 3

SECCIÓN 3.1
EJERCICIOS 1 RESPUESTAS

1.

a. $2x+y-2=0$, $y=-2x+2$, $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{2}=1$

b. $7x-6y+2=0$, $y=\dfrac{7}{6}x+\dfrac{1}{3}$,

$\dfrac{x}{-\frac{2}{7}}+\dfrac{y}{\frac{1}{3}}=1$

c. $10x-3y+18=0$, $y=\dfrac{10}{3}x+6$,

$\dfrac{x}{-2}+\dfrac{y}{6}=1$

d. $x-y+3=0$, $y=x+3$,

$\dfrac{x}{-3}+\dfrac{y}{3}=1$

e. $10x-3y+18=0$,

$y=\dfrac{10}{3}x+6$, $\dfrac{x}{-2}+\dfrac{y}{6}=1$

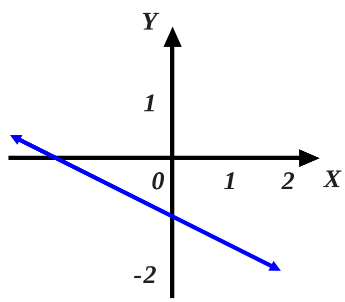
f. $x-4y+16=0$, $y=\dfrac{1}{4}x+4$,

$\dfrac{x}{-16}+\dfrac{y}{4}=1$

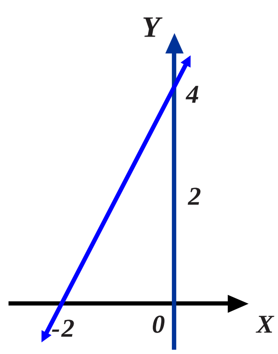
SECCIÓN 3.1
EJERCICIOS 2 RESPUESTAS

1.

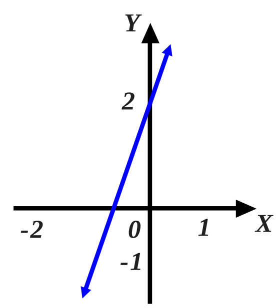
a.



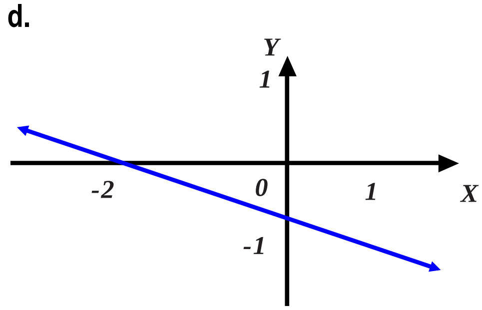
b.



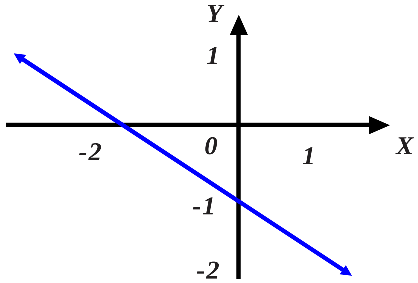
c. $y=3x+2$



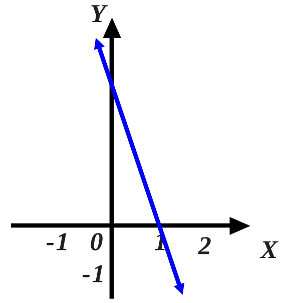
d.



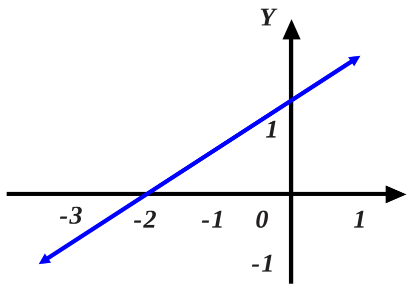
e.



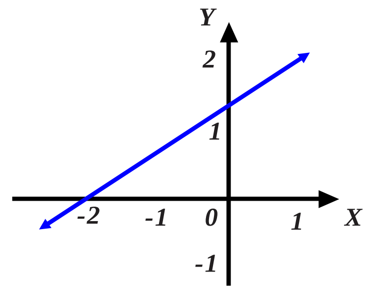
g.



f.



h.



SECCIÓN 3.1
EJERCICIOS 3 RESPUESTAS

1.

a.

i. $m\angle\theta = 14.04°$

ii. $m\angle\theta = 63.03°$

iii. $m\angle\theta = 108.43°$

iv. $m\angle\theta = 28.03°$

b.

i. $m\angle\theta = 59.04°$

ii. $m\angle\theta = 37.87°$

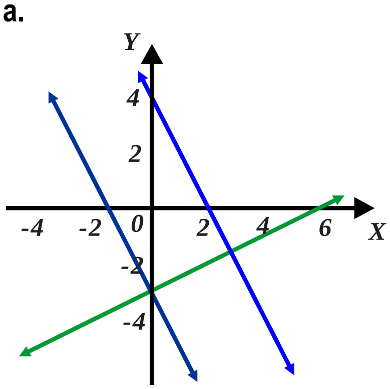
iii. $m\angle\theta = 82.87°$

iv. $m\angle\theta = 8.13°$

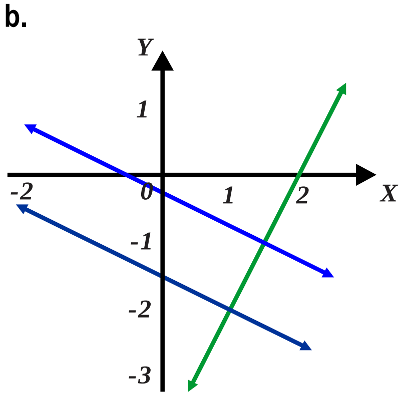
SECCIÓN 3.1
EJERCICIOS 4 RESPUESTAS

1.

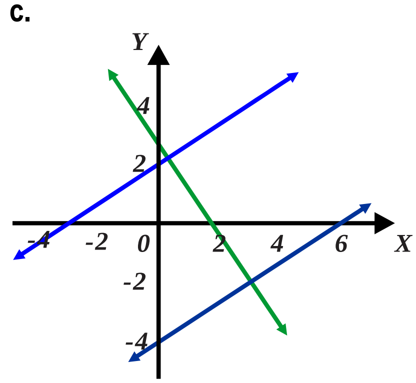
a.



b.



c.



SECCIÓN 3.1
EJERCICIOS 5 RESPUESTAS

1.

a. $I_0\left(-1\ ,\ -1\right)$. **b.** $I_0\left(-\dfrac{2}{5}\ ,\ \dfrac{4}{5}\right)$ **c.** $I_0\left(-\dfrac{2}{5}\ ,\ \dfrac{4}{5}\right)$. **d.** $I_0\left(-\dfrac{12}{5}\ ,\ \dfrac{4}{5}\right)$

SECCIÓN 3.1
EJERCICIOS 6 RESPUESTAS

1.

a. $d=\dfrac{25}{\sqrt{29}}$ unidades. **b.** $d=\dfrac{22}{5}$ unidades. **c.** $d=\dfrac{16}{5}$ unidades. **d.** $d=\dfrac{17}{5}$ unidades.

SECCIÓN 3.2
EJERCICIOS 1 RESPUESTAS

1.

a. $2x-3y+6=0$, $4x+y-16=0$ y $x+2y-4=0$

b. $\left(\dfrac{3}{2},3\right)$, $\left(2,1\right)$ y $\left(\dfrac{7}{2},3\right)$ y $3x-y-5=0$, $y-2=0$ y $6x+5y-24=0$

c. $\left(\dfrac{7}{2},2\right)$

2.

a. $x+3y-2=0$, $x-y+2=0$ y $x+y-2=0$

b. $3x-y+2=0$, $x+y-2=0$ y $x-y+2=0$

c. $\left(0,2\right)$

3.

a. $y-4=0$, $2x+y-8=0$ y $x+2y-4=0$

b. $x-1=0$, $2x-y+2=0$ y $x-2y+1=0$; $\left(-1,0\right)$

4. 4 unidades.

5. 12 unidades.

UNIDAD 3 EXAMEN

CONCEPTOS

1. ¿Cómo se interpreta una línea recta en el plano cartesiano?

2. ¿En qué forma puede escribirse una línea recta?

3. ¿Qué pares de elementos definen una línea recta?

4. ¿Cómo se define el ángulo asociado a una línea recta?

5. ¿Cómo se define el ángulo que determinan dos líneas rectas?

6. ¿Qué condiciones cumple una línea recta vertical?

7. ¿Cómo se define la distancia entre una línea recta y un punto?

DESARROLLOS OPERATIVOS

Sea el triángulo con vértices en los puntos $A(-4,0)$, $B(0,2)$, $C(2,-4)$.

8. Calcula la ecuación de la línea recta (forma simétrica) que contiene al lado $\overline{BC}$.

9. Calcula la ecuación de la línea recta (forma pendiente ordenada al origen) que contiene a la altura de la que forma parte al vértice $A(-4,0)$.

10. Calcula la amplitud del ángulo que forman las líneas rectas que contienen a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.

11. Calcula la distancia entre el lado $\overline{AB}$ y el vértice $C(2,-4)$

12. Una línea recta contiene a los puntos $A(-1,2)$, $B(1,-2)$, otra línea recta tiene ecuación $2x+3y+8=0$, ¿en qué punto se intersecan?

PARA PENSAR

13. Obtén la forma general de la línea recta perpendicular a $Ax + By + C = 0$ y que contiene al punto $R\left(p\,, q \right)$.

14. Obtén la distancia entre las líneas rectas con ecuaciones
$3x - 4y + 4 = 0$ y $9x - 12y - 4 = 0$

ESCALA

Preguntas 1 a 7., un punto cada una.
Problemas 8. a 12. dos puntos cada uno.
Problemas 13. a 14. cuatro puntos cada uno.

Para acreditar se requieren un mínimo de 16 puntos

UNIDAD 3 SOLUCIONES AL EXAMEN

CONCEPTOS

1. El lugar geométrico que definen dos puntos, uno fijo y uno que se desplaza sin que cambie la pendiente

2. General, simétrica, pendiente-ordenada al origen.

3. Pueden ser dos puntos o puede ser un punto fijo y una pendiente.

4. Tiene lado inicial en el eje de las abscisas, su lado terminal es la línea recta, su vértice son las líneas rectas antes señaladas.

5. El ángulo positivo y agudo que determinan.

6. ¿Qué condiciones cumple una línea recta vertical?
Tiene pendiente “indefinida”.

7. Longitud del segmento rectilíneo perpendicular a la línea recta y con extremos en el punto y la línea recta.

DESARROLLOS OPERATIVOS

8. $\dfrac{x}{\frac{2}{3}} + \dfrac{y}{2} = 1$. **9.** $y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{4}{3}$. **10.** $60.26°$. **11.** $\dfrac{14}{\sqrt{5}}$ unidades. **12.** $I\left(2\,, -4 \right)$

PARA PENSAR

13. $Bx - Ay + qA - pB = 0$. **14.** $\dfrac{16}{15}$ unidades.

4

LA PARÁBOLA Y SU ECUACIÓN CARTESIANA

PROPÓSITOS

Al finalizar la unidad, el alumno:
Será capaz de obtener la ecuación de una parábola a partir de su definición (foco y directriz) o de elementos necesarios y suficientes.
Identificará sus elementos a partir de la ecuación.
Resolverá problemas que involucren a la parábola y sus propiedades

CONCEPTOS CLAVE

Lugar geométrico. Conjunto de puntos en el plano que satisfacen cierta condición.

Parábola. Lugar geométrico generado por el desplazamiento de un punto de forma que su distancia a una línea recta fija y a un punto fijo se mantiene constante.

Eje de simetría. Línea recta que divide a una curva en dos partes congruentes.

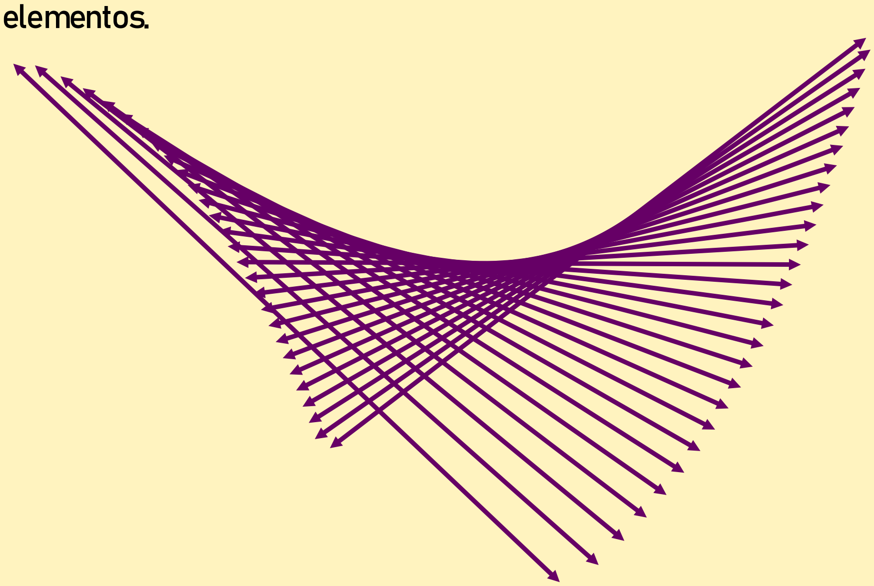
Línea recta tangente a una curva. Línea recta que tiene un solo punto en común con la curva, el punto común se llama "punto de tangencia" o punto de contacto.

4.1 LA PARÁBOLA, SUS ELEMENTOS Y ECUACIONES

APRENDIZAJES

EL ALUMNO:

1. Identifica los elementos que definen la parábola. Reconoce la simede esta curva. Obtiene por inducción la definición de la parábola como lugar geométrico.
2. Deduce la ecuación de la parábola con vértice en el origen y fuera de él. Entiende que un punto pertenece a una parábola, si y sólo si, sus coordenadas satisfacen la ecuación correspondiente.
3. Determina el vértice, foco, directriz, eje de simetría, y lado recto de la parábola, a partir de su ecuación cartesiana.
4. Grafica parábolas dadas sus ecuaciones y viceversa.
5. Transforma la ecuación general a la ordinariapara encontrar sus elementos.



Trataremos la parábola como un "lugares geométricos del plano cartesiano.
En ***la figura 1.***, el punto $P\left(x\,,\,y \right)$ se desplaza de manera que equidista (se encuentra a la misma distancia) del puto fijo $F\left(h\,,\,k \right)$ llamado foco y de la línea recta (fija D) conocida como directriz. Por tanto, se cumplen las igualdades $d_F = d_D$, $e_F = e_D$, $f_F = f_D$, $g_D = g_D$ y $g_D = g_D$, $h_D = h_D$, etcétera.

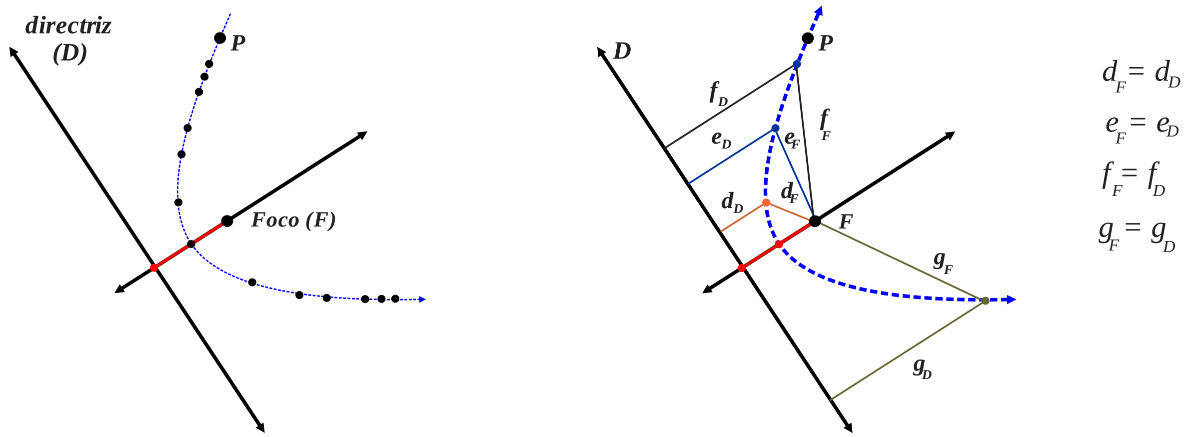


FIGURA 1.

DEFINICIÓN 1. (PARÁBOLA)

a. La *parábola* es el lugar geométrico formado por el conjunto de puntos P en el plano cartesiano que equidistan de la línea recta fija D y de el punto fijo F (que no está sobre la recta fija).
Formalmente: $\left\{ \left(x\,,\,y \right) \in IR^2 :\ d\left(p\,,\,F \right) = d\left(p\,,\,D \right) \right\}$
b. El *punto fijo* F se llama *foco* y la línea *recta fija* D se llama *directriz*.
c. El *punto medio* V del segmento rectilíneo (perpendicular a la directriz) con extremos en F y en D se denomina vértice.
d. La línea *recta que contiene al vértice y al foco* se llama "*eje focal* ".

La ***figura 2.*** muestra los elementos de la parábola.

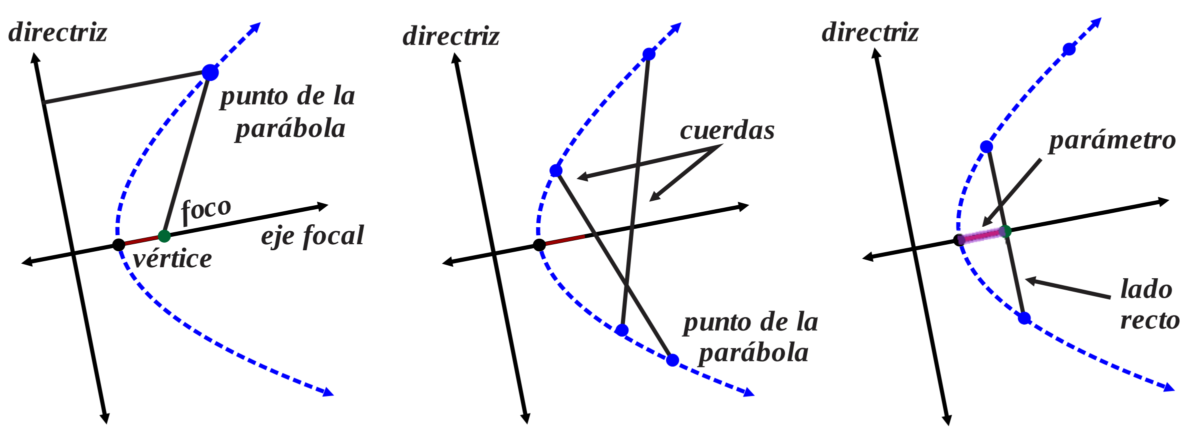


FIGURA 2.

a. El segmento rectilíneo con extremos en dos puntos de la parábola se conoce como cuerda.
b. La cuerda paralela a la directriz y que contiene al foco se llama "*lado recto*", su longitud se representa por LR.

c. El segmento rectilíneo dirigido $\overrightarrow{VF}$ perpendicular a la directriz y extremos en el vértice y el foco se denomina *parámetro*, su longitud se representa por a y se conoce como distancia focal.

El parámetro (magnitud) define la "abertura de la parábola":
i. Si $a=0$, el foco se encuentra en la directriz y todos los puntos de la parábola se encuentran sobre el eje focal.
ii. Al incrementa el valor de a, el foco se aleja de la directriz y la parábola se "abre".
iii. Si el número a es "extremadamente grande", la parábola es "casi" una línea recta perpendicular al eje focal.
iv. Si el número a es negativo, la parábola se "abre en sentido contrario" a lo señalado en los incisos anteriores.

Otras características de la parábola son:
1. Es una curva abierta.
2. Se extiende indefinidamente.
3. Las semi parábolas que genera el eje focal (de una parábola) son congruentes, es decir, una parábola es simétrica respecto a su eje focal, vea la ***figura 3.***

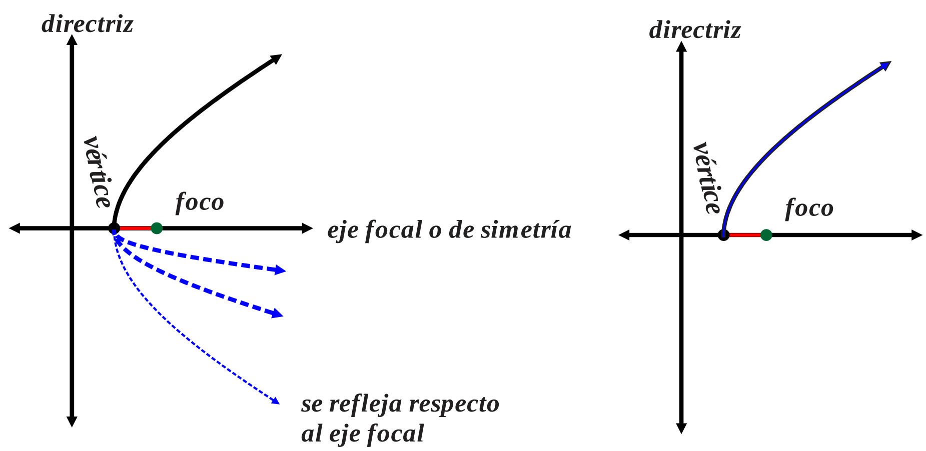


FIGURA 3.

Sólo son de nuestro interés parábolas con eje focal paralelo a uno de los ejes coordenados.

