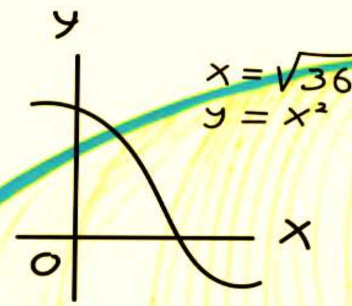
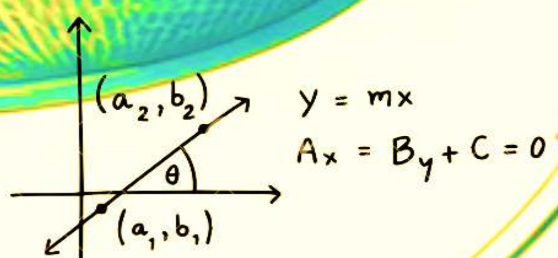
GUÍA PARA EL EXAMEN EXTRAORDINARIO DE MATEMÁTICAS III

Autores:

Ávila Vicenteño José Germán
Cabrera Ortiz Araceli
Jiménez Sánchez Héctor
Jiménez Sánchez Sonia
López Hernández Ivonne Atzelbi
Murillo Pérez Ricardo Yadel





Universidad Nacional Autónoma de México
Colegio de Ciencias y Humanidades
Plantel Oriente

2024

"*Reserva tu derecho a*

pensar, porque incluso pensar equivocadamente

es mejor que no pensar en absoluto" (Hubbard,1908, p. 82).

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Este material es un apoyo para el alumnado no acreditado en Matemáticas III, que pretende guiar la preparación de su examen extraordinario. La elaboración de esta Guía de Estudio fue hecha por docentes del Plantel Oriente del Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH). La intención es que el estudiantado tenga una síntesis de los conceptos del curso de Matemáticas III. Además, propone ejemplos, problemas resueltos, problemas propuestos y una autoevaluación por cada unidad. Finalmente, un ejemplo de examen extraordinario como entrenamiento para presentar su examen extraordinario con éxito.

El interés al elaborar esta Guía es contribuir a que el mayor número de estudiantes pueda egresar de nuestro Colegio y, a la vez, sean quienes lo hagan con los conocimientos necesarios para enfrentar sus estudios futuros exitosamente, así que este trabajo se realizó para que el estudiantado adquiera los aprendizajes correspondientes a cada unidad temática. Este material se hace más necesario en la medida que nuestro plantel no cuenta con una Guía de Estudio para Examen Extraordinario de Matemáticas III para el Plan de Estudios 2016.

Se espera que el alumnado y el profesorado consideren el material como fuente de consulta por el contenido que propone con respecto a sus diversos ejemplos y problemas resueltos, autoevaluaciones y el ejemplo de examen extraordinario.

A continuación, se enuncia el contenido temático de la presente Guía de acuerdo con el Programa de Estudio de matemáticas III del 2016 del CCH.

Unidad 1. Elementos de trigonometría.
Unidad 2. Elementos básicos de geometría analítica.
Unidad 3. La recta y su ecuación cartesiana.
Unidad 4. La parábola y su ecuación cartesiana.
Unidad 5. La circunferencia, la elipse y sus ecuaciones cartesianas.

Para la elaboración de la presente Guía se ha considerado como referencia la *Guía para el Examen Extraordinario de Matemáticas III* del plan anterior, elaborada por el Profesor Hernández Velasco Francisco Javier. Además de exámenes extraordinarios elaborados por profesores del plantel y materiales propios de los autores de este trabajo.

En esta Guía el estudiantado, así como el profesorado, encontrará en cada unidad:

- Una tabla con los conceptos claves básicos para la comprensión del tema y la resolución de los problemas planteados.
- Una presentación que los introduce al tema de estudio.
- Los conocimientos previos que se requieren para la comprensión póstuma de los temas.
- Ejemplos resueltos e ilustrativos del tema, problemas resueltos con diferentes grados de dificultad y problemas propuestos con el propósito de que el aprendizaje sea gradual.

- Una autoevaluación de opción múltiple cuyas respuestas correctas se encontrarán al final de cada unidad con el propósito de que el estudiantado valore sus conocimientos adquiridos y pueda saber si sus resultados son correctos.
- Un examen extraordinario con sus respectivas respuestas como entrenamiento para su examen extraordinario real.
- Y referencias bibliográficas para ampliar su conocimiento.

INSTRUCCIONES

Las instrucciones para el mejor aprovechamiento de esta Guía por parte del aprendiz, se presentan a continuación como una recomendación:

- Resolver inicialmente la autoevaluación de cada unidad, la cual se encuentra al final de la misma, para que sirva como diagnóstico y determinar qué temas debe revisar dentro de la Guía.
- Revisar el cuadro de conceptos claves y determinar cuáles maneja y cuáles no; a continuación, se va al tema o temas que se requieren estudiar.

  Se pretende que la revisión de este cuadro y el diagnóstico realizado, señalado en el punto anterior, lleve a los esolares, a ubicar claramente cuáles son sus debilidades y fortalezas en cuanto a los aprendizajes señalados en el Programa de Estudio de Matemáticas del CCH Plan 2016 correspondiente a la asignatura de Matemáticas III.
- Se sugiere que, para resolver los ejercicios y problemas planteados en el presente trabajo, se utilice el método de resolución de problemas, eje didáctico del Plan de Estudio de nuestra institución, el cual consiste en:

  I. Comprender el problema, esto es, que identifique los datos, las incógnitas y las condiciones que relacionan los datos con las incógnitas. Así como los conceptos involucrados y en caso de que no los conozca que investigue al respecto.

  II. Para una mejor comprensión del problema planteado se recomienda hacer dibujos, tablas, trazos auxiliares u otros elementos que permitan tener una idea general del problema y eventualmente los conduzca a trazar un plan de solución, es decir, les permita esbozar a grandes rasgos cuales serían los pasos por seguir para resolver dicho problema.

  III. Ejecutar su plan realizando cada paso cuidadosamente y evaluando en todo momento si ese plan lo está llevando a la solución del problema o lo debe cambiar parcialmente o diseñar otro.

  IV. Una vez concluido el proceso de solución, verificar si sus resultados son correctos: si ha contestado lo que se pide en el problema, si puede resolver el problema por otros caminos y si puede plantearse nuevas preguntas sobre este problema, mejor aún, si puede responder dichas preguntas.

  Desde luego, estos pasos no son lineales, en ocasiones cuando se ha llegado a la visión retrospectiva nos podemos dar cuenta que no habíamos comprendido el problema y debemos regresar a la fase inicial, o que algún punto de nuestra ejecución fue incorrecto.

Tener una guía de acción para resolver problemas es de gran ayuda.

- Tener una bibliografía a la mano para consultar dudas es también importante, o bien, consultar la web, pero aquí hay que hacerlo con criterio pues en ocasiones se difunden resultados falsos.
- Acudir a las asesorías del Programa Institucional de Asesorías del plantel para que el alumno pueda resolver las dudas que se le presenten al estudiar en esta Guía, lo cual le ayudará a una mejor preparación de su examen.
- Resolver cada autoevaluación de las respectivas unidades para que el estudiantado vaya supervisando su propio aprendizaje en su proceso de estudio.
- Resolver el examen extraordinario que se encuentra al final de la Guía, a manera de entrenamiento.

UNIDAD 1

ELEMENTOS DE TRIGONOMETRÍA

Propósitos. El estudiantado utilizará las razones e identidades trigonométricas, así como las leyes de senos y cosenos mediante la resolución de problemas en distintos contextos que involucren triángulos con la finalidad de construir conocimientos que serán empleados en asignaturas posteriores.

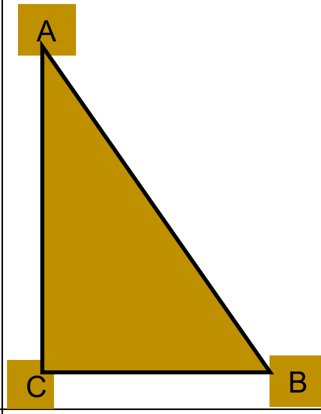
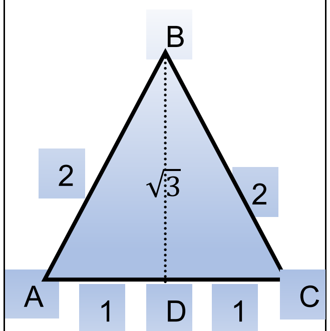
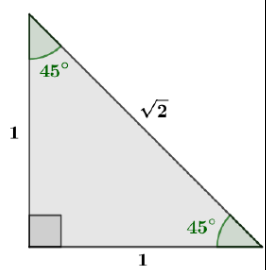
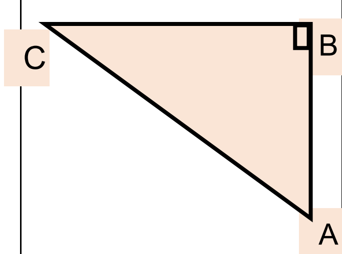
Al finalizar esta unidad pretendemos que alcances los aprendizajes siguientes:

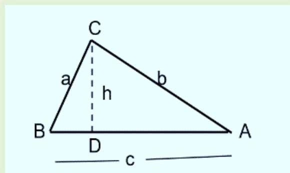
- Comprende que el concepto de razón trigonométrica se deriva de la relación de los lados de un triángulo rectángulo y que son respectivamente invariantes en triángulos semejantes.
- Determina los valores de las razones trigonométricas para los ángulos de 30°, 45° y 60° y emplea la calculadora para verificarlos.
- Resuelve problemas que involucran triángulos rectángulos.
- Comprende la deducción de algunas identidades trigonométricas.
- Comprende el proceso de deducción de las leyes de senos y cosenos para resolver problemas oblicuángulos.

PRESENTACIÓN

La Trigonometría es la rama de las Matemáticas que se encarga del estudio de las relaciones entre los elementos de un triángulo. Se considera a los griegos Hiparco de Nicea y Claudio Ptolomeo los padres de la Trigonometría, aunque hay indicios de que los egipcios y babilonios ya resolvían problemas auxiliándose de esta herramienta matemática. Hiparco nació alrededor del año 160 antes de nuestra era y auxiliándose de la Trigonometría hizo grandes aportaciones a la astronomía al mejorar los instrumentos de observación, calculó por ejemplo la distancia de la tierra a la luna; se le atribuye, además, la construcción de una “tabla de arcos”, que equivale a una tabla de valores de senos. Ptolomeo nació alrededor del año 100 de nuestra era, en su famosa obra de 13 libros, el *Almagesto* (cuyo título original es Sintaxis Matemática), presenta una tabla trigonométrica. El contenido trigonométrico del Almagesto fue vigente hasta fines de la edad media, tiempo en el que sufrió modificaciones.

CONCEPTOS CLAVE

Subtema	Figura	Expresión Analítica	Parámetros
Razones trigonométricas para ángulos agudos de un triángulo rectángulo.		$sen(A) = \frac{BC}{AB}$ $cos(A) = \frac{AC}{AB}$ $tan(A) = \frac{BC}{AC}$ $cot(A) = \frac{AC}{BC}$ $sec(A) = \frac{AB}{AC}$ $csc(A) = \frac{AB}{BC}$	Ángulos: A Lados: AB, BC, AC
Razones trigonométricas de ángulos especiales.		$\boldsymbol{sen(30°) = \frac{1}{2}, cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2},}$ $\boldsymbol{tan(30°) = \frac{\sqrt{3}}{3}}$ $\boldsymbol{sen(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}, cos(60°) = \frac{1}{2},}$ $\boldsymbol{tan(60°) = \sqrt{3}}$	Ángulos: $30°, 45°\ y\ 60°$ Lados: AB, BC, AC
		$\boldsymbol{sen(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}, cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2},}$ $\boldsymbol{tan(45°) = 1}$	
Identidades trigonométricas fundamentales		$tan\,A = \frac{sen(A)}{cos(A)}, \quad cot(A) = \frac{cos(A)}{sen(A)},$ $\tan(A) = \frac{1}{\cot(A)},$ $sec(A) = \frac{1}{cos(A)},$ $csc(A) = \frac{1}{sen(A)}$	Ángulos: A

		$sen^2(A) + cos^2(A) = 1$ $tan^2(A) + 1 = sec^2(A)$ $cot^2(A) + 1 = csc^2(A)$	
Ley de senos Ley de cosenos		$\frac{a}{sen(A)} = \frac{b}{sen(B)} = \frac{c}{sen(C)}$ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos(A)$	Ángulos: A Lados: AB, BC, AC

CONOCIMIENTOS PREVIOS

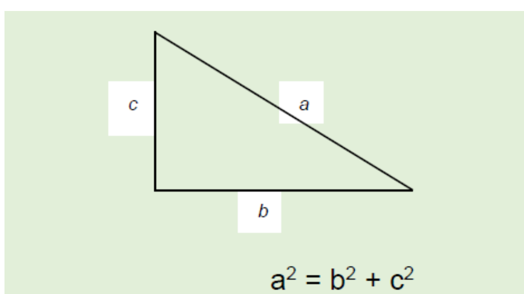
Iniciaremos el estudio de esta unidad haciendo una lista de algunos conocimientos previos que es conveniente que tú conozcas para una mejor comprensión de la Trigonometría:

Razón: es la comparación entre dos magnitudes mediante la división y se representa por un número racional.

Recíproco de un número: es el inverso multiplicativo de un número.

Semejanza entre dos triángulos: dos triángulos son semejantes siempre y cuando sus lados correspondientes sean proporcionales y sus ángulos correspondientes sean congruentes.

Teorema de Pitágoras: Esta proposición establece que en todo triángulo rectángulo el cuadrado del lado mayor, llamado hipotenusa, es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados del triángulo, llamados catetos.

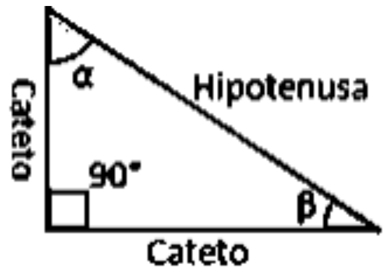


1.1. Razones trigonométricas.

La noción de razón trigonométrica se refiere a los vínculos que pueden establecerse entre los lados de un triángulo que dispone de un ángulo recto. Existen principalmente tres razones trigonométricas: seno, coseno y tangente.

1.1.1. Definición de razones trigonométricas.

En un triángulo rectángulo encontraremos siempre a los catetos que son los lados que forman el ángulo recto; la hipotenusa, siempre es el segmento más grande en longitud, además existen el ángulo recto y dos ángulos agudos.



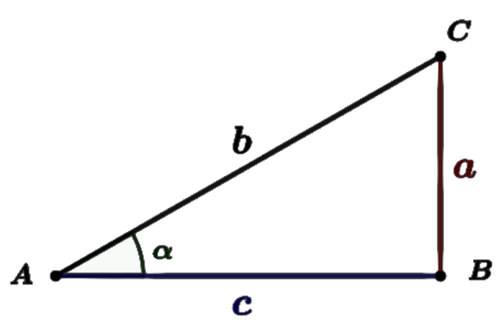
Como recordarás de tu curso de Matemáticas II los vértices y segmentos de un triángulo se denotan con letras mayúsculas y minúsculas respectivamente y siempre ordenando las letras en sentido contrario a las manecillas del reloj. Por otro lado, los ángulos solemos denotarlos con letras del alfabeto griego α, β, γ, θ, …, etc.

En la medición de ángulos y, por consecuencia, en la trigonometría, se emplean tres unidades de manera regular, si bien la más utilizada en la vida cotidiana es el grado sexagesimal, en matemáticas es más común el uso del radian y se define como la unidad natural para medir ángulos.

Grado sexagesimal. Unidad angular que divide a la circunferencia en 360 partes iguales.

Para nuestro estudio nos enfocaremos en las unidades angulares anteriores. Más adelante, retomaremos este tema para revisar las equivalencias entre dichas unidades.

Para definir las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo dado primero definiremos que ángulo y tomaremos como referencia dichas razones. En la siguiente imagen tomaremos como referencia al ángulo en el vértice A, es decir, tomaremos al ángulo α.



Al tomar como referencia al ángulo α los catetos tomarán nombre en relación con su posición respecto al ángulo. En el caso del cateto c éste tomará el nombre de Cateto Adyacente por ser parte de un lado del ángulo, mientras que, el cateto a será nombrado como Cateto Opuesto, esto por encontrarse en oposición a la abertura del ángulo α .

Una vez establecidas las partes que le dan configuración al triángulo rectángulo, las razones trigonométricas del ángulo α serán las razones obtenidas entre los tres lados, es decir, los cocientes que podemos formar con los catetos y la hipotenusa.

El Seno del ángulo α se define como el cociente entre el cateto opuesto y la hipotenusa:

$$sen\,\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{a}{b}$$

El Coseno del ángulo α se define como el cociente entre el cateto adyacente y la hipotenusa:

$$\cos\alpha = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{c}{b}$$

La Tangente del ángulo α se define como el cociente entre el cateto opuesto y el cateto adyacente:

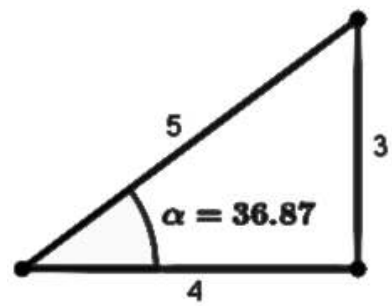
$$tan\,\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{a}{c}$$

EJEMPLO:
Consideremos el ΔABC cuyas medidas son $a = 3,\ b = 5,$ y $c = 4$. Obtener el valor de seno, coseno y tangente del ángulo $\alpha = 36.87^0$.

$$sen\,\alpha = sen\,36.87^0 = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{3}{5}$$

$$cos\,\alpha = cos\,3\,6.87^o = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{4}{5}$$

$$tan\,\alpha = tan\,3\,6.87^o = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{3}{4}$$

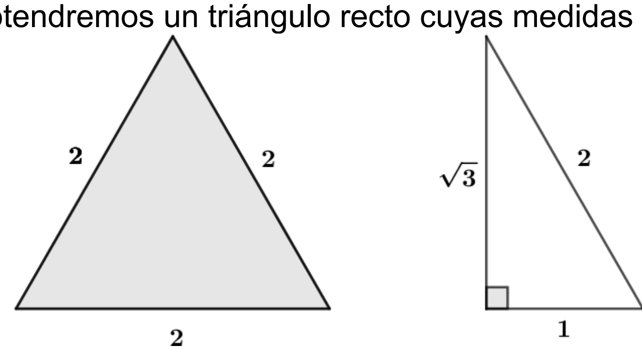


1.2. Solución de triángulos rectángulos especiales.

Las razones trigonométricas de los ángulos cuyas medidas son 0°, 30°, 45°, 60° y 90 se pueden calcular de manera muy sencilla, como se te mostrará a continuación.

Observa las siguientes figuras donde fácilmente podemos hacer los cálculos del seno y el coseno de 30° y 60°.

Consideremos un triángulo equilátero de lado igual a 2. Al trazar una altura al triángulo éste se partirá por la mitad y obtendremos un triángulo recto cuyas medidas serán las siguientes:

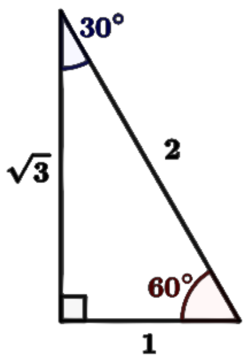


La altura mide $\sqrt{3}$ ya que, al aplicar el Teorema de Pitágoras, obtenemos:

$$h^2 = 2^2 - 1^2 = 3$$

$$h = \sqrt{3}$$

Donde h simboliza la longitud de la altura.
De esta manera, se ha creado un triángulo cuyos ángulos agudos son de 30° y 60°, y como conocemos el valor de sus lados podemos obtener el valor del seno y coseno.



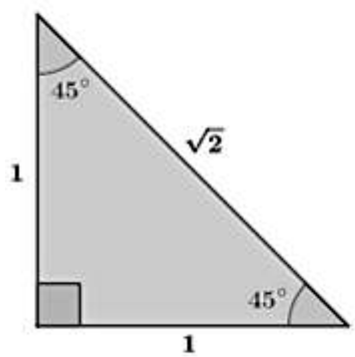
$$\sin 30° = \sin\tfrac{\pi}{6} = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = \cos\tfrac{\pi}{6} = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 60° = \sin\tfrac{\pi}{3} = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60° = \cos\tfrac{\pi}{3} = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{1}{2}$$

Para obtener el seno y el coseno de 45°, hacemos el siguiente cálculo considerando un triángulo rectángulo e isósceles cuyos lados iguales tengan longitud igual a uno. Así tendríamos un triángulo cuyos ángulos agudos miden exactamente 45°.

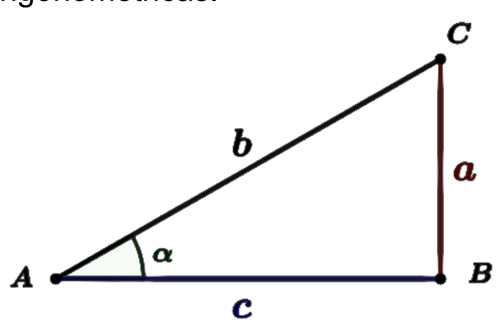


$$\sin 45° = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45° = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

EJEMPLOS:

1. Dado un triángulo rectángulo como el siguiente, en el que $a = 5, b = 13, c = 12$, calcula el valor de sus razones trigonométricas.



Solución.
Al tener a α como referencia, tendríamos que a es el cateto opuesto, b la hipotenusa y c el cateto adyacente. De esta forma, al utilizar las definiciones vistas, tendríamos que:

$$\sin\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{a}{b} = \frac{5}{13}$$
$$\cos\alpha = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{c}{b} = \frac{12}{13}$$
$$\tan\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{a}{c} = \frac{5}{12}$$

2. Utilizando el valor de a y de c en el triángulo anterior, calcula el valor de α.
   Solución.
   Del inciso anterior sabemos que:

$$\tan\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{a}{c} = \frac{5}{12}$$

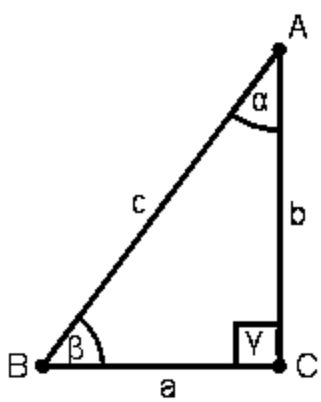
   Podemos despejar el valor del ángulo y así conocer su magnitud.

$$\tan\alpha = \frac{a}{c} = \frac{5}{12} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right) = 22.61°$$

   Por lo tanto, $\alpha = 22.61°$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Dadas las partes indicadas del triángulo ΔABC con $\gamma = 90^\circ$, encuentra los valores exactos de las partes restantes para los siguientes incisos:
   a) $\alpha = 30^\circ,\quad b = 20$
   Solución.
   Dadas las condiciones que se plantean podemos representarlo de la siguiente forma.



Dado que los ángulos internos de un triángulo suman 180°, tenemos que:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Pero sabemos que: $\alpha = 30^\circ$ y $\gamma = 90^\circ$

Entonces $30^\circ + \beta + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \beta = 60^\circ$.

Por otro lado, al tomar α como nuestro ángulo de referencia, tendríamos que a representa el cateto opuesto, b el adyacente y c sería la hipotenusa.

Para calcular el valor de a, conocemos el ángulo de referencia, el cateto adyacente y queremos encontrar el cateto opuesto, por lo que, al revisar las razones trigonométricas recordamos que la tangente es la que relaciona a estos tres elementos.

$$tan\,\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{a}{b}$$

Al despejar el valor buscado de la expresión, tendríamos que $a = b \cdot \tan\alpha$, expresión en la que sustituimos los valores conocidos:

$$a = (20)\tan 30^{\circ} = \frac{20\sqrt{3}}{3} \approx 11.547u\,.$$

Ahora, para el cálculo de c, tenemos el cateto adyacente, el ángulo de referencia y buscamos la hipotenusa. Análogamente a lo anterior, buscamos la razón que relaciona estos tres conceptos recordando que en este caso sería el coseno.

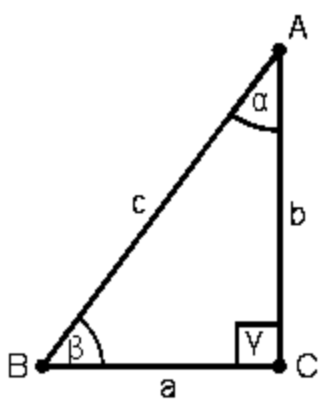
$$cos\,\alpha = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{b}{c}$$

Despejando el valor de la hipotenusa tendríamos la expresión $c = \dfrac{b}{\cos\alpha}$, en la que al sustituir obtenemos:

$$c = \frac{20}{\cos 30^{\circ}} = \frac{40\sqrt{3}}{3} = 23.094u$$

Finalmente tenemos:
$a = 11.547, b = 20, c = 23.094$ y $\alpha = 30^{\circ}, \beta = 60^{\circ}$ ý $\gamma = 90^{\circ}$

b) $b = 5\sqrt{3}, \quad c = 10\sqrt{3}$
Solución.
Dadas las condiciones que se plantean podemos representarlo de la siguiente forma.



Dado que conocemos dos lados del triángulo, podemos relacionarlos mediante una de las razones trigonométricas.

Al tomar α como nuestro ángulo de referencia, tendríamos que b representa el cateto adyacente y c sería la hipotenusa.

Para calcular el valor de α, utilizaremos la definición coseno

$$cos\,\alpha = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{b}{c}$$

Al despejar el valor buscado de la expresión, tendríamos que $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{b}{c}\right)$ expresión en la que ahora sustituimos los valores conocidos

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{5\sqrt{3}}{10\sqrt{3}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 26.56°.$$

Ahora, para el cálculo del ángulo β, utilizamos que la suma de los ángulos internos suma 180°, por lo que tendríamos:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^{\circ}$$

Pero sabemos que: $\alpha = 26.56^{\circ}$ y $\gamma = 90^{\circ}$

Entonces $26.56^{\circ} + \beta + 90^{\circ} = 180^{\circ} \Rightarrow \beta = 63.44^{\circ}$.

Finalmente, el tercer lado podemos obtenerlo mediante el uso del teorema de Pitágoras, del cual, sabemos que:

$$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

Y sustituyendo los valores de los lados que conocemos, tenemos:

$$a = \sqrt{\left(10\sqrt{3}\right)^2 - \left(5\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{300 - 75} = \sqrt{225} = 15$$

Concluyendo que: $a = 15, b = 5\sqrt{3}, c = 10\sqrt{3}$ y $\alpha = 26.56°, \beta = 63.44°$ ý $\gamma = 90^{\circ}$

PROBLEMAS PROPUESTOS

Resuelve los siguientes triángulos rectángulos usando que $\gamma = 90^{\circ}$.

a) $\alpha = 37^{\circ}, \quad b = 24$

b) $\beta = 71^{\circ}51', \quad b = 240$

c) $a = 25, \quad b = 45$

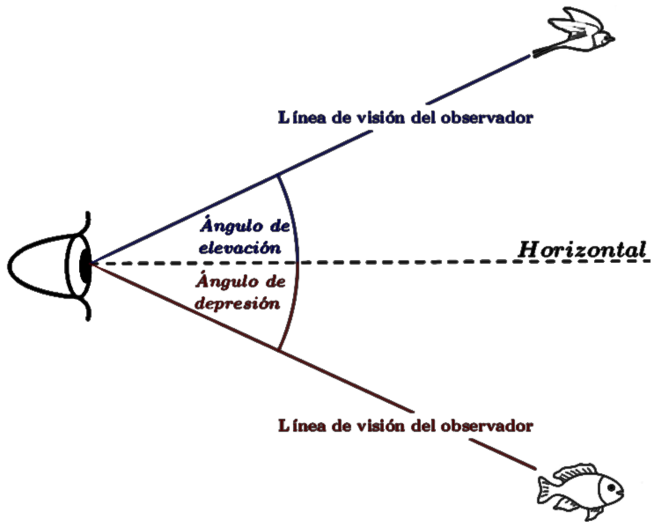
d) $c = 5.8, \quad b = 2.1$

1.3. Solución de problemas de aplicación.

Existen situaciones donde se puede aplicar la relación entre los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo, en los cuales estén presentes los ángulos de elevación, de depresión o de distancias inaccesibles.

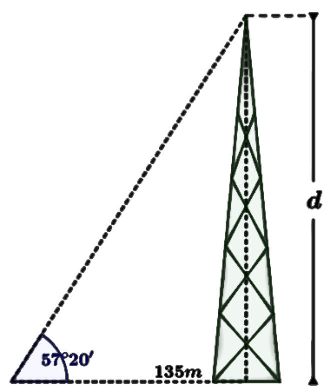
Ángulo de elevación. Es el ángulo medido desde la horizontal hacia arriba hasta la línea de visión del observador hacia el objetivo.

Ángulo de depresión. Es el ángulo medido desde la horizontal hacia abajo hasta la línea de visión del observador hacia el objetivo.

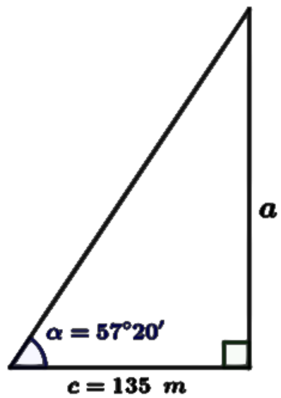


La idea en este tipo de problemas es identificar el triángulo recto que representa el problema y resolverlo según las condiciones.

EJEMPLO:
Desde un punto al nivel del suelo y a 135 metros de la base de una torre, el ángulo de elevación a la parte más alta de la torre es de 57°20’. Calcula la altura de la torre.



Solución.
Observa que el problema puede plantearse como si estuviéramos completando un triángulo rectángulo en el que conocemos un ángulo, el cateto adyacente respecto a ese ángulo y necesitamos calcular el valor del cateto opuesto, es decir, el problema puede ser reducido a resolver el triángulo siguiente.