EJEMPLO 1. DEFINICIÓN DE PARÁBOLA

Obtengamos las ecuaciones de las parábolas.
a. La ecuación del lugar geométrico del conjunto de puntos que equidistan de $F(4\,,\,2)$ y de la línea recta vertical con ecuación $D: x=-2$

La distancia entre los puntos

$P(\ x\ ,\ y\ )$ y $F(\ 4\ ,\ 2\ )$ es:

$$d\ (\ p\ ,F\ )=\sqrt{(\ x-4\ )^2+(\ y-2\ )^2}$$

Ecuación general de la directriz,

$$D:1\cdot x+0y+2=0 \text{ y}$$

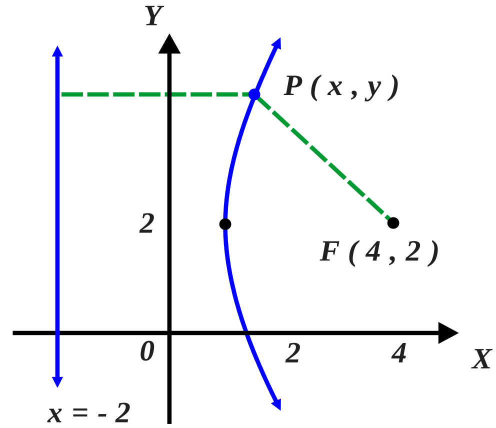
su distancia al punto $P(\ x\ ,\ y\ )$:

$$d\ (\ p\ ,D\ )=\frac{1(\ x\ )+0(\ y\ )+(\ 2\ )}{\sqrt{1^2+0^2}}=x+2$$

Si $d\ (\ p\ ,F\ )=d\ (\ p\ ,D\ )$, obtenemos

$$\sqrt{(\ x-4\ )^2+(\ y-2\ )^2}=x+2,$$

o bien, $(\ x-4\ )^2+(\ y-2\ )^2=(\ x+2\ )^2$



Desarrollando y simplificando :

$$x^2-8x+16+(\ y-2\ )^2=x^2+4x+4 \text{ y } (\ y-2\ )^2=12x-12,$$

por último

$$(\ y-2\ )^2=-12(\ x-1\ ), \text{ o bien, } y^2-12x-4y+16=0$$

b. La ecuación del lugar geométrico: conjunto de puntos que equidistan de $F(\ -1\ ,\ -1\ )$ y de la línea recta horizontal de ecuación $D: y=-5$

La distancia entre los puntos

$P(\ x\ ,\ y\ )$ y $F(\ -1\ ,\ -1\ )$

es $d\ (\ p\ ,F\ )=\sqrt{(\ x+1\ )^2+(\ y+1\ )^2}$.

La ecuación general de la directriz es $D:\ 0\cdot x+y+5=0$ y su distancia al punto $P(\ x\ ,\ y\ )$

es

$$d\ (\ p\ ,D\ )=\frac{0(\ x\ )+1(\ y\ )+(\ 5\ )}{\sqrt{0^2+1^2}}=y+5$$

De la condición $d\ (\ p\ ,F\ )=d\ (\ p\ ,D\ )$

obtenemos $\sqrt{(\ x+1\ )^2+(\ y+1\ )^2}=y+5,$

o bien, $(\ x+1\ )^2+(\ y+1\ )^2=(\ y+5\ )^2$

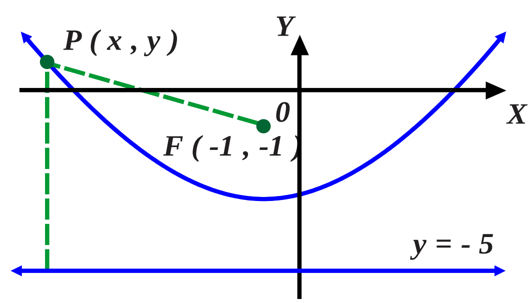
Desarrollamos y simplificamos:

$$(\ x+1\ )^2+y^2+2y+1=y^2+10y+25 \text{ y}$$

$$(\ x+1\ )^2-8y-24=0,$$

por último $(\ x+1\ )^2=8(\ y+3\ )$, o en la forma

$$x^2+2x-8y-23=0$$



SECCIÓN 4.1
EJERCICIOS 1

1. Obtén:

a. La ecuación del lugar geométrico del conjunto de puntos que equidistan de $F(0\ ,\ 0)$ y de la línea recta horizontal de ecuación $D: y=4$

b. La ecuación del lugar geométrico del conjunto de puntos que equidistan del punto fijo $F(2\ ,\ 0)$ y de la línea recta horizontal de ecuación $D: x=-6$

c. La ecuación del lugar geométrico del conjunto de puntos que equidistan de $F(0\ ,\ 4)$ y de la línea recta horizontal de ecuación $D: y=-5$

d. La ecuación del lugar geométrico del conjunto de puntos que equidistan de $F(-3\ ,\ 3)$ y de la línea recta horizontal de ecuación $D: y=6$

La formalización de los aspectos tratados en los problemas son ***definición 2***.

DEFINICIÓN 2. ECUACIONES Y ELEMENTOS DE LA PARÁBOLA

EJE FOCAL:	**VERTICAL** $x=h$	**HORIZONTAL** $y=k$
VERTICE:	$V(h\ ,\ k)$	$V(h\ ,\ k)$
ECUACIÓN CARTESIANA:	$(x-h)^2=4a(y-k)$	$(y-k)^2=4a(x-h)$
ECUACIÓN GENERAL	$x^2+Dx+Ey+F=0$	$y^2+Dx+Ey+F=0$
APERTURA HACIA:	Arriba $a>0$, abajo $a<0$.	Derecha $a>0$, izquierda $a<0$.
FOCO:	$F(h\ ,\ k+a)$	$F(h+a\ ,\ k)$
DIRECTRIZ:	$y=k-a$	$x=k-a$
LONGITUD DEL LADO RECTO	$LR=\lvert 4a \rvert$	$LR=\lvert 4a \rvert$

EJEMPLO 2. TRÁNSITO ENTRE LAS ECUACIONES DE LA PARÁBOLA

1. Obtengamos la ecuación cartesiana de la parábola a partir de su ecuación general.

a. $x^2+2x+4y+9=0$.

Construimos el trinomio cuadrado perfecto en la variable x, esto se consigue con la descomposición $9=1+8$ y reacomodando sumandos,

$$x^2+2x+4y+9=x^2+2x+4y+1+8=x^2+2x+1+4y+8,$$

factorizando obtenemos

$$x^2+2x+4y+9=x^2+2x+1+4y+8=(x+1)^2+4(y+2)$$

Por tanto,

$$x^2+2x+4y+9=0 \Leftrightarrow (x+1)^2=-4(y+2)$$

b. $x^2+3x+6y=0$.

Debemos construir el trinomio cuadrado perfecto en la variable x, esto se consigue sumando y restando el cuadrado de la mitad del coeficiente de x, es decir, $\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2$

Entonces, $x^2+3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+6y=0$, o bien, $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=-6y+\frac{9}{4}$

Por último

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=-6\left(y+\frac{3}{8}\right)$$

2. Obtengamos la ecuación general de la parábola.

a. $(x-2)^2=3(y-1)$.

Desarrollamos el cuadrado del binomio y efectuamos el producto del miembro derecho obtenemos

$$x^2-4x+4=3y-3, \text{ reacomodamos términos } x^2-4x-3y+7=0$$

b. $(x+1)^2=6(y+2)$.

Desarrollamos el cuadrado del binomio y el producto del miembro derecho obtenemos

$$x^2+2x+1=6y+12,$$

reacomodamos términos

$$x^2+2x-6y-11=0$$

c. $\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=5(x-2)$

Al desarrollar el cuadrado del binomio y efectuamos el producto del miembro derecho obtenemos

$$y^2-y+\frac{1}{4}=5x-10, \text{ reacomodamos términos } y^2-5x-y+\frac{1}{4}+10=0,$$

o bien,

$$y^2-5x-y+\frac{41}{4}=0$$

EJEMPLO 3. OBTENCIÓN DE ELEMENTOS DE LA PARÁBOLA

1. Obtén los elementos y traza la parábola.

a. $x^2 - 4x - 2y + 6 = 0$

Reacomodamos términos:

$$x^2 - 4x = 2y - 6$$

Agregamos el cuadrado de la mitad del coeficiente de x en ambos miembros de la ecuación, obtenemos:

$$x^2 - 4x + 2^2 = 2y - 6 + 2^2 \text{, o bien,}$$

$$(x-2)^2 = 2(y-1)$$

Comparamos

$$(x-2)^2 = 2(y-1)$$

con $(x-h)^2 = 4a(y-k)$, luego

$h = 2$, $k = 1$ y $4a = 2$ o $a = \frac{1}{2}$

Por tanto, Vértice: $V(h, k) = V(2, 1)$,

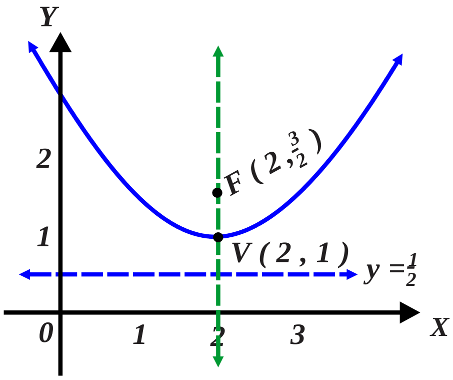
Parámetro y lado recto: $a = \frac{1}{2}$, la parábola se "abre hacia arriba" y

$$LR = |4a| = \left|4\left(\frac{1}{2}\right)\right| = 2$$

Foco: $F\left(2, 1 + \frac{1}{2}\right) = F\left(2, \frac{3}{2}\right)$

Directriz con ecuación:

$$y = k - a = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$



b. $x^2 - 6x + 3y + 3 = 0$.

Reacomodamos términos:

$$x^2 - 6x = -3y - 3.$$

Agregamos el cuadrado de la mitad del coeficiente de x en ambos miembros de la ecuación, $x^2 - 6x + 3^2 = -3y - 3 + 3^2$,

o bien, $(x-3)^2 = -3(y-2)$

Comparamos $(x-3)^2 = 2(y-2)$

y $(x-h)^2 = 2(y-k)$, obtenemos

$$h = 3,\ k = 2 \text{ y } 4a = -3$$

Por tanto:

Vértice: $V(h, k) = V(3, 2)$

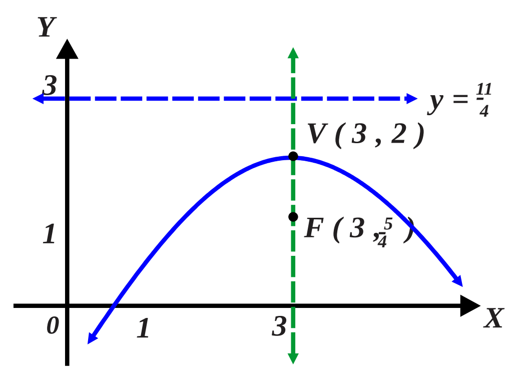
Parámetro y lado recto: $a = -\frac{3}{4}$,

la parábola se "abre hacia abajo"

y $LR = \left|4\left(-\frac{3}{4}\right)\right| = 3$

Directriz con ecuación:

$$y = k - a = 2 - \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{11}{4}$$



c. $y^2-4x+4y-8=0$

Reacomodamos términos, $y^2+4y=4x+8$

Agregamos el cuadrado de la mitad del coeficiente de y en ambos miembros de la ecuación:

$$y^2+4y+4=4x+8+4,\text{ o}$$

$$\text{bien, }(y+2)^2=4(x+3)$$

Comparamos

$(y+2)^2=4(x+3)$ y $(y-k)^2=4a(x-h)$

obtenemos:

$$h=-3,\ k=-2 \text{ y } 4a=4 \text{ o } a=1$$

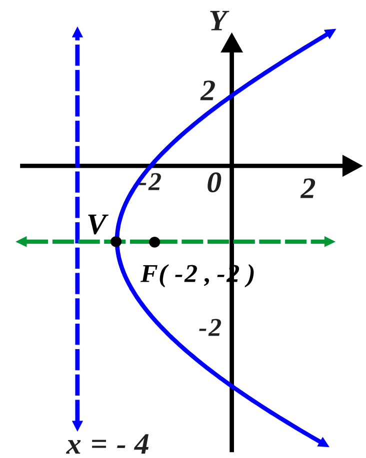
Vértice: $V(h\ ,\ k)=V(-3\ ,-2)$

Parámetro y lado recto: $a=1$, la parábola se "abre hacia la derecha" y $LR=|\ 4a\ |=|\ 4(1)\ |=4$

Foco: $F(h+a\ ,\ k)=F(-3+1\ ,\ -2)$
$=F(-2\ ,\ -2)$

Directriz con ecuación:

$$x=h-a=-3-(1)=-4$$



d. $y^2+4x+4y-\frac{5}{2}=0$

Reordenando:

$$y^2+4y=-4x+\frac{5}{2}$$

Agregamos el cuadrado de la mitad del coeficiente de y en ambas partes de la ecuación,

$$y^2+4y+4=-4x+\frac{5}{2}+4,$$

entonces,

$$(y+2)^2=-4\left(x-\frac{13}{8}\right)$$

Comparamos $(y-k)^2=4a(x-h)$

con

$(y+2)^2=-4\left(x-\frac{13}{8}\right)$ y obtenemos:

$$h=\frac{13}{8},\ k=-2 \text{ y } 4a=-4 \text{ o } a=-1$$

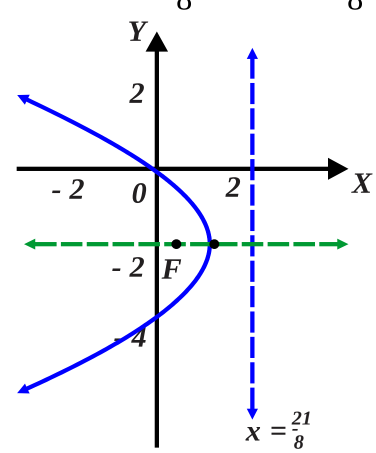
Vértice: $V(h\ ,\ k)=V\left(\frac{13}{8}\ ,-2\right)$

Foco:

$$F(h+a\ ,\ k)=F\left(\frac{13}{8}-1\ ,-2\right)$$
$$=F\left(\frac{5}{8}\ ,-2\right)$$

Directriz con ecuación:

$$x=h-a=\frac{13}{8}-(-1)=\frac{21}{8}$$



EJEMPLO 4. ECUACIÓN DE UNA PARÁBOLA A PARTIR DE ALGUNOS DE SUS ELEMENTOS

1. Obtén las ecuaciones (cartesiana y general) de la parábola, dados los elementos conocidos.

a. $F\,(\,3\,,\,0\,)$, directriz con ecuación $x=-1$

El vértice es el punto medio del segmento rectilíneo con extremos en la directriz y el foco,

por tanto, $V\,(\,1\,,\,0\,)$

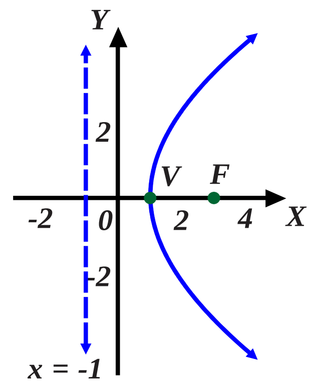
La longitud del parámetro: $a=2$

El lado recto mide $LR=|\,4a\,|=8$

Ecuación cartesiana $(\,y-0\,)^2=8(\,x-1\,)$

Desarrollamos $(\,y-0\,)^2=8(\,x-1\,)$, obtenemos,

$y^2=8x-8$, o bien, $y^2-8x+8=0$



b. $V\,(\,-1\,,\,0\,)$, directriz con ecuación $y=-4$

La distancia entre la directriz y el vértice es $a=4$

Lado recto: $LR=|\,4a\,|=16$

Distancia entre vértice y foco: $a=4$,

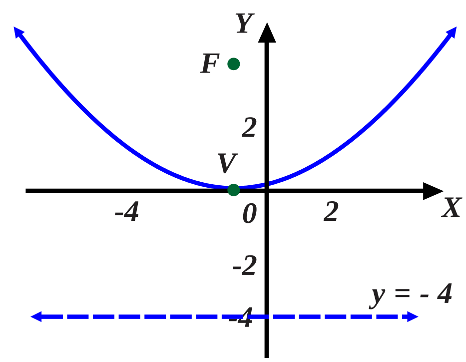
por tanto, $F\,(\,-1\,,\,4\,)$

Forma cartesiana $(\,x+1\,)^2=12(\,y-0)$

Si $(\,x+1\,)^2=12(\,y-0\,)$, entonces,

$x^2+2x+1=12y-24$,

o bien, $x^2+2x-12y+4=0$



c. Eje focal horizontal, $F\,(\,-2\,,\,2\,)$, parámetro con longitud 3 y se abre a la izquierda.

Puesto que se abre a la izquierda $a=-3$

Vértice:

$$V\,(\,-2-(\,-3\,),\,2\,)=V\,(\,1\,,\,2\,)$$

Directriz: $x=1-(\,-3\,)=4$

Lado recto: $LR=|\,4(\,-3\,)\,|=12$

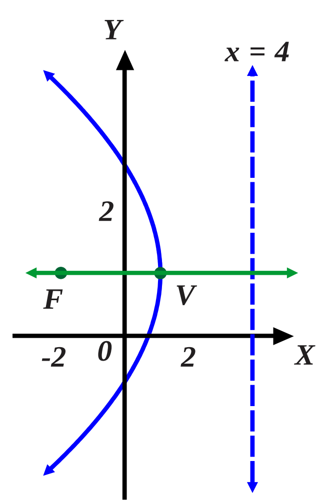
Forma cartesiana $(\,y-2\,)^2=-12(\,x-1\,)$

Si $(\,y-2\,)^2=-12(\,x-1\,)$, entonces,

$y^2-4y+4=-12x+12$,

o bien,

$$y^2+12x-4y+8=0$$



d. Eje focal vertical, $V(2\ ,\ 3)$ y $a=-2$

El foco es el punto

$$F(2\,,\,3-2)=F(2\,,\,1)$$

La directriz tiene ecuación $y=3-(-2)=5$

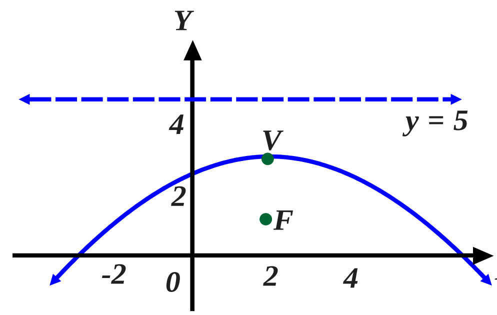
El lado recto mide $LR=|4a|=8$

Forma cartesiana $(x-2)^2=-8(y-3)$

Si $(x-2)^2=-8(y-3)$, entonces,

$$x^2-4x+4=-8y+24\text{, entonces,}$$

$$x^2-4x+8y-20=0$$



e. Abre a la izquierda, $LR=10$ y vértice $V(2\ ,\ 4)$

De las dos primeras condiciones, $4a=-10$ y $a=-\dfrac{5}{2}$

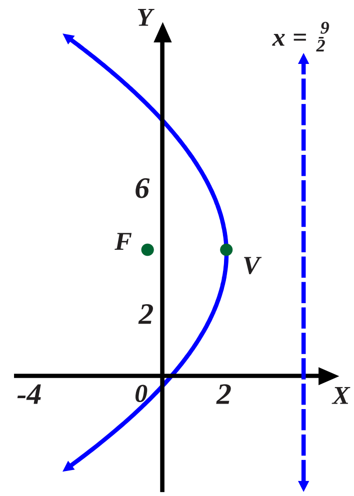
Con $a=-\dfrac{5}{2}$ y el vértice $V(2\ ,\ 4)$ obtenemos:

Foco $F\left(2-\dfrac{5}{2}\ ,\ 4\right)=F\left(-\dfrac{1}{2}\ ,\ 4\right)$

Ecuación de la directriz $x=2+\dfrac{5}{2}=\dfrac{9}{2}$

Forma cartesiana $(y-4)^2=-10(x-2)$

Forma general $y^2+10x-8y-4=0$



f. Directriz $x=-2$, eje focal $y=2$ y $a=4$

Las condiciones anteriores garantizan

$$V(2\ ,\ 2)$$

$V(2\ ,\ 2)$ y $a=4$ implican

$$F(2+4\ ,\ 2)=F(6\ ,\ 2)$$

El lado recto mide $LR=|4a|=16$

Forma cartesiana (ordinaria):

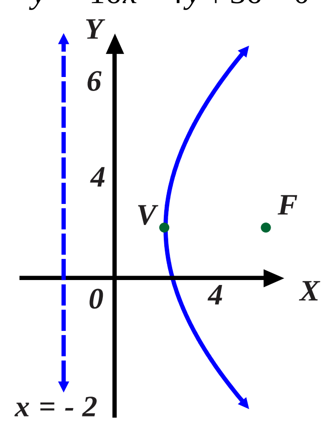
$$(y-2)^2=16(x-2)$$

Desarrollando y reordenando

$$(y-2)^2=16(x-2)$$

obtenemos la forma general

$y^2-16x-4y+36=0$



SECCIÓN 4.1
EJERCICIOS 2

1. Obtén la ecuación cartesiana (ordinaria) de la parábola a partir de su ecuación general.

a. $x^2+2x+4y+9=0$

b. $y^2-4x-2y+5=0$

c. $x^2-2x-3y-8=0$

d. $y^2-4x-2y+5=0$

e. $y^2-2x-2y+9=0$

f. $y^2-4x-4y-12=0$

g. $x^2+8x-y+\frac{31}{2}=0$

h. $x^2-x+y+\frac{7}{2}=0$

2. Obtén la ecuación general.

a. $(x-2)^2=4(y+1)$

b. $(y+2)^2=-3(x+2)$

c. $(x+4)^2=-3(y-5)$

d. $(y+2)^2=6\left(x-\frac{1}{2}\right)$

e. $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=4(y+4)$

f. $(x-2)^2=\frac{1}{4}(y+12)$

g. $(x+3)^2=7\left(y-\frac{4}{7}\right)$

h. $(y+2)^2=\frac{5}{2}(x+4)$

3. Obtén los elementos y traza la parábola.

a. $x^2+3y+6=0$

b. $y^2-4x-8=0$

c. $x^2-6y+12=0$

d. $y^2-12x+8=0$

e. $x^2+6x-3y+6=0$

f. $y^2+4x-8y-4=0$

g. $x^2-4x+2y+6=0$

h. $y^2-2x+2y-1=0$

i. $y^2-x+y-\frac{5}{4}=0$

j. $x^2-3x+y-\frac{1}{4}=0$

k. $y^2-5x+y-\frac{5}{4}=0$

l. $x^2-5x+\frac{7}{4}y+\frac{5}{4}=0$

m. $y^2+2x+y-\frac{1}{4}=0$

n. $x^2-x-3y-\frac{11}{4}=0$

4. Obtén las ecuaciones (cartesiana y general) de la parábola, trázala.

a. $F(6\,,\,0)$, directriz con ecuación $x=-2$

b. $V(-2\,,\,-2)$, directriz con ecuación $y=-6$

c. $V(-1\,,\,-2)$ y foco $F(-1\,,\,2)$

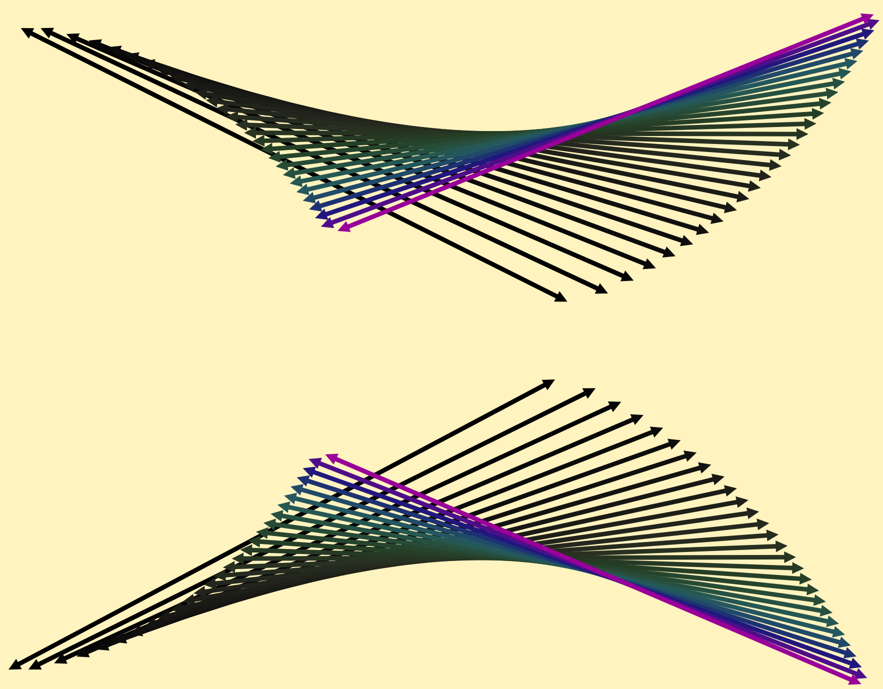
d. Eje focal horizontal, foco $F(-3\ ,\ 2)$, lado recto de longitud 8 y se abre a la izquierda.
e. Eje focal vertical, $V(2\ ,\ 4)$ y $a=-2$
f. Eje focal vertical, foco $F(0\ ,\ 6)$, $LR=12$ y parámetro positivo.
g. Eje focal vertical, vértice $V(-2\ ,-2)$, $LR=8$ y parámetro positivo.
h. Abertura a la izquierda, vértice $V(4\ ,\ 4)$ y $LR=12$
i. Eje focal horizontal, foco $F(2\ ,\ 5)$ y $a=3$
j. Directriz $x=8$, eje focal $y=2$ y $a=-4$
k. Directriz $y=-2$, eje focal $x=-2$ y $LR=8$
l. Lado recto con extremos en los puntos $A(1\ ,\ -4)$ y $B(1\ ,\ 8)$, directriz con ecuación $x=7$
m. Eje focal vertical, foco $V(-2\ ,\ 5)$ y $a=-3$
n. Directriz $x=-\frac{1}{2}$, eje focal $y=\frac{1}{2}$ y $a=\frac{3}{4}$
o. Se abre hacia arriba, Foco $F\left(\frac{1}{2}\ ,\ -1\right)$, $LR=4$
p. Lado recto con extremos en los puntos $A\left(-\frac{1}{2}\ ,\ 2\right)$ y $B\left(-\frac{1}{2}\ ,\ 2\right)$, $a=-1$
q. Foco $F(1\ ,\ 1)$ y vértice $V\left(\frac{5}{4}\ ,\ 1\right)$
r. Directriz $y=\frac{1}{2}$ y vértice $V\left(\frac{1}{2}\ ,\ -\frac{1}{4}\right)$
s. Lado recto con extremos en $C(2\ ,\ 0)$ y $D(2\ ,\ 2)$

4.2 LA PARÁBOLA Y SUS APLICACIONES

APRENDIZAJES

EL ALUMNO:

6. Resuelve problemas que involucrenla intersección de una línea recta con una parábola y entre parábolas.
7. Resuelve problemas de aplicación.
8. Valora su conocimiento sobre la parábola.



Si en dos o más ecuaciones asociadas a los lugares geométrico (líneas recta y/o parábola) tratamos a las variables x e y como incógnitas, generamos un sistema de ecuaciones cuya (en caso de existir) es el punto (los puntos) de intersección de sus curvas asociadas.

EJEMPLO 1. INTERSECCIÓN CON PARÁBOLAS

1. Obtengamos los puntos de intersección de las curvas con ecuaciones.

a. $y^2-8x+4y-4=0$ (parábola)

y

$2x+y+4=0$ (línea recta).

Con ambas ecuaciones generamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y^2-8x+4y-4=0 & \cdots(1) \\ 2x+y\ +4=0 & \cdots(2) \end{cases}$$

Multiplicamos la ecuación (2) por 4 y sumamos el resultado a la ecuación (1):

$$\begin{cases} y^2-8x+4y-4=0 & \cdots(1) \\ 8x+4y+16=0 & \cdots(3) \end{cases}, \text{ luego}$$

$$y^2+8y+12=0 \quad \cdots(4) \text{ o}$$

$$(y+6)(y+2)=0 \quad \cdots(4)$$

Las ordenadas de los puntos de intersección son las soluciones de la ecuación (4), es decir, $y_1=-6$ y $y_2=-2$

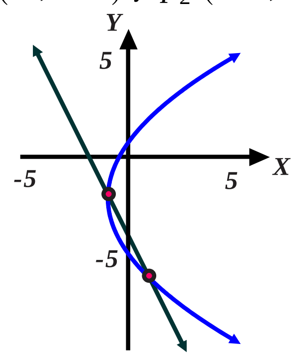
Sustituimos los números $y_1=-6$ y $y_2=-2$ en la ecuación $2x+y+4=0 \quad \cdots(2)$,

$$2x_1+(-6)+4=0 \Leftrightarrow x_1=1$$

$$2x_2+(-2)+4=0 \Leftrightarrow x_2=-1$$

Los puntos de intersección son

$$p_1(1\ ,\ -6) \text{ y } p_2(-1\ ,\ -2)$$



b. $x^2-2x-8y+1=0$ (parábola) y

$x+2y-1=0$ (línea recta).

Asociamos el sistema de ecuaciones a las curvas anteriores,

$$\begin{cases} x^2-2x-8y+1=0 & \cdots(1) \\ x+2y-1=0 & \cdots(2) \end{cases}$$

Multiplicamos por 4 la ecuación (2) y sumar el resultado a la ecuación (1),

$$\begin{cases} x^2-2x-8y+1=0 & \cdots(1) \\ 4x+8y-4=0 & \cdots(3) \end{cases}$$

$$x^2+2x-3=0 \quad \cdots(4)$$

o $(x+3)(x-1)=0 \quad \cdots(4)$

Las abscisas de los puntos de intersección son las soluciones de la ecuación (4), es decir,

$$x_1=-3 \text{ y } x_2=1$$

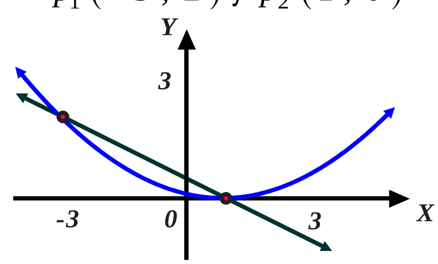
Para obtener las ordenadas sustituimos los números $x_1=-3$ y $x_2=1$ en la ecuación $x+2y-1=0 \quad \cdots(2)$ y

$$-3+2y_1-1=0 \Leftrightarrow y_1=2$$

$$1+2y_2-1=0 \Leftrightarrow y_2=0$$

Los puntos de intersección son

$$p_1(-3\ ,\ 2) \text{ y } p_2(1\ ,\ 0)$$



c. $x^2 - 2y - 4 = 0$ (parábola) y $2x - y - 4 = 0$ (línea recta).

Asociamos el sistema de sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x^2 - 2y - 4 = 0 & \cdots(1) \\ 2x - y - 4 = 0 & \cdots(2) \end{cases}$

Multiplicamos por -2 la ecuación (2) y sumamos el resultado a la ecuación (1), obtenemos: $\begin{cases} x^2 - 2y - 4 = 0 & \cdots(1) \\ -4x + 2y + 8 = 0 & \cdots(3) \end{cases}$

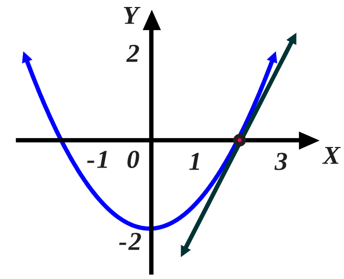
su suma es $x^2 - 4x + 4 = 0 \quad \cdots(4)$,

la ecuación (4) es equivalente con

$$(x-2)^2 = 0$$

con solución única $x = 2$

Si $x = 2$, entonces, $2(2) - y - 4 = 0$, o bien, $y = 0$. El (único) punto de intersección es $p_1(2, 0)$



d. $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$ y $y = -x^2 + 8$

Igualamos las ecuaciones anteriores,

$$\frac{1}{2}x^2 + 2 = -x^2 + 8 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 - 6 = 0$$

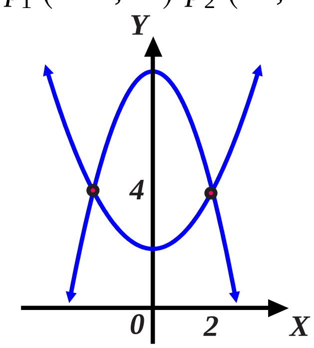
$\Leftrightarrow x^2 - 4 = 0$, entonces, $\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

Sustituimos en $y = -x^2 + 8$ y obtenemos:

$$\begin{cases} y_1 = -(-2)^2 + 8 \\ y_2 = -(-2)^2 + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 4 \\ y_2 = 4 \end{cases},$$

las parábolas se intersecan en

$p_1(-2, 4)$ $p_2(2, 4)$



f. $(y-3)^2 = 4x$ y $(y+1)^2 = -4(x-2)$

En $(y+1)^2 = -4(x-2)$ despejamos $4x$,

$$4x = 8 - (y+1)^2$$

Con $(y-3)^2 = 4x$ y $4x = 8 - (y+1)^2$,

obtenemos, $(y-3)^2 = 8 - (y+1)^2$

Desarrollamos $(y-3)^2 = 8 - (y+1)^2$,

$$y^2 - 6y + 9 = 8 - y^2 - 2y - 1 \Leftrightarrow$$

$$2y^2 - 4y + 2 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 = 0$$

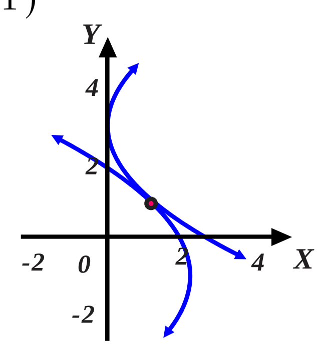
$$(y-1)^2 \Leftrightarrow y = 1$$

Sustituimos $y = 1$ en $4x = 8 - (y+1)^2$,

$$4x = 8 - (1+1)^2 \Leftrightarrow 4x = 8 - 4$$

$$4x = 4 \Leftrightarrow x = 1$$

El (único) punto de intersección es $A(1, 1)$



g. $(y-3)^2 = 4x$ y $(y+1)^2 = -4(x-1)$

De $(y+1)^2 = -4(x-1)$ despejamos $4x$

obtenemos $4x = 4-(y+1)^2$.

Igualamos las ecuaciones

$$(y-3)^2 = 4x \text{ y } 4x = 4-(y+1)^2,$$

$$(y-3)^2 = 4-(y+1)^2$$

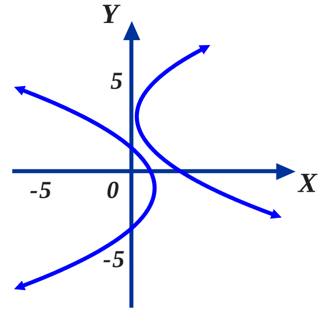
Desarrollamos $(y-3)^2 = 4-(y+1)^2$,

$$y^2-6y+9 = 4-y^2-2y-1$$

$$y^2-6y+9 = 4-y^2-2y-1 \Leftrightarrow$$

$$2y^2-4y+6=0 \Leftrightarrow y^2-2y+3=0$$

La última ecuación no tiene soluciones, por tanto, las parábolas con ecuaciones $(y-3)^2 = 4x$ y $(y+1)^2 = -4(x-1)$, no se intersecan.



Ecuación de la línea recta tangente a una parábola. Para obtener la ecuación de la *línea recta tangente* a una parábola aplicaremos su propiedad geométrica:

"los puntos de una parábola equidistan de su foco y de su directriz",

además:

1. El punto de tangencia T, de una parábola y una línea recta, pertenece a ambas curvas.
2. Los segmentos de recta FT y DT son congruentes, por tanto, el triángulo FTD es isósceles.
3. Si M representa el punto medio del lado DF, entonces, la mediatriz MT es tangente a la parábola.

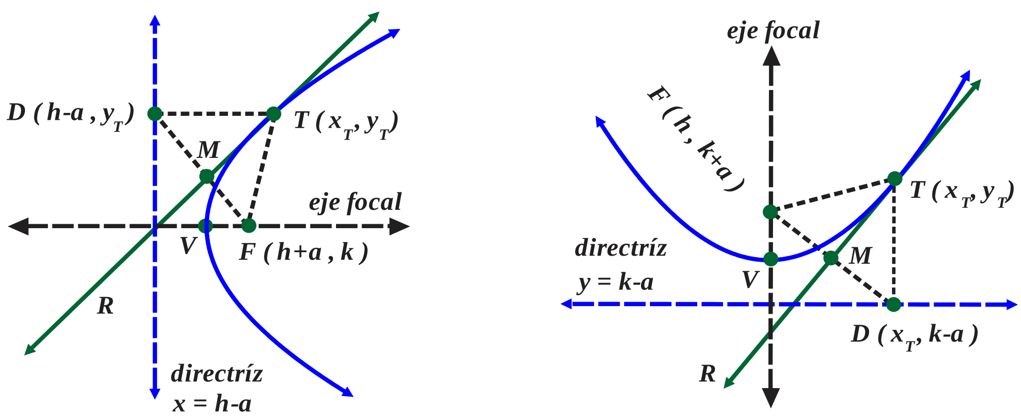


FIGURA 1.

PARÁBOLA CON EJE FOCAL HORIZONTAL: $(y-k)^2 = 4a(x-h)$

a. Punto de tangencia $T(x_T, y_T)$

b. Foco: $F(h+a, k)$

c. Proyección del punto de tangencia en la directriz $D(h-a, y_T)$

d. Punto medio M del segmento rectilíneo $\overline{FD}$ $M\left(h\,,\, \frac{y_T + k}{2} \right)$

e. La línea recta tangente contiene a los puntos $M\left(h\,,\, \frac{y_T + k}{2} \right)$ y $T\left(x_T \,,\, y_T \right)$

PARÁBOLA CON EJE FOCAL VERTICAL: $(x-h)^2 = 4a(y-k)$

a. Punto de tangencia $T\left(x_T \,,\, y_T \right)$

b. Foco: $F\left(h \,,\, k+a \right)$

c. Proyección de punto de tangencia en la directriz $D\left(x_T \,,\, k-a \right)$

d. Punto medio M del segmento rectilíneo $\overline{FD}$ $M\left(\frac{x_T + h}{2} \,,\, k \right)$

e. La línea recta tangente contiene a los puntos $M\left(\frac{x_T + h}{2} \,,\, k \right)$ y $T\left(x_T \,,\, y_T \right)$

EJEMPLO 2. LÍNEA RECTA TANGENTE A UNA PARÁBOBA

Obtén la ecuación general de la línea recta tangente a la parábola en el punto señalado.

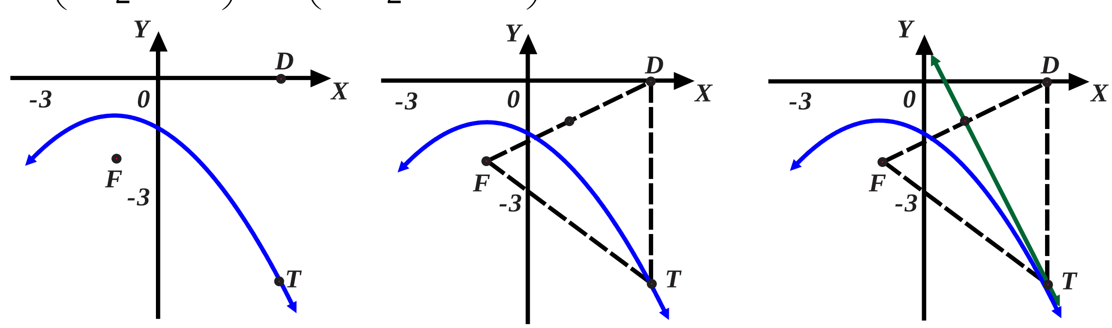
a. $(x+1)^2 = -4(y+1)$ en $T\left(3 \,,\, -5 \right)$

En este caso $V\left(-1 \,,\, -1 \right)$, $h=-1$, $k=-1$ y $a=-1$, por tanto,

i. $F\left(h \,,\, k+a \right) = F\left(-1 \,,\, -1+(-1) \right) = F\left(-1 \,,\, -2 \right)$

ii. $D\left(x_T \,,\, k-a \right) = D\left(3 \,,\, -1-(-1) \right) = D\left(3,\, 0 \right)$

iii. $M\left(\frac{x_T + h}{2} \,,\, k \right) = M\left(\frac{3+(-1)}{2} \,,\, -1 \right) = M\left(1,\, -1 \right)$



iv. La ecuación de la línea recta tangente contiene a los puntos $M\left(1,\, -1 \right)$ y $T\left(3 \,,\, -5 \right)$, entonces,

$$y-(-1) = \frac{-5-(-1)}{3-1}(x-1) \Leftrightarrow y+1 = -2(x-1) \Leftrightarrow y+1 = -2x+2$$

La ecuación general de la línea recta tangente es $2x+y-1=0$.

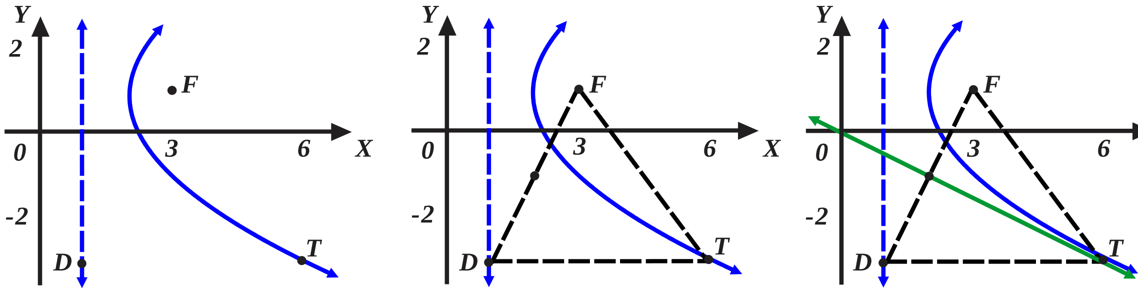
b. Si $(y-1)^2 = 4(x-2)$ en $T\left(6 \,,\, -3 \right)$

$V\left(2 \,,1 \right)$, $h=2$, $k=1$ y $a=1$, por tanto:

i. $F\left(h+a \,,\, k \right) = F\left(2+1,\, 1 \right) = F\left(3 \,,1 \right)$

ii. $D(h-a\,,y_T\,)=D(2-1\,,-3)=D(1,-3)$

iii. $M\left(h\,,\dfrac{y_T+k}{2}\right)=M\left(2\,,\dfrac{-3+1}{2}\right)=M(2,-1)$



iv. La ecuación general de la línea recta tangente contiene a los puntos $M(2,-1)$ y $T(6\,,-3)$, entonces

$$y-(-1)=\frac{-3-(-1)}{6-2}(x-2)\iff y+1=-\frac{1}{2}(x-2)\iff 2y+2=-x+2$$

La línea recta tangente tiene ecuación general $x+2y=0$

SECCIÓN 4.2
EJERCICIOS 1

1. Determina los puntos de intersección de las curvas asociadas.

a. $y^2+2x+2y-5=0$ (parábola) y $x+y-2=0$ (línea recta).

b. $x^2-4x+4y=0$ (parábola) y $x+2y-4=0$ (línea recta).

c. $x^2-2x-4y-7=0$ (parábola) y $x-2y-1=0$ (línea recta).

d. $y^2-4x-2y+5=0$ (parábola) y $2x.-y-1=0$ (línea recta).

e. $x^2-2x+y+7=0$ (parábola) y $2x+y+3=0$ (línea recta).

f. $y^2-4x+4=0$ (parábola) y $2x-y+1=0$ (línea recta).