Considerando que están involucrados el cateto opuesto y el adyacente, podemos utilizar la definición de tangente para relacionarlos y así obtener el valor que falta.

$$\tan\alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow a = c(\tan\alpha)$$

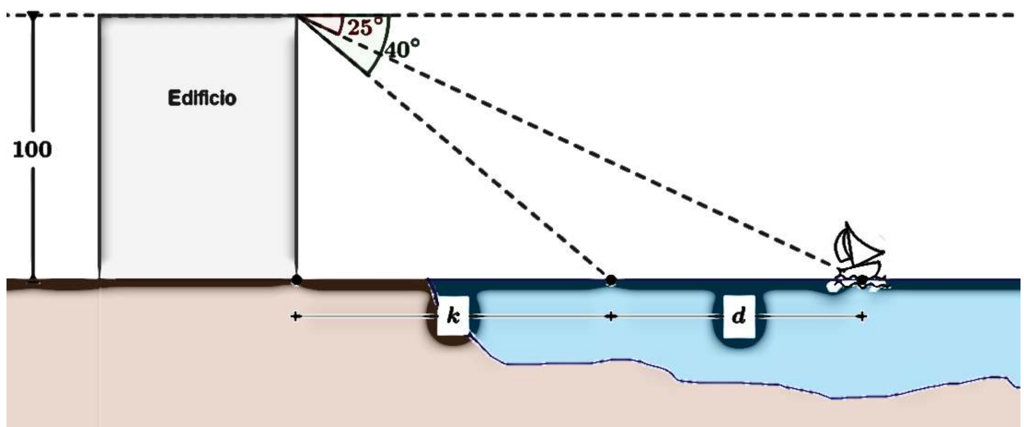
Sustituyendo:

$$a = 135\left(\tan(57°20')\right) = 210.55$$

Así, el valor de la altura de la torre es de 210.55 metros.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Desde lo alto de un edificio que mira al mar, un observador avista una lancha que navega directamente hacia el edificio. Si el observador está a 100 metros sobre al nivel del mar y de ángulo de depresión de la lancha cambia de 25° a 40° durante el periodo de observación, calcula la distancia que recorrió la lancha.



2. Dos barcos salen de puerto al mismo tiempo, uno de ellos en dirección N23°E a una velocidad de 11 kilómetros por hora y el segundo en dirección S67°E a 15 kilómetros por hora. Calcula la distancia a la que están uno de otro una hora después de haber zarpado.

3. Un cable está sujeto a lo alto de una antena de radio y aun punto en el suelo horizontal que está a 40 metros de la base de la antena. Si el alambre hace un ángulo de 58°20’ con el suelo, calcula la longitud del alambre.

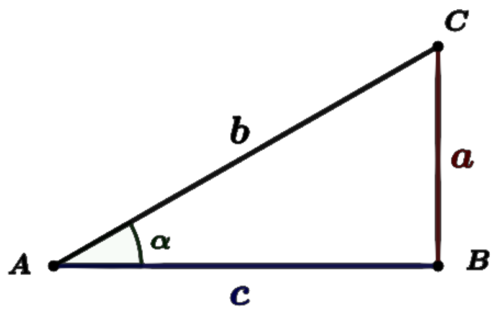
1.4. Identidades trigonométricas.

Las identidades trigonométricas son igualdades que involucran razones trigonométricas. Estás igualdades se mantienen para cualesquiera que sean los valores que se asignen a los ángulos para los cuales están definidas las identidades. Las identidades trigonométricas son siempre útiles para cuando necesitamos simplificar expresiones que tienen incluidas razones trigonométricas, éstas también nos permiten plantear una misma expresión de diferentes formas. Para simplificar expresiones algebraicas, usamos la factorización, denominadores comunes y otras propiedades. Para simplificar expresiones trigonométricas utilizaremos estas técnicas en conjunto con las identidades trigonométricas.

1.4.1. Identidades trigonométricas básicas.
Las primeras identidades que revisaremos y probablemente las más importantes son las que relacionan al seno y coseno con las razones ***tangente, cotangente, secante y cosecante***, pues de éstas identidades podremos inferir todas las demás. Así entonces, la primera lección para demostrar una identidad trigonométrica es llevar todo a términos de seno y coseno.

Antes de ver la relación de seno y coseno con las demás razones trigonométricas revisaremos cómo es que se definen éstas.

Nuevamente haremos uso del triángulo rectángulo para definir las nuevas razones. El caso de la tangente ya lo hemos visto, por lo que sólo definiremos las otras tres.



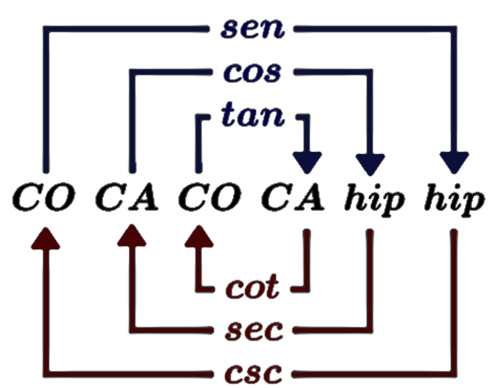
$$\cot\alpha = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto} = \frac{c}{a}$$

$$\sec\alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente} = \frac{b}{c}$$

$$\csc\alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto} = \frac{b}{a}$$

Notemos que estas razones están definidas de manera “inversa” a como definimos las anteriores, es decir, al seno, coseno y a la tangente; por lo que se les conoce como funciones recíprocas, lo cual quiere decir que al multiplicar una de las razones trigonométricas con su recíproca esto da un 1 como resultado.

Una forma común de recordar cómo se definen las razones trigonométricas así como la relación entre las razones recíprocas es recordando la palabra **COCACOCAhiphip**.



La definición de cada razón queda determinada por los cocientes de los elementos que marca la dirección de cada flecha. De la misma forma el orden en el que están acomodadas indica que razón es la recíproca de cual.

Sin embargo, cada una de las nuevas razones (incluyendo a la tangente) podemos expresarlas simplemente en términos del seno y coseno. En otras palabras, existe una equivalencia entre las razones trigonométricas y alguna expresión en la que sólo aparecen senos y cosenos.

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \qquad \csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

Veamos entonces cómo es que son verdaderas estás identidades. En el documento sólo probaremos la primera de ellas, las otras tres se dejan como ejercicio.

EJEMPLO:
Demostrar que $tan\,\alpha = \frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha}$.
Solución.
En toda demostración de una identidad se recomienda siempre iniciar por aquella parte que nos proporcione más información. En éste caso iniciaremos con el lado derecho de la igualdad y después nos apoyaremos en la definición de cada razón para llegar al lado izquierdo.

$$\frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{\frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}}{\frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}} = \frac{\frac{cateto\ opuesto}{\boxed{hipotenusa}}}{\frac{cateto\ adyacente}{\boxed{hipotenusa}}} = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = tan\,\alpha$$

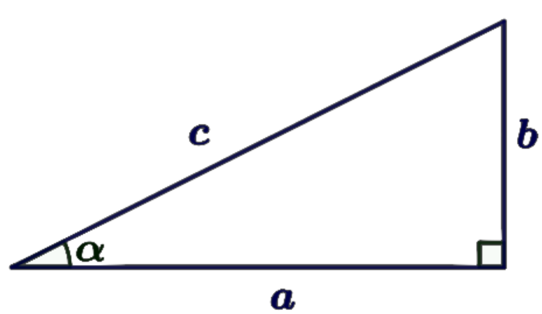
1.4.2. Identidades trigonométricas pitagóricas.

Como su nombre lo indica, estas identidades surgen a partir de las relaciones que guardan entre sí los lados de un triángulo recto dado el teorema de Pitágoras.

Para encontrar estas identidades partiremos de un triángulo recto y mediante algunos pasos algebraicos llegaremos a las identidades siguientes:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$$
$$1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$$

Sea un triángulo rectángulo ΔABC cuyos lados miden a, b, c y tomemos como referencia al ángulo α.



Por Teorema de Pitágoras sabemos que:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Pero si dividimos esta igualdad entre c^2 tendríamos

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} \qquad \Rightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1 \qquad \Rightarrow (\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Por otro lado, si dividimos la igualdad entre b^2, tendríamos:

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{b^2} = \frac{c^2}{b^2} \qquad \therefore \quad \cot^2\alpha + 1 = \csc^2\alpha$$

Finalmente, al dividir la igualdad pitagórica entre a^2, tendríamos:

$$\frac{a^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2} \qquad \therefore \quad 1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$$

A partir de estas tres identidades y al despejar y reacomodar los términos podemos obtener un total de 9 identidades. Se recomienda resolverlas como ejercicio y construir una lista con todas las identidades obtenidas.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Comprueba las siguientes identidades trigonométricas.

a) $\csc\theta - \sin\theta = \cot\theta\cos\theta$

b) $\sin x + \cos x \cot x = \csc x$

Solución.

a) $\csc\theta - \sin\theta = \cot\theta\cos\theta$

Comenzaremos por el lado izquierdo el desarrollo de la identidad.

$\csc\theta - \sin\theta = \dfrac{1}{\sin\theta} - \sin\theta$, por la definición de cosecante.

$\dfrac{1}{\sin\theta} - \sin\theta = \dfrac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta}$, suma de fracciones.

$\dfrac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta} = \dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta}$, identidad pitagórica.

$\dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta} = \dfrac{\cos\theta\cdot\cos\theta}{\sin\theta}$, potencia vista como producto.

$$\frac{\cos\theta\cdot\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\cos\theta$$, asociatividad del producto.

$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\cos\theta=\cot\theta\cos\theta$$, definición de cotangente.

Por lo tanto, la identidad es verdadera.

b) $\sin x+\cos x\cot x=\csc x$

Comenzaremos por el lado izquierdo el desarrollo de la identidad.

$$\sin x+\cos x\cot x=\sin x+\cos x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}$$, por la definición de cotangente.

$$\sin x+\cos x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}=\sin x+\frac{\cos x\cdot\cos x}{\sin x}$$, asociatividad del producto.

$$\sin x+\frac{\cos x\cdot\cos x}{\sin x}=\sin x+\frac{\cos^2 x}{\sin x}$$, producto como potencia.

$$\sin x+\frac{\cos^2 x}{\sin x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x}$$, suma de fracciones.

$$\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x}=\frac{1}{\sin x}$$, identidad pitagórica.

$$\frac{1}{\sin x}=\csc x$$, definición de cosecante.

Por lo tanto, la identidad es verdadera.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Verifica las siguientes identidades trigonométricas.

a) $\dfrac{\sec^2 u-1}{\sec^2 u}=\sin^2 u$

b) $\tan t+2\cos t\csc t=\sec t\csc t+\cot t$

c) $\dfrac{\csc^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\cot^2\theta$

d) $(\tan u+\cot u)(\cos u+\sin u)=\csc u+\sec u$

e) $\dfrac{1+\cos t}{\sin t}+\dfrac{\sin t}{1+\cos t}=2\csc t$

f) $\tan^2\alpha-\sin^2\alpha=\tan^2\alpha\sin^2\alpha$

g) $\dfrac{\sin u}{\csc u}+\dfrac{\cos u}{\sec u}=1$

h) $\dfrac{1-\csc^2 t}{\csc^2 t}=\dfrac{-1}{\sec^2 t}$

i) $\sin t(\csc t-\sin t)=\cos^2 t$

j) $(1+\sin z)(1-\sin z)=\dfrac{1}{\sec^2 z}$

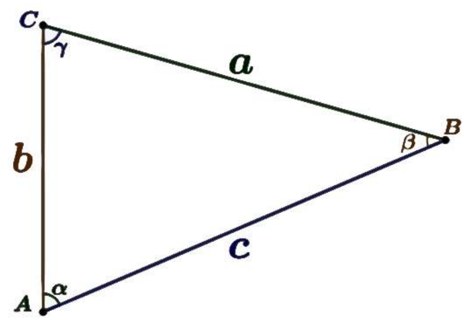
1.5. Resolución de triángulos oblicuángulos.

Hasta ahora hemos utilizado las razones trigonométricas únicamente en triángulos rectos, pero es un error suponer que sólo en estos son aplicables. Recordemos que el seno y coseno dependen de la magnitud de los ángulos que se forman en un triángulo, por lo que la forma del triángulo no debería ser impedimento para obtener el valor de las razones.

En este punto es que entrarán a escena lo que se conoce como las leyes de los senos y los cosenos.

1.5.1. Ley de senos.

Dado un triángulo cualquiera existe una relación entre sus ángulos internos y las magnitudes de los lados opuestos correspondientes.



$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}$$ o, también: $$\frac{a}{sen\alpha}=\frac{b}{sen\beta}=\frac{c}{sen\gamma}$$

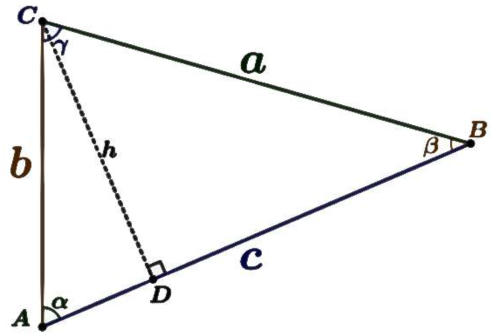
Esto nos permitirá conocer las 6 medidas de un triángulo siempre y cuando conozcamos tres datos: un ángulo, su lado opuesto y cualquier otro dato.

A continuación, se presenta una demostración de esta ley de los senos.

Dado que tenemos dos igualdades en la primera forma, procederemos a demostrar la primera de ellas, es decir, probemos que:

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}$$

Tomemos entonces la altura del triángulo que pasa por el vértice C.



Consideremos ahora los triángulos $\triangle ADC$ y $\triangle DBC$,, ambos son triángulos rectángulos, por lo que podemos obtener el seno del ángulo α y β.

$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{h}{b} \quad \Rightarrow \quad h = b(\sin\alpha)$$

De la misma manera, tenemos que:

$$\Rightarrow sin\ \beta = \frac{h}{a} \quad \Rightarrow \quad h = a(sin\ \beta)$$

Pero, dado que h es un segmento que comparten ambos triángulos se tiene la siguiente igualdad:

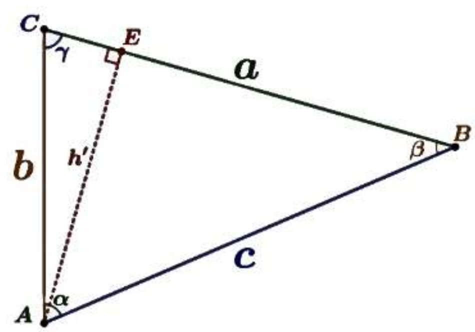
$$b(\sin\alpha) = a(\sin\beta) \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}$$

con lo cual, terminamos la primera parte de la demostración.

Ahora, procedemos a demostrar la otra igualdad de la ley de senos, es decir, probemos que:

$$\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

Tomemos ahora la altura que pasa por el vértice A.



Consideremos ahora los triángulos $\triangle BEA$ y $\triangle CEA$, ambos son triángulos rectángulos, por lo que podemos obtener el seno del ángulo β y γ.

$$\Rightarrow \quad \sin\beta = \frac{h'}{c} \quad \Rightarrow \quad h' = c(\sin\beta)$$

De la misma manera tenemos que:

$$\Rightarrow \quad \sin\gamma = \frac{h'}{b} \quad \Rightarrow \quad h' = b(\sin\gamma)$$

Pero, dado que h' es un segmento que comparten ambos triángulos se tiene la siguiente igualdad:

$$c(\sin\beta) = b(sen\gamma) \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

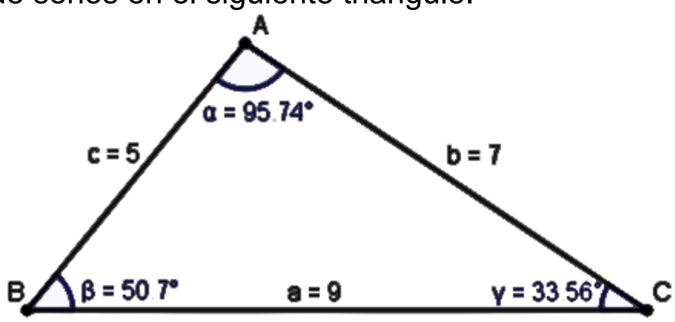
Y así terminamos la demostración de la ley de senos.

Observa que las igualdades recíprocas son también válidas, es decir:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

EJEMPLOS:

1. Comprueba la ley de senos en el siguiente triángulo.



Solución.

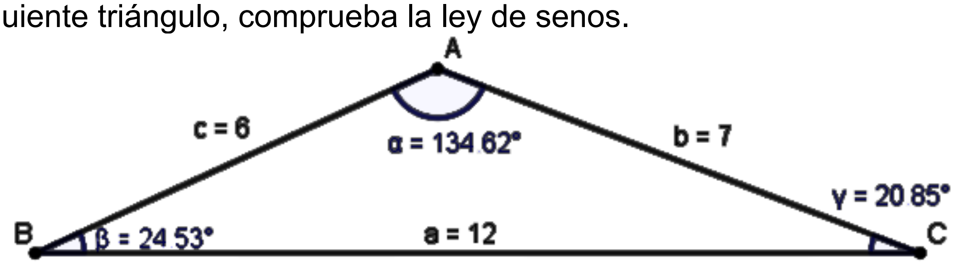
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{9}{\sin(95.74°)} = 9.045$$

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{7}{\sin(50.7°)} = 9.045$$

$$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{5}{\sin(33.56°)} = 9.045$$

Por lo tanto, $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$.

2. Dado el siguiente triángulo, comprueba la ley de senos.



Solución.

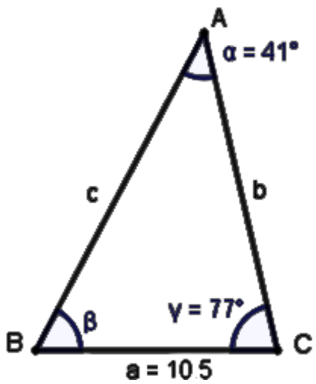
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{12}{\sin(134.62°)} = 16.86$$

$$\frac{b}{\sin\beta}=\frac{7}{\sin(24.53°)}=16.86$$
$$\frac{c}{\sin\gamma}=\frac{6}{\sin(20.85°)}=16.86$$

Por lo tanto, $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$.

PROBLEMAS RESUELTOS

Considera el triángulo siguiente.



1. Calcula el valor de los elementos que faltan.

Solución.

En este caso lo más sencillo es calcular el valor del ángulo faltante, pues conocemos el valor de dos de ellos.

$$\alpha+\beta+\gamma=180^{\circ}$$

Pero sabemos que: $\alpha=41^{\circ}$ y $\gamma=77^{\circ}$

Entonces $41^{\circ}+\beta+77^{\circ}=180^{\circ}\Rightarrow\beta=62^{\circ}$.

Ahora que conoces el valor de los tres ángulos, es posible utilizar la ley de senos para encontrar el valor de los lados que faltan.

Sabemos que $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$.

En particular, $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin\gamma}\Rightarrow c=\frac{a\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha}$.

Y al sustituir los valores conocidos podemos obtener el valor de c.

$$c=\frac{a\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha}=\frac{10.5\left(\sin(77°)\right)}{\sin(41°)}=15.59$$

De forma análoga $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}\Rightarrow b=\frac{a\cdot\sin\beta}{\sin\alpha}$.

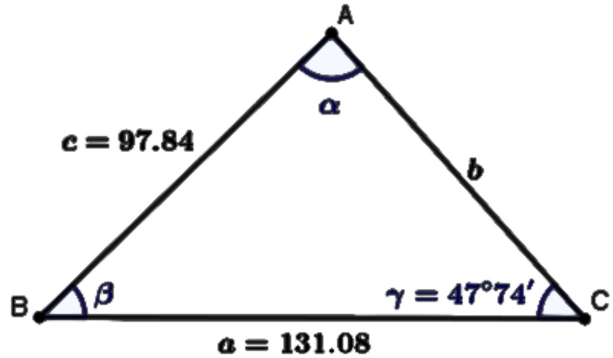
Y sustituyendo nuevamente, obtenemos el valor de b.

$$b=\frac{a\cdot\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{10.5\left(\sin(62°)\right)}{\sin(41°)}=14.13$$

Finalmente,

$a=10.5,\ b=14.13,\ c=15.59$ y $\alpha=41,\ \beta=62,\ \gamma=77$.

2. Encuentra los valores faltantes en el siguiente triángulo.



Solución.

En este caso, sólo conocemos uno de los ángulos γ, sin embargo, conocemos dos lados a y c, y uno de ellos es el opuesto al ángulo conocido, por lo que podemos utilizar la ley de senos para encontrar el valor del ángulo opuesto a a.

Sabemos que $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$.

En particular, $\dfrac{\sin\alpha}{a} = \dfrac{\sin\gamma}{c} \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{a \cdot \sin\gamma}{c} \Rightarrow \alpha = \sin^{-1}\left(\dfrac{a \cdot \sin\gamma}{c}\right)$.

Y al sustituir los valores conocidos podemos obtener el valor de c.

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{a \cdot \sin\gamma}{c}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{131.08\left(\sin(47°74')\right)}{97.84}\right) = 87°47'$$

Ahora, podemos calcular el valor del ángulo faltante, pues ya conocemos el valor de dos de ellos.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^{\circ}$$

Pero sabemos que: $\alpha = 87^{\circ}47'$ y $\gamma = 47^{\circ}74'$

Entonces $47^{\circ}74' + \beta + 87^{\circ}47' = 180^{\circ} \Rightarrow \beta = 43^{\circ}59'$.

Ahora que conoces el valor de los tres ángulos, volvemos a utilizar la ley de senos para encontrar el valor del lado faltante.

De forma análoga $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} \Rightarrow b = \dfrac{a \cdot \sin\beta}{\sin\alpha}$.

Y sustituyendo nuevamente, obtenemos el valor de b.

$$b = \frac{a \cdot \sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{131.08\left(\sin(43°59')\right)}{\sin(87°47')} = 91.06$$

Finalmente,

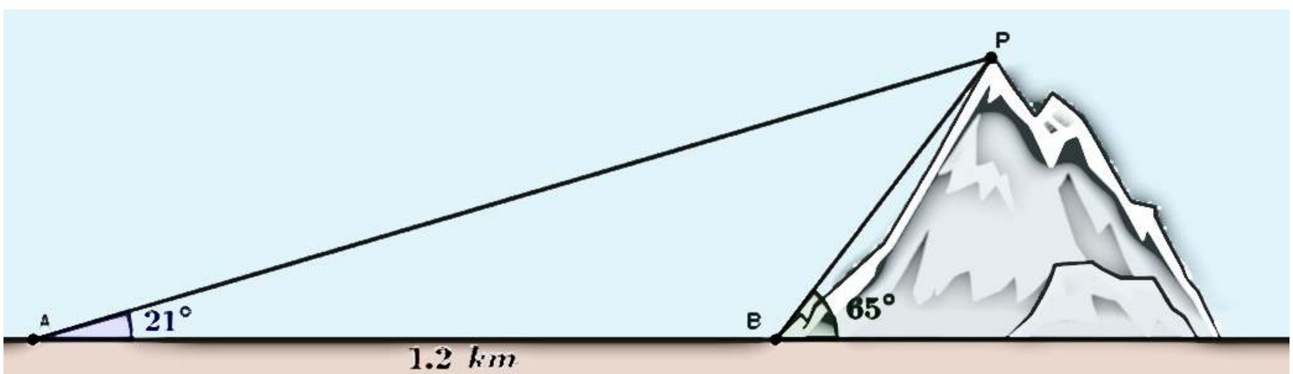
$a = 131.08,\ b = 91.06,\ c = 97.84$ y $\alpha = 87°47',\ \beta = 43°59',\ \gamma = 47°74'$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

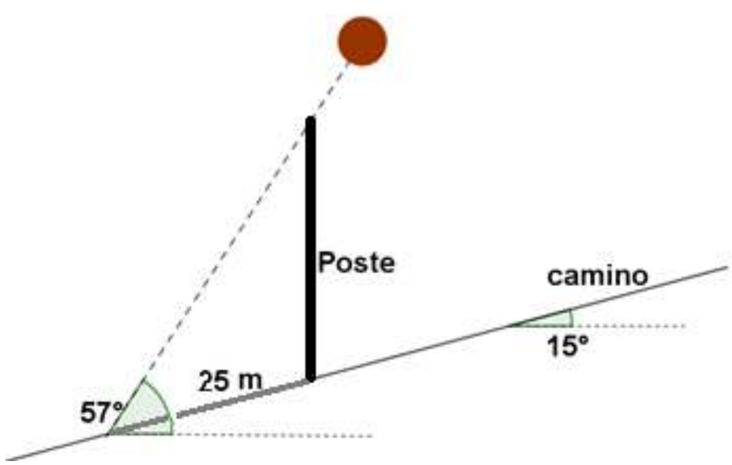
1. Resuelve los siguientes triángulos.

a) $\beta = 20°, \gamma = 31°, b = 210$
b) $\alpha = 27°40', \beta = 52°10', a = 32.4$
c) $\beta = 50°50', \gamma = 70°30', c = 537$
d) $\alpha = 42°10', \gamma = 61°20', b = 19.7$
e) $\alpha = 103.45°, \gamma = 27.19°, b = 38.84$
f) $\alpha = 42.17°, a = 5.01, b = 6.12$
g) $\alpha = 65°10', a = 21.3, b = 18.9$
h) $\beta = 113°10', b = 248, c = 195$
i) $\beta = 121.624°, b = 0.283, c = 0.178$
j) $\gamma = 73.01°, a = 17.31, c = 20.24$

2. Un teleférico transporta pasajeros desde el punto A, que está a 1.2 kilómetros del punto B en la base de una montaña, hasta un punto P en la cima de la montaña. Los ángulos de elevación de P desde A y B son 21° y 65° respectivamente. Calcular la distancia entre A y P. Calcular la altura de la montaña.

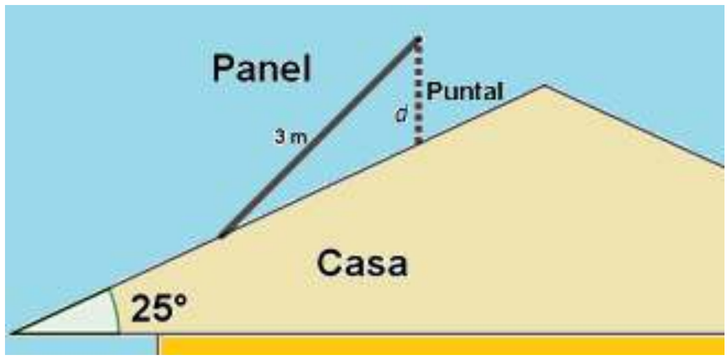


3. Un camino recto hace un ángulo de 15° con la horizontal. Cuando el ángulo de elevación del Sol es de 57°, un poste vertical que está a un lado del camino proyecta una sombra de 25 metros de largo directamente cuesta abajo, como se muestra en la figura. Calcular la altura del poste.

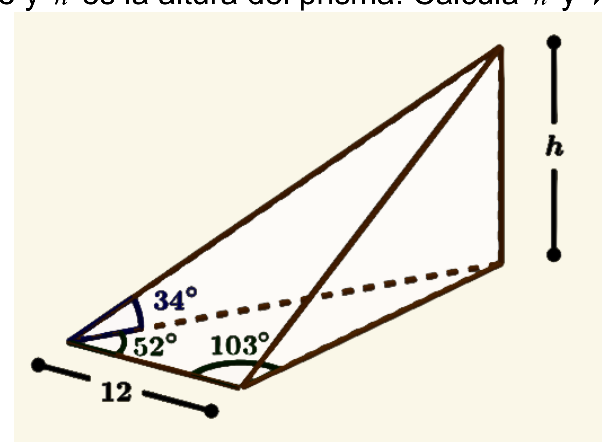


4. Los ángulos de elevación de un globo desde los puntos A y B a nivel del suelo son 24°10' y 47°40', respectivamente. Los puntos A y B se encuentran a una distancia de 8.4 kilometros entre si. Calcula la altura del globo sobre el suelo.

5. Un panel solar de 3 metros de ancho se instala sobre un techo que forma un ángulo de 25° con la horizontal. Calcula la longitud d del puntal que se requiere para que el panel haga un ángulo de 45° con la horizontal.

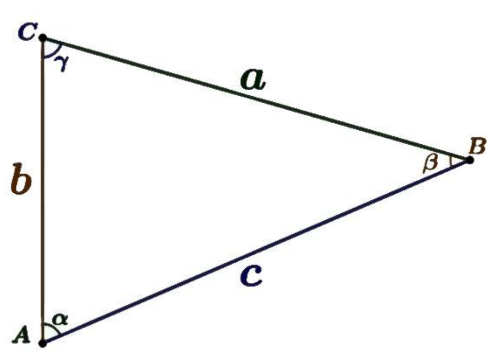


6. El volumen V del prisma triangular recto que se muestra en la figura es de $\frac{1}{3}Bh$, donde B es el área de la base y h es la altura del prisma. Calcula h y V.



|
1.5.2. Ley de cosenos.

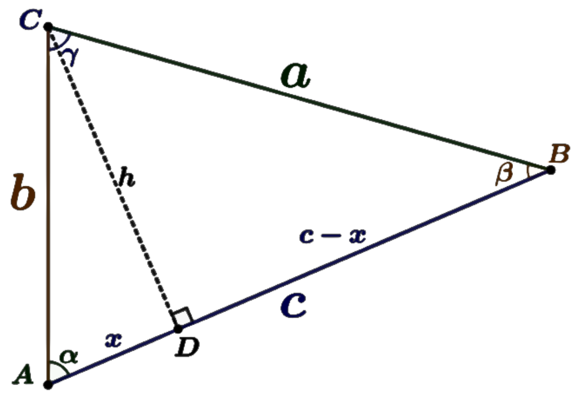
Dado un triángulo cualquiera existe una generalización del teorema de Pitágoras.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Esta identidad nos permite completar los datos del triángulo cuando conocemos dos lados y el ángulo entre ellos o cuando sólo conocemos los lados.