}2. Obtén los puntos de intersección de las parábolas.

a. $y^2-4x+4=0$ y $y^2+2x-2=0$

b. $(y-2)^2=-5(x-1)$ y $(y-2)^2=x-1$

c. $x^2+2x+y=0$ y $x^2+6x-y=0$,

d. $y^2-4x-8=0$ y $y^2+8x+4=0$

e. $y^2+2x-2y=0$ y $y^2-2x-6y=0$

f. $(x-2)^2=y+4$ y $(x-2)^2=4y+4$

g. $(x-2)^2 = -y+6$ y $(x-2)^2 = 2y-3$

3. Calcula la ecuación general de la línea recta tangente.

a. $x^2 = 4(y+2)$ en $T(4,2)$

b. $y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$ en $T(-1,1)$

c. $y^2 - 2x - 4y = 0$ en $T(0,4)$

a. $x^2 - 4x - 4y - 8 = 0$ en $T(0,-2)$

Parábolas, arcos parabólicos, secciones de parábolas y superficies parabólicas se utilizan y/o en el diseño de estructuras arquitectónicos y en el estudio de ciertos fenómenos naturales.:

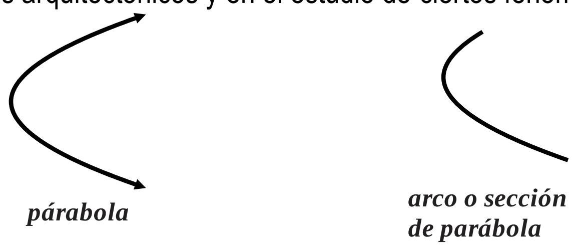


FIGURA 2.

En arquitectura:
Sostenes de puentes colgantes y techos convergen a una sección parabólica, también, puentes, túneles, puertas y ventanas presentan secciones (longitudinales o transversales) parabólicas.

En ciencias e ingeniería:
Trayectorias de objetos, chorros de agua, pueden modelarse por medio de secciones de parábola. Emisores y recetores (espejos, lentes, radares, reflectores, concentradores de energía) incluyen secciones de parábola.
“Los rayos emergentes del foco de una parábola se reflejan en ella paralelos a su eje de simetría. Inversamente, los rayos provenientes de una fuente lejana y que son paralelos al eje de simetría de una parábola, al incidir en ella se concentran en el foco”, este principio fundamenta el comportamiento de ciertos instrumentos relacionados con la reflexión de rayos y ondas de energía.

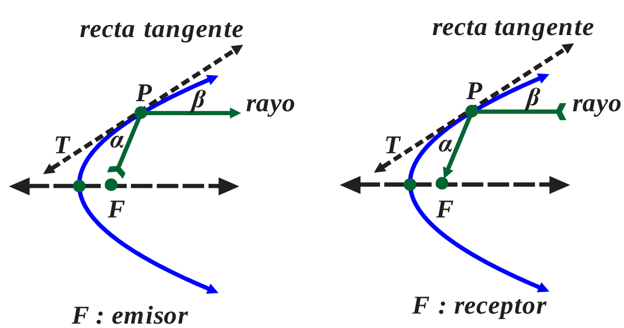


FIGURA 3.

SECCIÓN 4.2
EJERCICIOS 2

Construye el modelo solicitado.

a. El límite entre dos cuartos es un arco parabólico con base de longitud 2.5 metros y 3 metros de altura. Se desea transportar una caja cúbica de longitud de lado 2 metros. ¿Será posible pasar la caja de un cuarto al otro? Explica tu respuesta. Supón condiciones normales (no se puede inclinar el bloque, romper el bloque, etcétera.

Supongamos que el arco parabólico forma parte de la parábola con ecuación

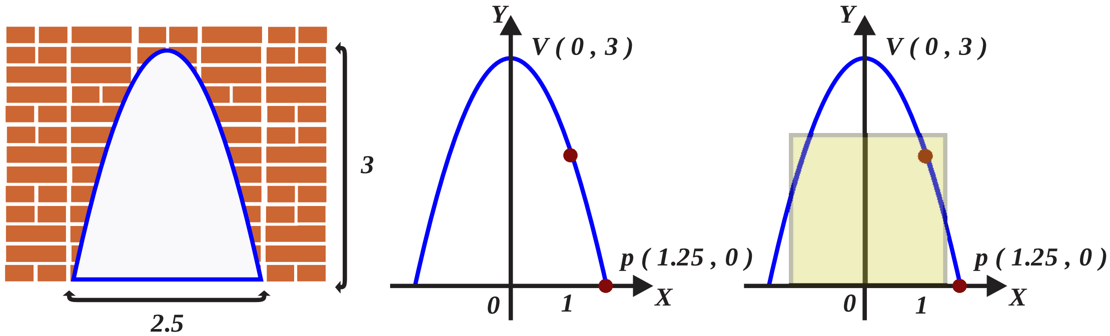
$$(x-0)^2 = 4a(y-3)$$

con vértice $V(0,3)$ y contiene al punto $p(1.25,0)$, o bien, $p\left(\frac{5}{4},0\right)$, por tanto,

$$\left(\frac{5}{4}-0\right)^2 = 4a(0-3) \Leftrightarrow 4a = -\frac{25}{42}$$

La ecuación (forma canónica) del arco que se debe atravesar es

$$x^2 = -\frac{25}{42}(y-3), \text{ con } 0<y<3 \text{ y } -1.25<x<1.25$$

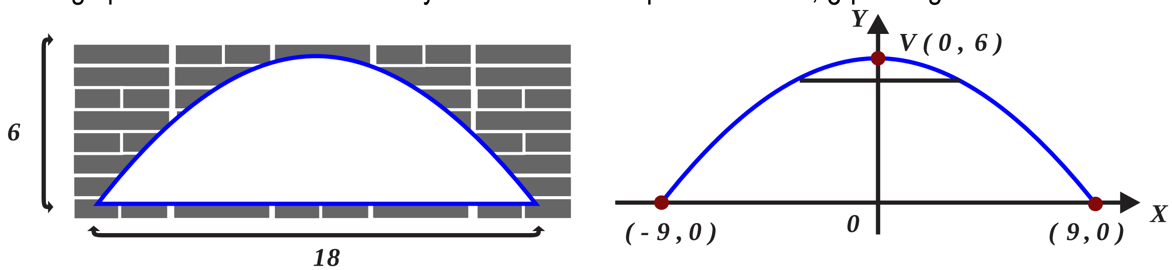


A un metro del eje focal, el arco tiene altura

$$1^2 = -\frac{25}{42}(y-3) \Leftrightarrow -42 = 25y-75 \Leftrightarrow -42 = 25y-75 \Leftrightarrow y = \frac{27}{25} \text{ metros,}$$

mayor a 1 metro (altura de la caja), por tanto, la caja no pasa.

b. La sección longitudinal de un puente tiene forma de sección parabólica con eje focal vertical, su base mide 18 metros y su punto más alto se encuentra a 6 metros de la base. Se reforzará con una viga paralela a la base del arco y a un metro de su punto máximo, ¿qué longitud debe tener?



La figura de la derecha muestra la sección de parábola en el plano cartesiano de manera que su eje focal coincide con el eje y, el vértice es el punto $V(0,6)$ y la ecuación del arco parabólico es

$$(x-0)^2 = 4a(y-6) \text{ con } a<0 \text{ y } -9 \le x \le 9$$

La sección de parábola contiene los puntos $(9,0)$ y $(-9,0)$; sustituimos el primero de ellos en la ecuación del arco parabólico, obtenemos

$$(9-0)^2 = 4a(-6) \Leftrightarrow 81 = -24a \Leftrightarrow a = -\frac{27}{8}$$

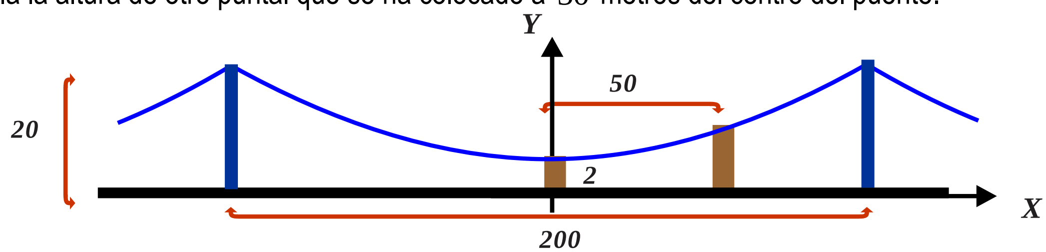
La ecuación de la sección parabólica es $(x-0)^2 = -\frac{27}{2}(y-6)$.

Para $y=5$ (la viga está colocada horizontalmente entre dos puntos del arco y a un metro del vértice $V(0,6)$), obtenemos:

$$(x-0)^2 = -\frac{27}{2}(5-6) \Leftrightarrow x^2 = \frac{27}{2} \Leftrightarrow x = 1.84$$

La longitud de la viga debe ser $L = 2(1.84) = 3.68$ metros.

c. Las dos torres que sostienen un puente colgante (con sección longitudinal parabólica) tienen altura de 20 metros y están separadas 200 metros. El puntal de sostén más corto mide 2 metros, calcula la altura de otro puntal que se ha colocado a 50 metros del centro del puente.



Con base en la figura anterior, la parábola que describe la sección longitudinal del puente tiene:

Vértice en el punto $V(0,2)$ y ecuación $(x-0)^2 = 4a(y-2)$

El punto más alto del puntal (por ejemplo el derecho) es $P(100,20)$

El punto $P(100,120)$ pertenece a la parábola, por tanto, satisface la ecuación

$$(x-0)^2 = 4a(y-2) \text{ o } (100-0)^2 = 4a(20-2)$$

$$(100-0)^2 = 4a(20-2) \Leftrightarrow (100)^2 = 4a(18) \Leftrightarrow 4a = 555.56$$

La ecuación de la parábola es

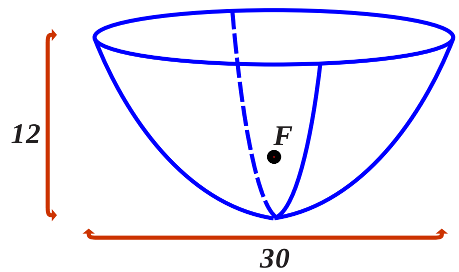
$$(x-0)^2 = 555.56(y-2)$$

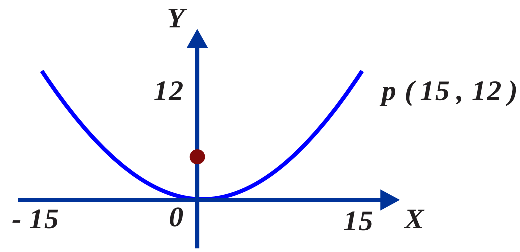
Si $x = 50$, entonces,

$$(50-0)^2 = 555.56(y-2) \Leftrightarrow y-2 = \frac{50^2}{555.56} \Leftrightarrow y = 6.5$$

La altura del puntal es 6.5 metros.

d. En un reflector con forma de superficie parabólica el emisor está colocado en su foco. La mayor de las secciones longitudinales es 30 centímetros y profundidad de 12 centímetros. Calcula la distancia entre el punto más profundo y el emisor.





Con base en la figura anterior:

$(x-0)^2 = 4a(y-0)$ y el punto $p(15, 12)$ pertenece a la sección parabólica, entonces,

$$(15-0)^2 = 4a(12-0) \Leftrightarrow 225 = 48a \Leftrightarrow a = \frac{75}{16}$$

Por tanto, la distancia vertical desde la parte más profunda y el emisor es de $\frac{75}{16}$ centímetros.

SECCIÓN 4.2
EJERCICIOS 2

1. El cable de un puente colgante tiene forma de arco parabólico. La parte de la carretera sustituida por el puente, es horizontal, mide 100 metros y está suspendida por tirantes verticales unidos al cable; el tirante más largo mide 30 metros y el más corto mide 8 metros. Calcula la longitud del tirante que se encuentra a 17 metros del centro.

2. La sección longitudinal de un túnel es un arco parabólico, su ancho mide 4 metros y su altura 3 metros. Calcula la altura máxima que debe tener un camión de 1.6 metros de ancho para no atorarse al pasar.

3. Una antena tiene forma de superficie parabólica con 30 centímetros de radio y altura de 20 centímetros. ¿En qué posición debe colocarse el receptor de ondas para que los rayos que recibe y que refleja la cara plateada sean paralelos al eje focal?

4. Un tanque tiene forma de superficie parabólica. Cuando el nivel de cierto líquido alcanza una altura de 18 metros, su ancho mide 12 metros. Si el nivel del líquido desciende a 6 metros, calcula el nuevo ancho del nivel del líquido.

5. Una ventana tiene forma de sector parabólico, con base de longitud 3.2 metros y altura 2 metros; la parte que abre y cierra es rectangular, sus esquinas superiores son tangentes al arco parabólico. Calcula la altura que debe tener si la base de la parte rectangular debe medir 1.2 metros.

6. Se va a construir un envase con forma de superficie parabólica. Su altura será 15 centímetros y su un ancho 4 centímetros a una profundidad de 5 centímetros. ¿Cuánto debe medir la parte más ancha?

4.3 SOLUCIONES Y EVALUACIÓN

SOLUCIÓN A EJERCICIOS PROPUESTOS

EXAMEN DE LA UNIDAD

SOLUCIONES DEL EXAMEN DE LA UNIDAD 4

SECCIÓN 4.1
EJERCICIOS 1 RESPUESTAS

1.
a. $I_1(1,1)$ y $I_2(3,-1)$ **b.** $I_1(2,1)$ y $I_2(4,0)$ **c.** $I_1(3,-1)$ y $I_2(-3,2)$
d. $I_1(2,3)$ y $I_2(1,1)$ **e.** $I_1(2,-7)$ **f.** No se intersecan.
g. $I_1\left(2+\sqrt{3}, 3\right)$, $I_2\left(2-\sqrt{3}, 3\right)$

2.
a. $I_1(1,0)$ **b.** $I_1(1,2)$ **c.** $I_1(0,0)$, $I_2(-4,8)$
d. $I_1(-1,2)$, $I_2(-1,-2)$ **e.** $I_1(0,0)$, $I_2(-4,4)$
f. $I_1(0,0)$, $I_2(4,0)$ **g.** $I_1\left(2+\sqrt{3}, 3\right)$, $I_2\left(2-\sqrt{3}, 3\right)$

3.
a. $2x+y-6=0$ **b.** $x+y=0$ **c.** $x-2y+8=0$ **a.** $x+y+2=0$

SECCIÓN 4.2
EJERCICIOS 2 RESPUESTAS

1. $L \approx 10.5432$ metros. **2.** 2.52 metros. **3.** A $\frac{9}{8}$ cms, del vértice, dentro de la superficie.
4. $2\sqrt{6}$ metros. **5.** $\frac{23}{16}$ metros. **6.** $\sqrt{6}$ centímetros.

UNIDAD 4 EXAMEN

CONCEPTOS

1. ¿Cómo se define la parábola como lugar geométrico?

2. ¿Qué es un arco parabólico?

3. ¿Una parábola es simétrica respecto a?

4. ¿Qué papel desempeña el parámetro de una parábola?

5. ¿Qué es el lado recta de una parábola, ¿cómo se calcula su longitud?

6. ¿Qué condiciones cumple un sistema de ecuaciones formado por: la ecuación de una línea recta y una parábola sean tangentes?

7. ¿Qué indica la propiedad óptica de la parábola?

8. ¿Qué condiciones cumple la línea recta tangente a una parábola?

DESARROLLOS OPERATIVOS

8. Determina todos los elementos de la parábola con ecuación $y^2 + 4x - 2y + 5 = 0$

9. Calcula la ecuación (general) del lugar geométrico formado por el conjunto de puntos que equidistan de $F(2, 0)$ y la línea recta con ecuación $x = 0$.

10. Obtén la ecuación de la línea recta que es tangente a la parábola con ecuación $x^2 + 4x + 4y - 4 = 0$ en el punto $P(2, -2)$.

11. Obtén los puntos de intersección entre las parábolas con ecuaciones $y^2 + 2x - 6 = 0$ y $y^2 - 2x + 4 = 0$

PARA PENSAR

12. Los extremos del lado del lado rectos son los puntos $P_1(-1, 2)$ y $P_2(3, 2)$, su vértice es $V(1, -2)$ obtén su ecuación general.

13. Una antena tiene forma de superficie parabólica, su diámetro mide 10 metros. Las señales que recibe las concentra en su foco. Si la distancia focal es 2 metros, calcula la profundidad de la superficie parabólica.

ESCALA

Preguntas 1 a 8., un punto cada una.
Problemas 8. a 11. dos puntos cada uno.
Problemas 12. a 13. cuatro puntos cada uno.

Para acreditar se requieren un mínimo de 13 puntos

UNIDAD 4 SOLUCIONES AL EXAMEN

CONCEPTOS

1. Conjunto de puntos del plano cartesiano que se encuentran a la misma distancia de una línea recta (fija) llamada directriz y un punto fijo llamado foco.
2. Parte de la parábola limitada por dos de sus puntos.
3. Respecto a su eje focal.
4. Si su magnitud aumenta la abertura de la parábola se incrementa y se aproxima a una línea recta perpendicular a su eje focal.
5. La cuerda que contiene al foco y es perpendicular al eje focal de la parábola.
6. Tener una sola solución.
7. "Los rayos emergentes del foco de una parábola se reflejan en ella paralelos a su eje de simetría. Inversamente, los rayos provenientes de una fuente lejana y que son paralelos al eje de simetría de una parábola, al incidir en ella se concentran en el foco".
8. Es mediatriz del segmento rectilíneo con extremos en el foco y la directriz y a la vez es perpendicular a esta última línea.

DESARROLLOS OPERATIVOS

8. Forma ordinaria $(y-1)^2 = 4(x-1)$, $F(-2,1)$, $V(-1,1)$, Directriz $x=0$, eje de simetría $y=1$, lado recto $LR=4$

9. $y^2-4x+4=0$

10. $2x+y-2=0$

11. $P_1\left(\frac{3}{2},1\right)$ y $P_2\left(\frac{3}{2},-1\right)$

PARA PENSAR

12. $x^2-2x-8y-15=0$

13. $\frac{25}{8}$ metros.

5

LA CIRCUNFERENCIA, LA ELIPSE Y SUS ECUACIONES CARTESIANAS

PROPÓSITOS

Al finalizar la unidad, el alumno:
Será capaz de obtener las ecuaciones cartesianas de la circunferencia y la elipse, y trazar sus gráficas correspondientes, dado cualquier conjunto de elementos definitorios.
Resolverá problemas donde tales curvas se presenten, con el fin de avanzar en la consolidación del método analítico y desarrollar su habilidad de reconocimiento de formas y estructuras.

CONCEPTOS CLAVE

Lugar geométrico. Conjunto de puntos en el plano que satisfacen cierta condición.

Distancia entre un punto y una línea recta. Lugar geométrico generado por dos puntos, uno fijo y

Circunferencia. Conjunto de todos los puntos del plano cartesiano que equidistan de un punto fijo (también del plano cartesiano).

Elipse. Conjunto de todos los puntos del plano cartesiano que equidistan de dos puntos fijos del plano cartesiano.

Distancia focal. Longitud del segmento rectilíneo con extremos en los dos focos de la elipse.

Línea recta normal. Línea recta perpendicular a la línea recta tangente a una curva, contiene el punto de tangencia.

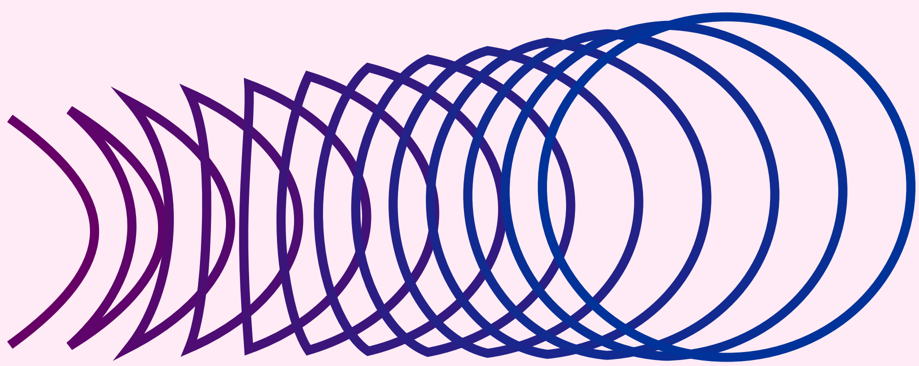
Propiedad óptica de la elipse. Señala que todo rayo que emerge (incide) de uno de los focos de la elipse se refleja (proviene) en ella en dirección al otro foco.

5.1 LA CIRCUNFERENCIA, ELEMENTOS Y ECUACIONES

APRENDIZAJES

EL ALUMNO:

1. Deduce la ecuación ordinaria de la circunferencia e identifica sus elementos (radio y coordenadas del centro).
2. Obtiene la ecuación general de la circunferencia.
3. Obtiene la ecuación cartesiana a partir de la ecuación general y determina el centro y el radio de una circunferencia.
4. Resuelve problemas de corte geométrico.



Tomando como referencia el plano cartesiano, si uno de sus puntos se desplaza de manera que la distancia a un punto fijo permanece constante genera la curva llamada circunferencia.

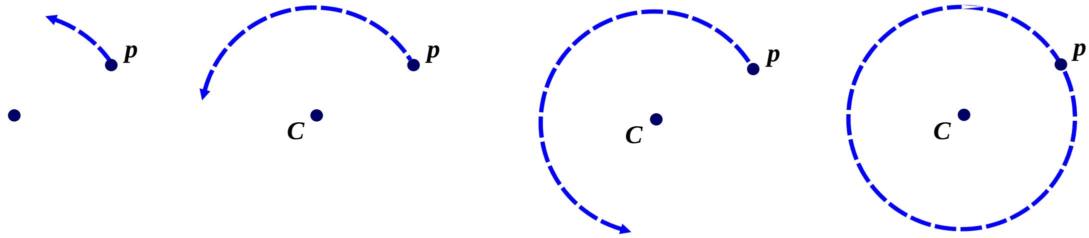


FIGURA 1.

DEFINICIÓN 1. (CIRCUNFERENCIA)

a. El lugar geométrico del conjunto de puntos p, en el plano cartesiano, que equidistan del punto fijo (también en el plano cartesiano) C se llama circunferencia, formalmente,

$$\left\{ (x, y) \in IR^2 : d(p, C) = r,\ r \geq 0 \right\}$$

b. El *punto fijo* C se llama *centro* y distancia r entre el punto fijo C y los puntos p se llama radio.

Por otra parte, la circunferencia con centro en $C(h, k)$ y radio de longitud r tiene asociadas las ecuaciones de la ***definición 2***.

DEFINICIÓN 2. (ECUACIONES DE LA CIRCUNFERENCIA)

Sea una *circunferencia* con centro $C(h, k)$ y radio $r \geq 0$, entonces:

a. Tiene ecuación cartesiana $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

b. Su ecuación general es $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, si $\left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2 - F \geq 0$

EJEMPLO 2. ECUACIONES: CARTESIANA Y GENERAL DE UNA CIRCUNFERENCIA

Determina las ecuaciones (cartesiana y general) de las circunferencias.

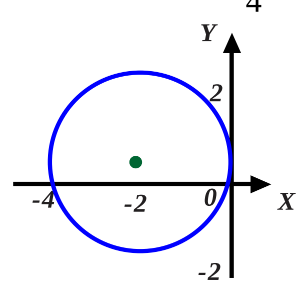
a. Centro $C\left(-2, \frac{1}{2}\right)$ y radio $r = 2$. Ecuación cartesiana:

$$(x+2)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 2^2$$

Ecuación general, desarrollamos la ecuación anterior, y,

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - y + \frac{1}{4} = 4, \text{ o bien,}$$

$$x^2 + y^2 + 4x - y + \frac{1}{4} = 0$$



b. Centro en $C\left(\frac{2}{3},-2\right)$ y radio $r=1$

Ecuación cartesiana

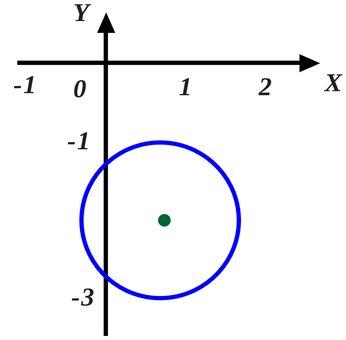
$$\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+(y+2)^2=1^2,$$ desarrollamos

y obtenemos

$$x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}+y^2+4y+4=1,$$ entonces,

$$x^2+y^2-\frac{4}{3}x+4y+\frac{31}{9}=0$$

es su ecuación general.



EJEMPLO 3. ELEMENTOS Y ECUACIÓN GENERAL DE UNA CIRCUNFERENCIA

Obtén: centro, radio y ecuación general.

a. De la circunferencia

$$(x+2)^2+(y-1)^2=4$$

Centro $C(3,-2)$, radio $r=2$

Si desarrollamos

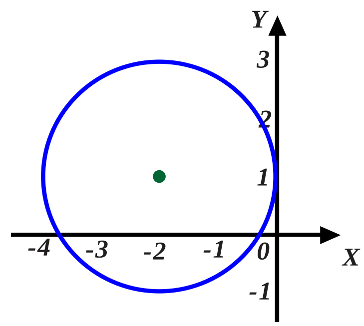
$$(x+2)^2+(y-1)^2=4$$

obtenemos la ecuación general,

$$x^2+4x+4+y^2-2y+1=4,$$

o bien,

$$x^2+y^2+4x-2y+1=0$$



b. De la circunferencia con ecuación cartesiana

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=3$$

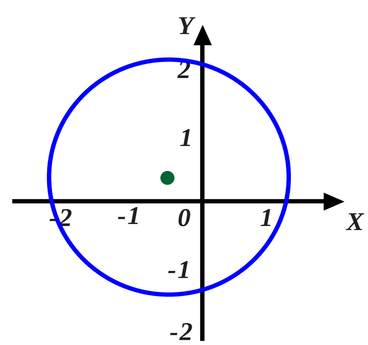
Centro en $C\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$ y radio con longitud

$$r=\sqrt{3}$$

Ecuación general,

$$x^2+x+\frac{1}{4}+y^2-\frac{2}{3}y+\frac{1}{9}-3=0,$$ entonces,

$$x^2+y^2+x-\frac{2}{3}y-\frac{95}{36}=0$$



c. De la circunferencia con centro

$$C\left(-\frac{3}{4}\,,\,0\right)$$

y radio de longitud $r=2$ es

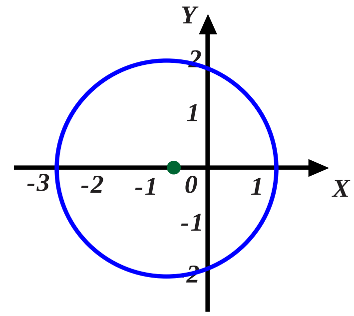
$$\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\left(y-0\right)^2=2^2$$

La ecuación general se obtiene desarrollando los binomios y reacomodando términos, obtenemos

$$x^2+\frac{6}{4}x+\frac{9}{16}+y^2=4\,,$$

o bien,

$$x^2+y^2+\frac{3}{2}x-\frac{55}{16}=0$$



EJEMPLO 4. ELEMENTOS A PARTIR DE ECUACIONES

Obtén los elementos de la circunferencia.

a. Ecuación general $x^2+y^2-9=0$

i. Reordenando términos,

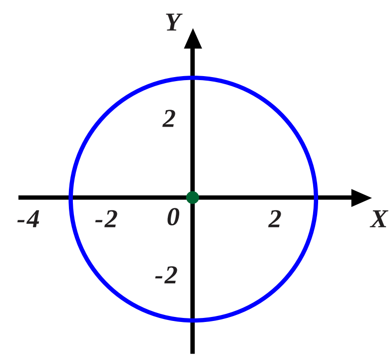
$$x^2+y^2=9$$

ii. Comparamos con la ecuación

$$\left(x-h\right)^2+\left(y-k\right)^2=r^2\,,$$

por tanto, $h=0$, $k=0$ y $r=\sqrt{9}$

$$C\left(0,0\right) \text{ y } r=3$$



b. Circunferencia con ecuación general

$$x^2+y^2+6x-4y-12=0$$

i. Reacomodamos términos

$$x^2+6x+y^2-4y=12$$

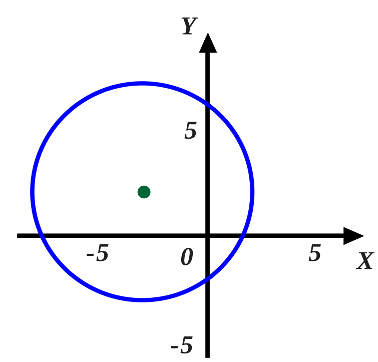
ii. Completamos trinomios cuadrados perfectos en las variables x y y,

$$x^2+6x+3^2+y^2-4y+2^2=12+3^2+2^2\,,$$

iii. Factorizamos los trinomios cuadrados perfectos,

$$\left(x+3\right)^2+\left(y-2\right)^2=12+9+4=25\,,$$

por tanto, $C\left(-3,2\right)$ y $r=5$



c. Circunferencia con ecuación general

$$x^2+y^2-3y-4=0$$

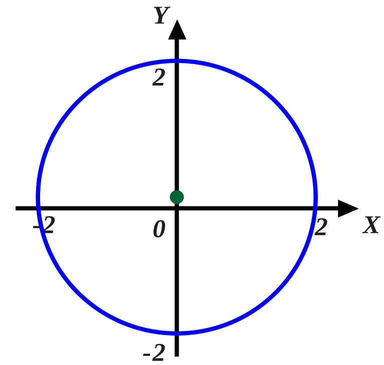
i. Completamos el trinomio cuadrado perfecto en la variable y,

$$x^2+y^2-3y+\left(\frac{3}{2}\right)^2=4+\left(\frac{3}{2}\right)^2,$$

ii. Factorizamos los trinomios cuadrados perfectos,

$$(x-0)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{4},$$

por tanto, $C\left(0\,,\,\frac{3}{2}\right)$ y $r=\frac{5}{2}$



EJEMPLO 5. CIRCUNFERENCIAS PUNTUALES Y CIRCUNFERENCIAS IMAGINARIAS

a. ¿ $x^2+y^2+2x+4y+8=0$ representa una circunferencia?:

i. Reacomodamos términos $x^2+2x+y^2+4y=-8$,

ii. Completamos trinomios cuadrados perfectos en las variables x y y,

$$x^2+2x+1^2+y^2+4y+2^2=-8+1^2+2^2,$$

iii. Factorizamos los trinomios cuadrados perfectos,

$(x+1)^2+(y+2)^2=-3$, entonces, $C(-1\,,-2)$ y $r=\sqrt{-3}$,

No se cumple la condición $r\geq 0$, $\sqrt{-1}$, por tanto, no representa un número real.

c. La ecuación $x^2+y^2+6y+9=0$ representa una "circunferencia puntual" (o un punto) en el plano cartesiano.

Si $x^2+y^2+6y+9=0$, entonces $D=0$, $E=6$ y $F=9$, por tanto,

$$\left(\frac{D}{2}\right)^2+\left(\frac{E}{2}\right)^2-F=\left(\frac{0}{2}\right)^2+\left(\frac{6}{2}\right)^2-9=0$$

d. $x^2+y^2-4x-4y+8=0$, corresponde a una circunferencia puntual, veamos la razón:

i. Reacomodamos términos $x^2-4x+y^2-4y=-8$,

ii. Completamos trinomios cuadrados perfectos en las variables x y y,

$$x^2-4x+2^2+y^2-4y+2^2=-8+2^2+2^2,$$

ii. Factorizamos los trinomios cuadrados perfectos,

$(x-2)^2+(y-2)^2=0$, así $C(2\,,\,2)$ y $r=0$

Puesto que $r=0$, la "circunferencia es equivalente al punto $C(2\,,\,2)$

SECCIÓN 5.1
EJERCICIOS 1

1. Obtén la ecuación cartesiana y la ecuación general

a. La circunferencia con centro en $C(0,0)$ y radio $r=\sqrt{3}$

b. La circunferencia con centro en $C(3,-1)$ y radio $r=5$

c. La circunferencia con centro en $C(2,-2)$ y radio $r=2$

d. La circunferencia con centro en $C\left(0,\frac{1}{3}\right)$ y radio $r=\frac{4}{3}$

2. Obtén el centro, el radio y la ecuación general.

a. $(x-2)^2+(y-1)^2=2^2$

b. $(x+1)^2+y^2=4$

c. $(x-1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$

d. $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=3^2$

3. Calcula: la ecuación cartesiana, el centro y el radio.

a. $x^2+y^2+6x+4y-36=0$

b. $x^2+y^2-2x+6y-54=0$

c. $x^2+y^2-5x-15=0$

d. $x^2+y^2-\frac{1}{3}x-y-\frac{10}{9}=0$

e. $x^2+y^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}y-\frac{1}{4}=0$

4. Identifica las ecuaciones que corresponden a circunferencias.

a. $x^2+y^2-4x+12=0$

b. $x^2+y^2+2x-2y-2=0$ **c.** $x^2+y^2-6y+6=0$

d. $x^2+y^2+2x-3y-6=0$

Tratemos otros problemas que involucran a la circunferencia.

EJEMPLO 6. INTERSECCIÓN CON CIRCUNFERENCIAS

1. Obtén los puntos de intersección.

a. La circunferencia

$$(x+1)^2+(y+1)^2=5$$

con la línea recta con $2x-y-4=0$

i. La circunferencia y la línea recta tienen asociado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}(x+1)^2+(y+1)^2=5 & \cdots\ E_1\\ 2x-y=4 & \cdots\ E_2\end{cases}$$

ii. De E_2 despejamos y, obtenemos

$$y=2x-4\ \cdots\ E_3.$$

iii. Sustituimos

$y=2x-4\ \cdots\ E_3$ en E_1,

luego $(x+1)^2+(2x-3)^2=5$

iv. El desarrollo y simplificación de

$$(x+1)^2+(2x-3)^2=5$$

da $x^2-2x+1=0$, entonces, $x=1$

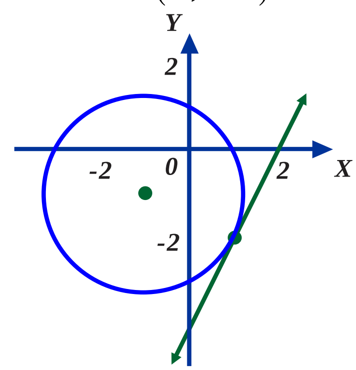
v. La ordenada del punto de intersección la obtenemos sustituyendo $x=1$ en

$y=2x-4\ \cdots\ E_3$, entonces, $y=-2$

El único punto de intersección de

$(x+1)^2+(y+1)^2=5$ y $2x-y-4=0$

es $I(1,-2)$



b. Las curvas asociadas a

$(x-2)^2+y^2=4$ y $x+y-4=0$

i. Les asociamos el sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases}(x-2)^2+y^2=4 & \cdots\ E_1\\ x+y=4 & \cdots\ E_2\end{cases}$$

ii. De E_2 obtenemos $y=-x+4\ \cdots\ E_3$.

iii. Sustituyamos $y=-x+4\ \cdots\ E_3$ en la ecuación E_1, $(x-2)^2+(-x+4)^2=4$

iv. Desarrollamos y simplificamos

$(x-2)^2+(-x+4)^2=4$, obtenemos,

$x^2-6x+8=0$, o bien,

$(x-2)(x-4)=0$, entonces

$$x_1=2 \text{ y } x_2=4$$

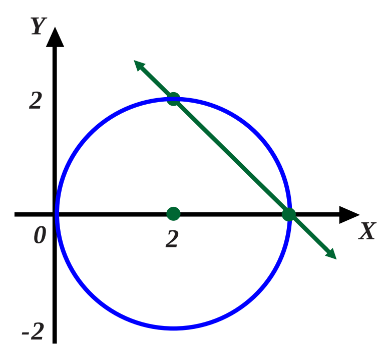
v. Obtenemos las ordenadas de los puntos de intersección, sustituimos $x_1=2$ y $x_2=4$ en

$$y=-x+4\ \cdots\ E_3$$

por tanto, $y_1=2$ y $y_2=0$

Los puntos de intersección entre las curvas son

$$I_1(2,2) \text{ y } I_2(4,0)$$



c. De la circunferencia de ecuación $x^2+y^2=\frac{5}{2}$ y la parábola con ecuación $4x^2-12y-3=0$

i. Multiplicamos la ecuación de la circunferencia por -4, obtenemos, $-4x^2 - 4y^2 = -10$

ii. Sumamos la ecuación obtenida en i. la ecuación de la parábola y simplificamos,

$$-4y^2 - 12y + 7 = 0, \text{ o bien, } 4y^2 + 12y - 7 = 0$$

iii. Las soluciones de $4y^2 + 12y - 7 = 0$ son

$$y_1 = \frac{1}{2} \text{ y } y_2 = -\frac{7}{2}$$

iv. En la ecuación de la circunferencia:

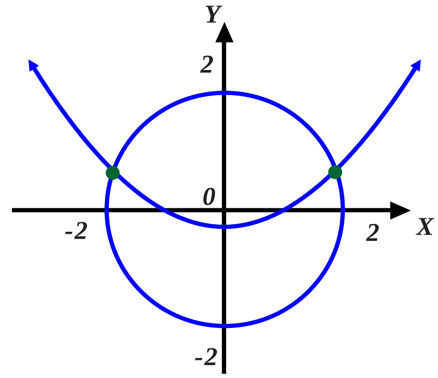
Si $y = -\frac{7}{2}$, entonces, $x^2 = -\frac{39}{4}$ (sin solución).

Si $y = \frac{1}{2}$, entonces, $x^2 = \frac{9}{4}$, o bien,

$$x = -\frac{3}{2} \text{ y } x = \frac{3}{2}$$

v. Entonces, los puntos de intersección son:

$$I_1\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ y } I_2\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$



d. Entre las circunferencias con ecuaciones

$$x^2 + y^2 = 8 \text{ y } (x-4)^2 + y^2 = 8$$

i. De la primera ecuación despejamos y^2, obtenemos $y^2 = 8 - x^2$

ii. Sustituimos $y^2 = 8 - x^2$ en

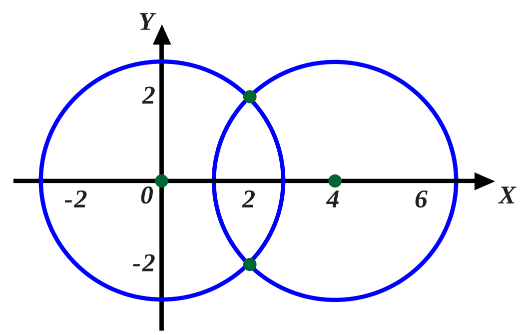
$$(x-4)^2 + 8 - x^2 = 8, \text{ entonces, }$$
$$-8x + 16 = 0$$

iii. Con , $-8x + 16 = 0$ obtenemos $x = 2$

iv. Sustituimos $x = 2$ la ecuación obtenida en **i.**, $y^2 = 4$, así $y_1 = -2$ y $y_2 = 2$

v. Los puntos de intersección de las circunferencias son:

$$I_1(2, -2) \text{ y } I_2(2, 2)$$



SECCIÓN 5.1
EJERCICIOS 2

1. En caso de existir, obtén los puntos de intersección.

a. La circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ con la línea recta con $y = 2x + 2$

b. La circunferencia $(x-1)^2 + y^2 = 8$ con la línea recta con $x + y - 5 = 0$

c. La circunferencia $x^2 + y^2 = \frac{5}{2}$ con la parábola $4y^2 - 12x - 3 = 0$

d. La circunferencia $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ con la parábola $x^2-2x-4y+5=0$

e. Las circunferencias $(x-1)^2+y^2=4$ y $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{25}{4}$

} $x^2+y^2=\frac{5}{2}$ y la parábola con ecuación $4y^2-12x-3=0$

f. Las circunferencias $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ y $(x-2)^2+(y-1)^2=5$

EJEMPLO 7. OTROS PROBLEMAS CON CIRCUNFERENCIAS

1.

a. El radio de la circunferencia con centro en el punto $C(2,-2)$ y que contiene al punto $p(1,1)$ tiene longitud

$$r=d(p,F)=\sqrt{(1-2)^2+(1-(-2))^2},$$
$$=\sqrt{10}$$

entonces, su ecuación cartesiana es

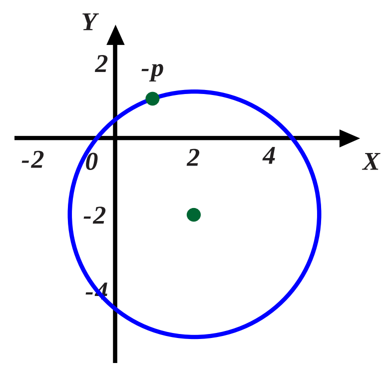
$$(x-2)^2+(y+2)^2=10$$

La ecuación general se obtiene desarrollando los binomios y reacomodando términos, entonces,

$$x^2-4x+4+y^2-4y+4=0,$$

o bien,

$$x^2+y^2-4x+6y+8=0$$



b. Los extremos del diámetro de una circunferencia son los puntos $p_1(2,0)$ y $p_2(2,-2)$, entonces, su centro es el punto medio del segmento de recta que definen los puntos anteriores,

$$C\left(\frac{2+2}{2},\frac{0-2}{2}\right)=C(2,-1)$$

Radio $r=\sqrt{(2-2)^2+(-1-0)^2}=1$ unidades.