Para demostrarla tomaremos en cuenta la altura que pasa por el vértice C, llamaremos x a la medida del segmento $\overline{AD}$ y $c-x$ a la del segmento $\overline{DB}$.



Consideremos ahora los triángulos $\triangle ADC$ y $\triangle DBC$, ambos son triángulos rectángulos, por lo que podemos aplicar el teorema de Pitágoras en ambos, con lo que obtenemos las siguientes identidades:

$$b^2 = x^2 + h^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(1)}$$
$$a^2 = h^2 + (c-x)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(2)}$$

Despejando h^2 de la identidad (2) y sustituyendo en la identidad (1) tenemos que:

$$b^2 = x^2 + (a^2 - (c-x)^2)$$

$\Rightarrow \quad b^2 = x^2 + a^2 - c^2 + 2cx - x^2$ Desarrollamos el binomio al cuadrado.

$\Rightarrow \quad b^2 = a^2 - c^2 + 2cx$ Simplificamos al cancelar la x^2.

$\Rightarrow \quad b^2 - a^2 = -c^2 + 2cx$ Pasamos a^2 restando.

$\Rightarrow \quad a^2 - b^2 = c^2 - 2cx$ Invertimos las restas en ambos lados.

$\Rightarrow \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$ Pasamos b^2 del otro lado.

Ahora considerando que $\cos\alpha = \dfrac{x}{b} \quad \Rightarrow \quad x = b\cos\alpha$, sustituimos este valor en la última igualdad que obtuvimos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Con lo que queda demostrada la ley de cosenos.

De manera análoga podemos obtener las otras identidades de la ley de cosenos

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

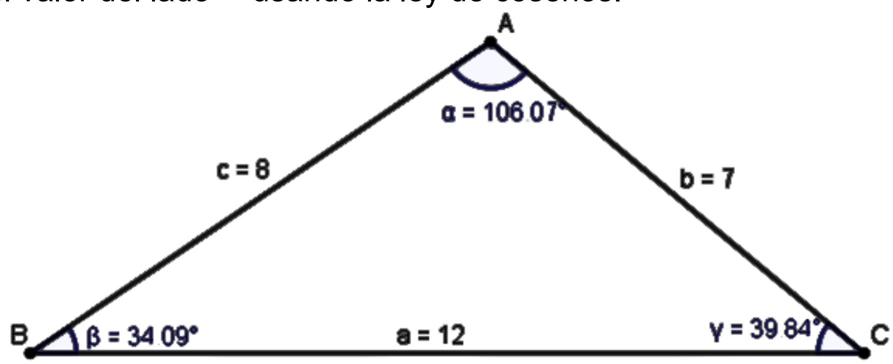
Nótese que si conocemos las magnitudes de los lados del triángulo podemos despejar los ángulos de cualquiera de las identidades, por ejemplo:

$$\cos\alpha = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc}$$

$$\therefore \quad \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc}\right)$$

EJEMPLOS:

1. Comprueba el valor del lado c usando la ley de cosenos.



Solución.
Conocemos los valores de lado a, b y del ángulo γ, si despejamos el valor de c en la fórmula de cosenos obtenemos lo siguiente:

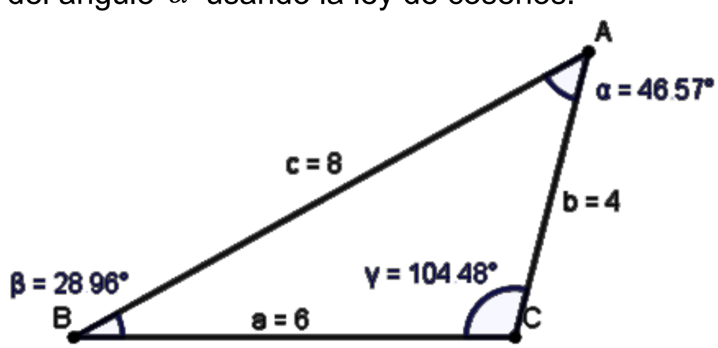
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$$

Al realizar la sustitución, obtenemos el valor de c.

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma} = \sqrt{(12)^2 + (7)^2 - 2(12)(7)\cos(39.84°)} = 8$$

Por lo tanto, la ley de cosenos se cumple.

2. Comprueba el valor del ángulo α usando la ley de cosenos.



Solución.
Dado que conocemos el valor de los tres lados del triángulo, se pueden sustituir en la fórmula despejada de cosenos para obtener el valor de α.

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{(6)^2 - (4)^2 - (8)^2}{-2(4)(8)}\right) = 46.57°$$

Por lo tanto, la ley de cosenos se cumple.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Completa los datos de los siguientes triángulos.

a) $\alpha = 60°, \quad b = 20, \quad c = 30$

b) $a = 20, \quad b = 20, \quad c = 10$

Solución.

a) $\alpha = 60°, \quad b = 20, \quad c = 30$

Tenemos el valor de dos lados del triángulo y el valor del ángulo que está en medio de ellos, podemos entonces usar la ley de cosenos para calcular el valor del tercer lado despejando el valor deseado.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \Rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$$

Al sustituir los datos que tenemos, obtendremos el valor del lado a.

$$a = \sqrt{(20)^2 + (30)^2 - 2(20)(30)\cos(60°)} = 10\sqrt{7}$$

Ya que conocemos el valor de los tres lados podríamos usar la fórmula de la ley de senos para encontrar el valor de los ángulos faltantes, sin embargo, usaremos nuevamente la ley de cosenos para continuar con su estudio.

Para el ángulo β tendríamos el despeje siguiente:

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{b^2 - a^2 - c^2}{-2ac}\right)$$

Al sustituir los valores ya conocidos, obtenemos el valor del ángulo.

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{b^2 - a^2 - c^2}{-2ac}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{(20)^2 - \left(10\sqrt{7}\right)^2 - (30)^2}{-2\left(10\sqrt{7}\right)(30)}\right) = 40.89°$$

El último ángulo podemos obtenerlo a partir de la suma de los ángulos internos.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

En donde: $\alpha = 60°$ y $\beta = 40.89°$

Entonces $60° + 40.89° + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \gamma = 79.11°$.

Finalmente,

$a=10\sqrt{7},\ b=20,\ c=30$ y $\alpha=60°,\ \beta=40.89°,\ \gamma=79.11°$.

b) $a=20, \quad b=20, \quad c=10$

En este caso, tenemos el valor de los tres lados del triángulo, por lo que podemos usar nuevamente la fórmula despejada de la ley de cosenos.

$$\alpha=\cos^{-1}\left(\frac{a^2-b^2-c^2}{-2bc}\right)$$

Sustituyendo los valores conocidos obtenemos el valor del primer ángulo.

$$\alpha=\cos^{-1}\left(\frac{(20)^2-20^2-10^2}{-2(20)(10)}\right)=75.52°$$

Para el ángulo β tendríamos el despeje siguiente.

$$\beta=\cos^{-1}\left(\frac{b^2-a^2-c^2}{-2ac}\right)$$

Al sustituir los valores ya conocidos, obtenemos el valor del ángulo.

$$\beta=\cos^{-1}\left(\frac{(20)^2-(20)^2-(10)^2}{-2(20)(10)}\right)=75.52°$$

El último ángulo podemos obtenerlo a partir de la suma de los ángulos internos.

$$\alpha+\beta+\gamma=180^{\circ}$$

En donde: $\alpha=75.52°$ y $\beta=75.52°$

Entonces $75.52°+75.52°+\gamma=180^{\circ} \Rightarrow \gamma=28.96°$.

Finalmente,

$a=20,\ b=20,\ c=10$ y $\alpha=75.52°,\ \beta=75.52°,\ \gamma=28.96°$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

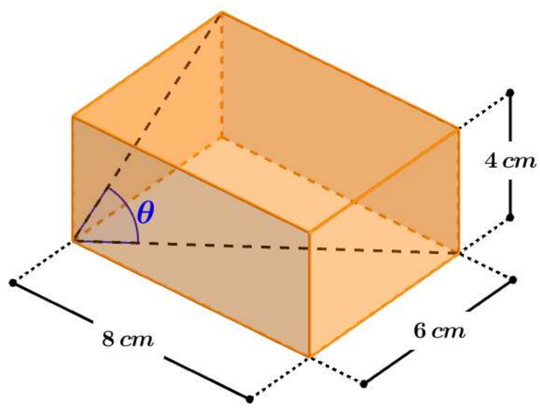
1. Resuelve los siguientes triángulos.

a) $\gamma=45°, \quad b=10, \quad a=15$
b) $\beta=150°, \quad a=150, \quad c=30$
c) $\beta=73°50', \quad c=14, \quad a=87$
d) $\gamma=115°10', \quad a=1.1, \quad b=2.1$
e) $\alpha=23°40', \quad c=4.3, \quad b=70$
f) $a=2, \quad b=3, \quad c=4$
g) $a=10, \quad b=15, \quad c=12$
h) $a=25, \quad b=80, \quad c=60$

2. Para hallar la distancia entre dos puntos A y B, un agrimensor escoge un punto C que está a 420 metros de A y a 540 metros de B. Si el ángulo $\angle ACB$ mide 63°10', calcula la distancia entre A y B

3. Una embarcación sale de puerto a la 1:00 p.m. y navega al S35°E a una velocidad de 24 kilómetros por hora. Otra sale del mismo puerto a la 1:30 p.m. y navega al S20°O a 18 kilómetros por hora. ¿Aproximadamente a qué distancia se encuentran una de otra a las 3:00 p.m.?

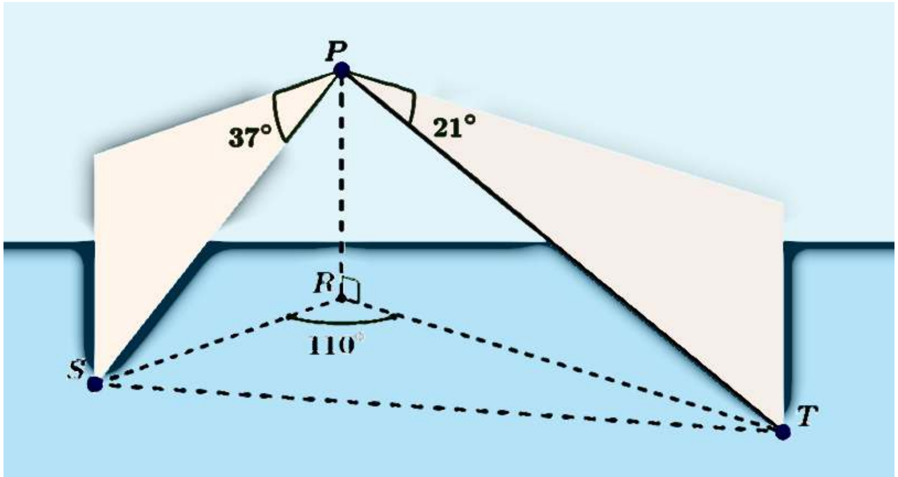
4. La caja rectangular de la figura tiene dimensiones $8\times 6\times 4$. Calcula en ángulo θ que se forma con las diagonales.



5. Un crucero zarpa con rumbo N47°E desde una isla a un puerto en tierra firme que se encuentra a 150 kilómetros. Después de navegar por aguas de fuertes corrientes, la nave está fuera de curso en una posición P ubicada a N33°E y a 80 kilómetros de la isla. ¿A qué distancia aproximada estará del puerto? ¿Qué dirección debe tomar para corregir el rumbo?

6. Una lancha de motor navegó a lo largo de una ruta de tres partes, cuyas distancias fueron $2km$, $4km$ y $3km$. La primera la recorrió en dirección N20°O, y la segunda en dirección SO un ángulo agudo. Calcula la dirección en que recorrió la tercera parte.

7. Un aeroplano P de reconocimiento, que vuela a 10 000 pies del punto R sobre la superficie del agua, localiza un submarino S a un ángulo de depresión de 37° y un buque tanque T a un ángulo de depresión de 21°, como se muestra en la figura. Además, el ángulo $\angle SRT$ resulta ser de 110°. Calcula la distancia entre el submarino y el buque tanque.



8. Calcula el área de paralelogramos que tienen lados de longitudes a y b (en metros) si el ángulo de un vértice mide θ.

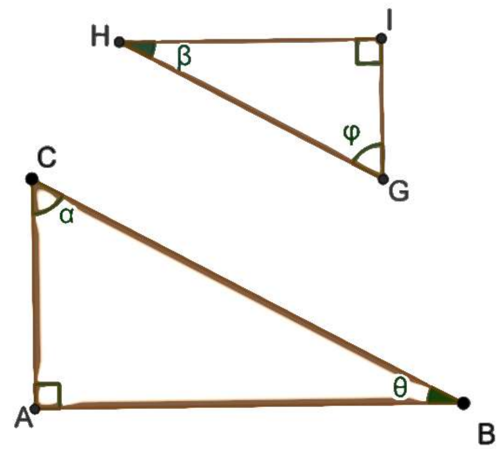
a) $a = 12, \quad b = 16, \quad \theta = 40$

b) $a = 40.3, \quad b = 52.6, \quad \theta = 100$

AUTOEVALUACIÓN.

1. Los triángulos ABC y GHI que se muestran en la siguiente figura son triángulos rectángulos, con ángulos rectos en el vértice A y I, respectivamente. Se sabe además que, el ángulo C y el ángulo G son congruentes.

   Si el sen(θ)≈0.4714, determina el sen(β).



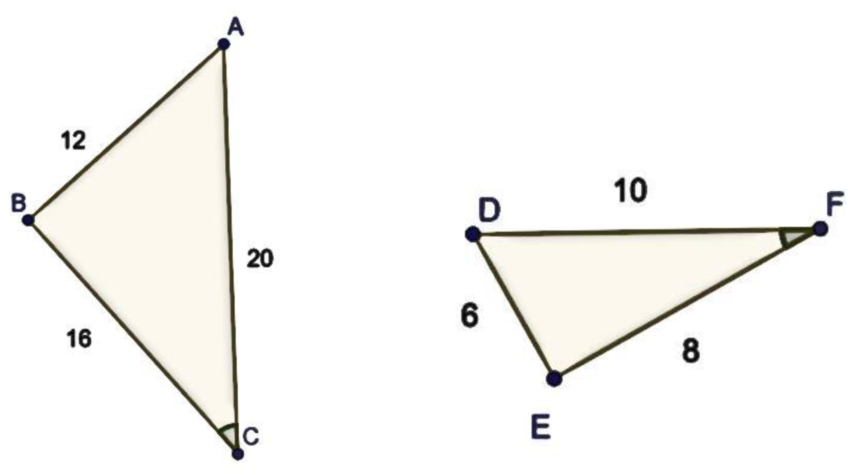
A) 0.8818

B) 0.4714

C) 0.5346

D) 1.8704

2. Utiliza los datos de la figura para determinar la razón trigonométrica *seno* del ángulo marcado en cada triángulo y establece la proporción correspondiente entre dichas razones, así como su valor numérico r.



A) $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$, $r = \frac{3}{4}$

B) $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$, $r = \frac{3}{5}$

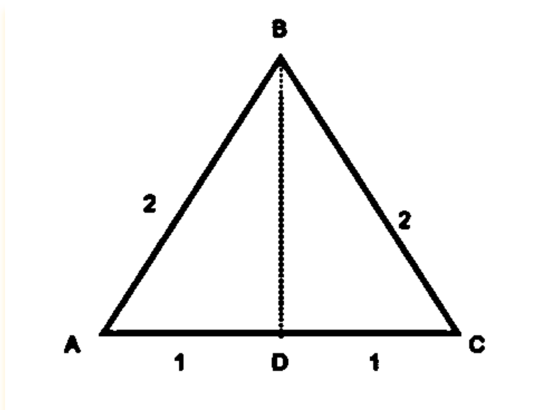
C) $\frac{BC}{AC} = \frac{EF}{DF}$, $r = \frac{4}{5}$

D) $\frac{BC}{AC} = \frac{EF}{DF}$, $r = \frac{3}{5}$

3. ¿Cuál de los siguientes registros corresponde al resultado de la cosecante de algún ángulo agudo β?

A) 0.7071
B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
C) 0.999
D) 1.2488

4. Con la ayuda de la siguiente figura calcula la cotangente del ángulo de 30°, si $\overline{BD}$ es una altura del triángulo.



A) $\sqrt{3}$

B) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

C) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

5. Si sec (54°) = 1.701301, ¿cuál es la razón trigonométrica cuyo valor es el mismo?

A) $cos\ 36°$
B) $cot\ 54°$
C) $csc\ 36°$
D) $cot\ 54°$

6. Desde un edificio de 20 metros de altura, un observador ve una persona que está en la calle, si el ángulo de depresión es de 50°. ¿A qué distancia, se encuentra la persona del edificio?

   A) 23.84 m
   B) 36 m
   C) 16.78 m
   D) 18.20 m

7. Una catedral se encuentra sobre una colina. Cuando se observa la parte superior del campanario desde la base de la colina, el ángulo de elevación es de 48°, cuando se ve a una distancia de 60 metros desde el pie de la colina es de 41°. La colina se eleva a un ángulo de 32 °. Calcula la altura de la catedral.

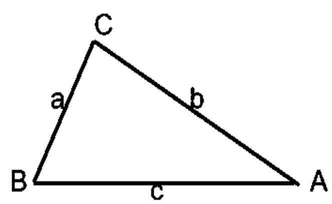
   A) 230.84 m

   B) 86.56 m

   C) 115.53 m

   D) 210.55 m

8. Para deducir la ley de los senos en un triángulo acutángulo cualquiera, se puede trazar, como línea auxiliar desde el vértice C de un triángulo ABC (ver figura):



A) Una mediana

B) Una bisectriz

C) Una mediatriz

D) Una altura

9. En un campo de fútbol la portería mide, de poste a poste, 7.32m. Un delantero se encuentra a 13m del poste más cercano y a 18m del otro, ¿cuál es su ángulo de tiro, aproximadamente?

A) 20°7’41’’

B) 50°8’4’’

C) 13°7’41’’

D) 43°45’42’’

10. Calcula la altura AB de una montaña cuya base y cumbre son inaccesibles, sabiendo que: desde un punto C el ángulo de elevación ACB es de 30°, y, desde un punto D alineado con AC y situado a 800 metros de C y a la izquierda de C, el ángulo de elevación ADB es de 25°.

A) 1939.6 m

B) 4589.4582 m

C) 10859.65 m

D) 1835.65 m

SOLUCIONES A LA AUTOEVALUACIÓN

PREGUNTA	RESPUESTA
1	B
2	B
3	D
4	A
5	C
6	C
7	D
8	D
9	D
10	A

REFERENCIAS

- Ayres, F. (1981). *Trigonometría plana y esférica*. Mc graw hill.
- Guzmán, A. (1988). *Geometría y trigonometría.* Publicaciones Culturales.
- *Programas de Estudio del Área de Matemáticas*. Matemáticas I-IV. Colegio de Ciencias y Humanidades. México. 2016.
- Rivaud J. (1987). *Trigonometría.* Limusa.
- Swokowski, E. y Cole, J. (2007). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica.* CONGAGE learning.

UNIDAD 2

ELEMENTOS BASICOS DE GEOMETRIA ANALITICA.

Propósito. El estudiantado será capaz de manejar algebraicamente algunos conceptos básicos de la geometría euclidiana y algunos lugares geométricos con la finalidad de introducir el método analítico.

Al finalizar esta unidad pretendemos que alcances los aprendizajes siguientes:

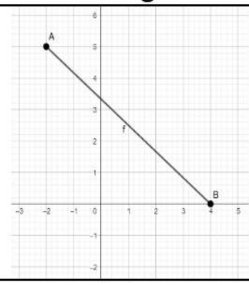
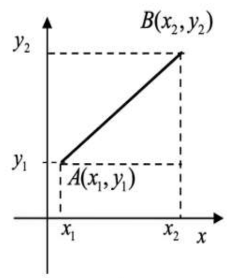
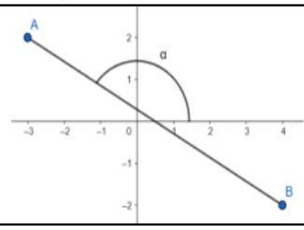
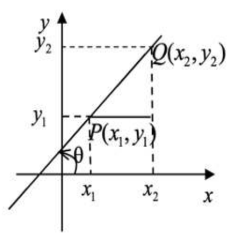
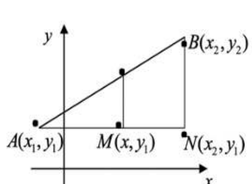
- Representa la ubicación de un punto en el plano utilizando un sistema de referencia cartesiano y viceversa.
- Localiza un segmento en el plano y proporciona la información suficiente para que otro alumno lo pueda hacer.
- Deduce la fórmula para determinar la longitud de un segmento, dados sus puntos extremos, y la aplica en diferentes situaciones.
- Comprende el concepto de ángulo de inclinación de un segmento.
- Calcula el ángulo de inclinación a partir de las coordenadas de los extremos de un segmento.
- Localiza un segmento da dadas condiciones necesarias y suficientes, distintas a su determinación por sus puntos extremos.
- Localiza los puntos de división de un segmento.
- Obtiene la expresión algebraica y la gráfica de un lugar geométrico.

PRESENTACION.

Esta unidad trata del estudio de la geometría analítica en el plano.

La Geometría Analítica surge en el siglo XVII principalmente por el interés de estudiar las curvas a través de métodos generales. Es la fusión entre el Álgebra y la Geometría que relaciona ecuaciones algebraicas y otros objetos geométricos para su análisis; de manera recíproca, la interpretación geométrica de una expresión algebraica permite comprender mejor el significado de la misma. La creación de esta rama de la matemática es considerada como una de las principales obras del pensamiento matemático, y los principales autores de esta obra son Fermat y Descartes. La trascendencia que ha tenido esta rama de la matemática en distintas áreas del conocimiento ha sido relevante.

CONCEPTOS CLAVE

Subtema	Figura	Expresión Analítica	Parámetros
Segmento en el plano		$A(,x_1,y_1)\ y\ B(x_2,y_2)$	Puntos extremos
Distancia entre dos puntos dados (longitud de un segmento de recta)		$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$	Coordenadas de los puntos A y B
Ángulo de inclinación de un segmento		$m = tan\alpha$	Segmento y su pendiente
Definición de la pendiente de una recta.		$\tan\theta=\frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$ $=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ $x_2-x_1\neq 0$	Coordenadas de los puntos P y Q
Razón de cambio		$x=x_1+r(x_2-x_1)$ y $y=y_1+r(y_2-y_1)$ $r=\frac{y-y_1}{x-x_1},\ x-x_1\neq 0$	Coordenadas de dos puntos.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Teorema de Pitágoras. Este teorema establece que en cualquier triángulo rectángulo el cuadrado del lado opuesto al ángulo recto, llamado hipotenusa, es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, llamados catetos.

Razones trigonométricas y triángulos semejantes. En la Unidad I se establecieron estos conceptos, por lo que te invitamos a repasarlos antes de abordar esta Unidad.

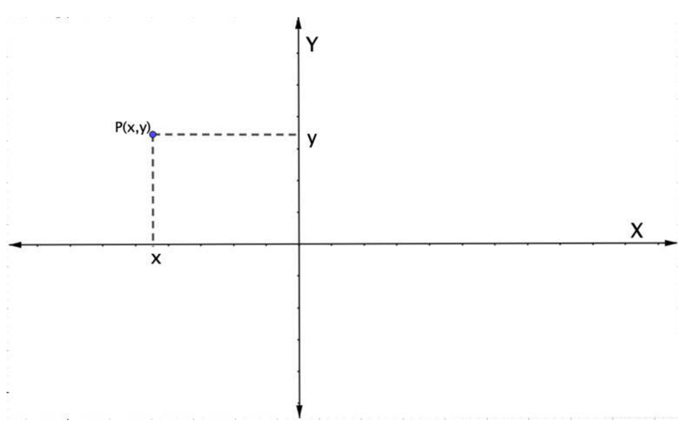
Clasificación de triángulos. Existen tres tipos de triángulos: Equilátero, isósceles y escaleno.

2. Representación de puntos en el plano de coordenadas rectangulares.

2.1 Sistema de coordenadas rectangulares o plano Cartesiano.

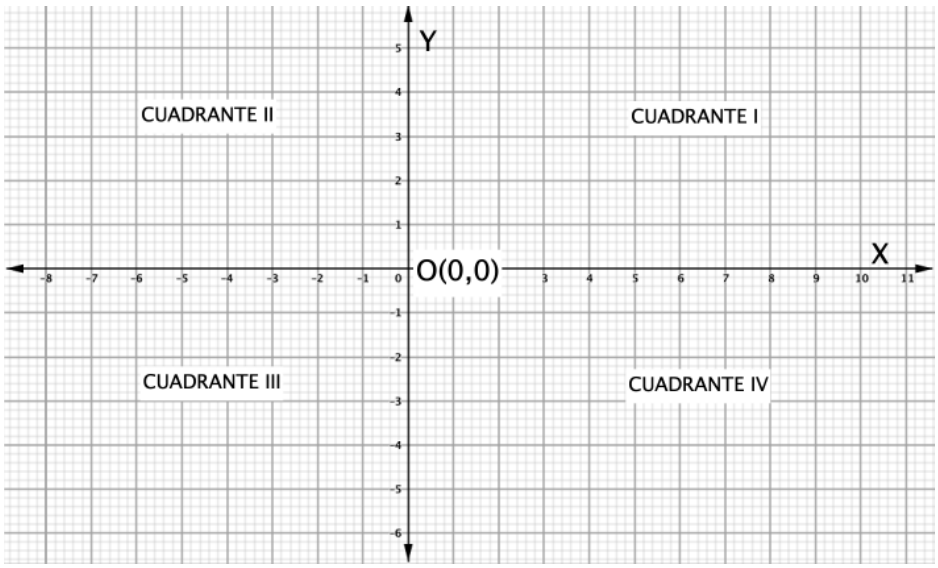
El contar con un sistema de referencia en el plano para localizar puntos en él es de suma importancia práctica, por ejemplo, para la elaboración de mapas de navegación.

El sistema de coordenadas rectangulares, o plano cartesiano, consiste en dos rectas, una vertical y otra horizontal, en el plano, la primera se llama el eje de las ordenadas, o eje Y, y la segunda el eje de las abscisas, o eje X. Al punto de intersección se le llama origen. A cada una de ellas la podemos pensar como la recta real (la recta donde se ubican todos los números reales); de esta manera, cada punto en ellas está asociado con un número real. A cada punto P en el plano se le asocia con una pareja ordenada (x,y), donde el valor de x (primera coordenada o abscisa) es el número que corresponde sobre el eje X, también, el valor de y (segunda coordenada u ordenada) es el número que corresponde sobre el eje Y. A partir del punto P, proyectamos el punto con respecto a cada eje coordenado, trazando rectas perpendiculares hacia el eje X y hacia el eje Y. De manera inversa, cada pareja ordenada (x,y) está relacionada con un punto P(x,y) en el plano, cada coordenada se proyecta hacia el punto con coordenadas perpendiculares, respectivamente como en la figura:

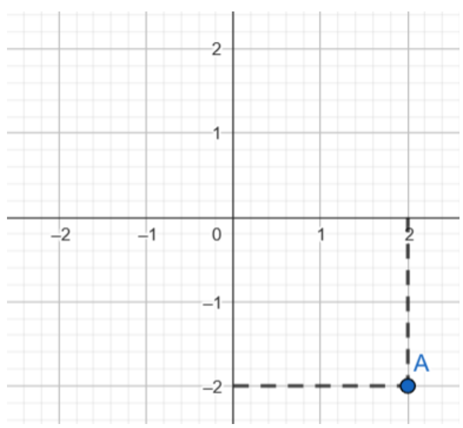


La relación entre los puntos del plano y las parejas ordenadas así descrita es biunívoca. En particular, el punto origen O, o simplemente origen, tiene coordenadas (0,0).

Las cuatro regiones en las que los ejes coordenados dividen el plano se numeran en sentido contrario a las manecillas del reloj: cuadrante I, cuadrante II, cuadrante III y cuadrante IV.

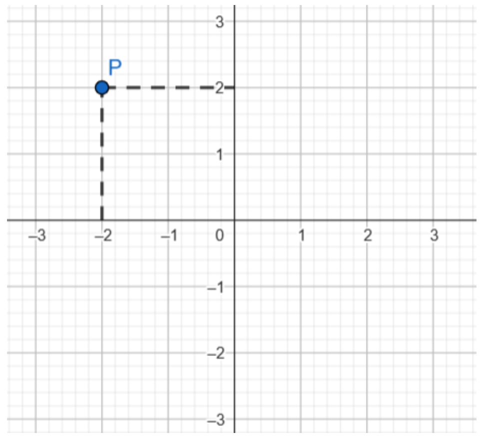


EJEMPLO 1: Encuentra las coordenadas cartesianas del punto *A* dado en la siguiente gráfica:



Solución. Trazando una recta paralela al eje Y que pase por *A*, encontramos que se intersecta con el eje X en *x*=2. Análogamente, la recta paralela al eje X que pasa por *A* corta al eje Y en *y*= -2. Por consiguiente, las coordenadas del punto son (2,-2). También, podemos pensar en trazar rectas perpendiculares hacia los ejes coordenados, a partir del punto A. Por lo tanto, las coordenadas el punto A son: $A(2.-2)$.