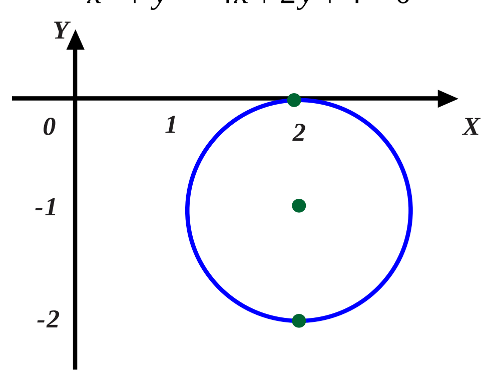
Por tanto, su ecuación cartesiana es

$$(x-2)^2+(y+1)^2=1$$

Desarrollando los binomios y reacomodando términos,

$x^2-4x+4+y^2+2y+1-1=0$, o bien,

$$x^2+y^2-4x+2y+4=0$$



c. EL centro de la circunferencia con ecuación $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=2$, es $C\left(\frac{1}{3},\frac{5}{2}\right)$, por tanto, la ecuación cartesiana de la circunferencia concéntrica a ella con radio $r=\sqrt{3}$ es

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=3$$

Ecuación general,

$$x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}+y^2-5y+\frac{25}{4}-3=0 \text{ , luego } x^2+y^2-\frac{2}{3}x-5y-\frac{79}{36}=0$$

d. Tres puntos no colineales determinan una circunferencia, los puntos $p_1(0,0)$, $p_2(4,0)$ y $p_3(2,1)$ satisfacen las ecuaciones (cartesiana y general) de la circunferencia, en este caso utilicemos la ecuación $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ (general):

i. Si $p_1(0,0)$, entonces, $(0)^2+(0)^2+D(0)+E(0)+F=0 \Rightarrow F=0$

ii. Si $p_2(4,0)$, entonces, $(4)^2+(0)^2+D(4)+E(0)+F=0 \Rightarrow 4D+F+16=0$

iii. Si $p_3(2,1)$, entonces, $(2)^2+(1)^2+D(2)+E(1)+F=0 \Rightarrow 2D+E+F=-5$

iv. Por **i.**, $F=0$, sustituyendo en la ecuación del inciso **ii.**, obtenemos:

$4D+(0)+16=0$, o bien, $D=-4$

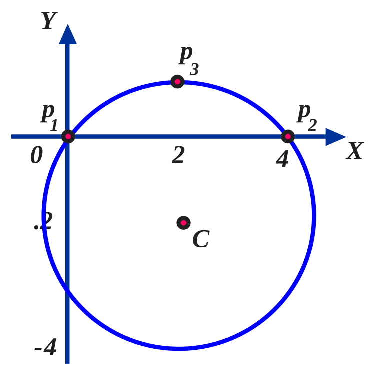
v. Puesto que $D=-4$ y $F=0$, al sustituirlos en la ecuación del inciso **iii.** obtenemos:

$2(-4)+E+0=-5$, o bien, $E=3$

Si $F=0$, $D=-4$ y $E=3$ en

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0 \Rightarrow$$
$$x^2+y^2-4x+3y=0$$

La forma cartesiana es $(x-2)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$



SECCIÓN 5.1
EJERCICIOS 3

1. Obtén la ecuación general de la circunferencia.

a. Centro en el punto $C(1,-3)$ y que contiene al punto $P(0,3)$ $x^2+y^2-3x+6y=0$

b. Diámetro con extremos en los puntos $P(1,2)$ y $Q(-1,-4)$ $x^2+y^2-2x-25=0$

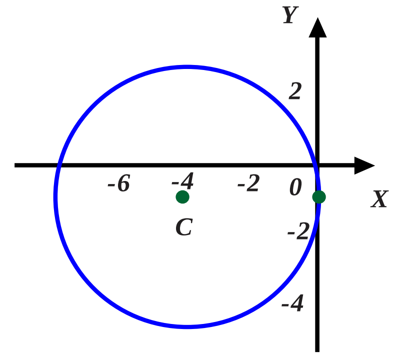
c. Contiene los puntos $P(0,0)$, $Q(4,0)$ y $R(0,-2)$ $x^2+y^2-4x+2y=0$

EJEMPLO 8. CIRCUNFERENCIAS PUNTUALES Y CIRCUNFERENCIAS IMAGINARIAS

1.

a. Una circunferencia tiene centro en $C(-4\ ,\ -1)$ y es tangente al eje de las ordenadas determina sus ecuaciones.

$x^2+y^2+6x+2y+1=0$



La figura muestra que su radio mide $r=4$

Ecuación cartesiana es

$$(x-(-4))^2+(y-(-1))^2=4^2, \text{ o bien,}$$

$$(x+4)^2+(y+1)^2=16$$

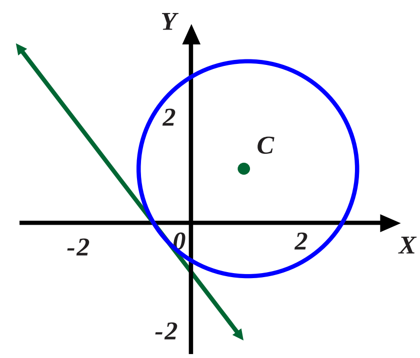
Ecuación general,

$$x^2+6x+9+y^2+2y+1-9=0 \text{ , entonces}$$

b. ECUACIÓN DE UNA CIRCUNFERENCIA TANGENTE A UNA LÍNEA RECTA

La circunferencia con centro en $C(1\ ,\ 1)$ y tangente a la línea recta ecuación $4x+3y+3=0$, tiene radio con longitud

$$r=d\ (F_0\ ,\ L)=\frac{|\,4(1)+3(1)+3\,|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{10}{5}=2,$$



por tanto, su ecuación ordinaria es

$$(x-1)^2+(y-1)^2=2^2,$$

tiene ecuación general

$$x^2+y^2-2x-2y-2=0$$

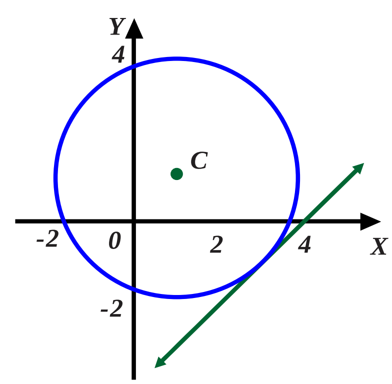
c. LÍNEA RECTA TANGENTE A UNA CIRCUNFERENCIA.

Obtén la ecuación de la línea recta tangente a la circunferencia $x^2+y^2-2x-2y-2=0$ en el punto $T(3\ ,\ -1)$.

La forma cartesiana de ecuación de la circunferencia es $(x-1)^2+(y-1)^2=8$ y $C(1\ ,\ 1)$ es el centro.

La ecuación de la recta que contiene al radio tiene pendiente $m=\dfrac{-1-1}{1-3}=1$, por tanto, la línea recta tangente que contiene al punto es

$$y-(-1)=1(x-3);$$



forma general

$$x-y-4=0$$

SECCIÓN 5.1
EJERCICIOS 4

1. Obtén la ecuación general de la circunferencia.

a. Centro en $C(3\ ,\ 4)$ y tangente al eje las abscisas.

b. Centro en $C(2\ ,\ 0)$ y tangente a la línea recta con ecuación $x-y+2=0$

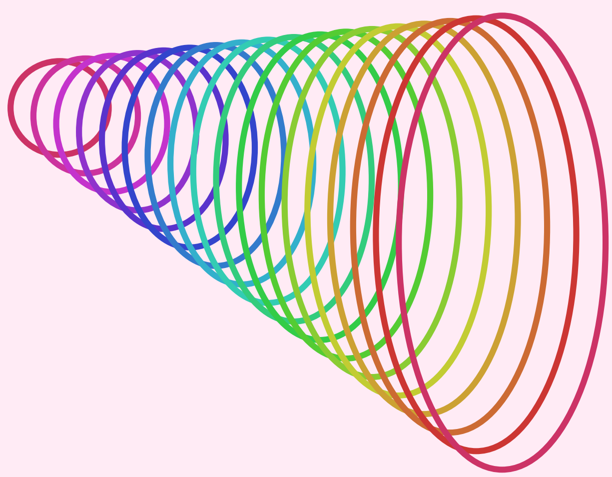
c. Centro en $C(4\ ,\ 1)$ y tangente a la línea recta con ecuación $x-y+2=0$

5.2 LA ELIPSE, SUS ECUACIONES Y APLICACIONES

APRENDIZAJES

EL ALUMNO:

5. Obtiene la definición de elipse como lugar geométrico e identifica sus elementos.
6. Obtiene la ecuación cartesiana de una elipse con ejes focales paralelos a los ejes cartesianos.
7. Reconoce los tipos diferentes de simetrías de la elipse.
8. Identifica el papel de los parámetros a, b y c en la gráfica de la elipse y los emplea en su construcción.
9. Determina los elementos de la elipse transformando la ecuación general a su forma ordinaria.
10. Resuelve problemas geométricos y en otros contextos.



Una elipse es el lugar geométrico del plano cartesiano formando por el conjunto de puntos P tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2 es constante, la figura 1. muestra la generación de una elipse.

$\overline{F_1 P}$ y $\overline{F_2 P}$, es decir, $d\left(F_1\,,\,P\right)+d\left(F_2\,,P\right)=k$

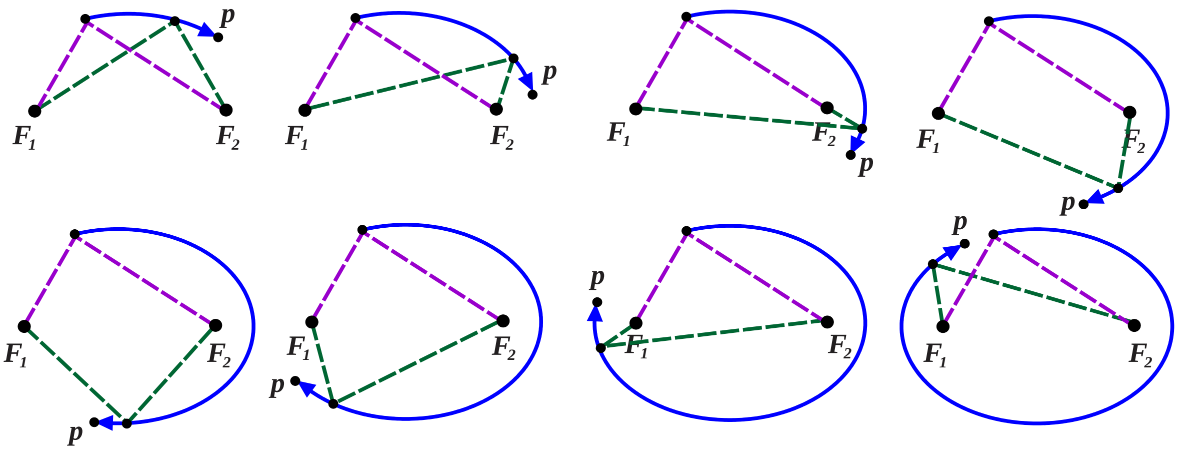


FIGURA 1.

Formalmente:

DEFINICIÓN 1. (ELIPSE COMO LUGAR GEOMÉTRICO)

a. El ***lugar geométrico*** formado por el conjunto de puntos en el plano cartesiano, tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos (también en el plano cartesiano) es constante se conoce como ***elipse***.
b. Los puntos fijos se llaman focos.
c. Si los puntos F_1, F_2 son los focos y P es un punto de la elipse, entonces,

$$d\left(F_1\,,P\right)+d\left(F_2\,,P\right)=k$$

Elementos de una elipse:

i. Eje focal, la línea recta que contiene a los focos F_1 y F_2

ii. Vértices, los puntos comunes entre el eje focal y la elipse, V_1 y V_2

iii. Centro C, el punto medio de cualquiera de los segmentos rectilíneos $\overline{F_1F_2}$ o $\overline{V_1V_2}$

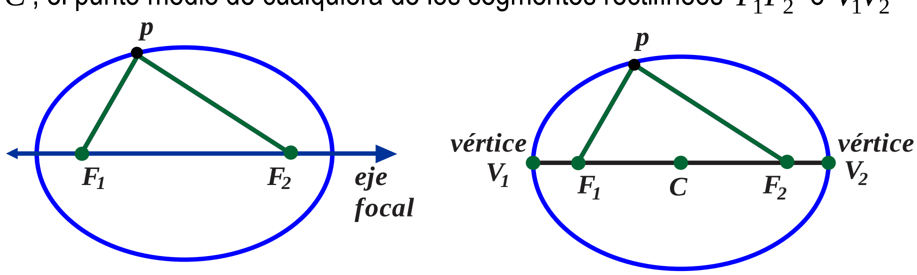


FIGURA 2.

iv. Eje mayor, segmento rectilíneo con extremos en los vértices V_1 y V_2, se puede justificar que su longitud es $2a$

v. Eje menor, segmento rectilíneo con extremos en la elipse, perpendicular al eje mayor y contiene al centro se le asigna longitud $2b$

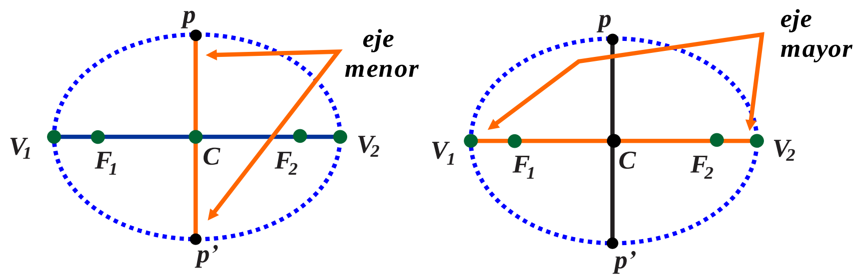


FIGURA 3.

vi. El segmento rectilíneo $\overline{CF_2}$ se llama parámetro, su longitud es la semi distancia focal y le asignaremos el valor de c. La distancia focal es la longitud del segmento rectilíneo con extremos en los focos, se le asigna longitud $2c$

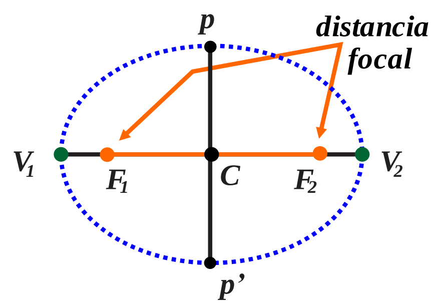


FIGURA 4.

Las longitudes de los segmentos rectilíneos:

i. Semiejes mayores V_1C y F_0C (cada uno con longitud a).

ii. Segmentos rectilíneos $\overline{F_1C}$ y $\overline{F_2C}$ (cada uno con longitud c).

iii. Semiejes menores (cada uno con longitud b), se vinculan mediante el teorema de Pitágoras,

$$a^2 = b^2 + c^2$$

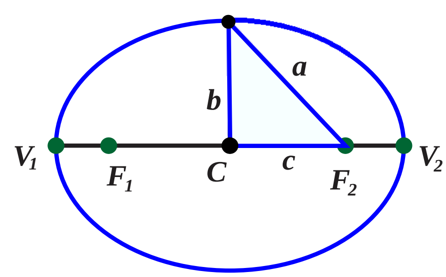


FIGURA 5.

EJEMPLO 1. DEFINICIÓN Y ELEMENTOS DE LA ELIPSE

1.

a. El punto $p(x, y)$ se desplaza (en el plano cartesiano) de manera que la suma de sus distancias a los puntos fijos $F_1(0,0)$ y $F_2(4,0)$ es 10 unidades, entonces,

i. La condición que describe el desplazamiento del punto es

$$\sqrt{(x-0)^2 + y^2} + \sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 10$$

ii. La curva descrita es una elipse con eje focal horizontal (eje de las abscisas), la longitud del eje mayor es $2a = 10$, entonces, $a = 5$

iii. La elipse tiene centro en el punto medio de los focos, entonces, $C\left(\frac{0+4}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = C(2,0)$

iv. La distancia focal es $2c = 4$ unidades, por tanto, $c = 2$

v. Con la ecuación $a^2 = b^2 + c^2$ obtenemos la longitud del semieje menor, $5^2 = b^2 + 2^2$, entonces $b = \sqrt{21}$ unidades.

La ***figura 6.*** muestra los elementos de una elipse con eje focal horizontal.

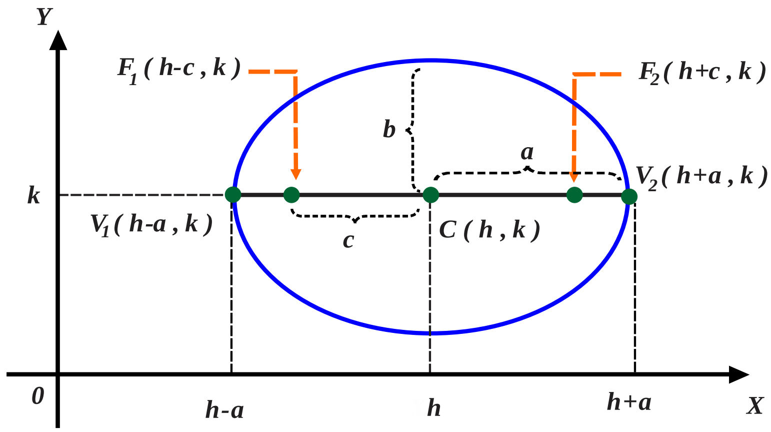


FIGURA 6.

1. Centro $C(h, k)$
2. Focos $F_1(h-c, k)$ y $F_2(h+c, k)$
3. Vértices $V_1(h-a, k)$ y $V_2(h+a, k)$
4. Longitud del semieje mayor a
5. Longitud del semieje menor b
6. Parámetro (semi longitud focal) c
7. $a^2 = b^2 + c^2$

EJE FOCAL VERTICAL

1. Centro $C(h, k)$
2. Focos
$F_1(h, k-c)$ y $F_2(h, k+c)$
3. Vértices
$V_1(h, k-a)$ y $V_2(h, k+a)$
4. Longitud del semieje mayor a
5. Longitud del semieje menor b
6. Parámetro (semi longitud focal) c
7. $a^2 = b^2 + c^2$

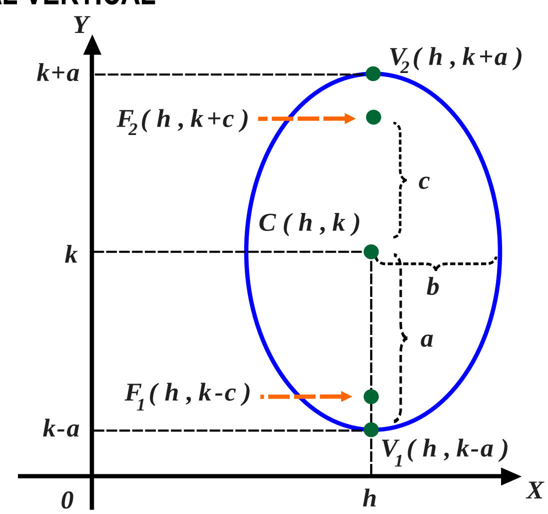


FIGURA 7.

La inclusión de los elementos de la elipse en la condición que la define como lugar geométrico y un desarrollo algebraico adecuado conducen a la propiedad:

PROPIEDAD 1. (ECUACIÓN CARTESIANA DE UNA ELIPSE)

Sea una elipse con centro en $C(h,k)$, eje mayor de longitud $2a$, eje menor con longitud $2b$ (donde $a>b>0$), entonces:

a. Ecuación cartesiana de la elipse con eje focal horizontal $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$

b. Ecuación cartesiana de la elipse con eje focal vertical $\dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$

El desarrollo, reacomodo y re nombramiento de los coeficientes de las variables x e y de las ecuaciones cartesianas se simplifican en la ecuación general de la elipse.