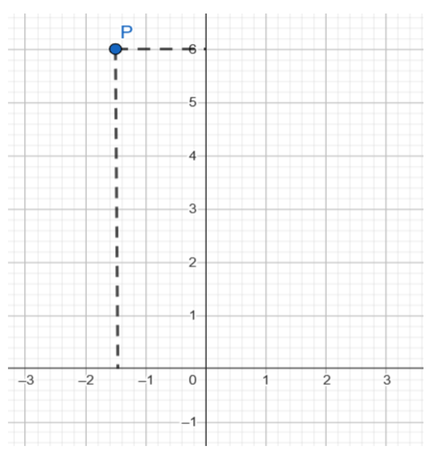
EJEMPLO 2: Encuentra las coordenadas cartesianas del punto *P* marcado en la siguiente gráfica:



Solución. Dibujando una recta paralela al eje Y que pase por *P*, encontramos que se intersecta con el eje X en *x*=-2. Similarmente, la recta paralela al eje X que pasa por *P* corta al eje Y en *y*=2. También, podemos trazar rectas perpendiculares hacia los ejes coordenados, a partir del punto P. Por consiguiente, las coordenadas del punto son P(-2,2).

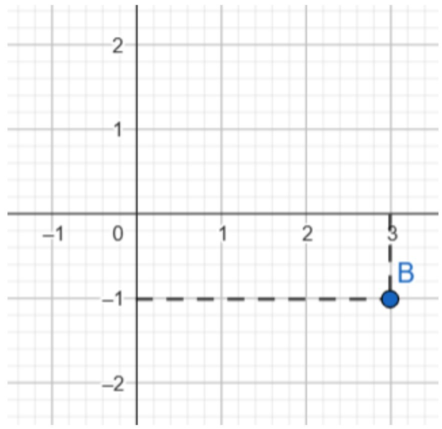
EJEMPLO 3: Encuentra el punto P en el plano cartesiano cuyas coordenadas son (-1.5,6).

Solución. Buscamos la abscisa -1.5 en el eje X y trazamos una recta perpendicular al eje X que pase por -1.5. Luego, buscamos la ordenada 6 en el eje Y y trazamos una recta perpendicular al eje Y, donde se intersectan las rectas perpendiculares está localizado el punto P. De otra manera, debemos trazar una recta paralela al eje Y pasando por *x*=-1.5, una recta paralela al eje X a la altura *y*=6, y señalar el punto de intersección de ambas rectas.



EJEMPLO 4**:** Encuentra el punto *B* en el plano cartesiano cuyas coordenadas son (3, -1).

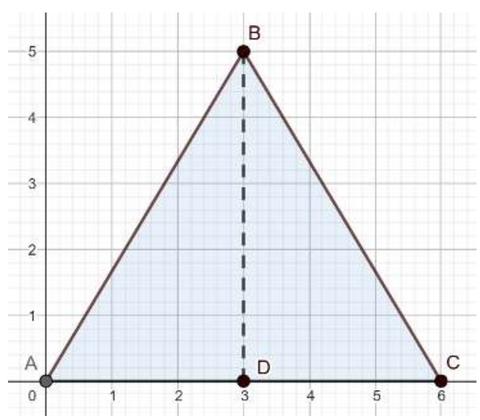
Solución. Imitando el razonamiento de los ejemplos anteriores, trazamos una recta paralela al eje Y que pase por *x*=3, una recta paralela al eje X a la altura $y = -1$, e indicamos el punto de intersección de ambas rectas.



PROBLEMA RESUELTO 1.

Encuentra las coordenadas del tercer vértice de un triángulo de tal manera que se encuentra en el primer cuadrante, que sea isósceles, que uno de sus lados esté sobre la parte positiva del eje X, y que los otros dos vértices sean *A*(0,0) y *B*(3,5).

Solución. Puedes considerar el segmento perpendicular al eje X que va del punto B(3,5) a dicho eje como una altura del triángulo dado, vea la figura. Ahora, si reflejas el segmento $\overline{AB}$ con respecto a la altura $\overline{BD}$, obtienes un tercer segmento con un extremo (3,5) y el otro (6,0). El punto (6,0) es el vértice buscado.

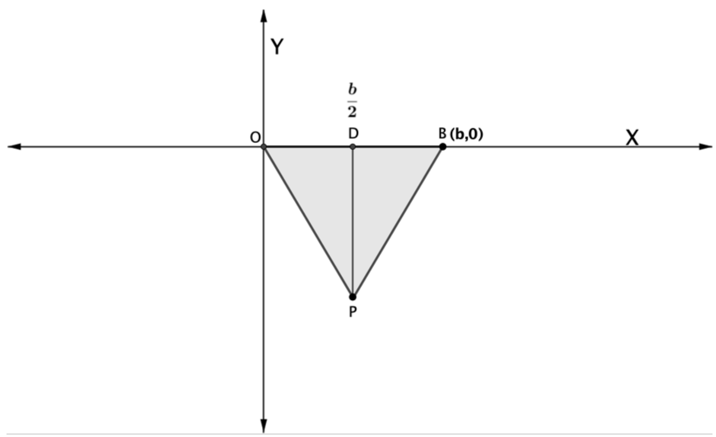


¿Se puede construir otro triángulo isósceles con la información dada y usando solamente geometría básica?

PROBLEMA RESUELTO 2.

Encuentra las coordenadas de los vértices que faltan de un triángulo equilátero de lado *b*, con uno de sus vértices en el origen, un lado en la parte positiva del eje X y el tercer vértice en el cuarto cuadrante.

Solución. Denotemos por *O* al vértice que se encuentra en el origen, el otro vértice es *B*(b,0). Supongamos que P(x,y) es el tercer vértice, luego trazamos la altura desde P al eje X, por geometría elemental, la altura intersecta al eje X en el punto D $\left(\frac{b}{2}, 0\right)$, justo en el punto medio del lado OB. Así, el punto P(x,y) tiene como coordenadas P$\left(\frac{b}{2}, y\right)$



Para obtener el valor de y, aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo ΔPDB:

$$y = \sqrt{b^2 - (b/2)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}b^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}b.$$

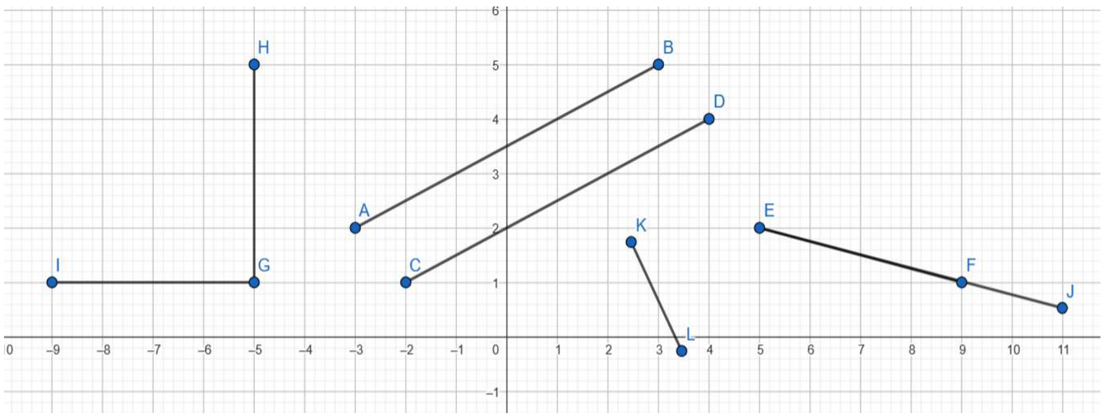
Por lo tanto, las coordenadas de P son P$\left(\frac{b}{2}, -\frac{\sqrt{3}\,b}{2}\right)$.

PROBLEMAS PROPUESTOS.

1. Localiza el punto (-3,-1) en el plano cartesiano.
2. ¿Cuál es el punto que es simétrico al punto (3,0), con respecto al eje Y.
3. Encuentra las coordenadas del tercer vértice del triángulo equilátero que tiene a (1,1) y (4,1) como sus otros dos vértice y que se encuentra situado en el primer cuadrante.

2.2 Localización de un segmento en el plano cartesiano dados sus puntos extremos.

Supón que se encuentran en el plano algunos segmentos:



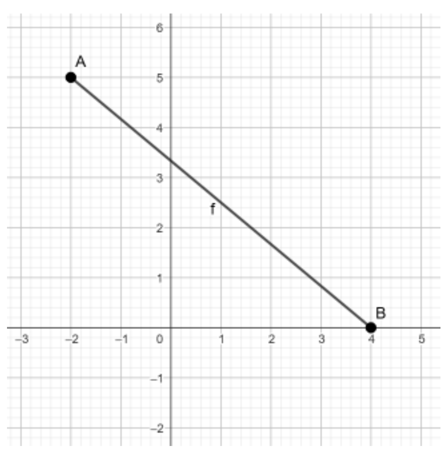
¿Qué diferencias encuentras entre ellos? ¿Qué similitudes hay entre ellos?

Ahora, piensa en el problema inverso, si quieres trazar distintos segmentos entre sí en el plano, ¿qué propiedad o propiedades debes modificar de uno a otro para hacerlos diferentes?

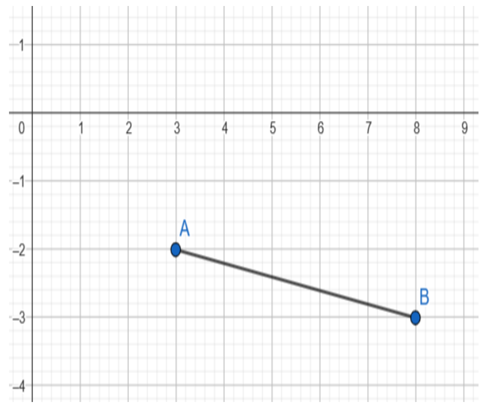
Dados dos puntos *A* y *B* en el plano, ¿cuántos segmentos puedes trazar que vayan de uno a otro? Solamente uno, ¿cierto? Ahora, pensando en sentido contrario, si trazas un segmento en el plano, éste tiene sólo dos puntos extremos. Por tanto, dos puntos en el plano definen un único segmento. A dichos puntos se les llama puntos extremos del segmento o, simplemente, extremos del segmento; por convención, el punto inicial es aquél que tiene la ordenada menor.

EJEMPLO 1: Dibuja en el plano el segmento de recta que va del punto *A*(-2,5) al punto *B*(4,0)

Solución. Comenzamos por localizar en el plano los puntos dados y, enseguida, trazamos el segmento que los une.



EJEMPLO 2: Dado el siguiente segmento, encuentra las coordenadas de los puntos extremos.



Solución. Para el punto *A* trazamos una recta paralela al eje Y y encontramos el punto de intersección con el eje X para hallar el valor de la abscisa*;* después, trazamos una recta paralela al eje X y encontramos su intersección con el eje Y para conocer el valor de su ordenada. Las coordenadas del punto A son (3,-2). A partir del punto B, trazamos rectas perpendiculares a los ejes coordenados y las intersecciones de éstas rectas perpendiculares con los ejes X y Y son las coordenadas del punto: $B(8,-3)$.

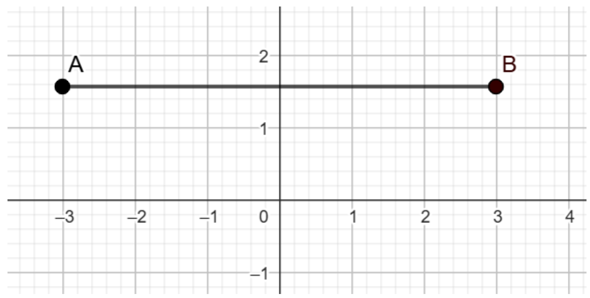
PROBLEMAS PROPUESTOS.

1. Traza el segmento de recta que tiene como extremos a (6,-3) y (-1,7).
2. Traza el segmento que une los puntos (3,2) y (7,10).
3. Encuentra la abscisa del punto *P* que tiene como ordenada a -1/4 y tal que el segmento *AP* es paralelo al eje Y, con *A*(-2/3,-1/4). Dibuja dicho segmento.

2.3Longitud de un segmento

En una gran variedad de problemas nos interesa encontrar la distancia entre dos objetos o cuerpos. Por ejemplo, conocer la distancia entre dos ciudades, o la distancia de la Tierra al Sol. Si podemos representar a los objetos mediante puntos en un plano cartesiano, encontrar la distancia entre ellos es encontrar la longitud del segmento que los une.

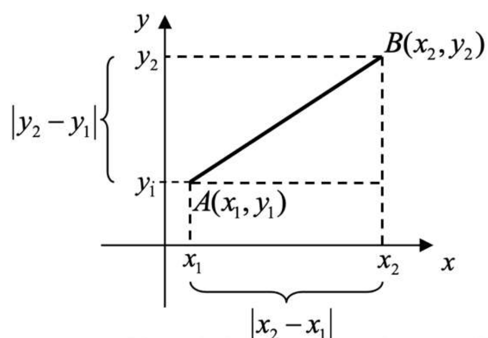
Calcular la longitud de un segmento horizontal en el plano se reduce a calcular la diferencia de las abscisas de los puntos extremos del mismo:



$$|3-(-3)|=6$$

El segmento $\overline{AB}=6$. De manera similar, encontrar la longitud de un segmento vertical es encontrar la diferencia de las ordenadas de sus puntos extremos.

Para el cálculo de la longitud de un segmento oblicuo, construimos un triángulo rectángulo a partir de sus extremos, haciendo del segmento su hipotenusa, y aplicamos el Teorema de Pitágoras:



Distancia de un segmento de recta AB

De esta manera, la longitud del segmento o distancia del punto A al punto B está dada por:

$$\overline{AB}=d(A,B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

En adelante, representaremos la distancia entre dos puntos *A* y *B* por *d*(*A,B*) y a la longitud del segmento que los une por $\overline{AB}$. Así, *d*(*A,B*) = $\overline{AB}$

EJEMPLO 1: Calcula la distancia del punto *A*(4,3)= $A(x_1,y_1)$ al punto *B*(-7,5)= $B(x_2,y_2)$.

Solución. Aplicando la fórmula anterior, tenemos**:**

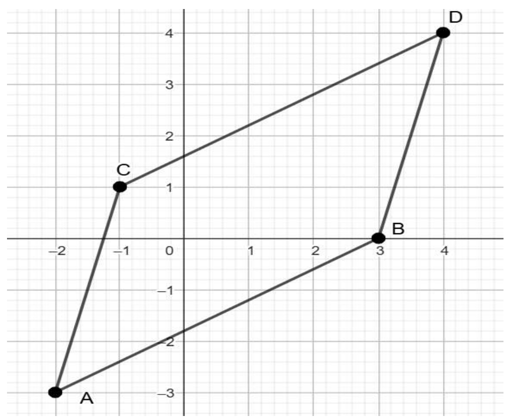
$$D(A,B)=\sqrt{(-7-4)^2+(5-3)^2}=\sqrt{(-11)^2+(-2)^2}=\sqrt{125}\ \therefore D(A,B)=5\sqrt{5}u$$

EJEMPLO 2: Encuentre la longitud del segmento cuyos extremos son $P\left(-\frac{1}{3},6\right) = P(x_1,y_1)\ y\ Q\left(0,\frac{1}{2}\right) = Q(x_2,y_2)$. No olvides multiplicar los dos signos menos: uno es de la fórmula y el otro es de la abscisa del punto P.

Solución. La longitud es:

$$d(P,Q) = \sqrt{\left(0+\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}-6\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{-11}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9}+\frac{121}{4}} = \sqrt{\frac{1093}{36}} = \frac{\sqrt{1093}}{6}$$

PROBLEMA RESUELTO 1. Comprueba que el paralelogramo dado a continuación, cuyos vértices son *A*(-2,-3), *B*(3,0), *C*(-1,1) y *D*(4,4), tiene sus lados paralelos del mismo tamaño.



Solución. Usando la fórmula de la distancia entre dos puntos, la longitud de los lados del paralelogramo son:

$$\overline{AC} = \sqrt{(-2-(-1))^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{17}$$

$$\overline{BD} = \sqrt{(3-4)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{17}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(-2-3)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{(-5)^2 + (-3)^2} = \sqrt{34}$$

$$\overline{CD} = \sqrt{(-1-4)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{(-5)^2 + (-3)^2} = \sqrt{34}$$

Efectivamente, los lados paralelos son de la misma longitud.

PROBLEMA RESUELTO 2. Determina si el triángulo cuyos vértices son *A*(1,1), *B*(−3,7) y *C*(5,-4) es equilátero.

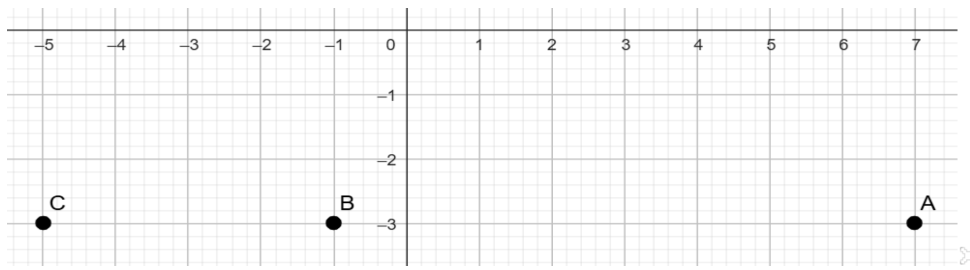
Solución.

$$\overline{AB} = \sqrt{(1-(-3))^2 + (1-7)^2} = \sqrt{(4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{52}u$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(-3-5)^2 + (7-(-4))^2} = \sqrt{(-8)^2 + (11)^2} = \sqrt{185}u$$

Por consiguiente, no se trata de un triángulo equilátero.

PROBLEMA RESUELTO 3. Empleando la fórmula de la distancia entre dos puntos, determina si los puntos *A*(7,-3), *B*(-1,-3) y *C*(-5,-3) son colineales (esto es, si los tres puntos están sobre una misma recta).



Solución. Tres puntos dados son colineales si existen dos parejas de ellos cuya suma de sus distancias es igual a la distancia de la tercera pareja. Veamos si esto se cumple para los puntos dados:

$$\overline{BC} = \sqrt{(-5+1)^2 + (-3+3)^2} = \sqrt{(-4)^2} = |-4| = 4$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(7+1)^2 + (-3+3)^2} = \sqrt{8^2} = |8| = 8$$

$$\overline{CA} = \sqrt{(7+5)^2 + (-3+3)^2} = \sqrt{(12)^2} = |12| = 12.$$

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{CA}$$

Evidentemente, la igualdad requerida para la colinealidad de los tres puntos se cumple.

PROBLEMAS PROPUESTOS.

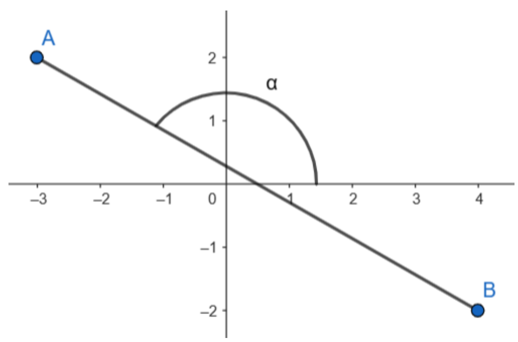
1. Verifica si los puntos (4,2), (-1,6) y (-3,-5) son los vértices de un triángulo isósceles.
2. Argumenta si los puntos (9,1), (6,2) y (1,7) son colineales.
3. Comprueba que los puntos (1,1), (4,1) y (2.5,3.6) son los vértices de un triángulo equilátero.
4. Encuentra el área del rectángulo formado por los puntos $(-4,1), (3,1), (3,-2)\ y\ (-4,-2)$.

2.4 Ángulo de inclinación de un segmento.

Intuitivamente hablando, podemos dibujar en el plano segmentos o rectas con distintas inclinaciones. Pero ¿cómo expresamos de manera formal cuál es la inclinación de un segmento o una recta?

El ángulo de inclinación de una recta en el plano es el menor ángulo mayor o igual a 0° que la recta forma con la parte positiva del eje X, tomado en sentido contrario a la rotación de las manecillas del reloj. A este ángulo lo llamaremos ángulo de inclinación de la recta.

La inclinación de un segmento en el plano es la inclinación de la recta que contiene este segmento.



Un segmento horizontal tiene ángulo de cero grados.

EJEMPLO 1: Calcula el ángulo de inclinación del segmento cuyos extremos son (−2.5,2.5) y (4,4).

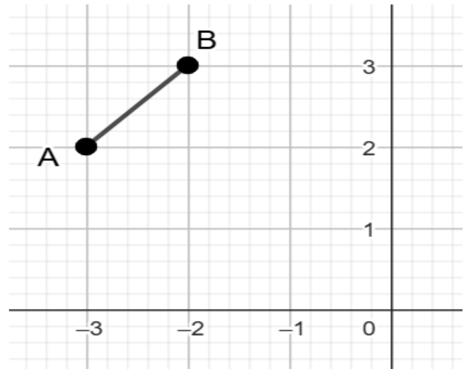
Solución. Apoyándonos con un transportador o una App, el ángulo de inclinación del segmento es 135°.

EJEMPLO 2: Calcula el ángulo de inclinación de un segmento que se encuentra sobre el eje Y.

Solución. Usando un transportador o una App, vemos que la inclinación del segmento es 90°.

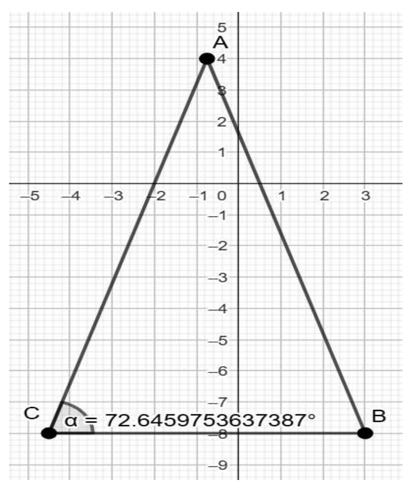
PROBLEMA RESUELTO 1. Dibuja un segmento que tenga una inclinación de 45° y $\sqrt{2}$ de longitud y tiene como punto extremo $P(-3,2)$.

Solución. Recordando que en un triángulo rectángulo isósceles los ángulos distintos al de 90° miden 45°cada uno y si sus catetos miden 1, entonces su hipotenusa mide $\sqrt{2}$, el segmento puede tiene como el otro extremo a Q(-2,3).



PROBLEMA RESUELTO 2. Traza un triángulo isósceles que tenga como vértices los puntos (−0.75,4) y (3,-8) y comprueba que tiene dos ángulos internos iguales.

Solución. Podemos considerar el segmento que une los puntos dados como uno de los lados del triángulo y elegir el tercer vértice C, de tal manera que el segmento definido por B(3,-8) y C, sea la base de nuestro triángulo. Utilizando como eje de simetría del triángulo la recta perpendicular al eje X que pasa por x=−0.75 y por el vértice A(-0.75,4), tenemos que el tercer punto es (−4.5,-8) porque $-0.75 + 4 = -4.75$ y la ordenada tiene que ser la misma que la del punto B porque los puntos son simétricos. Los ángulos iguales son los que corresponden a los vértices *B* y *C* señalados en la figura:



Este tema aparecerá nuevamente en la unidad 3 de este trabajo.

PROBLEMAS PROPUESTOS.

1. Encuentra el ángulo de inclinación del segmento que va del punto (5,-1) al punto (1,1)
2. Calcula el ángulo de inclinación del segmento con extremos (1,1) y (2.5,3.6).
3. Traza un segmento de recta que tenga un ángulo de inclinación de 135°, un extremo en (0,5) y el otro extremo sobre el eje Y.

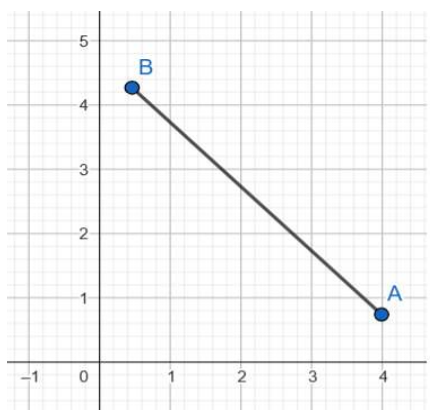
2.5. Localización de un segmento dados un punto extremo, una longitud y un ángulo de inclinación.

Supón que te piden encontrar un segmento del que se conoce uno de sus puntos extremos, pero no el otro, ¿qué otra información necesitas para ubicarlo?

Si te dan también su longitud, ¿será suficiente para reconocerlo? o ¿requieres más información? En otras palabras, ¿sólo hay un segmento que tenga el extremo y longitud que te dan, o hay más de un segmento que tengan el mismo extremo y misma longitud? Por otro lado, dados una inclinación y un punto inicial, ¿existe más de un segmento que puedas construir con estas dos cualidades? Si, además de su extremo y longitud, te proporcionan su inclinación, ¿sabrás de qué segmento se trata? Revisa la figura que está al principio de esta sección. Efectivamente, sólo hay un segmento que tiene exactamente estas tres características. Cualquier otro segmento tendrá diferente al menos una de estas características.

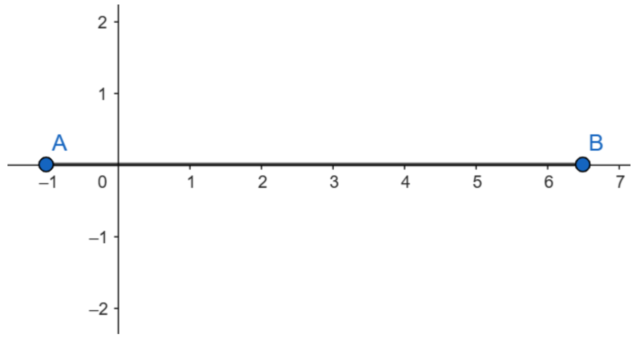
EJEMPLO 1: Dibuja el segmento que tiene A(4, ¾) como un extremo, 5 cm de largo y un ángulo de inclinación de 135º y encuentra las coordenadas del otro extremo. Auxiliate de un transportador y una regla para su trazado, también puedes usar ua App.

Solución. Las coordenadas del otro extremo son $\left(\frac{47}{100}, \frac{107}{24}\right)$.



EJEMPLO 2: Dibuja el segmento que tiene como un extremo a (-1,0) ángulo de inclinación 0º y longitud 7.5 cm.

Solución. En esta ocasión, es más fácil dibujar el segmento debido a que su ángulo de inclinación es de 0º y, por consiguiente, el otro extremo se localiza también sobre el eje X, cuyas coordenadas son (6.5,0).



PROBLEMAS PROPUESTOS.

1. Dibuja el segmento que tiene como un extremo el punto (1,-4), ángulo de inclinación de 90º y longitud 3.2 unidades).
2. Localiza el otro extremo del segmento que tiene como un extremo (3,0), ángulo de inclinación 135º y longitud $\sqrt{18}$.
3. Encuentra el otro extremo del segmento que tiene como un extremo a $(-1.4{,}2.5)$, un ángulo de inclinación de 150º y una longitud de 3 unidades.

2.6. Pendiente de un segmento.

Podemos indicar la inclinación de una recta o segmento utilizando el concepto de pendiente que se puede relacionar con la pendiente de una rampa para personas en silla de ruedas o la pendiente de una montaña que se quiere escalar.

La *pendiente* de una recta o segmento de recta es la tangente del ángulo de inclinación α, donde m denota la pendiente:

$$m = tan\alpha$$

Las rectas verticales y las rectas horizotales tienen pendientes especiales y se verán con más detalle en la unidad 3 de este trabajo.

EJEMPLO 1**:** Encuentra la pendiente de un segmento de recta que tiene un ángulo de inclinación de 75°.

Solución. Con ayuda de una calculadora, obtenemos $m = tan(75°) = 3.73.$

Si, por el contrario, nos dan el valor de la pendiente para calcular su ángulo de inclinación, aplicamos la función inversa de la tangente a dicho valor. Esta función inversa se llama arcotangente y se denota como *arctan* o como *tan*$^{-1}$*(m).* Si sabemos que la pendiente $m = 3.73$, encontremos su ángulo de inclinación:

$$m = tan\alpha \quad \Longrightarrow \quad 3.73 = tan\alpha \quad \Longrightarrow \quad tan^{-1}(3.73) = 75^{o}$$

EJEMPLO 2: Halla el ángulo de inclinación de la recta que tiene pendiente $m = -5$.

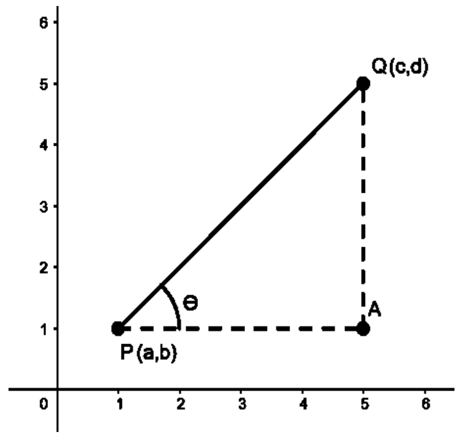
Solución. Utilizando una calculadora, tenemos: $m = tan\theta \quad \Longrightarrow \quad -5 = tan\theta \quad \Longrightarrow$ $tan^{-1}(-5) = -78.69^{o}$. La medida del ángulo es negativa y la definición que dimos de ángulo de inclinación es que es el menor ángulo mayor o igual a cero grados que la recta forma con el eje X en sentido contrario a las manecillas del reloj. Para encontrar el ángulo con un valor positivo, hacemos lo siguiente:

$\alpha = 180^0 - 78.69^0 = 101.31^0$

El ángulo de inclinación de la recta con pendiente $m = -5$ es $\alpha = 101.31^0$.

Existe otra manera de calcular la inclinación o pendiente de un segmento en el plano cartesiano conociendo sus extremos. Supongamos que tenemos un segmento con extremos *P(a,b)* y *Q(c,d)*, y con ángulo de inclinación α.

Dibujemos un triángulo rectángulo cuya hipotenusa sea el segmento $\overline{PQ}$:



Entonces,

$$\mathrm{m} = \tan\Theta = \frac{cateto\ opuesto}{catetos\ adyacente} = \frac{d-b}{c-a} = \frac{b-d}{a-c}$$

EJEMPLO 3**:** Encuentra la pendiente del segmento con extremos (3.7,5.2) y (-1.5,2).

Solución: De acuerdo con la fórmula:

$$m = \frac{d-b}{c-a} = \frac{5.2-2}{3.7+1.5} = \frac{3.2}{5.2}$$

PROBLEMA RESUELTO 1**.** Determina si los puntos *A*(-7,1), *B*(3,4) y *C*(-5,-2) son colineales.

Solución. Para que los tres puntos sean colineales, los segmentos *AB y BC* deben tener la misma pendiente. Veamos si esto es así:

El segmento *AB* tiene pendiente

$$m = \frac{4-1}{3+7} = \frac{3}{10}$$

y el segmento *BC* tiene pendiente

$$m = \frac{-2-4}{-5-3} = \frac{-6}{-8} = \frac{3}{4}$$

Por lo tanto, los puntos no son colineales.

PROBLEMA RESUELTO 2.

Encuentra el ángulo de inclinación del segmento que tiene por extremos P$\left(-2, -\frac{11}{5}\right) = (a, b)\ y\ Q(4,2) = (c, d)$.

Solución. Los datos que tenemos son únicamente los puntos estremos del segmento y conocemos:

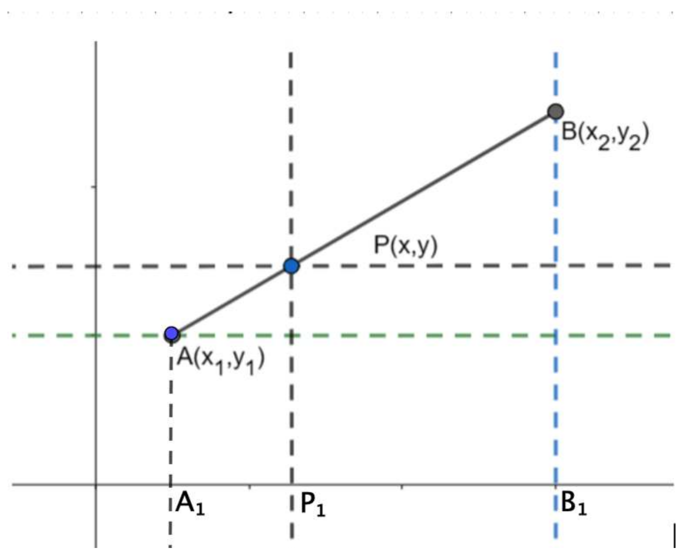
$m = \frac{d-b}{c-a}$, sustituimos para encontrar el valor de la pendiente $m = \frac{2-\left(-\frac{11}{5}\right)}{4-(-2)} = \frac{\frac{21}{5}}{6} = \frac{21}{30} = \frac{7}{10}$. Entonces, sustituimos en $m = tan\alpha \implies \frac{7}{10} = tan\alpha \implies tan^{-1}\left(\frac{7}{10}\right) = 34.99^{o}$. Por lo tanto, el ángulo de inclinación de del segmento $\overline{PQ} = 34.99^{o}$.

PROBLEMAS PROPUESTOS.

1. Si un segmento tiene pendiente 1, ¿cuál es su ángulo de inclinación?
2. Calcula la pendiente y el ángulo de inclinación del segmento definido por los puntos (-2,-5) y (3,7).
3. Utiliza el concepto de pendiente para comprobar que los puntos (-4,-2), (-2,1), (5,3) y (3,0) son los vértices de un paralelogramo.
4. Calcula las pendientes de los lados del triángulo definido por los puntos (1,1), (4,1) y (2.5,3.6).

2.7 Razón en que un segmento es dividido por uno de sus puntos.

Dado un segmento, encontraremos las coordenadas de un punto en él que lo divide en una razón dada. Supongamos que los extremos del segmento son $A(x_1,y_1)$ y $B(x_2,y_2)$, y el punto buscado es $P(x,y)$. Tracemos la recta horizontal y vertical que pasan por el punto *P*, la recta $y=y_1$ y la recta $x=x_2$, como se muestra en la figura:



Por geometría elemental, sabemos que:

$$r = \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1B_1}}$$

Sustituyendo las coordenadas:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = r$$

Y al despejar *x*, se obtiene:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}\ con\, r \neq -1$$

Analogamente para la coordenada y, se tiene:

$\frac{y-y_1}{y_2-y} = r$. Despejando la coordenada y, resulta: $y = \frac{y_1+ry_2}{1+r}\ con\, r \neq -1$

En conclusión, las coordenadas del punto que divide a cualquier segmento en una razón dada está dado por:

$$P\left(\frac{x_1 + rx_2}{1 + r}, \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}\right)\ con\, r \neq -1$$

En particular, si queremos que $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$ tengan la misma longitud, la razón entre sus longitudes debe ser la misma e igual a 1, $r = 1$. En este caso, las coordenadas de *P* satisfacen las ecuaciones:

$$x = \frac{x_1+x_2}{2},\ y = \frac{y_1+y_2}{2}$$

Así, tenemos que, el punto PM es el punto medio del segmento y sus coordenadas son: $PM\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

EJEMPLO 1. Encuentra las coordenadas de *P(x,y),* que divide al segmento con extremos (2,1) y (7,6) , en la razón $r = \frac{2}{3}$.

Solución. Sustituyendo las coordenadas de los puntos extremos en las fórmulas anteriores, se tiene:

$$x = \frac{2 + \frac{2}{3}(7)}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{\frac{20}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{20}{5} = 4$$

$$y = \frac{1 + \frac{2}{3}(6)}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{5}{\frac{5}{3}} = \frac{15}{5} = 3$$

Por lo tanto, las coordenadas del punto $P(4{,}3)$ dividen al segmento dado en la razón $r = \frac{2}{3}$.

EJEMPLO 2. Si *P(-3,7)* divide por la mitad al segmento cuyos extremos son *A(x,8) y B(0,y),* encuentra los valores de la abscisa y la ordenada de cada punto.

Solución: Como *P* es el punto medio del segmento, se deben satisfacer las ecuaciones:

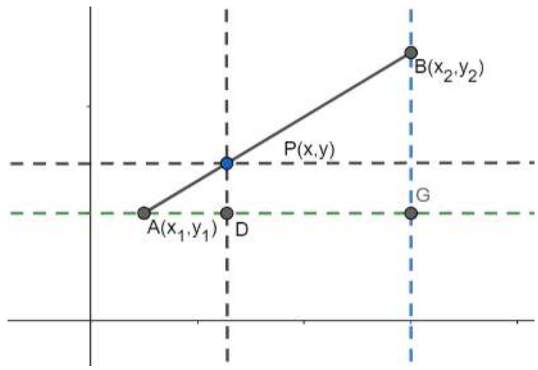
$$PM(-3{,}7) = PM\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$$-3 = \frac{x + 0}{2} \quad , \quad 7 = \frac{8 + y}{2}$$

Despejando ambas variables: $x = -6 \quad , \quad y = 6$.

PROBLEMA RESUELTO 1**.** Dado un segmento con extremos $A(x_1,y_1)$ y $B(x_2,y_2)$, encuentra las coordenadas del punto *P(x,y)* en él, tal que los segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{AB}$ estén en la razón r.

Solución: Fijándonos en la figura siguiente y aplicando el teorema de Tales, se deduce que los triángulos ∆*APD* y ∆*ABG* son semejantes.



En consecuencia, se cumple la relación:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AD}}{AG} = r$$

o sea,

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = r$$

Si despejamos *x* de esta ecuación, se obtiene:

$$x = x_1 + r(x_2 - x_1)$$

También se tiene:

$$\frac{\overline{PD}}{BG} = r$$

Es decir,

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = r$$

De donde resulta:

$$y = y_1 + r(y_2 - y_1)$$

Esto implica otra manera de encontrar las coordenadas del punto que divide al segmento en una razón dada.

PROBLEMA RESUELTO 2. Los puntos medios de los lados de un triángulo son (2,5), (4,2) y (1,1). Halla las coordenadas de sus vértices.

Solución. Denotemos a los vértices y sus coordenadas como V_1=(a,b), V_2=(c,d) y V_3=(e,f). Empleando la fórmula para localizar el punto medio de un segmento dado, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$2 = \frac{\mathrm{c} + \mathrm{e}}{2}, \qquad 5 = \frac{\mathrm{d} + \mathrm{f}}{2}$$

$$4=\frac{a+e}{2},\qquad 2=\frac{b+f}{2}$$

$$1=\frac{a+c}{2},\qquad 1=\frac{b+d}{2}$$

que son equivalentes a

$$4=c+e,\qquad 10=d+f$$

$$8=a+e,\qquad 4=b+f$$

$$2=a+c,\qquad 2=b+d$$

Entonces, tenemos un sistema de ecuaciones:

$$a=8-e,\qquad b=4-f$$

$$c=2-a,\qquad d=2-b$$

Así que,

$$c=2-(8-e)=-6+e$$

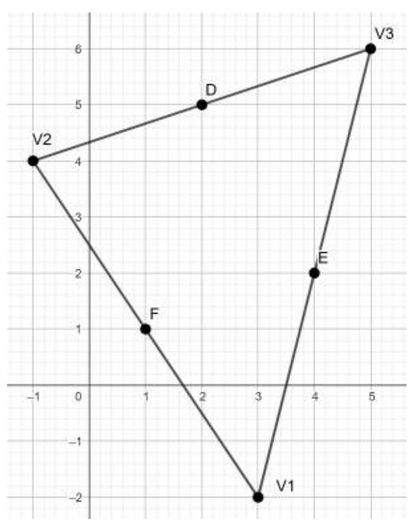
$$d=2-(4-f)=-2+f$$

Entonces,

$$c-e=-6,\qquad c+e=4$$

$$d-f=-2,\qquad d+f=10$$

Sumando las respectivas parejas de ecuaciones, resultan $c=-1,\ d=4$, entonces $e=5,\ f=6,\ a=3, b=-2$. Por lo tanto, V_1=(3,2), V_2=(-1,4) y V_3=(5,6) son los vértices del triángulo buscado.



PROBLEMAS PROPUESTOS.

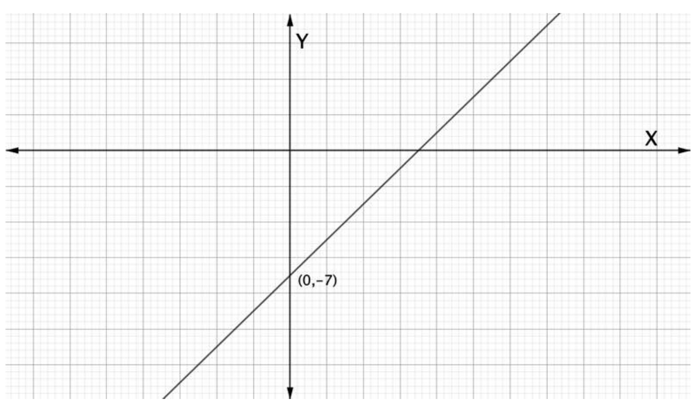
1. Encuentra las coordenadas del punto medio del segmento definido por (-5,2) y (−3,−4).
2. Encuentra las coordenadas de los puntos que dividen en tres partes iguales al segmento dado por los puntos (-6,-4) y (8,2).
3. Determina las coordenadas de los vértices del triángulo que tiene como puntos medios de sus lados (-2,2), (-4,-3) y (5,-1).

2.8 Lugares geométricos.

Un lugar geométrico es el conjunto de todos los puntos que cumplen una condición y está dada por una ecuación. Su importancia se halla cuando se quiere estudiar el comportamiento de ciertas situaciones que podrían estar vinculadas con aspectos de la vida humana y el lugar geométrico nos porporciona un aspecto visual y algebraico para su estudio. En las unidades 4 y 5 de esta guía se usará, otra vez, el siguiente conocimiento.

EJEMPLO 1. Encuentre el lugar geométrico formado por el conjunto de puntos P(x,y), tales que su abscisa excede en 7 unidades a su ordenada.

Solución. Con la condición dada, $y+7=x$, esto implica que, el lugar geométrico que cumple con la condición dada anterior es $y=x-7$, lo que conocemos como la ecuación de una recta cuya gráfica se muestra a continucción.



EJEMPLO 2. Encuentra todos los puntos *P*(x,y) en el plano que equidistan o que están a igual distancia del punto *A*(−2.5, −3.7) en 5 unidades.

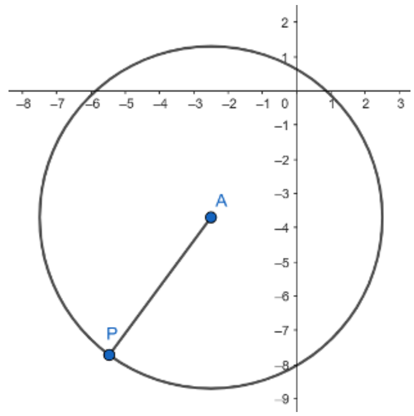
Solución. De acuerdo con la fórmula de la distancia entre dos puntos, los puntos deben cumplir la condición:

$$\sqrt{(x+2.5)^2+(y+3.7)^2}=5,$$

o lo que es lo mismo,

$$(x+2.5)^2+(y+3.7)^2=5^2.$$

Esto se conoce como una circunferencia de radio 5 y centro (-2.5, -3.7), lo que se desarrollará con más detalle en la unidad 5.



EJEMPLO 3. Localiza todos los puntos *P*(x,y) en el plano que equidistan de los puntos *A*(3,3) y *B*(-8,-9).

Solución. Como queremos que el punto *P* tenga la misma distancia de *A* que de *B*, se debe satisfacer la ecuación:

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(x+8)^2+(y+9)^2},$$

es decir,

$$(x-3)^2+(y-3)^2=(x+8)^2+(y+9)^2,$$

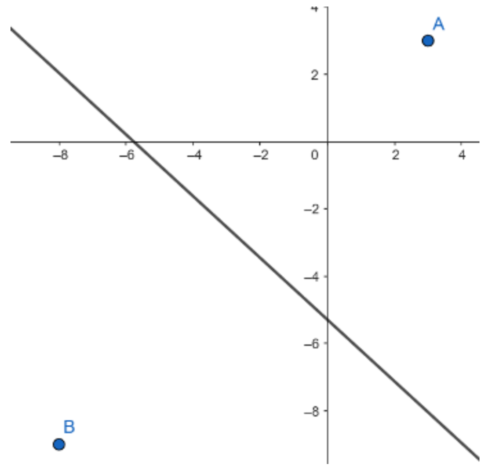
o sea,

$$x^2-6x+9+y^2-6y+9=x^2+16x+64+y^2+18y+81.$$

Simplificando la ecuación, y agrupando los términos de la variable *x* por un lado y los términos de la variable *y* por el otro lado, se obtiene:

$$\mathrm{y}=-\frac{11}{12}\mathrm{x}-\frac{127}{24}.$$

Todos los puntos de $\mathrm{y}=-\frac{11}{12}\mathrm{x}-\frac{127}{24}$ están a igual distancia de los puntos A y B a la vez. La recta se llama la mediatriz del segmento $\overline{\mathrm{AB}}$.



PROBLEMA RESUELTO 1**.** Haya la expresión algebraica de todos los puntos *P*(x,y) del plano cuya distancia al punto *A*(0,3.5) es la misma que a la recta y=1.

Solución. Todos los puntos que están sobre la recta y=1, son de la forma P(x,1). De esta manera, la distancia de A a P es:

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-3.5)^2}=\sqrt{(y-1)^2}.$$

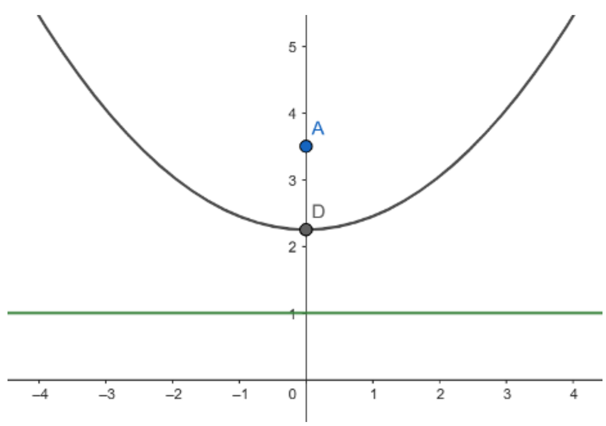
Elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad, se obtiene

$$(x-0)^2+(y-3.5)^2=(y-1)^2,$$

Desarrollando los binomios,

$$x^2+y^2-7y+12.25=y^2-2y+1,$$

Simplificando la expresión, $\frac{1}{5}x^2+2.25=y$, o bien $\frac{1}{5}x^2+\frac{9}{4}=y,$ es la ecuación que satisface la condición para el lugar geométrico que es una parábola, la cual se estudiará con más detalle en la unidad 4.



EJERCICIO RESUELTO 2**.** Encuentra la ecuación que caracteriza a todos los puntos *P(x,y)* tales que la suma de sus distancias a los puntos *A(-2,0)* y *B(2,0)* es 5 unidades. Traza el lugar geométrico de los puntos en cuestión.

Solución. Escribimos la suma de las distancias,

$$\sqrt{(x+2)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2}=5,$$

el segundo radical lo pasamos a lado derecho de la igualdad,

$$\sqrt{(x+2)^2+(y-0)^2}=5-\sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2},$$

elevamos al cuadrado ambos miembros de la igualdad,

$$(x+2)^2+(y)^2=25-10\sqrt{(x-2)^2+(y)^2}+(x-2)^2+(y)^2,$$

desarrollamos los binomios y simplificamos la expresión,

$$8x-25=-10\sqrt{(x-2)^2+(y)^2},$$

elevamos al cuadrado nuevamente ambos miembros de la igualdad,

$$64x^2-400x+625=100[(x-2)^2+y^2],$$

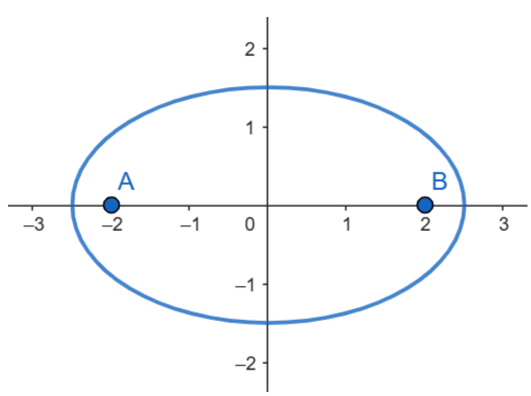
desarrollando la expresión del lado izquierdo de la igualdad y simplificamos,

$$225=(100-64)\mathrm{x}^2+100\mathrm{y}^2.$$

Reescribimos la ecuación,

$$1=\frac{\mathrm{x}^2}{\frac{225}{36}}+\frac{\mathrm{y}^2}{\frac{225}{100}}.$$

El lugar geométrico es una elipse y se estudiará con más detalle en la unidad 5.



PROBLEMAS PROPUESTOS.

1. Determina el lugar geométrico de todos los puntos *P*(x,y) que distan 4 unidades del punto (-7,-3).
2. Si el punto *A* es (-2,5), determina el lugar geométrico que representa a todos los puntos *P*(x,y) tal que la pendiente del segmento $\overline{AP}$ es $\frac{1}{4}$.
3. Encuentra el lugar geométrico que describe a todos los puntos *P*(x,y) que distan del punto (9,-2) lo mismo que del punto (-3,5).
4. Encuentra el lugar geométrico de todos los puntos *P*(x,y) del plano cuya distancia al punto *A*(4,2) es la misma que a la recta x=5.

AUTOEVALUACIÓN

1. La longitud de un segmento $\overline{\mathrm{AB}}$ es de $\sqrt{82}$ unidades y las coordenadas de uno de sus extremos es A(-5,2). ¿Cuáles son las coordenadas del otro extremo B, si este se encuentra situado sobre el eje de las ordenadas?

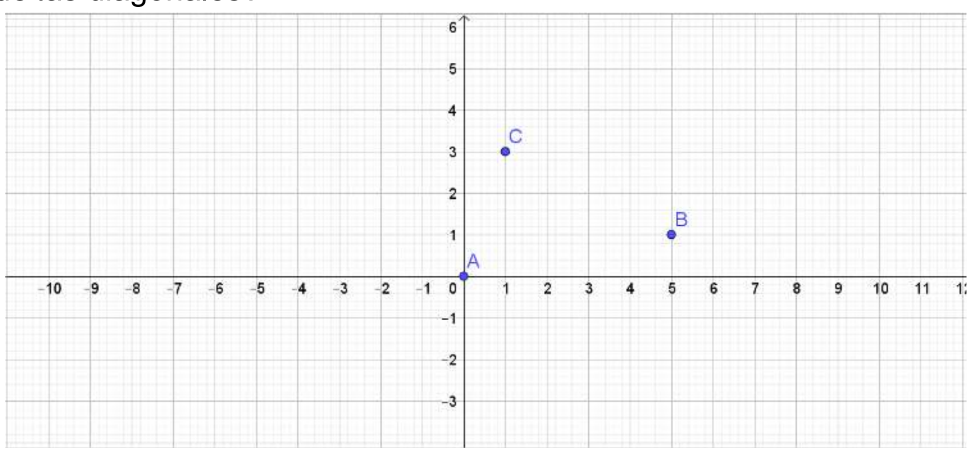
A) $(2 \pm \sqrt{57}, 0)$

B) $(0, 2 \pm \sqrt{57})$

C) $(\pm 2 + \sqrt{57}, 0)$

D) $(0, 9)$

2. Los puntos que se muestran en la figura son vértices de un paralelogramo, el cuarto vértice tiene coordenadas (6,4), ¿cuál es el punto de intersección de las diagonales?



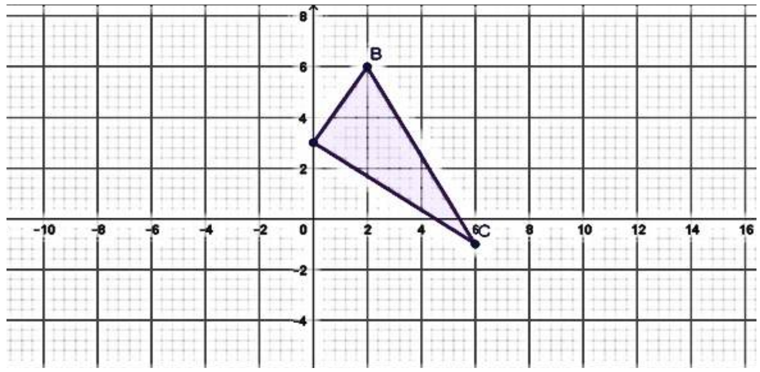
A) (3,2)

B) (2,3)

C) (2,-1)

D) $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

3. Comprobar que el triángulo ABC que se muestra en la figura es un triángulo rectángulo, usando el concepto de pendiente y calcular el área A del triángulo.



A) El triángulo es rectángulo porque las pendientes de sus tres lados son diferentes.
A≈ $18.88\ u^2$

B) El triángulo es rectángulo porque las pendientes de dos de sus lados tienen signo contrario. A= 13 u^2.

C) El triángulo es rectángulo porque las longitudes de sus lados son diferentes.
A ≈ 18.88 u^2

D) El triángulo es rectángulo porque las pendientes de dos de sus lados son recíprocas y de signo contrario. A= 13 u^2.

4. Determine la medida del ángulo agudo formado por las rectas: L_1: x+3y=0 y L_2: x-y+5=0.

A) 60.40°

B) 63.43°

C) 60.40°

D) 18.43°

5. Si los puntos A(-4, 2) y B(4, 6) son los extremos del segmento $\overline{AB}$, la razón $r = \frac{BP}{PA}$ en que el punto P(-2, 3) divide al segmento es:

A) 3
B) $\frac{1}{2}$
C) $\frac{3}{2}$
D) $\frac{1}{3}$

6. Determinar el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los puntos (-2,0) y (0,2)

A) x=y

B) -x-y=0

C) –x=y

D) x-y=0

7. Calcular el ángulo de inclinación αde la recta que pasa por los puntos A(2,-1), B(-4,7).

A) $\alpha \approx -53°7'5''$

B) $\alpha \approx 126°52'12''$

C) $\alpha \approx -\frac{4}{3}$

D) $\alpha \approx 53°7'5''$

8. Determinar el lugar geométrico de los puntos que equidistan del punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyas coordenadas son: A(4,-2), B(8,6) y C(10,4).

A) $(x+8)^2-(y-6)^2=20$

B) $(x-8)^2-(y-6)^2=\sqrt{20}$

C) $(x-8)+(y-6)=20$

D) $(x-8)^2+(y-6)^2=20$

9. Determinar qué tipo de triángulo ce el triángulo ABC si sus vértices son A(3,5), B(5,-3) y (8,2).

A) Isósceles

B) Escaleno

C) Equilátero

D) Obtusángulo

10. Uno de los puntos de trisección de la mediana bajada desde C del triángulo cuyos vértices son A(-5,-2), B(3,0) y C(0,-5) es

A) (1,1)

B) (-1,-1)

C) $\left(-\frac{1}{3},-\frac{11}{3}\right)$

D) $\left(\frac{1}{3},\frac{11}{3}\right)$

SOLUCIONES A LA AUTOEVALUACIÓN

PREGUNTA	RESPUESTA
1	B
2	A
3	D
4	B
5	A
6	C
7	B
8	D
9	A
10	C

REFERENCIAS

- Kline, M., Martínez, M., Tarrés, J., Casal, A., & Hernández, J. (1999). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días, 1*. Educación para todos.
- Lehmann, C. (2008). *Geometría analítica*. Editorial Limusa.
- de Oteyza, E., Lam, E., Hernández, C., Carrillo, A. y Ramírez, A. (2005). *Geometría Analítica*. Pearson Education.

UNIDAD 3

LA RECTA Y SU ECUACIÓN CARTESIANA

Propósitos. El estudiantado será capaz de obtener la ecuación cartesiana de la recta, dados diversos elementos definitorios. Resolverá problemas geométricos en diversos contextos, a fin de que se avance en la comprensión del método analítico.

Al finalizar esta Unidad pretendemos que logres los aprendizajes siguientes:

- Describe a la recta como un lugar geométrico, identificando los elementos que la definen.
- Entiende a la pendiente de una recta, como un invariante.
- Obtiene la ecuación de una recta, dadas dos condiciones.
- Determina el ángulo que se forma cuando dos rectas se cortan, en términos de sus pendientes.
- Determina cuando dos rectas son paralelas, perpendiculares o ninguna de las dos, a partir de sus ecuaciones.
- Dada la ecuación de una recta el alumno es capaz de encontrar las ecuaciones de rectas paralelas y/o perpendiculares a ella.
- Identifica y transita en las diferentes formas la ecuación de la recta (ordinaria o canónica, general y simétrica).
- Resuelve problemas de corte euclidiano usando geometría analítica.

PRESENTACIÓN

Las rectas son un elemento que se presenta por todas partes a tu alrededor, así que, vale la pena conocer cómo funcionan y qué propiedades tienen.

En la alcadía Coyoacán de la Ciudad de México, es muy común la caída de árboles, ¿cuál será el ángulo de inclinación necesario para que un árbol pueda caerse? Y con esto, prevenir que algún humano sea lastimado o algún objeto dañado.

Figura 45

Aquí se aprecia el peligro para el edificio en caso de caerse el árbol

Fuente de la fotografía: http://centro.paot.org.mx/documentos/sma/manual_tecnico_arboles.pdf

Por otro lado, la Comisión Nacional Forestal de México expresa que “la determinación de la pendiente es de gran relevancia para la planeación y construcción de obras de conservación de suelos y estimación de escurrimientos superficiales. La pendiente es el grado de inclinación que presenta el terreno”. También, expresa que, “las dimenciones de una presa de piedra acomodada dependen de la pendiente o grado de inclinación que presente la cárcava, así como la profundidad y cantidad de escurrimientos superficiales”.