DEFINICIÓN 2. (ECUACIÓN GENERAL DE LA ELIPSE)

Ecuación general de la elipse:

$Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$, tal que, $A>0$, $B>0$, $A\neq B$ y $\dfrac{D^2}{4A}+\dfrac{E^2}{4B}-F=0$

EJEMPLO 2. TRÁNSITO ENTRE ECUACIONES DE LA ELIPSE

1. Obtén la forma general y orientación del eje focal.

a. Rescribamos $\dfrac{(x+1)^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$ en la forma general.

i. Multiplicamos por $(3^2)(2^2)$ (producto de los denominadores) todos los términos de la ecuación

$$(3^2)(2^2)\frac{(x+1)^2}{3^2}+(3^2)(2^2)\frac{y^2}{2^2}=(3^2)(2^2)(1)$$

Simplificamos, $4(x+1)^2+(9)(4)y^2=(9)(4)$

Desarrollamos el cuadrado del binomio y los productos correspondientes

$$4\left(x^2+2x+1\right)^2+36y^2=36 \Leftrightarrow 4x^2+8x+4+36y^2=36$$

Reacomodamos términos y simplificamos $4x^2+36y^2+8x-32=0$

ii. El denominador mayor pertenece a la variable x, por tanto, su eje focal es la línea recta con ecuación $y=0$ (horizontal).

b. $\dfrac{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^2}+\dfrac{\left(y+\frac{3}{4}\right)^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}=1$

i. La rescribimos con divisores enteros,

$$(4)^2\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{(3)^2}{(2)^2}\left(y+\frac{3}{4}\right)^2=1 \Leftrightarrow 16\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{9}{4}\left(y+\frac{3}{4}\right)^2=1$$

Multipliquemos toda la ecuación por 4, $64\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+9\left(y+\frac{3}{4}\right)^2=4$

El desarrollo de los binomios es: $64\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}\right)+9\left(y^2+\frac{3}{2}y+\frac{9}{16}\right)=4$, es decir,

$$64x^2-\frac{256}{3}x+\frac{256}{9}+9y^2+\frac{27}{2}y+\frac{81}{16}-4=0\text{, o bien,}$$

$$64x^2+9y^2-\frac{256}{3}x+\frac{27}{2}y+\frac{4249}{144}=0$$

ii. El eje focal es vertical y pertenece a la línea recta con ecuación $x=\frac{2}{3}$

2. Obtén la forma cartesiana.

a. $3x^2+2y^2+8y-22=0$

i. La rescribimos en la forma $3x^2+2y^2+8y=22$

ii. En los términos con la variable y factorizamos el coeficiente del término cuadrático

$$3x^2+2\left(y^2+4y\right)=22$$

iii. Completamos el trinomio cuadrado perfecto en la variable y, y luego lo escribimos como el cuadrado de un binomio

$$3x^2+2\left(y^2+4y+4-4\right)=22 \Leftrightarrow 3x^2+2(y+2)^2=8+22 \Leftrightarrow 3x^2+2(y+2)^2=30$$

iv. Dividimos toda la ecuación por 30, $\frac{3x^2}{30}+\frac{2(y+2)^2}{30}=1$, o bien, $\frac{x^2}{\left(\sqrt{10}\right)^2}+\frac{(y+2)^2}{\left(\sqrt{15}\right)^2}=1$

v. El denominador más grande se encuentra debajo de la variable y, por tanto, su eje focal es vertical y forma parte de la línea recta con ecuación $x=0$

b. Para escribir $x^2+4y^2-2x-24y-33=0$:

i. Reordenamos los términos de la ecuación en la forma $x^2-2x+4y^2-24y+33=0$

ii. Factorizamos los coeficientes de los términos cuadráticos, $\left(x^2-2x\right)+4\left(y^2-6y\right)+33=0$ y completamos trinomios cuadrados perfectos y posteriormente los factorizamos,

$$\left((x-1)^2-1^2\right)+4\left((y-3)^2-3^2\right)+33=0,$$

entonces, $(x-1)^2-1^2+4(y-3)^2-4\cdot 3^2+33=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+4(y-3)^2=4$

Dividimos la última ecuación por 4, $\frac{(x-1)^2}{2^2}+\frac{(y-3)^2}{1^2}=1$

iii. je focal es horizontal y forma parte de la línea recta con ecuación $y=3$

En el ***ejemplo 3***., ten en cuenta:

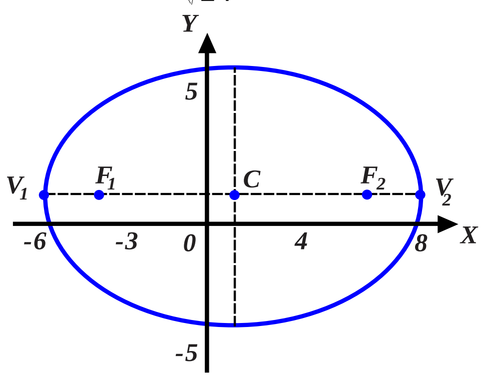
i. El centro de la elipse es el punto medio del segmento rectilíneo con extremos en los vértices V_1 y V_2, o el punto medio del segmento rectilíneo con extremos en los focos F_1 y F_2

iii. Las longitudes: a (semieje mayor), b (semieje menor), c (distancia focal) se relacionan con la ecuación $a^2 = b^2 + c^2$ (Teorema de Pitágoras).

EJEMPLO 3. ELEMENTOS DE LA ELIPSE A PARTIR DE SUS ECUACIONES

1. Obtén los elementos de la elipse (centro, longitud de los semiejes, semi longitud focal, focos, vértices, ecuación general y trázala.

a. $\dfrac{(x-1)^2}{7^2} + \dfrac{(y-1)^2}{\sqrt{24}^2} = 1$



Comparamos con

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1, \text{ y obtenemos:}$$

i. Centro $C(h,k) = C(1,1)$

ii. De la posición de los denominadores tenemos

$$a = 7 \text{ y } b = \sqrt{24}$$

iii. Parámetro (semi longitud focal) c,

$$7^2 = \sqrt{24}^2 + c^2, \Leftrightarrow c = 5$$

iv. Focos

$$F_1(h-c,k) = F_1(1-5,1) = F_1(-4,1)$$
$$F_2(h+c,k) = F_2(1+5,1) = F_2(6,1)$$

v. Vértices

$$V_1(h-a,k) = V_1(1-7,1) = V_1(-6,1)$$
$$V_2(h+a,k) = V_2(1+7,1) = V_2(8,1)$$

vi. Desarrollando y rescribiendo la ecuación cartesiana:

$$24(x-1)^2 + 49(y-1)^2 = 1176,$$

o bien,

$$24x^2 + 49y^2 + 48x - 98y - 1103 = 0$$

b. $\dfrac{(x+2)^2}{\sqrt{2}^2} + \dfrac{(y-2)^2}{2^2} = 1$

Comparamos con

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1,$$

obtenemos:

i. Centro $C(h,k) = C(-2,2)$

ii. Longitud de los semiejes

$$a = 2 \text{ y } b = \sqrt{2}$$

iii. Parámetro (semi longitud focal)

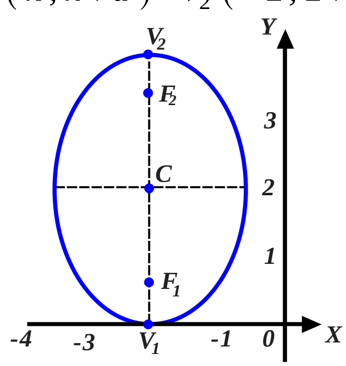
$$c,\ 2^2 = \sqrt{2}^2 + c^2 \Leftrightarrow c = \sqrt{2}$$

iv. Focos: $F_1(h,k-c) = F_1\left(-2, 2-\sqrt{2}\right)$

$$F_2(h,k+c) = F_2\left(-2, 2+\sqrt{2}\right)$$

v. Vértices: $V_1(h,k-a) = V_1(-2, 2-2)$

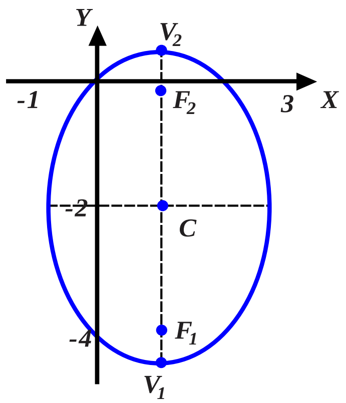
$$V_2(h,k+a) = V_2(-2, 2+2)$$



vi. Con la ecuación cartesiana obtenemos,

$$4(x+2)^2+2(y-2)^2=8 \Leftrightarrow 2x^2+y^2+8x-4y+6=0$$

c. $\dfrac{(x-1)^2}{3}+\dfrac{(y+2)^2}{6}=1$



De la comparación con

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1:$$

i. Centro

$$C(h,k)=C(1,-2).$$

ii. Nota la posición del denominador mayor, entonces

$$a=\sqrt{6} \text{ y } b=\sqrt{3}$$

iii. Parámetro (semi longitud focal) c, de

$$\sqrt{6}^2=\sqrt{3}^2+c^2,$$

obtenemos $c=\sqrt{3}$

iv. Focos

$$F_1(h,k-c)=F_1\left(1,-2-\sqrt{3}\right)$$
$$F_2(k,h+c)=F_2\left(1,-2+\sqrt{3}\right)$$

v. Vértices

$$V_1(h,k-a)=V_1\left(1,-2-\sqrt{6}\right)=V_1\left(1,-2-\sqrt{6}\right)$$
$$V_2(h,k+a)=V_2\left(1,-2+\sqrt{6}\right)=V_2\left(1,-2+\sqrt{6}\right)$$

vi. Con un desarrollo algebraico y rescritura de la ecuación cartesiana obtenemos

$$6(x-1)^2+3(y+2)^2=18,$$

entonces,

$$2x^2+y^2-4x+4y=0$$

2. Obtén todos los elementos de la elipse (centro, longitud de los semiejes, semi longitud focal, focos, vértices ecuación cartesiana) y traza la gráfica.

a. $3x^2+9y^2-27=0$

i. Si $3x^2+9y^2-27=0$,

entonces,

$$x^2+3y^2=9,$$

dividimos todos los términos por 9 y obtenemos

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1, \text{ o bien, } \frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{\sqrt{3}^2}=1$$

ii. Centro

$$F_0(h,k)=F_0(0,0)$$

iii. De los denominadores,

$$a=3 \text{ y } b=\sqrt{3}.$$

iv. Parámetro (semi longitud focal) c,

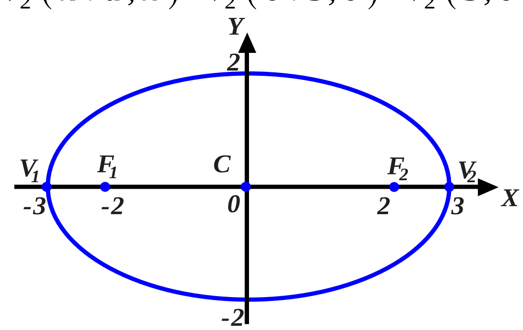
$$3^2=\sqrt{3}^2+c^2, \Leftrightarrow c=\sqrt{6}$$

v. Focos

$$F_1(h-c,k)=F_1\left(0-\sqrt{6},0\right)=F_1\left(-\sqrt{6},0\right)$$
$$F_2(h+c,k)=F_2\left(0+\sqrt{6},0\right)=F_2\left(\sqrt{6},0\right)$$

vi. Vértices

$$V_1(h-a,k)=V_1(0-3,0)=V_1(-3,0)$$
$$V_2(h+a,k)=V_2(0+3,0)=V_2(3,0)$$



b. $4x^2+9y^2-8x-36y-104=0$

i. Forma cartesiana, si

$$4x^2+9y^2-8x-36y-104=0,$$

entonces

$4x^2-8x+9y^2-36y=104,$

$4\left(x^2-2x\right)+9\left(y^2-4y\right)=104,$

$4\left(x^2-2x+1-1\right)+9\left(y^2-4y+4-4\right)=104,$

$4(x-1)^2-4+9(y-2)^2-36=104,$

$$4(x-1)^2+9(y-2)^2=144,$$

o bien

$$\frac{(x-1)^2}{6^2}+\frac{(y-2)^2}{4^2}=1$$

ii. Centro

$$F_0(h,k)=F_0(1,2)$$

iii. De los denominadores,

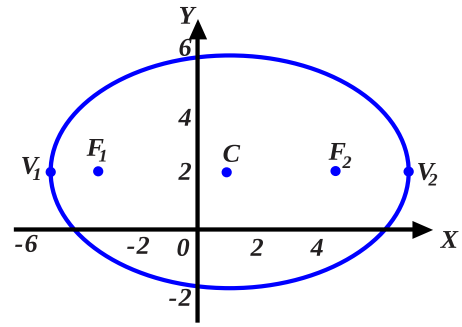
$$a=6 \text{ y } b=4$$

iv. Parámetro (semi longitud focal) c, de

$$6^2=4^2+c^2,$$

obtenemos,

$$c=\sqrt{20}$$



v. Focos

$$F_1(h-c,k)=F_1\left(1-\sqrt{20},2\right)$$
$$F_2(h+c,k)=F_2\left(1+\sqrt{20},2\right)$$

vi. Vértices

$V_1(h-a,k)=V_1(1-6,2)=V_1(-5,2)$

$V_2(h+a,k)=V_2(1+6,2)=V_2(5,2)$

c. $9x^2+y^2+36x-6y+36=0$

i. Forma cartesiana, si

$9x^2+y^2+36x-6y+36=0$, entonces,

$9x^2+36x+y^2-6y=-36,$

$9\left(x^2+4x+4-4\right)+y^2-6y+9-9=-36,$

$9(x+2)^2-36+(y-3)^2-9=-36,$

$9(x+2)^2+(y-3)^2=9$ y

$$\frac{(x+2)^2}{1^2}+\frac{(y-3)^2}{3^2}=1$$

ii. Centro $C(h,k)=C(-2,3)$

iii. De los denominadores, $a=3$ y $b=1$

iv. Parámetro (semi longitud focal) c,

de $3^2=1^2+c^2$, obtenemos $c=\sqrt{8}$

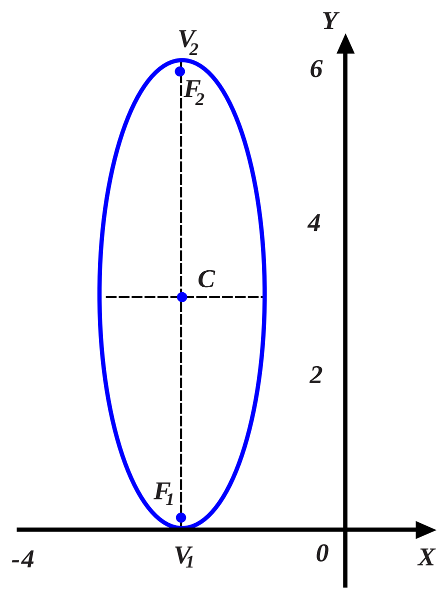
v. Focos,

$$F_1(h,k-c)=F_1\left(-2,3-\sqrt{8}\right)$$
$$F_2(h,k+c)=F_2\left(-2,3+\sqrt{8}\right)$$

vi. Vértices

$V_1(h,k-a)=V_1(-2,3-3)=V_1(-2,0)$

$V_2(h,k+a)=V_2(-2,3+3)=V_2(-2,6)$



SECCIÓN 5.2
EJERCICIOS 1

1. Obtén los elementos de la elipse (centro, longitud de los semiejes, semi longitud focal, focos, vértices, ecuación general.

a. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{3}=1$

b. $\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{(y-2)^2}{4^2}=1$

c. $\dfrac{(x+2)^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{4^2}=1$

d. $\dfrac{(x+3)^2}{5^2}+\dfrac{(y-1)^2}{2^2}=1$

e. $\dfrac{(x-4)^2}{3^2}+\dfrac{(y+2)^2}{1^2}=1$

f. $2x^2+3y^2-6=0$

g. $x^2+9y^2+4x-5=0$

h. $4x^2+y^2-8x-2y+4=0$

i. $2x^2+5y^2-4x-10y-13=0$

j. $2x^2+y^2+12x-4y+18=0$

En la resolución del ejemplo 4. tuvimos en cuenta:

i. Si el binomio del denominador al cuadrado en la variable x es mayor que el denominador en la variable y, el eje focal de la elipse es horizontal, en caso contrario es vertical.

ii. Las longitudes: a (del semieje mayor), b (semieje menor), c (semi distancia focal) se relación con la ecuación $a^2=b^2+c^2$

iii. Los focos se encuentran a c unidades del centro y los vértices a a unidades del centro.

EJEMPLO 4. ECUACIONES DE LA ELIPSE A PARTIR DE CIERTOS ELEMENTOS

1. Obtén los elementos restantes y las ecuaciones de la elipse, trázala.

a. Con vértices $V_1(-3,0)$, $V_2(3,0)$ y longitud del semieje menor $b=\sqrt{3}$

i. El centro es el punto medio del segmento rectilíneo con extremos en los vértices

$$C(h,k)=C\left(\frac{-3+3}{2},\frac{0+0}{2}\right)=F_0(0,0)$$

iii. $a=d(F_0,V_2)=3$

ii. Parámetro (semi longitud focal) c, de

$$3^2=\sqrt{3}^2+c^2\text{, obtenemos } c=\sqrt{6}$$

iv. Focos:

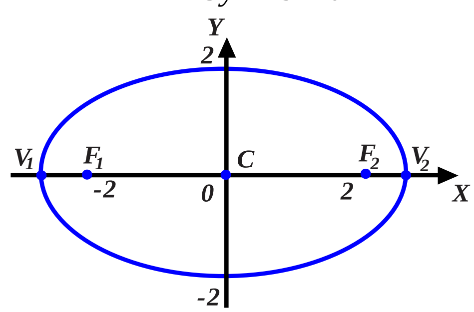
$$F_1(h-c,k)=F_1(0-\sqrt{6},0)=F_1(-\sqrt{6},0)$$
$$F_2(h+c,k)=F_2(0+\sqrt{6},0)=F_2(\sqrt{6},0)$$

v. La ecuación cartesiana es

$$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{\sqrt{3}^2}=1$$

vi. Multiplicamos por 9 los términos de la ecuación y los reacomodamos,

$$x^2+3y^2-9=0$$



b. $F_1(0,-2)$, $C(0,2)$ y $a=\sqrt{8}$

i. El centro es el punto medio del segmento rectilíneo con extremos en los focos

$$C(h,k)=C\left(\tfrac{0+0}{2},\tfrac{-2+2}{2}\right)=C(0,0)$$

ii. Parámetro (semi longitud focal) c, obtenemos calculando la distancia entre el centro

$$C(0,0)$$

y cualquiera de los focos, digamos $F_2(0,2)$, entonces $c=d(C,F_2)=2$

iii. Longitud del semieje menor b, de

$$\sqrt{8}^2=b^2+2^2,$$

obtenemos, $8=b^2+4$,
o bien,

$$b=2$$

iv. Vértices

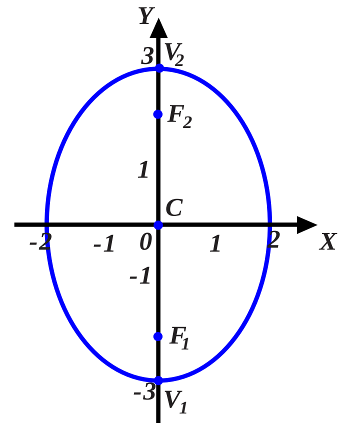
$$V_1(h,k-a)=V_1\left(0,-\sqrt{8}\right)$$
$$V_2(h,k+a)=V_2\left(0,\sqrt{8}\right)$$

v. Por tanto, $\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{\sqrt{8}^2}=1$

vi. Multiplicamos por 8 los términos de la ecuación anterior, y posteriormente, los reacomodamos

$$(8)\frac{x^2}{2^2}+(8)\frac{y^2}{\sqrt{8}^2}=(8)(1),$$

o bien, $2x^2+y^2-8=0$



c. $C(3,1)$, $F_1\left(3-\sqrt{\tfrac{15}{4}},1\right)$ y $V_2(5,1)$

Nota que los elementos anteriores se encuentran sobre la línea horizontal con ecuación $y=1$, por tanto, el eje focal es horizontal.

i. $c=d(F_1,C)=\sqrt{\tfrac{15}{4}}$ y

$$a=d(C,V_2)=2$$

ii. Longitud del semieje menor b, de

$$2^2=b^2+\sqrt{\frac{15}{4}}^2,\quad 4=b^2+\frac{15}{4}\ \text{ o }\ b=\frac{1}{2}$$

iii. Foco dos,

$$F_2(h+c,k)=F_2\left(3+\sqrt{\tfrac{15}{4}},1\right)$$

iv. Vértice uno,

$$V_1(h-a,k)=V_1(3-2,1)=V_1(1,1)$$

v. Por tanto, la ecuación cartesiana de la elipse es

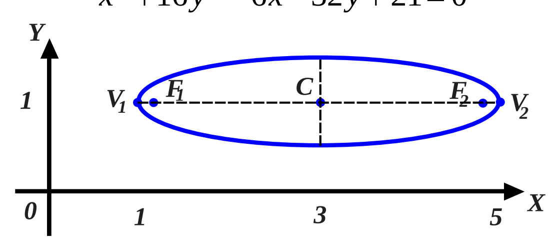
$$\frac{(x-3)^2}{2^2}+\frac{(y-1)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1$$

vi. Multiplicamos por 4 los términos de la ecuación anterior, y posteriormente, los reacomodamos

$$(4)\frac{(x-3)^2}{2^2}+(4)\frac{(y-1)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=(4)(1)$$

$\Rightarrow (x-3)^2+(16)(y-1)^2=4$, obteniendo

$$x^2+16y^2-6x-32y+21=0$$



d. $F_1\left(0,2-\sqrt{7}\right)$, $F_2\left(0,2+\sqrt{7}\right)$ y

$$b=3$$

i. El centro es el punto medio del segmento rectilíneo que definen los focos, éste es

$$F_0\,(0,2)$$

ii. La distancia entre el centro y cualquiera de los focos es $c=\sqrt{7}$

iii. La longitud del semieje mayor la calculamos con $b=3$ y $c=\sqrt{7}$,

entonces, $a^2=3^2+\sqrt{7}^{\,2}$, o bien, $a=4$

iv. Vértices

$V_1\,(h,k-a)=V_1\,(0,2-4)=V_1\,(0,-2)$

$V_2\,(h,k+a)=V_2\,(0,2+4)=V_2\,(0,6)$

v. La elipse tiene ecuación cartesiana

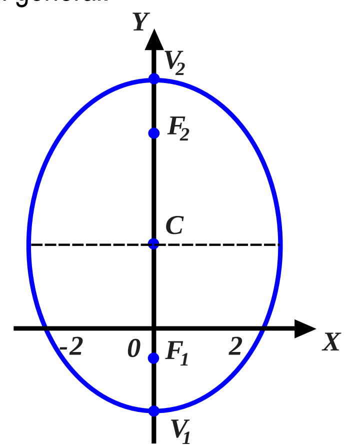
$$\frac{x^2}{3^2}+\frac{(y-2)^2}{4^2}=1$$

vi. Multiplicamos por 144 los términos de la ecuación anterior, $16x^2+9(y-2)^2=144$

Desarrollando los productos y reacomodando términos obtenemos,

$$16x^2+9y^2-36y-108=0,$$

ecuación general.



SECCIÓN 5.2
EJERCICIOS 3

1. Obtén la ecuación cartesiana y la ecuación general.

a. $F_1\,(0,-1)$, $F_2\,(0,1)$ y $a=\sqrt{3}$.

b. $V_1\,(-3,-2)$, $V_2\,(3,-2)$ y $b=2$.

c. $C\,(3,0)$, $V_1\,(3,-4)$, $F_2\left(3,\sqrt{12}\right)$

d. Eje focal horizontal, $a=3$, $c=\sqrt{5}$ y $C\,(-1,1)$

e. $C\,(-4,-2)$, $F_1\left(-4-\sqrt{8},-2\right)$ y $V_1\,(-1,-2)$

f. $F_1\left(1,-2-\sqrt{3}\right)$, $F_2\left(1,-2+\sqrt{3}\right)$ y $a=8$

g. $V_1\,(-7,-2)$, $V_1\,(-1,-2)$ y $F_2\left(-4+\sqrt{7},-2\right)$

Con elipses se pueden tratar y modelas ciertas situaciones, veamos algunas.