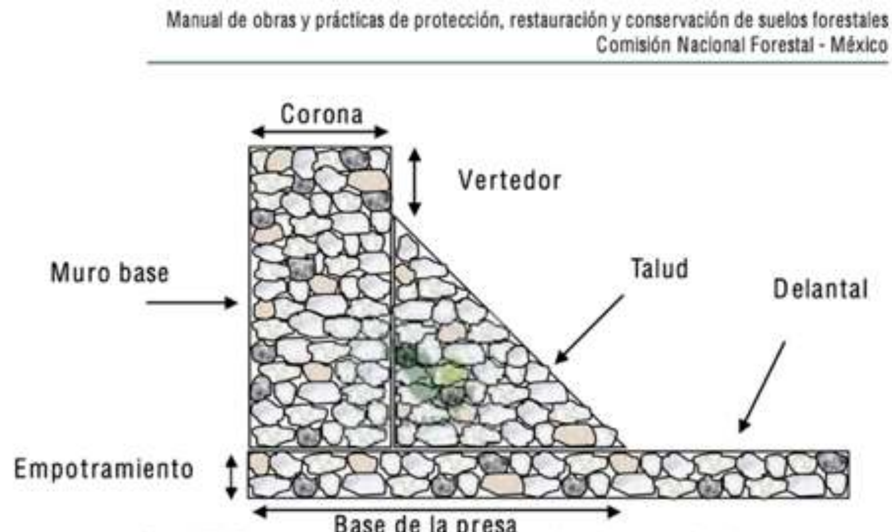
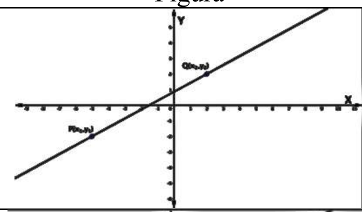
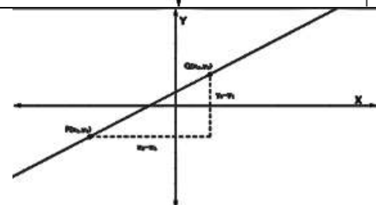
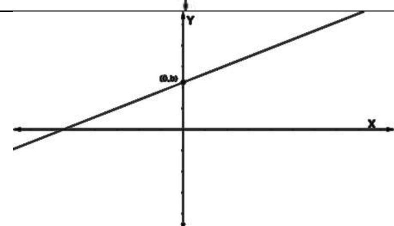
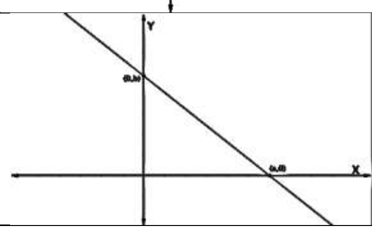
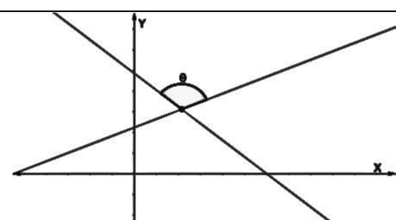
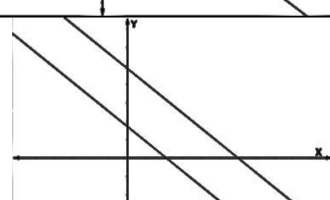
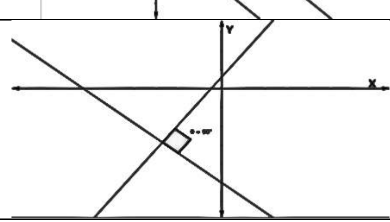
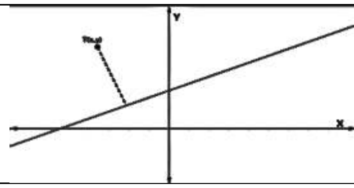


Figura 51. Partes que constituyen a una presa de piedra acomodada

CONCEPTOS CLAVE

Subtema	Figura	Expresión analítica	parámetros
Ecuación de la recta dados dos puntos.		$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$	Los puntos: $P(x_1, y_1)\ y\ Q(x_2, y_2)$
Ecuación de la recta dados un punto y su pendiente.		$y - y_1 = m(x - x_1)$	La pendiente m y el punto $P(x_1, y_1)$
Ecuación de la recta dados su pendiente y su ordenada al origen.		$y = mx + b$	El valor de la pendiente m y el valor de la ordenada al origen b
Ecuación de la recta en su forma simétrica.		$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$	Los puntos de la forma: $(a, 0)\ y\ (0, b)$
Ecuación de la recta en su forma general.		$Ax + By + C = 0$	Los valores de A, B y C
Ángulo entre dos rectas.		$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$	La pendiente de cada recta: $m_1\ \ y\ \ m_2$
Rectas paralelas.		$m_1 = m_2$	La pendiente de cada recta: $m_1\ \ y\ \ m_2$
Rectas perpendiculares.		$m_1 = -\frac{1}{m_2}$	La pendiente de cada recta: $m_1\ \ y\ \ m_2$

Distancia de una recta a un punto.		$d = \dfrac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$	El punto $P(x_1, y_1)$ y la ecuación de la recta $Ax + By + C = 0$

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Iniciaremos el estudio de esta unidad haciendo una lista de algunos conocimientos previos que es conveniente que tú conozcas para una mejor comprensión del estudio de las rectas en la Geometría analítica.

Identificación de un punto en el plano en su forma analítica, el cual será denotado como $P(x, y)$.

La gráfica de una recta en el plano cartesiano.

Resolución de ecuaciones.

Despeje de incógnitas.

Rectas paralelas y perpendiculares. Partiremos de la noción que tienes de matemáticas II de la Geometría Euclidiana.

Métodos para resolver sistemas de ecuaciones (sustitución, suma y resta o igualación).

El significado de una mediana, mediatriz, altura y bisectriz. Partimos de las definiciones vistas en matemáticas II, las cuales se verán en esta unidad en su forma analítica.

3.La recta en el plano cartesiano

3.1 Formas de la ecuación de una recta

Un parámetro importante de la recta es la pendiente, esta nos indica la inclinación de la recta hacia la derecha o hacia la izquierda, si el valor de la pendiente es positivo o negativo, respectivamente.

La definición de **pendiente** es la siguiente:

$$m = \tan \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

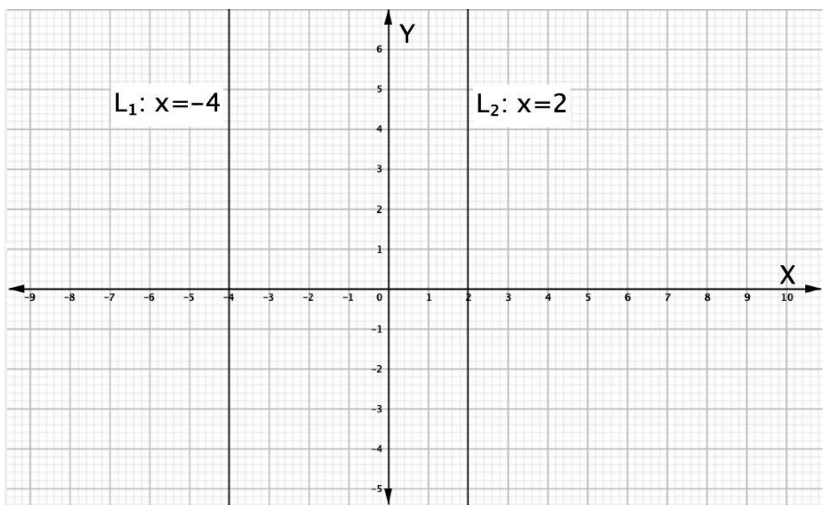
Donde m denota el valor de la pendiente (o la inclinación) de la recta que pasa por los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$. Secciones más adelante, se recordará el significado de α. La tangente de este ángulo será igual a la pendiente.

Recordemos que la “igualdad” tiene la propiedad transitiva, de la igualdad anterior, por el momento, sólo vamos a usar la siguiente parte:

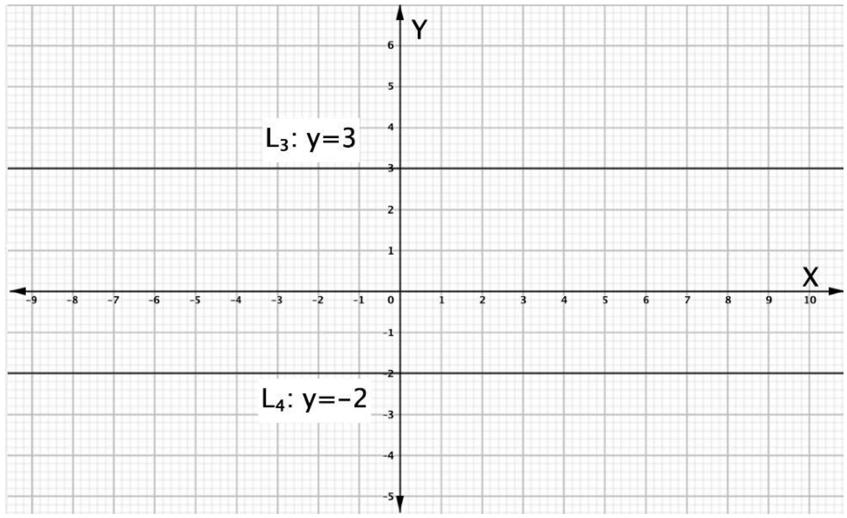
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Mencionaremos dos primeras formas simples de la ecuación de una recta, son dos casos particulares:

Primer caso particular: Se trata de las rectas verticales y paralelas al eje Y, las cuales, siempre tendrán por ecuación $x = a$ donde a puede ser cualquier número real, la pendiente de estas rectas está indeterminada (¿por qué? Tome dos puntos cualesquiera sobre la recta y verifique qué pasa con el valor de la pendiente, recuerde qué pasa si se divide un número distinto de cero entre cero, el resultado está indefinido). A continuación, se muestran algunos ejemplos en la figura siguiente: La recta L_1 tiene por ecuación $x = -4$ porque cruza al eje X en ese valor y la recta L_2 tiene por ecuación $x = 2$ porque cruza al eje X en ese valor.



Segundo caso particular: Se trata de las rectas horizontales y paralelas al eje X, las cuales, siempre tendrán por ecuación $y = b$ donde b puede ser cualquier número real, la pendiente de estas rectas tiene el valor de cero (¿por qué? Tome dos puntos cualesquiera sobre la recta y verifique qué pasa con el valor de la pendiente, recuerde qué pasa si el numerador de una fracción es igual a cero, el resultado es cero). A continuación, se muestran algunos ejemplos en la figura siguiente: La recta L_3 tiene la ecuación $y = 3$ porque cruza al eje Y en ese valor, y la recta L_4 tiene la ecuación $y = -2$ porque cruza al eje Y en ese valor.



A partir de ahora, las formas de la ecuación de la recta que veamos, serán de rectas oblicuas. Conocerás diversas formas de la ecuación de una recta y aprenderás a pasar de una forma a otra.

Primera forma de la ecuación de la recta:

Ecuación de la recta cuando se conocen dos puntos de ella. Consideremos los puntos conocidos $P(x_1, y_1)\ y\ Q(x_2, y_2)$ con $x_1 \neq x_2$ (¿por qué $x_1 \neq x_2$?) y consideremos un punto cualquiera de la recta $R(x, y)$.

$$\boxed{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)}$$

A esta ecuación se le llama **forma cuando se conocen dos puntos** y para usarla solo necesitamos las coordenadas de dos puntos en el plano cartesiano.

EJEMPLO 1: Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P(4, -1)\ y\ Q(8{,}3)$.

Supongamos: $P(4, -1) = (x_1, y_1)$ y $Q(8{,}3) = (x_2, y_2)$

Sustituyendo en la forma de la ecuación anterior:

$$y - (-1) = \frac{3 - (-1)}{8 - 4}(x - 4)$$

Hasta aquí, tenemos la forma cuando se conocen dos puntos, únicamente sustituyendo valores. Si continuamos desarrollando:

$$y + 1 = \frac{4}{4}(x - 4)$$

$$y + 1 = (x - 4)$$

EJEMPLO 2: Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos (7,−2) y (−2,−1).

Supongamos que: $R(7,-2) = (x_1, y_1)$ y $S(-2,-1) = (x_2, y_2)$

Sustituyendo en:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - (-2) = \frac{-1 - (-2)}{-2 - 7}(x - 7)$$

$$y + 2 = \frac{1}{-9}(x - 7)$$

Esta es la ecuación de la recta que pasa por dos puntos.

Segunda forma de la ecuación de la recta:

Consideremos una recta no vertical (¿por qué?), consideremos un punto conocido de ella, supongamos $P(x_1, y_1)$ (con subíndice 1 denotando el punto cuyas coordenadas conocemos) y su pendiente m. Si $Q(x, y)$ (sin subíndice) es cualquier otro punto de la recta, podemos hacer lo siguiente:

Encontremos la pendiente de la recta que pasa por los puntos $P\ y\ Q$ para obtener:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

Multipliquemos ambos miembros de la ecuación por el factor $(x - x_1)$:

$$(x - x_1)\left(\frac{y - y_1}{x - x_1}\right) = m(x - x_1)$$

Antes de continuar, sabemos que:

$$\frac{x - x_1}{x - x_1} = 1$$

Por último, nos queda la expresión:

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

A esta ecuación se le llama la **forma punto-pendiente** de la ecuación de una recta y para usarla se requiere de conocer el valor de la pendiente m y las coordenadas de un punto (x_1, y_1) que pertenezca a la recta.

EJEMPLO 1: Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-7{,}3)$ y tiene pendiente igual a $-\frac{1}{4}$.

El punto conocido es $(x_1, y_1) = (-7{,}3)$ y su pendiente $m = -\frac{1}{4}$. Sustituimos valores:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = -\frac{1}{4}(x - (-7))$$

Observe el doble signo menos en el miembro derecho de la ecuación anterior: un signo menos es el de la forma de la ecuación y el otro signo menos le pertenece a la abscisa del punto conocido. Así queda:

$$y - 3 = -\frac{1}{4}(x + 7)$$

Esta es la ecuación de la recta que cumple con las condiciones del ejemplo 1 en su forma punto-pendiente.

EJEMPLO 2: Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-\frac{3}{2}, -\sqrt{3})$ y tiene pendiente $\frac{1}{3}$.

El punto conocido es $(x_1, y_1) = (-\frac{3}{2}, -\sqrt{3})$ y su pendiente es $m = \frac{1}{3}$. Sustituimos:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-\sqrt{3}) = \frac{1}{3}\left(x - \left(-\frac{3}{2}\right)\right)$$

Observe, nuevamente, tenemos doble signo menos, ahora, en ambos miembros de la ecuación anterior. Respete el signo menos de la forma de la ecuación y el signo menos de cada coordenada. Continuando:

$$y + \sqrt{3} = \frac{1}{3}\left(x + \frac{3}{2}\right)$$

Esta es la ecuación de la recta que cumple con las condiciones del ejemplo 2 en su forma punto-pendiente. Se hace hincapié en que la ecuación anterior es equivalente a la siguiente:

$$y = \frac{1}{3}\left(x + \frac{3}{2}\right) - \sqrt{3}$$

<u>Tercera forma de la ecuación de la recta:</u>

Consideremos un punto conocido de la recta con la forma $P(0, b)$ y su pendiente m.

Para continuar con la misma notación, tomemos $(x_1, y_1) = P(0, b)$ y sea $Q(x, y)$ cualquier otro punto de ella.

Usando la forma punto-pendiente de la recta, sustituimos:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - b = m(x - 0)$$

$$y - b = m(x)$$

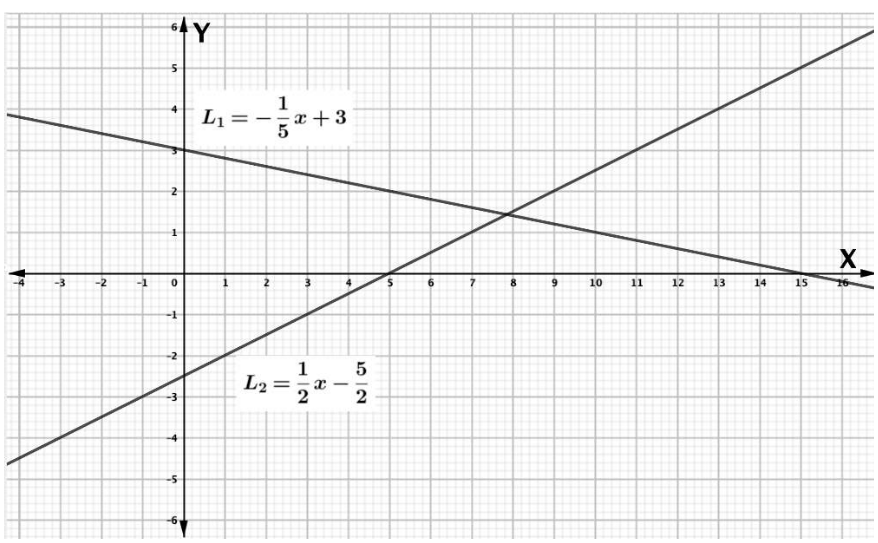
$$y - b = mx$$

Despejando la variable y:

$$\boxed{y = mx + b}$$

A esta ecuación se le llama **forma pendiente-ordenada al origen** de la ecuación de una recta y para usarla se requiere conocer el valor de la pendiente m y las coordenadas del punto donde la recta cruza al eje Y. Este punto, siempre tiene la representación $(0, b)$. A la forma pendiente-ordenada al origen, también se le conoce como **ordinaria** o **canónica**.

En la siguiente figura, la recta L_1 tiene la ecuación $y = -\frac{1}{5}x + 3$ y su pendiente es negativa $m = -\frac{1}{5}$, cruza al eje Y en el punto $(0,3)$ y la ordenada al origen es $b = 3$. La recta L_2 tiene por ecuación $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$, tiene pendiente positiva $m = \frac{1}{2}$, cruza al eje Y en el punto $\left(0, -\frac{5}{2}\right)$ y la ordenada al origen es $b = -\frac{5}{2}$.



EJEMPLO 1: Diga si los puntos (1,2) y (−1,−2) pertenecen a la recta cuya ecuación es $y = 3x - 1$.

La ecuación está en la forma pendiente-ordenada al origen, veamos si el punto (1,2) = (x,y) satisface la ecuación de la recta, sustituyendo las coordenadas:

$$y = 3x - 1$$

$$2 = 3(1) - 1$$

$$2 = 2$$

El miembro izquierdo es igual al miembro derecho, por lo tanto, el punto (1,2) satisface la ecuación y sí es un punto que pertenece a la recta.

Ahora, veamos si el punto (−1,−2) = (x,y) satisface la ecuación de la recta, sustituyendo las coordenadas:

$$y = 3x - 1$$

$$-2 = 3(-1) - 1$$

$$-2 \neq -4$$

El miembro izquierdo es distinto del miembro derecho, por lo tanto, el punto (−1,−2) no satisface la ecuación y no es un punto que pertenezca a la recta.

EJEMPLO 2: La ecuación de la recta $y = -\frac{2}{5}x + 3$ tiene la forma pendiente−ordenada al origen con pendiente negativa $m = -\frac{2}{5}$ y sabemos que su gráfica es una recta que cruza al eje Y en el punto (0,3) con su inclinación hacia la izquierda.

Los puntos que están sobre el eje Y tienen la forma (0,y), ¿qué forma tienen los puntos que están sobre el eje X? Respuesta: (x,0). Queremos conocer el valor de la coordenada x cuando y=0. Sustituimos en la ecuación dada de la recta:

$$y = -\frac{2}{5}x + 3$$

$$0 = -\frac{2}{5}x + 3$$

$$0 - 3 = -\frac{2}{5}x$$

$$-3 = -\frac{2}{5}x$$

Multiplicando por el recíproco de $-\frac{2}{5}$:

$$\left(-\frac{5}{2}\right)(-3) = \left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)x$$

$$\left(\frac{15}{2}\right) = (1)x$$

$$\left(\frac{15}{2}\right) = x$$

Por lo tanto, el punto donde la recta cuya ecuación es $y = -\frac{2}{5}x + 3$ cruza al eje X, tiene por coordenadas $\left(\frac{15}{2}, 0\right) = (7.5{,}0)$.

<u>Cuarta forma de la ecuación de la recta:</u>

Consideremos los puntos de la forma (a,0) y (0,b), siendo a y b cualesquiera números reales distintos de cero (¿por qué?). Supongamos que: $(a, 0) = (x_1, y_1)\ y\ (0, b) = (x_2, y_2)$. La pendiente de la recta que pasa por estos puntos es:

$$m = \frac{b-0}{0-a} = \frac{b}{-a} = -\frac{b}{a}$$

Utilizando la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta, obtenemos lo siguiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = -\frac{b}{a}(x - a)$$

Aplicando propiedad distributiva al miembro derecho:

$$y = -\frac{b}{a}x + \left(-\frac{b}{a}\right)\left(-\frac{a}{1}\right)$$

$$y = -\frac{b}{a}x + b$$

$$\frac{b}{a}x + y = b$$

Dividiendo entre b ambos miembros de la ecuación:

$$\frac{\frac{b}{a}}{b}x + \frac{y}{b} = \frac{b}{b}$$

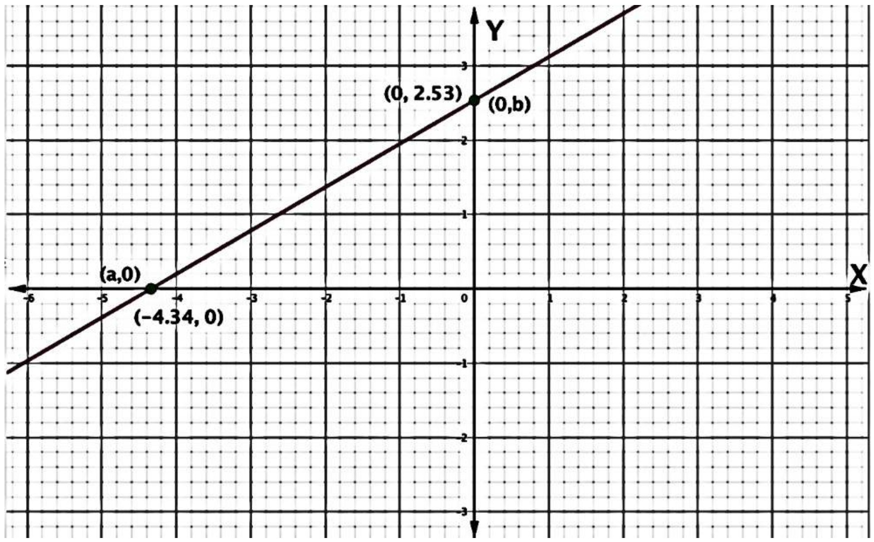
$$\frac{b}{ab}x + \frac{y}{b} = 1$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

A esta ecuación se le llama **forma simétrica** de la ecuación de una recta. Para usarla necesitamos conocer las intersecciones de la recta con los ejes coordenados, esto es, el punto donde cruza al eje Y y el punto donde cruza al eje X.

La siguiente figura puede ayudar a observar esta situación en un caso particular:



EJEMPLO 1: Encuentre los puntos donde la recta cuya ecuación es $y = 5x + 2$ corta, cruza o interseca los ejes coordenados.

Observemos que la ecuación dada está en la forma canónica u ordinaria o pendiente-ordenada al origen, lo que nos solicitan es encontrar los puntos donde la recta interseca a los ejes coordenados, en otras palabras, tenemos que encontrar los puntos de la forma (a,0) y (0,b). Esta información nos la da la forma simétrica de la ecuación de una recta.

Nuestro trabajo será partir de la forma ordinaria y llegar a la forma simétrica como sigue:

$$y = mx + b$$

$$y = 5x + 2$$

Dejamos, únicamente, el término independiente b=2 en el miembro derecho de la ecuación:

$$-5x + y = 2$$

Dividimos entre 2 ambos miembros de la ecuación:

$$\frac{-5x + y}{2} = \frac{2}{2}$$

$$\frac{-5x}{2} + \frac{y}{2} = 1 \text{ ……………………. } (1)$$

Hagamos una pausa para recordar el primer objetivo:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Observemos qué forma tiene la ecuación a la que queremos llegar, las variables de los numeradores del miembro izquierdo están solas y en la ecuación (1) anterior tenemos que la “x” está acompañada de un -5. ¿Qué podemos hacer para obtener la forma simétrica?

Sigamos en esta pausa para explicar el movimiento que vamos a hacer para dejar sola la variable x en el numerador.

Tenemos las representaciones equivalentes:

$$\frac{-5x}{2} = -\frac{5}{2}x$$

Luego, el coeficiente de x es $-\frac{5}{2}$ en ambos miembros, ahora, tomemos el recíproco del coeficiente de “x” y lo ponemos como denominador para obtener:

$$\frac{-5x}{2} = \frac{x}{-\frac{2}{5}}$$

NOTA IMPORTANTE: El principio fundamental es que cuando generes una nueva expresión, ésta tiene que ser equivalente a la anterior, ¿cómo sabes si es equivalente? Porque deberás respetar las propiedades de los números reales cuando hagas alguna operación para generar la nueva expresión.

Ahora, regresemos a lo que estábamos haciendo, ubiquémonos nuevamente en el paso marcado con (1).

Finalmente, tenemos la expresión que podemos identificar como la forma simétrica de la ecuación de la recta:

$$\frac{x}{-\frac{2}{5}} + \frac{y}{2} = 1$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

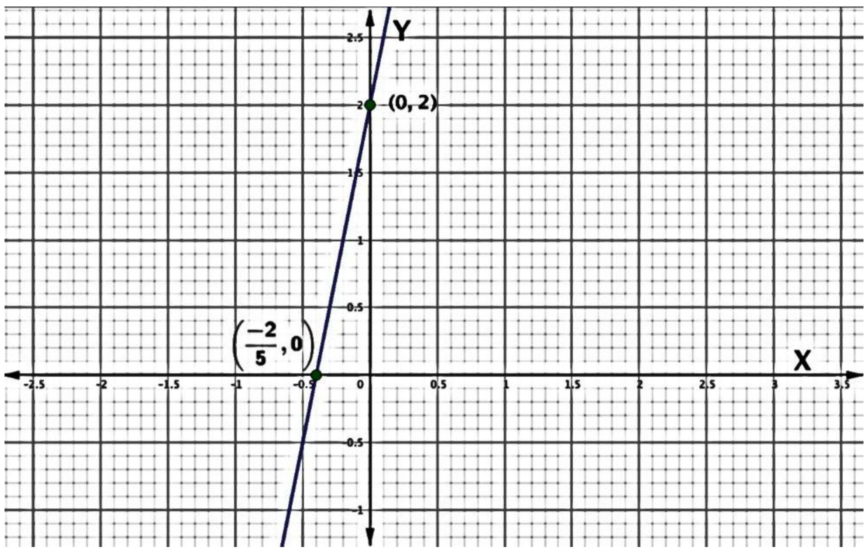
El objetivo final es encontrar los puntos donde la recta cuya ecuación es $y = 5x + 2$ corta o cruza o interseca los ejes coordenados.

De la forma simétrica, tenemos que la “a” está debajo de la “x” y que la “b” está debajo de la “y”, luego, tenemos los puntos:

$$(a, 0)\ y\ (0, b)$$

$$\left(-\frac{2}{5}, 0\right)\ y\ (0,2)$$

En este ejemplo, pasamos de la forma pendiente-ordenada al origen a la forma simétrica. Observemos cómo queda la gráfica de la recta que pasa por estos dos puntos:



EJEMPLO 2: Encuentre los puntos donde la recta cuya ecuación es

$y - 10 = 2(x - 3)$ interseca a los ejes coordenados.

Los puntos que cumplen con la condición anterior los podemos obtener si conseguimos la forma simétrica equivalente a la ecuación dada.

Tenemos que:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 10 = 2(x - 3)$$

Aplicando propiedad distributiva:

$$y - 10 = 2x - 6$$

Pasamos las variables de lado izquierdo y los términos independientes de lado derecho:

$$-2x + y = -6 + 10$$

$$-2x + y = 4$$

Dividimos entre 4 ambos miembros de la ecuación:

$$\frac{-2x + y}{4} = \frac{4}{4}$$

$$\frac{-2x}{4} + \frac{y}{4} = 1 \text{ ....} (2)$$

Recuerde la forma simétrica. Las variables "x" y "y" deben tener coeficiente 1 en el numerador y en la expresión anterior, la variable "x" está acompañada de un -2. ¿Qué podemos hacer para dejar sola a la variable x?

Antes de continuar, observemos que las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\frac{-2x}{4} = -\frac{2}{4}x$$

Luego, el coeficiente de "x" en ambos miembros es igual a $-\frac{2}{4}$, ahora tomemos el recíproco del coeficiente de "x" y lo colocamos en el denominador para obtener:

$$\frac{-2x}{4} = \frac{x}{-\frac{4}{2}} = \frac{x}{-2}$$

La expresión (2) queda:

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{4} = 1$$

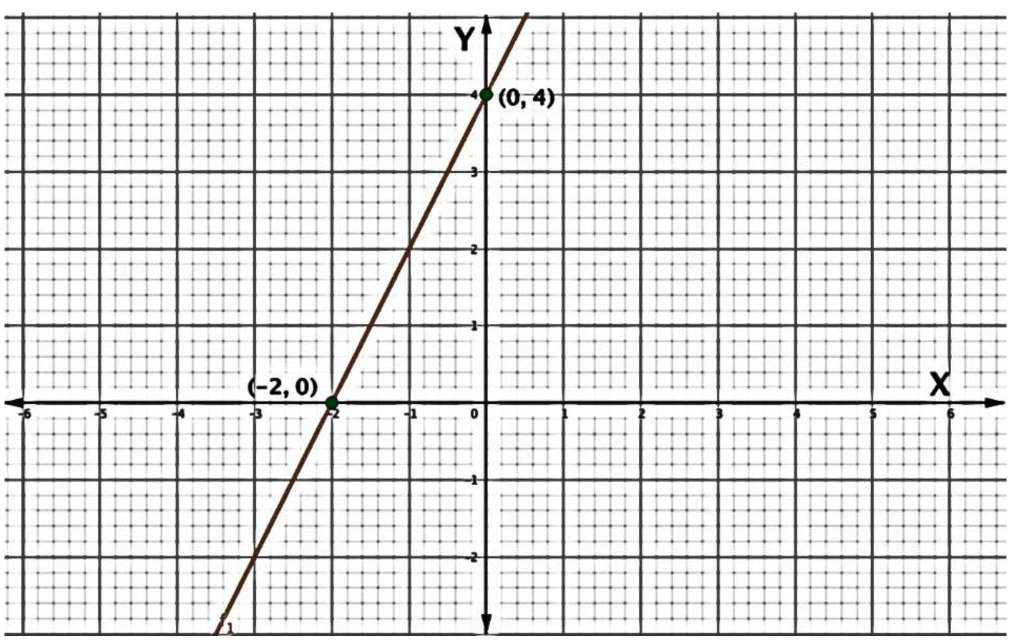
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Tenemos que, "a" está debajo de la "x" y la "b" está debajo de la "y", luego, los puntos de intersección con los ejes coordenados son:

$$(a, 0)\ y\ (0, b)$$

$$(-2,0)\ y\ (0,4)$$

En este ejemplo, pasamos de la forma punto-pendiente a la forma simétrica. En la siguiente figura, se muestra la gráfica de la ecuación de la recta dada.



Quinta forma de la ecuación de la recta:

La ecuación de una recta escrita en la **forma general** es

$$\boxed{Ax + By + C = 0}$$

Donde A, B y C son números reales y al menos uno de los números A o B no es cero.

¿Qué pasa si A=0 en la definición anterior?

¿Qué pasa si B=0 en la definición anterior?

¿Qué pasa si ambas A y B son igual a cero?

EJEMPLO 1: Encuentre la forma general de la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(-1{,}5)$ y tiene pendiente $m = -\frac{4}{7}$.

Tenemos dos condiciones para encontrar la forma general de la ecuación de la recta: Debe pasar por el punto P y, además, debe tener pendiente igual a $-\frac{4}{7}$.

Tal vez, ya tengas en mente usar la forma punto-pendiente, donde $(x_1, y_1) = (-1{,}5)$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 5 = -\frac{4}{7}(x - (-1))$$

$$y - 5 = -\frac{4}{7}(x + 1)$$

$$y - 5 = -\frac{4}{7}x - \frac{4}{7}$$

Aplicando propiedad distributiva al miembro derecho:

$$y = -\frac{4}{7}x - \frac{4}{7} + 5$$

$$\frac{4}{7}x + y = -\frac{4}{7} + \frac{5}{1}$$

$$\frac{4}{7}x + y = \frac{-4 + 35}{7}$$

$$\frac{4}{7}x + y = \frac{31}{7}$$

Hasta aquí, sólo hemos simplificado la operación aritmética con fracciones y pasamos las variables a lado izquierdo de la igualdad, ¿por qué crees que hicimos esto? Porque nos conviene, no pierdas de vista el objetivo: Nos solicitan encontrar la forma general de la ecuación, luego:

$$\frac{4}{7}x + y - \frac{31}{7} = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(3)$$

$$Ax + By + C = 0$$

La expresión (3), cumple con las condiciones que enuncia la definición de la forma general de la ecuación de una recta con $A = \frac{4}{7}$, $B = 1$ y $C = -\frac{31}{7}$. Por otro lado, existe una convención en matemáticas de escribir la forma general de la manera siguiente: Quitando los denominadores y dejando el coeficiente de la variable "x" con signo positivo como a continuación se muestra:

Multiplicamos ambos miembros de la ecuación marcada con (3) por 7:

$$7\left(\frac{4}{7}x + y - \frac{31}{7}\right) = (7)(0)$$

Aplicando propiedad distributiva al miembro izquierdo:

$$7\left(\frac{4}{7}x\right) + 7(y) - 7\left(\frac{31}{7}\right) = 0$$

Por lo tanto, la ecuación buscada es:

$$4x + 7y - 31 = 0$$

$$Ax + By + C = 0$$

La ecuación final, también cumple con las condiciones que enuncia la definición de la forma general con $A = 4, B = 7\ y\ C = -31$, además, esta ecuación es equivalente a (3), es más simple y más fácil de usar. En este último ejercicio, pasamos de la forma punto pendiente a la forma general.

EJEMPLO 2: Exprese la ecuación $\frac{x}{-\frac{2}{5}} + \frac{y}{2} = 1$ en su forma general.

Observemos que, la ecuación dada está en la forma simétrica, el objetivo es expresarla de la forma: $Ax + By + C = 0$.

Partimos de:

$$\frac{x}{-\frac{2}{5}} + \frac{y}{2} = 1$$

Aplicamos la división de fracciones al término con "x":

$$\frac{\frac{x}{1}}{\frac{-2}{5}} + \frac{y}{2} = 1$$

$$\frac{5x}{-2}+\frac{y}{2}=1$$

Hagamos una pausa, tenemos las expresiones equivalentes:

$$\frac{5x}{-2}=\frac{-5x}{2}$$

¿Por qué? Recuerda las propiedades de una fracción con signo negativo, éste puede estar en el numerador, en el denominador o en medio.

Continuando con nuestro proceso, la ecuación queda así:

$$\frac{-5x}{2}+\frac{y}{2}=1$$

Una manera de continuar es haciendo la suma del lado izquierdo de la igualdad:

$$\frac{-5x+y}{2}=1$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación por 2:

$$2\left(\frac{-5x+y}{2}\right)=(2)(1)$$

$$-5x+y=2$$

$$-5x+y-2=0$$

Esta última ecuación cumple con la condición enunciada en la definición de forma general, aunque por la convención mencionada con anterioridad, multiplicando por -1, la ecuación queda de la siguiente manera:

$$(-1)(-5x+y-2)=(-1)(0)$$

Por lo tanto, la ecuación buscada en su forma general es:

$$5x-y+2=0$$

$$Ax+By+C=0$$

Con $A=5,\ B=-1\ y\ C=2.$

NOTA: Si la ecuación está en su forma general $Ax+By+C=0$, se puede encontrar la pendiente con facilidad usando $m=-\frac{A}{B}$ ¿De dónde sale esta “formulita”? Pase de la forma general a la forma ordinaria despejando la variable “y” y encontrará este valor.

Sexta forma de la ecuación de la recta:

Supongamos que, para encontrar la ecuación de una recta, te dan como condición que tiene que pasar por un punto particular y deberá tener cierto ángulo de inclinación, ¿recuerdas algo que pueda ayudarte?

Sabemos que:

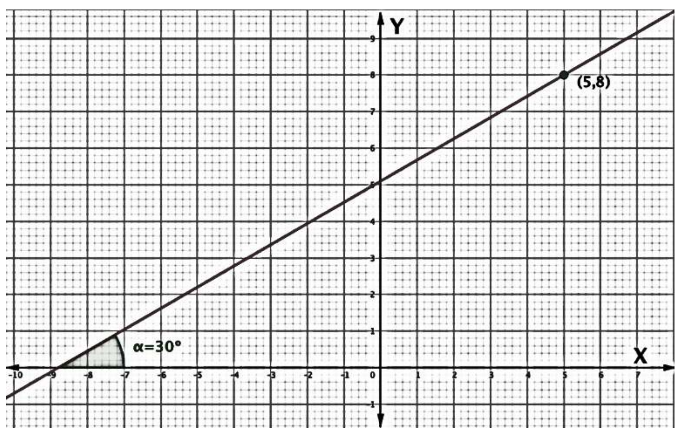
$$m = \tan\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Recordemos que, en la unidad 2 se definió el ángulo de inclinación de una recta, este ángulo es α y está medido en sentido contrario a las manecillas del reloj. De la igualdad anterior, sólo usaremos:

$$m = \tan\alpha$$

Ecuación de la recta dados: Un punto y el ángulo de inclinación.

EJEMPLO 1: Encuentre la ecuación en su forma general de la recta que pasa por el punto $R(5,8)$ y forma el ángulo $\alpha = 30°$ con el eje X.



Tenemos que:

$$m = \tan\alpha$$

$$m = \tan 30^0$$

$$m = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Dirígete a la unidad 1, si acaso tienes duda de dónde salió el resultado anterior.

Tenemos un punto conocido y, ahora, conocemos el valor de la pendiente m. Podemos usar la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta como una manera auxiliar para llegar al objetivo que es encontrar la forma general.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 8 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 5)$$

Aplicando la propiedad distributiva en el miembro derecho:

$$y - 8 = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{5\sqrt{3}}{3} + 8$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{3}x + y + \frac{5\sqrt{3}}{3} - 8 = 0$$

$$Ax \quad + \quad By \quad + \quad C = 0$$

Hasta aquí, la ecuación cumple con la condición para crear la forma general, finalmente, por el acuerdo anterior quedará:

$$(-3)\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}x + y + \frac{5\sqrt{3}}{3} - 8\right) = (-3)(0)$$

$$\sqrt{3}x - 3y - 5\sqrt{3} + 24 = 0$$

Donde $A = \sqrt{3},\ \ B = -3\ \ y\ \ C = \left(-5\sqrt{3} + 24\right)$.

EJEMPLO 2: Encuentre la ecuación de la recta en su forma ordinaria que pasa por el punto T$\left(-\frac{16}{5}, \frac{7}{3}\right)$ y tienen un ángulo de inclinación $\theta = 150^0$.

Sabemos que:

$$m = tan\theta$$

$$m = \tan 150^0$$

$$m = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Vaya a la unidad 1 para recordar cómo se obtiene este valor. Ahora, conocemos el valor de la pendiente m de la recta y un punto T que pertenece a ella.

Haciendo uso de la forma punto-pendiente con $(x_1, y_1) = \left(-\frac{16}{5}, \frac{7}{3}\right)$.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - \frac{7}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - \left(-\frac{16}{5}\right)\right)$$

Observe el doble signo en el paréntesis del miembro derecho, recuerde que un signo menos le pertenece a la ecuación y el otro signo menos le pertenece a la abscisa del punto T. Así,

$$y-\frac{7}{3}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{16}{5}\right)$$

Aplicando la propiedad distributiva al miembro derecho:

$$y-\frac{7}{3}=-\frac{1}{\sqrt{3}}x-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{16}{5}\right)$$

$$y-\frac{7}{3}=-\frac{1}{\sqrt{3}}x-\frac{16}{5\sqrt{3}}$$

$$y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x-\frac{16}{5\sqrt{3}}+\frac{7}{3}$$

Hagamos una pausa en este proceso para racionalizar el denominador como sigue:

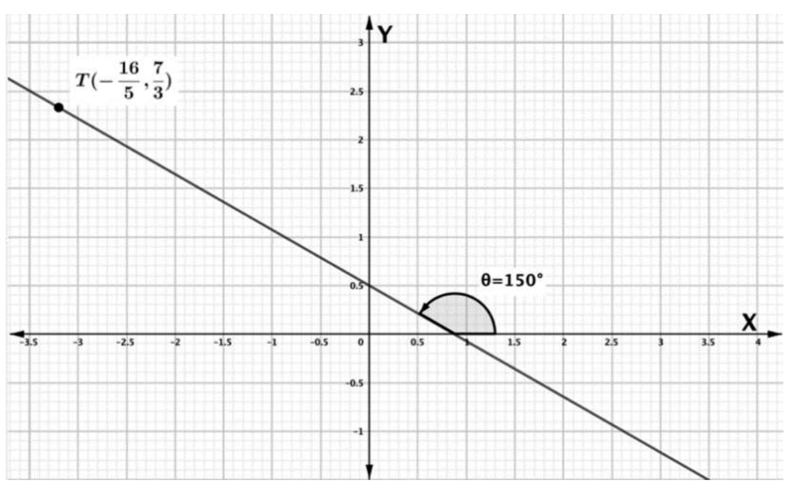
$$-\frac{16}{5\sqrt{3}}+\frac{7}{3}=\left(-\frac{16}{5\sqrt{3}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)+\frac{7}{3}=\frac{-16\sqrt{3}}{15}+\frac{7}{3}=\frac{-16\sqrt{3}+35}{15}$$

Por lo tanto, la ecuación ordinaria o canónica de la recta con las condiciones dadas es:

$$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{-16\sqrt{3}+35}{15}$$

$$y = \ mx \ \ +b$$

Donde $b=\frac{-16\sqrt{3}+35}{15}$ es la ordenada al origen, esto quiere decir que la recta cruza o intersecta al eje Y en el punto $(0,b)=\left(0,\frac{-16\sqrt{3}+35}{15}\right)\approx(0,0.49)$. La gráfica se muestra a continuación.



PROBLEMAS RESUELTOS.

1) Determina 3 puntos que pertenezcan a la recta cuya ecuación es

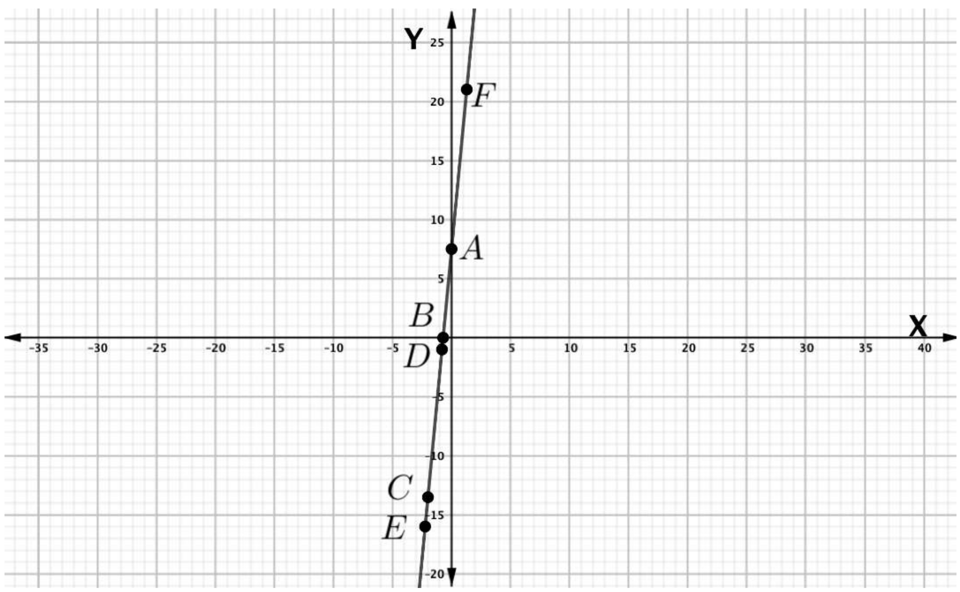
$$\boldsymbol{-7x+\frac{2}{3}y-5=0}$$

Se puede despejar "x" o "y" de la ecuación dada. Recuerde que el resultado debe estar escrito con su máxima simplificación.

Si despejamos "y":	Si despejamos "x":
$$-7x+\frac{2}{3}y-5=0$$ $$\frac{2}{3}y=7x+5$$ Multiplicamos por el recíproco de $\frac{2}{3}$ que es igual a $\frac{3}{2}$. $$y=\frac{3}{2}(7x+5)$$ $$y=\frac{21}{2}x+\frac{15}{2}$$	$$-7x+\frac{2}{3}y-5=0$$ Multiplicamos por -3 toda la ecuación para simplificar las operaciones: $$(-3)\left(-7x+\frac{2}{3}y-5\right)=(-3)(0)$$ $$21x-2y+15=0$$ $$21x=2y-15$$ $$x=\frac{2y-15}{21}$$
Damos valores a "x" y sustituimos en el despeje anterior: Si $x=0$, entonces $y=\frac{15}{2}$. Luego, tenemos el punto $\left(0,\frac{15}{2}\right)$.	Damos valores a "y" y sustituimos en el despeje anterior: Si $y=0$, entonces $$x=\frac{2(0)-15}{21}=-\frac{15}{21}=-\frac{5}{7}$$ Luego, tenemos el punto $\left(-\frac{5}{7},0\right)$
Si $x=-2$, entonces $$y=\left(\frac{21}{2}\right)(-2)+\frac{15}{2}=-21+\frac{15}{2}$$ $$y=\frac{-42+15}{2}=-\frac{27}{2}$$ Luego, tenemos el punto $\left(-2,-\frac{27}{2}\right)$.	Si $y=-1$, entonces $$x=\frac{2(-1)-15}{21}=\frac{-2-15}{21}=\frac{-17}{21}$$ Luego, tenemos el punto $\left(-\frac{17}{21},-1\right)$
Si $x=-\sqrt{5}$, entonces	Si $y=21$, entonces

$y=\left(\frac{21}{2}\right)(-\sqrt{5})+\frac{15}{2}$ $y=\frac{-21\sqrt{5}}{2}+\frac{15}{2}=\frac{-21\sqrt{5}+15}{2}$ Luego, tenemos el punto $\left(-\sqrt{5},\frac{-21\sqrt{5}+15}{2}\right)\approx(-2.24,-15.98)$ Acabamos de encontrar 3 puntos de la recta si despejamos "y".	$x=\frac{2(21)-15}{21}=\frac{42-15}{21}=\frac{27}{21}=\frac{9}{7}$ Luego, tenemos el punto $\left(\frac{9}{7},21\right)$. Acabamos de encontrar 3 puntos de la recta si despejamos "x".

La gráfica muestra los 6 puntos que se encontraron y pertenecen a la recta cuya ecuación es $-7x+\frac{2}{3}y-5=0.$



2) Encuentre el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos $R(-3,4)\ y\ S\left(-\frac{3}{2},-8\right)$.

Recordemos que: $m=tan\alpha$

Para encontrar el valor de α, es preciso conocer el valor de m pero ya sabemos cómo obtenerlo haciendo uso de la definición de la pendiente:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Consideremos $(x_1,y_1)=(-3,4)\ y\ (x_2,y_2)=\left(-\frac{3}{2},-8\right)$, sustituimos:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-8-4}{-\frac{3}{2}-(-3)}=\frac{-12}{-\frac{3}{2}+3}=\frac{-12}{\frac{3}{2}}=\frac{\frac{-12}{1}}{\frac{3}{2}}=\frac{-24}{3}=-8$$

Tenemos que, la pendiente tiene un valor negativo, luego el ángulo tendrá un valor negativo, usaremos un símbolo auxiliar β para este valor:

$$m=tan\beta$$

$$-8=tan\beta$$

$$tan^{-1}(-8)=\beta$$

$$-82.87^0=\beta$$

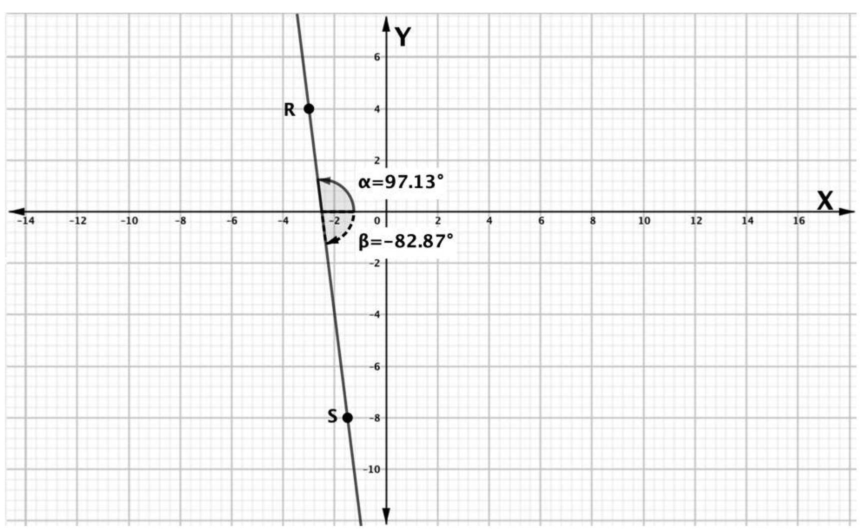
Recordemos que este ángulo está medido en sentido de las manecillas del reloj y nosotros estudiamos ángulos positivos en sentido contrario a las manecillas del reloj, así:

$$180^0-\beta=\alpha$$

$$180^0-82.87^0=97.13^0=\alpha$$

Por lo tanto, el ángulo de inclinación de la recta con la condición dada es $\alpha=97.13^0$.

A continuación, se muestra la gráfica de la recta donde se puede observar el sentido de los ángulos $\alpha\ y\ \beta$.



3) Determina la ecuación de la recta en su forma general que tiene pendiente 3 e interseca al eje X en $x=3$.

Como cruza al eje X en $x=3$, tenemos el punto $(3,0)=(x_1,y_1)$ y $m=3$, usando la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta, tenemos:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-0=3(x-3)$$

$$y = 3x - 9$$

Hasta aquí, tenemos la forma pendiente-ordenada al origen o canónica. Queremos la forma general:

$$0 = 3x - y - 9$$

$$0 = Ax + By + C$$

Que es lo mismo que:

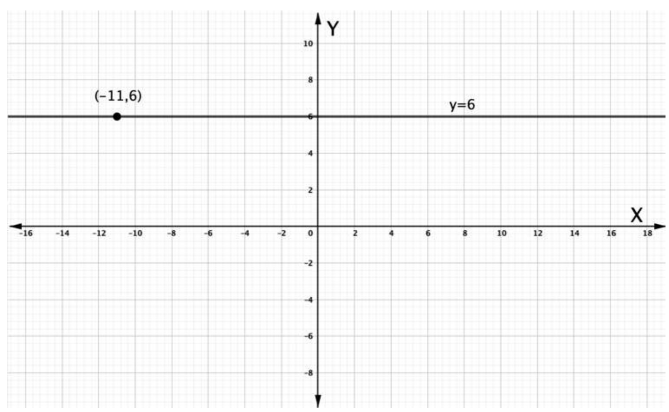
$$Ax + By + C = 0$$

$$3x - y - 9 = 0$$

Donde $A = 3, B = -1 \; y \; C = -9$.

4) ¿Cuá es la ecuación de la recta que tiene pendiente cero y pasa por el punto $(-11{,}6)$?

¿Recuerdas alguna información relacionada con esto? Si la recta tiene pendiente cero, ¿cómo es la gráfica? Exacto, es una recta horizontal pero no cualquiera, sólo aquella que cumple con la condición de pasar por el punto $(-11{,}6)$ como lo muestra la figura siguiente:



Por lo tanto, la ecuación de la recta con esas condiciones es y=6.

5) Determina la forma simétrica de la ecuación de la recta que interseca al eje X en -9 y al eje Y en -2 y finaliza escribiendo la forma ordinaria.

¿Recuerdas alguna información acerca de esto?

Como interseca al eje X, tenemos el punto $(-9{,}0)$ e interseca al eje Y en el punto $(0, -2)$. Con esto, tenemos puntos de la forma $(a, 0) = (-9{,}0) \; y \; (0, b) = (0, -2)$.

sustituimos:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$\frac{x}{-9}x + \frac{y}{-2} = 1$$ …………….(4)

Hasta aquí, tenemos la forma simétrica. Continuamos para obtener la forma ordinaria, haciendo la suma de fracciones del miembro izquierdo:

$$\frac{2x + 9y}{-18} = 1$$

Multiplicamos toda la ecuación anterior por -18 y despejamos y:

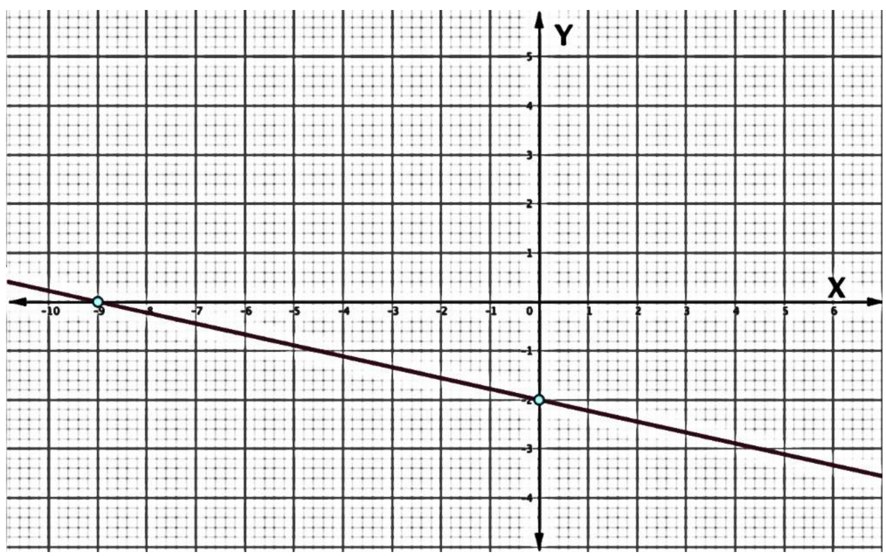
$$2x + 9y = -18$$

$$9y = -2x - 18$$

$$y = -\frac{2}{9}x - 2$$

$$y = mx + b$$

Es la forma ordinaria donde $m = -\frac{2}{9}$ y la ordenada al origen es $b = -2$, observe que es la misma b que en la forma simétrica, veamos la gráfica:



Observe la forma simétrica marcada con (4), ¿puedes aplicar una operación diferente para llegar a la forma deseada?

6) Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto $P\left(-\frac{10}{3}, \frac{4}{3}\right)$ y tiene ordenada al origen $b = -\frac{7}{4}$ en su forma ordinaria o canónica. Finalmente, realiza el proceso para escribir la forma general.

Si tiene ordenada al origen $b = -\frac{7}{4}$, entonces tenemos el punto $\left(0, -\frac{7}{2}\right)$.

Podemos considerar $(x_1, y_1) = \left(-\frac{10}{3}, \frac{4}{3}\right)$ y $(x_2, y_2) = \left(0, -\frac{7}{2}\right)$.

Encontremos la pendiente:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-\frac{7}{4}-\frac{4}{3}}{0-\left(-\frac{10}{3}\right)}=\frac{\frac{-21-16}{12}}{\frac{10}{3}}=\frac{\frac{-37}{12}}{\frac{10}{3}}=\frac{(3)(-37)}{(12)(10)}=\frac{(3)(-37)}{(3)(4)(10)}=-\frac{37}{40}$$

La forma ordinaria, canónica o pendiente-ordenada al origen es:

$$y=mx+b$$

$$y=-\frac{37}{40}x-\frac{7}{4}$$

El proceso para escribir la forma general podría ser el siguiente:

$$0=-\frac{37}{40}x-y-\frac{7}{4}$$

$$0=Ax+By+C$$

Hasta aquí, tenemos la forma general de la ecuación de la recta, pero recuerde que la podemos escribir de una manera más simple:

Multiplicamos la ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores:

$$(40)(0)=(40)\left(-\frac{37}{40}x-y-\frac{7}{4}\right)$$

$$0=-37x-40y-70$$

Multiplicamos toda la ecuación por -1:

$$(-1)(0)=(-1)(-37x-40y-70)$$

$$0=37x+40y+70$$

$$0=Ax+By+C$$

O también,

$$37x+40y+70=0$$

$$Ax+By+C=0$$

7) ¿Encuentra la forma simétrica de la ecuación de la recta del ejercicio 6: $y=-\frac{37}{40}x-\frac{7}{4}$?

Partimos de la forma ordinaria:

$$y=-\frac{37}{40}x-\frac{7}{4}$$

$$\frac{37}{40}x+y=-\frac{7}{4}$$

Para simplificar las operaciones, multiplicamos toda la ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores:

$$(40)\left(\frac{37}{40}x+y\right)=(40)\left(-\frac{7}{4}\right)$$

$$37x+40y=-70$$

Dividimos entre -70 para obtener el 1 en el miembro derecho de la forma simétrica:

$$\frac{37x+40y}{-70}=\frac{-70}{-70}$$

$$\frac{37x}{-70}+\frac{40y}{-70}=1$$

Recordemos que, necesitamos que las variables tengan coeficiente igual a 1 en los numeradores, luego, tomamos el recíproco de cada coeficiente de cada variable “x” y “y” y lo colocamos como denominador:

$$\frac{x}{\frac{-70}{37}}+\frac{y}{\frac{-70}{40}}=1$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

Luego, tenemos los puntos $\left(\frac{-70}{37},0\right)=(a,0)\ y\ \left(0,-\frac{7}{4}\right)=(0,b)$ donde la recta asociada cruza los ejes coordenados. En este ejercicio, transitamos de la forma pendiente-ordenada al origen a la forma simétrica.

8) Encuentra el ángulo de inclinación que forma la recta con el eje X, cuya ecuación es $y=\frac{1}{8}x-\frac{11}{8}$.

Recordemos que:

$$y=mx+b$$

$$y=\frac{1}{8}x-\frac{11}{8}$$

Donde $m=\frac{1}{8}$ y

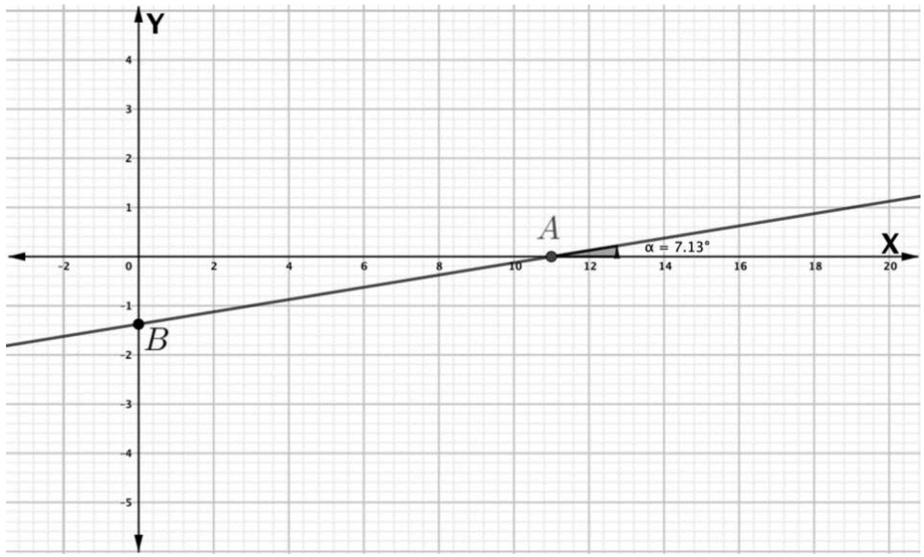
$$m=tan\theta$$

$$\frac{1}{8}=tan\theta$$

$$tan^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)=\theta$$

$$7.13^0=\theta$$

Observemos que, el ángulo es un valor positivo, luego está medido en sentido contrario a las manecillas del reloj, por lo tanto, este es el valor del ángulo de inclinación de la recta asociada a la ecuación dada con el eje X.



PROBLEMAS PROPUESTOS.

1) Los puntos $R(2,4)\ y\ \ S(-3,6)$ pertenecen a una recta L, encuentre la ecuación de esta recta en su forma general. Haz lo mismo con las rectas L_i que pasan por los siguientes pares de puntos:
a) $L_1: (0,-2)\ y\ (-5,2)$
b) $L_2: (2,8)\ \ y\ \ (-1,4)$
c) $L_3: (-1,0)\ \ y\ \ (-3,-3)$
2) **Los puntos que pertenecen a una misma recta se dice que son colineales.** Di si los siguientes puntos son colineales:
a) $P(2,1), Q(-5,15), R(6,-7)\ y\ S(9,-13)$.
b) $P(1,-7), Q(3,-19), R(0,-3)\ y\ S(-1,7)$.
c) $P(8,-2), Q(-2,-12), R(7,-5)\ y\ S(1,-7)$.
3) Escribe el valor de la pendiente y la ordenada al origen de la recta cuya ecuación es:
a) $y-3=-\frac{1}{2}\big(x-(-5)\big)$.
b) $y-11=\frac{-5-11}{-8-3}(x-3)$.
c) $y=-\sqrt{5}x-\left(-\frac{1}{2}\right)$.
4) Escribe la forma simétrica de la recta cuya ecuación es:
a) $3x-18y-27=0$.
b) $\frac{1}{2}x+3=y$.
c) $y-(-1)=4(x+2)$.
5) Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos: $(-6,4), (-6,-7), (-6,12), (-6,-27)\ y\ (-6,\sqrt{3})$.