En la *figura 8.*, "la elipse E con: focos en F_1 y F_2, punto de tangencia p_T con la línea recta T; la línea recta N bisectriz del ángulo $\angle F_1\,p_T\,F_2$ es perpendicular a la línea recta T".

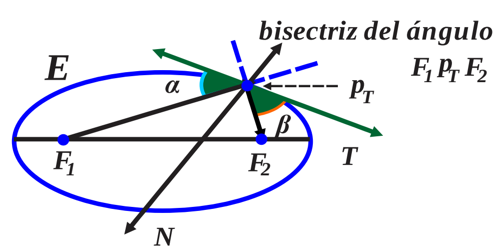


FIGURA 8.

Un proceso algebraico, basado en la propiedad anterior, conduce a la siguiente propiedad.

PROPIEDAD 2. (Línea recta tangente a una elipse)

Sea la elipse E con centro en $C(h\ ,\ k)$ y punto de tangencia $p_T\ (x_T\ ,\ y_T)$ con la línea recta (no vertical) T ,entonces, la ecuación de T :

a. $\dfrac{(x-h)(x_T-h)}{a^2}+\dfrac{(y-k)(y_T-k)}{b^2}=1$ (E con eje focal horizontal).

b. $\dfrac{(y-k)(y_T-k)}{a^2}+\dfrac{(x-h)(x_T-h)}{b^2}=1$ (E con eje focal vertical).

EJEMPLO 5. LÍNEA RECTA TANGENTE A UNA ELIPSE

1. Calcula la ecuación general de la línea recta tangentes a la elipse.

a. $\dfrac{(x-2)^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{1^2}=1$, en el punto

$p_T\left(1\ ,\ \sqrt{3}/2\right)$

i. La figura de la derecha muestra la elipse y la línea recta tangente se muestra en la figura:

ii. Sustituimos $C(2\ ,\ 0)$, $x_T=1$

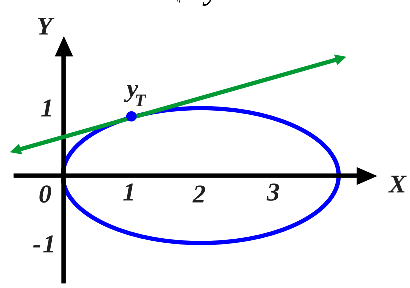
y $y_T=\sqrt{3}/2$

en la *propiedad 1.a.*, obtenemos,

$$\frac{(x-2)(1-2)}{2^2}+\frac{(y-0)\left(\sqrt{3}/2-0\right)}{1^2}=1,$$

por tanto,

$$x-2\sqrt{3}y+2=0$$



b. $\dfrac{(y+1)^2}{4}+\dfrac{(x-1)^2}{2}=1$, en $p_T\left(2\ ,\ -1-\sqrt{2}\right)$

i. El centro en de la elipse es $C(1\ ,\ -1)$, el eje focal es vertical, la línea recta se muestra en la figura de la recha.

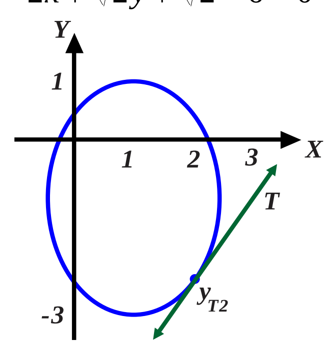
ii. Con $C(1\ ,\ -1)$, $x_T=2$, $y_T=-1-\sqrt{2}$

y la *propiedad 1.b.* obtenemos

$$\frac{(y+1)\left(-1-\sqrt{2}+1\right)}{4}+\frac{(x-1)(2-1)}{2}=1,$$

o bien,

$$2x+\sqrt{2}y+\sqrt{2}-6=0$$



Las elipses también satisfacen la *propiedad 3*.

PROPIEDAD 3. (PROPIEDAD REFLECTORA DE LA ELIPSE)

La línea recta tangente a una elipse en el punto p_T genera ángulos congruentes con los segmentos de recta que contienen a p_T y a uno de los focos.

En la *figura 9.,* la línea recta tangente en el punto p_T biseca a los ángulos con vértice en p_T, lados en la tangente T y en el rayo, es decir $m\angle\beta = m\angle\alpha$

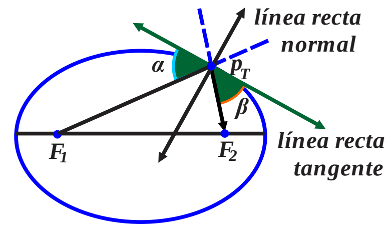
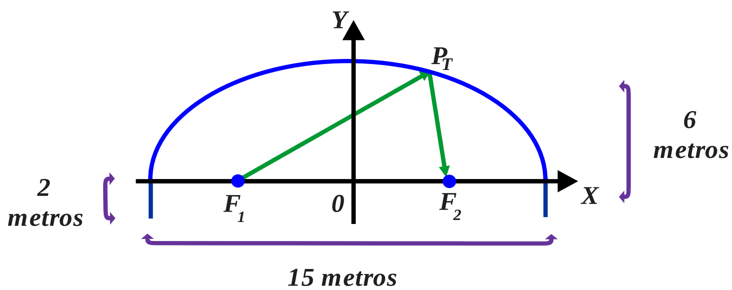


FIGURA 9.

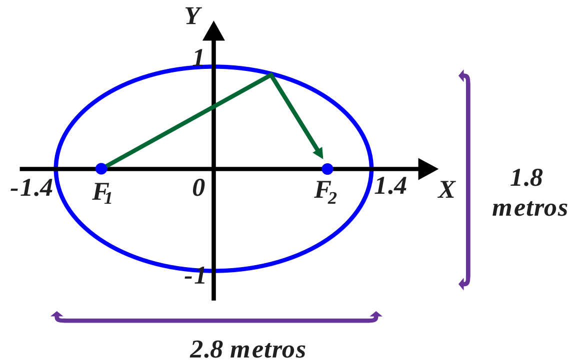
EJEMPLO 5. PROPIEDAD REFLECTORA DE LA ELIPSE

a. Una "galerías de murmullos" consiste en una habitación en que el techo es un semi elipsoide. Si una persona se coloca en uno de los focos de la semi elipse (sección transversal del semi elipsoide) y emite un sonido, este sonido será escuchado por otra persona que se encuentra en el otro foco de la semi elipse. La figura muestra una sección longitudinal de cuarto con techo elíptico perteneciente a una "galería de murmullos". ¿Dónde deben ubicarse los focos en el salón?



i. Coloquemos la semi elipse al plano cartesiano de forma que el origen coincida con el centro de la elipse y el eje mayor coincida con el eje x.
ii. Notemos que $b = 6$ y $2a = 15$, o bien $a = 7.5$
iii. De $a^2 = b^2 + c^2$, obtenemos $7.5^2 = 6^2 + c^2$, es decir, $c = 4.5$
iv. Por tanto, los focos deben estar en los puntos $F_1\left(-4.5, 0\right)$ y $F_2\left(4.5, 0\right)$

b. Una mesa de billar tiene forma elíptica, su parte más larga mide 2.8 metros y la más ancha mide 1.8 metros. Calcula las coordenadas de los dos puntos en la mesa tales que, si en ambos puntos se coloca una bola y luego, una de ellas se golpea con la fuerza adecuada para que luego de golpear el borde de la mesa golpee a la otra bola.
i. Referimos la mesa al plano cartesiano como lo muestra la *figura*.



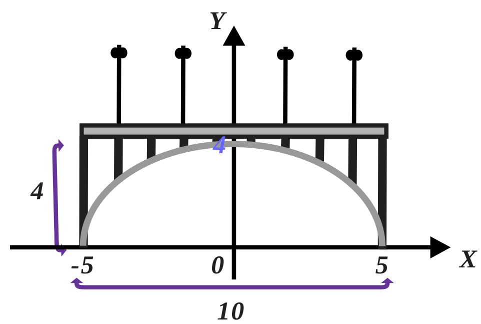
ii. Con $a = 1.4$, $b = 0.9$ y $a^2 = b^2 + c^2$, obtenemos, $c = \sqrt{(1.4)^2 - (0.9)^2} = \sqrt{1.15}$

iii. Por tanto, los focos (posiciones de las bolas) están en los puntos

$$F_1\left(-\sqrt{1.15}\,,\,0\right) \text{ y } F_2\left(\sqrt{1.15}\,,\,0\right)$$

c. El arco de un puente es semi elíptico, su base mide 10 metros y su parte más alta mide 4 metros. Calcula la altura del arco a 2 metros del centro de la base.

i. La figura muestra una sección a lo largo del puente y su referencia al plano cartesiano.



ii. Por tanto, $a = 5$, $b = 4$ y la ecuación de la elipse que forma parte el arco es $\dfrac{x^2}{5^2} + \dfrac{y^2}{4^2} = 1$

iii. Si $x = 2$, entonces, $\dfrac{2^2}{5^2} + \dfrac{y^2}{4^2} = 1$, por tanto, la altura del arco semielíptico es $\dfrac{y^2}{4^2} = 1 - \dfrac{4}{25}$, o bien,

$$\frac{y^2}{4^2} = 1 - \frac{64}{25}\text{, es decir, } y = \frac{4}{25}\sqrt{21} \text{ metros.}$$

d. Un satélite recorre una órbita elíptica alrededor de la Tierra, misma que está en un foco de la órbita. La distancia máxima entre el satélite y la Tierra es $373\,900$ kilómetros y la mínima $366\,850$ kilómetros, Calcula la distancia entre la Tierra y el otro foco de la órbita y la ecuación de la trayectoria.

i. Figura muestra la trayectoria del satélite en el plano cartesiano.

ii. Ten en cuenta que $2c = 373900 - 366850 = 7050$, la distancia entre la Tierra y el otro foco de su trayectoria es $2c = 7050$ kilómetros ($c = 3525$).

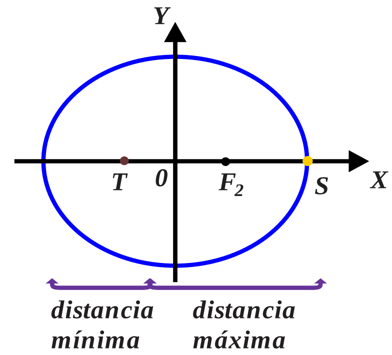
iii. **L**ongitud del semieje mayor : $a = 373900 - 3525 = 370375$ kilómetros.

iv. Si $a = 370375$ y $c = 3525$ kilómetros, entonces,

$$b = \sqrt{370375^2 - 3525^2} = 370358.2252 \text{ kilómetros.}$$

La órbita tiene ecuación

$$\frac{x^2}{370375^2} + \frac{y^2}{370358.2252^2} = 1$$



SECCIÓN 5.2
EJERCICIOS 3

1. Calcula la ecuación de la línea recta tangente a la elipse.

a. $\frac{(x-2)^2}{2^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1$ en $P_T\left(1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

b. $\frac{(y+1)^2}{4} + \frac{(x-1)^2}{2} = 1$, en $P_T\left(1, -1+\sqrt{2}\right)$.

c. $2x^2 + 3y^2 - 6y - 3 = 0$, en $P_T(1, 3)$

2. Se acondicionó salón de 20 metros de largo como "galería de murmullos". Los focos se encuentran a 5 metros del centro. ¿Qué altura tiene el techo en su parte central?

3. La entrada a una iglesia tiene forma de arco semielíptico, su base mide 2.4 metros y su altura máxima 2.8 metros. A través de ella se pretenden introducir cajas de 1 metro de altura. ¿Cuál es el ancho máximo que puede tener la cajas?

4. La órbita de Mercurio alrededor del Sol tiene forma elíptica, el Sol ocupa uno de los focos. Su trayectoria tiene eje mayor con longitud 116 millones de kilómetros, y la longitud de su eje menor es 114 millones de kilómetros. Calcula la distancia mínima y la distancia máxima entre Mercurio y el Sol.

5. El arco de sostén de un puente es semielíptico, su longitud horizontal es 40 metros y su altura mide 16 metros en su parte central. Calcula la altura que tiene el arco a 9 metros a la derecha o a la izquierda del centro del arco.

5.3 SOLUCIONES Y EVALUACIÓN

SOLUCIÓN A EJERCICIOS PROPUESTOS

EXAMEN DE LA UNIDAD

SOLUCIONES DEL EXAMEN DE LA UNIDAD 5

SECCIÓN 5.1
EJERCICIOS 1 RESPUESTAS

1.

a. $x^2+y^2=3,\ x^2+y^2-3=0$

b. $(x-3)^2+(y+1)^2=5^2$ y $x^2+y^2-6x+2y-15=0$

c. $(x-2)^2+(y+2)^2=2^2$ y $x^2+y^2-4x+4y+4=0$

d. $x^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=\left(\frac{4}{3}\right)^2$ y $x^2+y^2-\frac{2}{3}y-\frac{15}{9}=0$

2. a. $r=2,\ C(2,1)$ **b.** $r=2,\ C(-1,0)$ **c.** $r=\frac{1}{2},\ C\left(1,-\frac{1}{2}\right)$ **d.** $r=3,\ C\left(-\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$

3. a. $(x+3)^2+(y+2)^2=7^2,\ C(-3,-2)$ y $r=7$

b. $(x-1)^2+(y+3)^2=8^2,\ C(1,-3)$ y $r=8$

c. $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+(y+3)^2=8^2\ C\left(\frac{5}{2},-3\right)$ y $r=\frac{11}{2}$

d. $\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{5\sqrt{2}}{6}\right)^2,\ C\left(\frac{1}{6},-\frac{1}{2}\right)$ y $r=\frac{5\sqrt{2}}{6}$

e. $\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\left(y-\frac{3}{8}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{29}}{8}\right)^2,\ C\left(\frac{1}{4},-\frac{3}{8}\right)$ y $r=\frac{\sqrt{29}}{8}$

4. a. No. **b.** Punto. **c.** circunferencia. **d.** circunferencia.

SECCIÓN 5.1
EJERCICIOS 2 RESPUESTAS

1. a. $I_1\left(-\frac{5}{3},-\frac{6}{5}\right)$ y $I_2(0,2)$ **b.** $I_1(3,2)$ **c.** $I_1\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$ y $I_2\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$

d. $x^2-2x-4y+5=0\ I_1(-1,2)$ y $I_2(3,2)$

e. $I_1\left(-\frac{5}{3},-\frac{6}{5}\right)$ y $I_2(0,2)$ **f.** $I_1(4,0)$ y $I_2(0,0)$

SECCIÓN 5.1
EJERCICIOS 3 RESPUESTAS

1. a. $x^2+y^2-3x+6y=0$ **b.** $x^2+y^2-2x-25=0$ **c.** $x^2+y^2-4x+2y=0$

SECCIÓN 5.1 EJERCICIOS 4 RESPUESTAS

1. a. $x^2+y^2-6x-8y+9=0$ **b.** $x^2+y^2-4x-4=0$ **c.** $x^2+y^2-8x-2y+9=0$

SECCIÓN 5.2 EJERCICIOS 1 RESPUESTAS

1. a. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1$ **b.** $\frac{x^2}{3^2}+\frac{(y-2)^2}{4^2}=1$ **c.** $\frac{(x+2)^2}{2^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$

d. $\frac{(x+3)^2}{5^2}+\frac{(y-1)^2}{2^2}=1$ **e.** $\frac{(x-4)^2}{3^2}+\frac{(y+2)^2}{1^2}=1$ **f.** $2x^2+3y^2-6=0$

g. $x^2+9y^2+4x-5=0$ **h.** $4x^2+y^2-8x-2y+4=0$

i. $2x^2+5y^2-4x-10y-13=0$ **j.** $2x^2+y^2+12x-4y+18=0$

SECCIÓN 5.2 EJERCICIOS 2 RESPUESTAS

1. a. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$, $4x^2+3y^2-12=0$ **b.** $\frac{x^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{4}=1$, $4x^2+9y^2+72y+108=0$

c. $\frac{(x-3)^2}{2^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$, $16x^2+4y^2-96x+80=0$

d. $\frac{(x+1)^2}{3^2}+\frac{(y-1)^2}{2^2}=1$, $4x^2+9y^2+8x-18y-23=0$

e. $\frac{(x+4)^2}{3^2}+\frac{(y+2)^2}{1^2}=1$, $x^2+9y^2-8x+18y+43=0$

f. $\frac{(x-1)^2}{5}+\frac{(y+2)^2}{8}=1$, $8x^2+5y^2-16x+20y-12=0$

g. $\frac{(x+4)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{2}=1$, $2x^2+9y^2+16x+18y+50=0$

SECCIÓN 5.2 EJERCICIOS 3 RESPUESTAS

1. Calcula la ecuación de la línea recta tangente a la elipse.

a. $x+2\sqrt{3}y+2=0$ **b.** $2x+\sqrt{2}y+\sqrt{2}-6=0$ **c.** $x+y-4=0$

2. $b=\sqrt{(10)^2-(5)^2}=\sqrt{75}$ unidades. **3.** $x=\sqrt{\frac{57}{70}}$ metros.

4. $8+\sqrt{115}$ millones de kilómetros. **5.** $3/4\sqrt{319}$ metros.

UNIDAD 5 EXAMEN

CONCEPTOS

1. ¿Qué condiciones se deben cumplir en la ecuación $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ para representar una circunferencia en el plano cartesiano?

2. Si una línea recta es tangente a un circunferencia, entonces, es

3. ¿Cómo se define una elipse como lugar geométrico?

4. ¿Qué es un arco de elipse?

5. En una elipse la distancia focal disminuye, entonces, ¿la elipse se aproxima a?

6. ¿Qué relación satisfacen los “parámetros” a, b y c de una elipse?

7. Sea $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$ la ecuación de una elipse con eje focal vertical, ¿quién es mayor, A o B?

DESARROLLOS OPERATIVOS

8. Obtén el centro y el radio de la circunferencia la ecuación general de la circunferencia que contiene los puntos $P_1(0,0)$, $P_2(2,2)$ y $P_2(0,4)$.

9. Obtén la ecuación general de la circunferencia con centro $C(-2,3)$ y tangente a la línea recta con ecuación $4x+y-20=0$

10. Una elipse es tangente a los ejes coordenados en los puntos $P_1(5,0)$ y $P_1(0,2)$, obtén su ecuación general.

11. Determina todos los elementos de la elipse con ecuación $3x^2+y^2+12x-2y-14=0$

PARA PENSAR

12. Una elipse tiene focos en los puntos $F_1(-3,0)$ y $F_2(3,0)$, un rayo emerge del primero de ellos e incide en el punto interno de la elipse con abscisa $x=1$, calcula su longitud.

13. Calcula la ecuación general de la circunferencia que es concéntrica e inscribe a la elipse $\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

ESCALA

Preguntas 1 a 8., un punto cada una.
Problemas 8. a 11. dos puntos cada uno.
Problemas 12. a 13. cuatro puntos cada uno.

Para acreditar se requieren un mínimo de 13 puntos

UNIDAD 5 SOLUCIONES AL EXAMEN

1. $\left(\frac{D}{2}\right)^2+\left(\frac{E}{2}\right)^2-F\geq 0$

2. Perpendicular al radio.

3. La curva formada por un punto (del plano cartesiano) que se desplaza de manera que su distancia a dos puntos fijos (focos) del plano cartesiano es constante.

4. Sección de la elipse limitada por dos de sus puntos

5. Una circunferencia.

6. $a^2=b^2+c^2$

7. A

DESARROLLOS OPERATIVOS

8. $C\left(2\,,0 \right)$ y $r=2$.

9. $x^2+y^2.2x+2y-15=0$

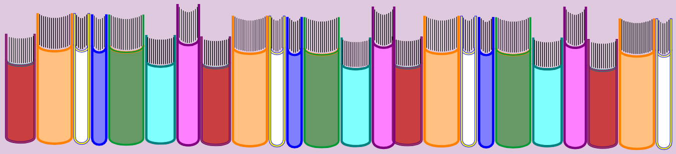
10. $4x^2+25y^2-40x-100y+100=0$

11. $C\left(-2\,,1 \right)$, $a=3$, $b=\sqrt{3}$, $c=\sqrt{6}$, $V_1\left(-2\,,-2 \right)$, $V_2\left(-2\,,4 \right)$, $F_1\left(-2\,,1-\sqrt{6} \right)$ y $F_2\left(-2\,,1+\sqrt{6} \right)$

PARA PENSAR

12. 10 unidades.

13. $x^2+y^2-4x-12=0$.



BIBLIOGRAFÍA

1. Alexander, D. y Koeberlein, G. (2013). Geometría. México: Cengage Learning.

2. Clemens, S., O'Daffer, P., Cooney, T. y Sullivan, M. (2008). Geometría y trigonometría. México: Pearson Educación.

3. Haeussler, F. (2011). *Precálculo Treceava Edición*. México: Pearson.

4. Miller D., Hornsby J., Heeren V. (2010). Matemática, razonamiento y aplicaciones. México: Pearson Educación.

5. Stewart, J. (2012). *Precálculo Matemáticas para el cálculo Sexta Edición*. México: Cengage Learning.

6. Swokowski, E., & Cole, J. (2018). *Precálculo: álgebra y trigonometría con geometría analítica*. Ciudad de México: Cengage Learning.

7. Zill, D., & Dewar, J. (2012). *Álgebra, trigonometría y geometría analítica (3 ra ed.)*. México, D. F.: Mc Graw Hill.