6) Encuentra la ecuación de la recta en su forma pendiente-ordenada al origen (si existe) y escriba el ángulo de inclinación de la recta con el eje X (si existe).

a) $\frac{x}{4}+\frac{y}{8}=1$

b) $-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}y=1$

c) $\frac{4x}{5}+\frac{2y}{10}=1$

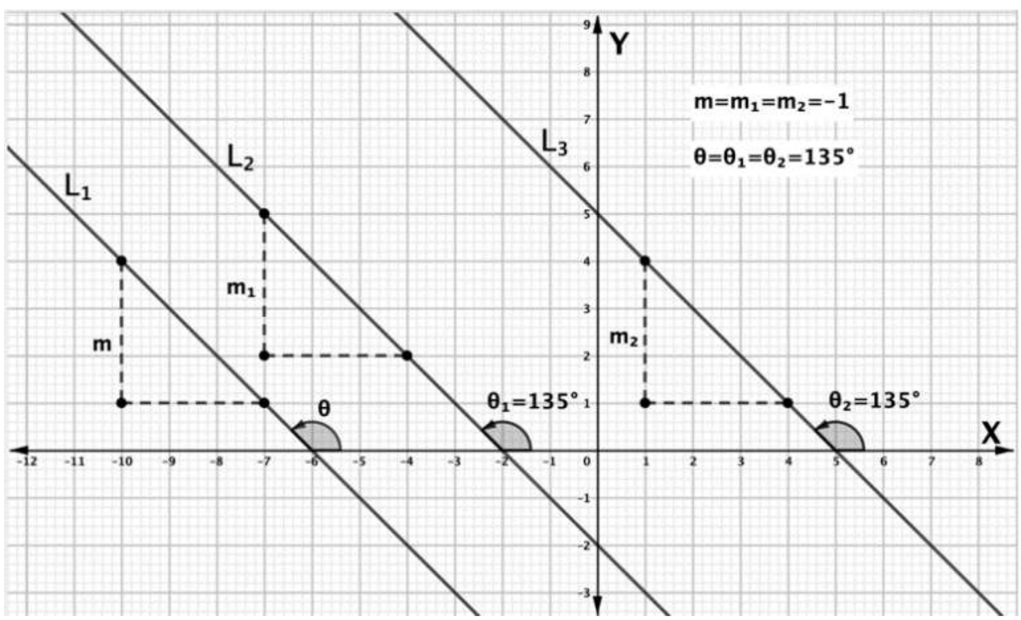
3.2 Condiciones de paralelismo y perpendicularidad

3.2.1 Paralelismo

En el plano cartesiano, Paralelismo, se refiere a rectas paralelas.

Decimos que dos rectas son paralelas si sus pendientes tienen el mismo valor (o son iguales). Supongamos que la recta L_1 tiene pendiente m_1 y que la recta L_2 tiene pendiente m_2. Dos rectas son paralelas si y sólo si $m_1 = m_2$.

En la siguiente figura, las rectas $L_1, L_2 \; y \; L_3$ tienen ángulo de inclinación $\theta = \theta_1 = \theta_2 = 135^0$ y su pendiente es m, esto es, $m = m_1 = m_2 = -1$.



EJEMPLO 1**:** Determine la ecuación de la recta L_1 que pasa por el punto $P(4{,}3)$ y es paralela a la recta L_2 cuya ecuación es: $x+\sqrt{2}y=0$.

Leamos muy bien lo que plantea el enunciado anterior: Estamos buscando la ecuación de una recta y nos dan la expresión de la otra, además, nos dicen que ambas rectas son paralelas, esto último es muy importante porque si ambas rectas son paralelas, entonces el valor de sus pendientes es el mismo.

En este caso conocemos un punto P, nos faltaría otro punto o la pendiente, ¿qué es lo que tenemos como información?

La información precisa que tenemos es la expresión de L_2: $x + \sqrt{2}y = 0$.

De aquí, podemos obtener la pendiente de la recta L_1 porque ambas rectas son paralelas. ¿Cuál es la forma de la ecuación que nos conviene encontrar para obtener el valor de la pendiente? La forma pendiente-ordenada al origen nos da explícitamente esa información:

$$L_{2:} \quad x + \sqrt{2}y = 0$$

$$\sqrt{2}y = 0 - x$$

$$\sqrt{2}y = -x$$

Multiplicamos ambos miembros de la ecuación por el recíproco del coeficiente de y:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\sqrt{2})y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(-x)$$

Hagamos una pequeña pausa, en el miembro izquierdo tenemos:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\sqrt{2}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{1}\right) = 1$$

Continuando con el despeje de y, finalmente la forma pendiente-ordenada al origen es:

$$y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x$$

Con esto, L_2 tiene pendiente $m_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. En consecuencia, L_1 tiene pendiente $m_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ y pasa por el punto $P(4,3) = (x_1, y_1)$. Para encontrar la ecuación de L_1 podemos usar la forma punto-pendiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(x - 4)$$

Aplicando la propiedad distributiva al miembro derecho:

$$y - 3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{4}{\sqrt{2}}$$

$$y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{4}{\sqrt{2}} + 3$$

Racionalizando los denominadores:

$$y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + 2\sqrt{2} + 3$$

Esta es la ecuación de la recta L_1, en su forma ordinaria, que cumple con las condiciones de pasar por el punto P y tener pendiente igual a la pendiente de L_2.

Observe que el ejercicio no solicita obtener una forma particular de la ecuación, tú podrías jugar con esto, de la forma ordinaria podrías pasar a la forma general, por ejemplo, o a la forma simétrica. Vamos a obtener la forma general:

$$y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + 2\sqrt{2} + 3$$

Multipliquemos por 2 toda la ecuación anterior:

$$2y = -\sqrt{2}x + 4\sqrt{2} + 6$$

$$0 = -\sqrt{2}x - 2y + 4\sqrt{2} + 6$$

$$0 = Ax \quad + By \quad + \quad C$$

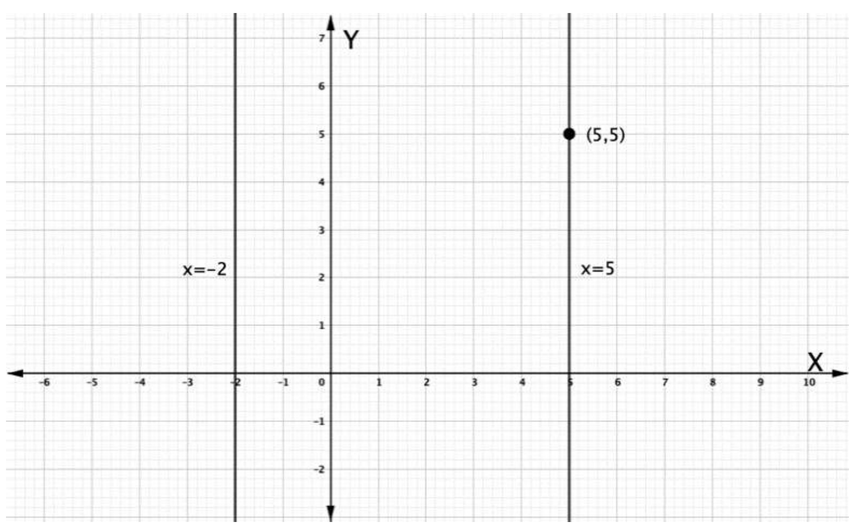
Esta es la forma general de la ecuación de la recta L_1.

EJEMPLO 2: Encuentra la ecuación de la recta L_1 que pasa por el punto $P(5,5)$ y es paralela a la recta L_2: $x = -2$.

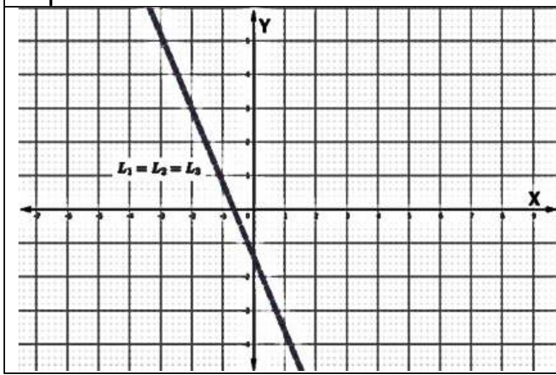
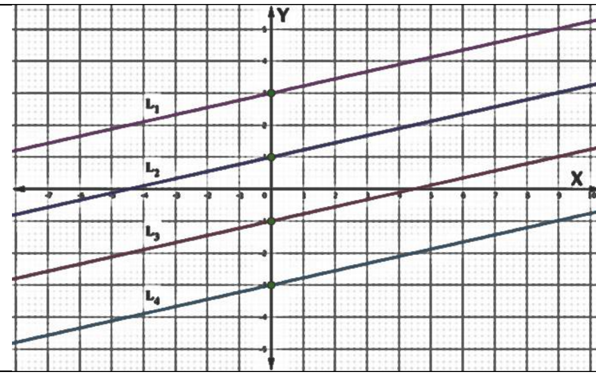
¿Recuerdas cómo es la gráfica de una recta cuya ecuación tiene la forma $x = a$? Es una recta vertical que cruza al eje X en el valor “a”.

La recta L_1 tiene que pasar por el punto (5,5) y ser vertical para que sea paralela a L_2. Luego, la ecuación de la recta L_1 es $x = 5$ que es la abscisa del punto (5,5).

Observa que, el ejemplo 2, es un caso particular de rectas paralelas ¿por qué? Porque la pendiente de una recta vertical no está determinada, sin embargo, sí existe la recta y su ecuación.



Las rectas paralelas coinciden o no se intersecan en ningún punto (no tienen puntos en común) como lo muestra la siguiente tabla:

Las rectas paralelas coinciden. Observe las rectas verde, azul y rosa de la siguiente figura, una está encima de la otra, cada una tiene su ecuación, estas ecuaciones son equivalentes.	**Las rectas paralelas no tienen puntos en común.** Observe las 4 rectas de la siguiente figura, no se intersectan en ningún punto y cada una tiene su propia ecuación y no son equivalentes.
	

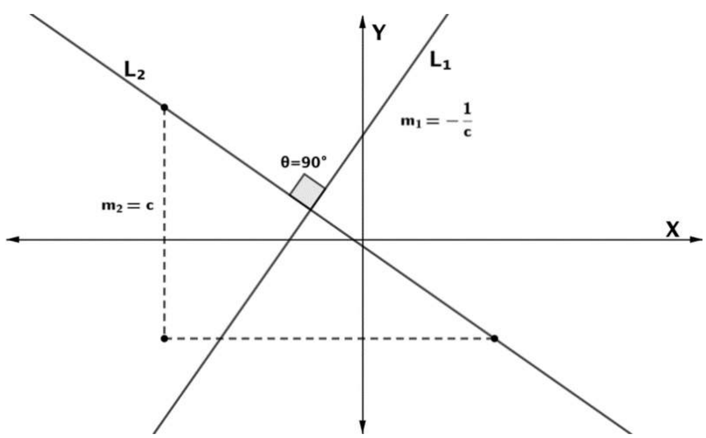
3.2.2 Perpendicularidad

En el plano cartesiano, Perpendicularidad, se refiere a las rectas perpendiculares.

¿Tienes en tu imaginación un ejemplo de rectas perpendiculares? Si tienes una recta, ¿cuántas rectas perpendiculares puede imaginar a partir de esta?

Supongamos que la recta L_1 tiene pendiente m_1 y que la recta L_2 tiene pendiente m_2, decimos que dos rectas son perpendiculares si, y solo si $m_1 = -\frac{1}{m_2}$, que es lo mismo que si $m_1 m_2 = -1$. Las rectas perpendiculares forman entre sí un ángulo de 90^0.

Observe la siguiente figura, las rectas $L_1 \ y \ L_2$ forman un ángulo de 90^0, si conocieras el valor de cada pendiente, la multiplicación de ambos valores tiene que ser igual a -1.



EJEMPLO 1: Encuentre la ecuación de la recta L_1 que pasa por el punto $T\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ y es perpendicular a la recta L_2 cuya ecuación es: $\sqrt{5}x-y+8=0$.

Leamos bien el enunciado anterior, nos solicitan encontrar la ecuación de L_1 que cumpla las condiciones de pasar por el punto T y tener pendiente que forme un ángulo de 90^0 con la pendiente de L_2.

Para encontrar la ecuación deseada necesitamos un punto y una pendiente, o dos puntos. Sólo tenemos un punto conocido y podemos conocer el valor de la pendiente de L_1, si conocemos el valor de la pendiente de L_2. Lo cual sabemos que sí lo podemos hacer, esta información nos la da la forma pendiente-ordenada al origen, tomemos la ecuación de L_2 y despejemos y:

$$\sqrt{5}x-y+8=0$$

$$-y=-\sqrt{5}x-8$$

Multiplicamos por -1 toda la ecuación:

$$(-1)(-y)=(-1)\left(-\sqrt{5}x-8\right)$$

$$y=\sqrt{5}x+8$$

$$y=mx+b$$

La pendiente de L_2 es $m_2=\sqrt{5}$, luego, la pendiente de L_1 es

$$m_1=-\frac{1}{m_2}$$

NOTA: La pendiente que queremos encontrar es igual a menos uno entre la pendiente que conocemos:

$$m_1=-\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Para encontrar la ecuación de L_1, tenemos el punto $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=(x_1,y_1)$ y su pendiente m_1 y usamos la forma punto-pendiente:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$y+\frac{1}{2}=-\frac{1}{\sqrt{5}}x+\frac{1}{2\sqrt{5}}$$

$$y=-\frac{1}{\sqrt{5}}x+\frac{1}{2\sqrt{5}}-\frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

Racionalizando el denominador:

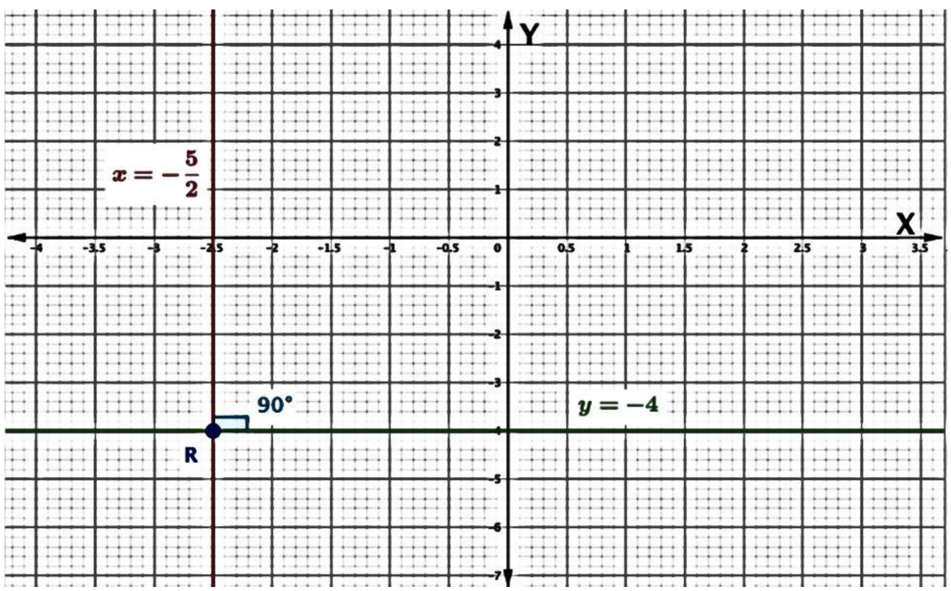
$$y = -\frac{\sqrt{5}}{5}x + \frac{\sqrt{5}-5}{10}$$

$$y = mx + b$$

No se solicita una forma específica de la ecuación y esta última está dada en su forma ordinaria o canónica.

EJEMPLO 2: Determine la ecuación de la recta L_1 que pasa por el punto $R\left(-\frac{5}{2}, -4\right)$ y es perpendicular a la recta L_2 cuya ecuación es $y = -4$.

¿Qué forma tiene la gráfica de una ecuación de la forma $y = b$? Efectivamente, es una recta horizontal que cruza al eje Y en el valor b. ¿Cómo encontramos o dibujamos una recta perpendicular a L_2 con la condición de pasar por R? Tendría que ser una recta vertical.



Por lo tanto, la ecuación de la recta L_1 que cumple con la condición de pasar por $R\left(-\frac{5}{2}, -4\right)$ y ser perpendicular a L_2 es $x = -\frac{5}{2}$ que es el valor de la abscisa del punto R.

Observe que, este es un caso particular de rectas perpendiculares ¿por qué? Porque la pendiente de la recta vertical no está definida, sin embargo, sí existe la recta y su ecuación.

¿Qué pasa si nos hubieran dado la ecuación $x = \frac{3}{2}$ de la recta vertical L_1? ¿Cómo encontrarías la ecuación de la recta perpendicular a L_1 que pasa por el punto $U(-3,5)$ y cuál sería la gráfica?

3.2.3 Ángulo entre dos rectas.

Tal vez, en tu imaginación tengas alguna noción de lo que es un ángulo entre dos rectas. ¿Qué pasará con el ángulo entre dos rectas si las rectas son paralelas?

Vamos a suponer que tenemos dos rectas L_1 y L_2 no paralelas y no perpendiculares y consideremos la pendiente de cada una de ellas. Tenemos la siguiente relación entre estos elementos:

Sea L_1 con pendiente m_1 y L_2 con pendiente m_2. Recuerde que, el ángulo θ está considerado positivo en sentido contrario a las manecillas del reloj, así que, se considerará como m_1 la pendiente de la recta que tiene el lado inicial del ángulo θ y como m_2 la pendiente de la recta que tiene el lado terminal del ángulo θ.

El ángulo θ formado por dos rectas está dado por la expresión matemática:

$$tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} \qquad con\ m_2 m_1 \neq -1$$

EJEMPLO 1: Encuentra el ángulo formado de la recta L_1 cuya ecuación es $x + 4y + 2 = 0$ a la recta L_2 cuya ecuación es $-2x + 3y + 5 = 0$.

Para encontrar el ángulo entre dos rectas, necesitamos conocer la pendiente de cada recta, observemos que las ecuaciones están dadas en la forma general y la información que requerimos nos la da la forma pendiente-ordenada al origen. Despejemos "y" de ambas ecuaciones:

L_1 $\quad x + 4y + 2 = 0$ $4y = -x - 2$ $y = \frac{-x-2}{4}$ $y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$ $y = mx + b$ L_1 tiene pendiente $m_1 = -\frac{1}{4}$	L_2 $\quad -2x + 3y + 5 = 0$ $3y = 2x - 5$ $y = \frac{2x-5}{3}$ $y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$ $y = mx + b$ L_2 tiene pendiente $m_2 = \frac{2}{3}$

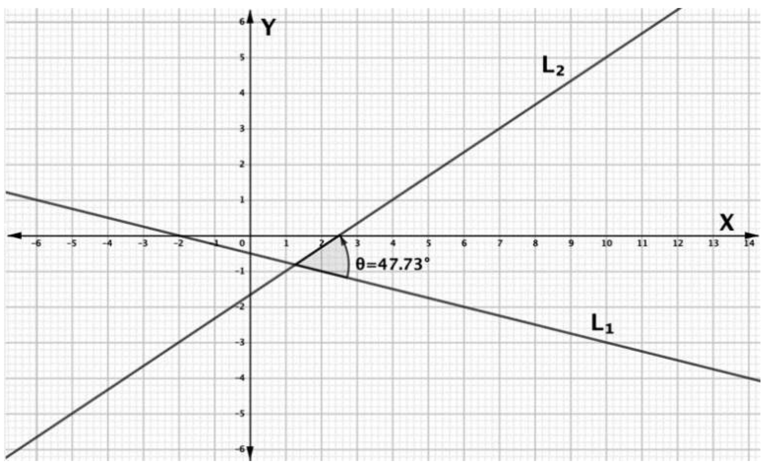
Revisemos si m_1 y m_2 cumplen con la condición para que exista el ángulo entre dos rectas y nos referimos a que $m_1 m_2 \neq -1$, luego, $\left(-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{12} = -\frac{1}{6} \neq -1$. Con esto, sí podemos hacer uso de la expresión anterior. Ahora sustituyamos estos valores de las pendientes en:

$$tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1+m_2m_1} = \frac{\frac{2}{3}-\left(-\frac{1}{4}\right)}{1+\left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{4}}{1-\frac{2}{12}} = \frac{\frac{8+3}{12}}{\frac{10}{12}} = \frac{11}{10}$$

$$\therefore tan\theta = \frac{11}{10} \implies \theta = tan^{-1}\left(\frac{11}{10}\right) \implies \theta = 47.73^0.$$

Por lo tanto, el ángulo entre las rectas $L_1 \; y \; L_2$ es $\theta = 47.73^0$.

Esto se observa en la siguiente gráfica:



EJEMPLO 2: Determine el ángulo entre las rectas con las siguientes características: L_1 pasa por los puntos $R(-5,3) \; y \; S(2,-4)$ y L_2 tiene ecuación $\frac{x}{3}+\frac{y}{6}=1$.

La ecuación de L_2 es de la forma simétrica, podemos aprovechar la información explícita que nos da antes de que intentemos otra cosa como despejar “y” que sería un buen ejercicio si lo deseas. Para encontrar la pendiente de L_1, podemos hacer uso de la forma de la ecuación que pasa por dos puntos:

L_1 pasa por $R(-5,3) = (x_1, y_1) \; y \; S(2,-4) = (x_2, y_2)$ $m_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_2} = \dfrac{-4-3}{2-(-5)} = \dfrac{-7}{7} = -1$	L_2 pasa por $(a, 0) = (3,0) = (x_1, y_1)$ y $(0, b) = (0,6) = (x_2, y_2)$ $m_2 = \dfrac{6-0}{0-3} = \dfrac{6}{-3} = -2$

Tenemos que, $m_1m_2 = (-1)(-2) = 2 \neq -1$. Los valores de las pendientes cumplen con la condición para la existencia del ángulo que estamos buscando, así que podemos sustituir en la fórmula:

$$tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1+m_2m_1} = \frac{-2-(-1)}{1+(-2)(-1)} = \frac{-2+1}{1+2} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$$

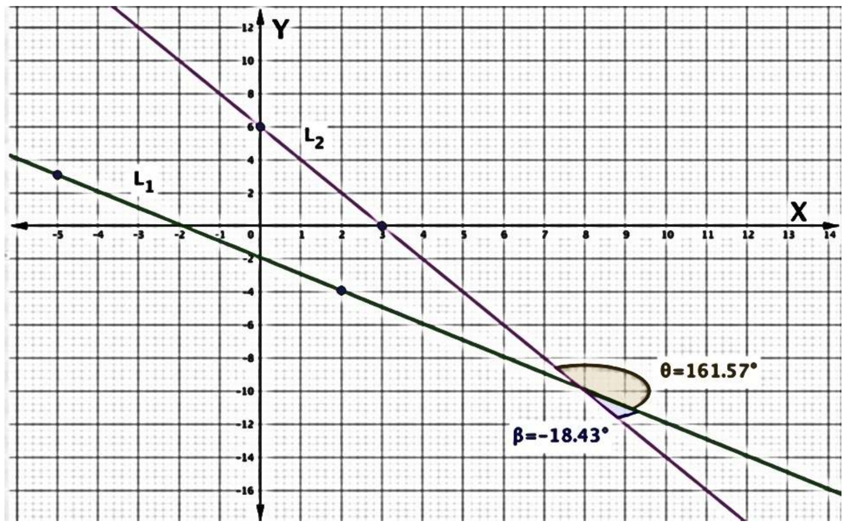
Consideremos β como un ángulo auxiliar:

$\tan\beta = -\frac{1}{3} \Longrightarrow \beta = tan^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right) \Longrightarrow \beta = -18.43^0$

El ángulo es negativo, está considerado en sentido de las manecillas del reloj y nosotros queremos el ángulo positivo en el sentido contrario a las manecillas del reloj, con esto:

$\theta = 180^0 - \beta = 180^0 - 18.43^0 = 161.57^0 \quad \therefore \theta = 161.57^0$

Lo anterior se puede observar en la figura siguiente:



3.2.4 Intersección entre dos rectas

¿Podemos saber las coordenadas del punto donde se intersecan dos rectas? ¿Sabes cuál es el área de las matemáticas que nos puede ayudar a resolver esto? El álgebra nos ayudará a encontrar las coordenadas del punto.

En matemáticas 1, aprendimos diferentes métodos para resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas: El método por Sustitución, el método de Igualación y el método de Suma y Resta. Para encontrar el punto de intersección deseado, se podrá hacer uso de cualquiera de estos tres métodos.

EJEMPLO 1: Determine si las rectas cuyas ecuaciones son:

$$L_1:\ 7x = 8 + 11y$$

$$L_2:\ -33y = 27 - 21x$$

se intersecan en algún punto.

Las ecuaciones de las rectas las podemos ordenar para formar el siguiente sistema, el cual, se resolverá por el método de Suma y Resta:

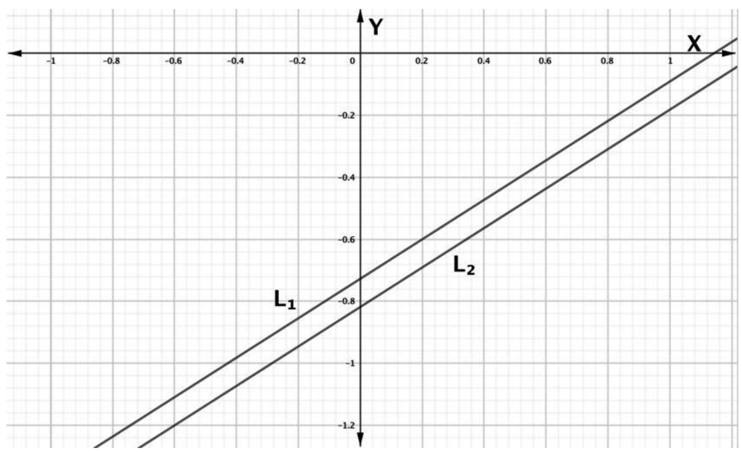
$7x - 11y = 8$ ………..(1) $21x - 33y = 27$ ……..(2)
Multiplicamos la ecuación (1) por -3 y nos queda el sistema:

$$(-3)(7x - 11y) = (-3)(8)$$
$$21x - 33y = 27$$

Luego, tenemos el sistema equivalente:

$$\begin{array}{r} -21x + 33y = -24 \\ 21x - 33y = 27 \\ \hline 0 = 3 \end{array}$$

Tenemos una contradicción: 0 no es igual a 3, el sistema de ecuaciones lineales no tiene solución y, esto se interpreta en Geometría Analítica que no hay intersección, las rectas son paralelas. No existen las coordenadas del punto de intersección. Vea la figura siguiente.



EJEMPLO 2: Determine el punto de intersección (si existe) de las rectas con ecuaciones:

$$L_1: \ 16x + 22y - 10 = 0$$

$$L_2: \ 5x - 6y + 13 = 0$$

Así, podremos resolver el sistema de ecuaciones lineales por el método de Suma y Resta como sigue:

$$16x + 22y - 10 = 0 \text{ ………..(1)}$$
$$5x - 6y + 13 = 0 \text{ …………..(2)}$$

Observemos que, los coeficientes y el término independiente son múltiplos de 2, luego podemos dividir la ecuación (1) entre 2 con la finalidad de operar con cantidades pequeñas para un manejo fácil, y el sistema queda así:

$$8x + 11y - 5 = 0$$
$$5x - 6y + 13 = 0$$

Para resolverlo por el método de Suma y Resta, una manera es multiplicar la ecuación (1) por 5 y la ecuación (2) por -8:

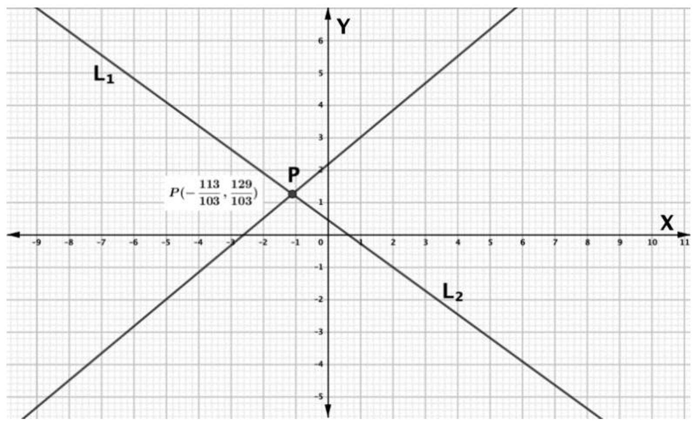
$$(5)(8x + 11y - 5) = (5)(0)$$

$$(-8)(5x-6y+13)=(-8)(0)$$
Obtenemos el siguiente sistema: $$40x+55y-25=0$$ $$-40x+48y-104=0$$
Ordenamos el sistema: $$40x+55y=25$$ $$-40x+48y=104$$
Resolvemos el sistema: $$\begin{array}{r} 40x+55y=25 \\ \underline{-40x+48y=104} \\ 103y=129 \end{array}$$ $$103y=129$$ $$y=\frac{129}{103}$$ $$y\approx 1.25$$ Ahora encontramos el valor de x, sustituimos el valor de y en la ecuación (2): $$5x-6\left(\frac{129}{103}\right)+13=0$$ $$5x-\frac{774}{103}+13=0$$ $$5x+\frac{(-774)+1339}{103}=0$$ $$5x+\frac{565}{103}=0$$ $$5x=-\frac{565}{103}$$ Multiplicamos ambos miembros de la ecuación por el recíproco de 5 para despejar x: $$\left(\frac{1}{5}\right)5x=\left(\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{565}{103}\right)$$ $$x=-\frac{565}{515}=-\frac{113}{103}$$

$$x \approx -1.1$$

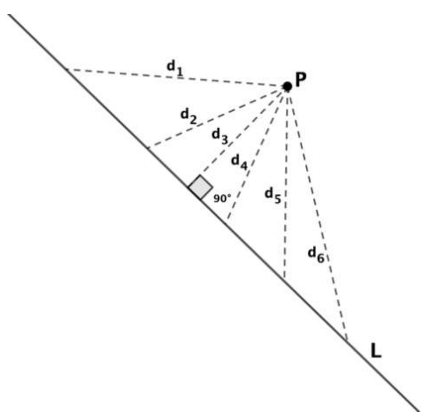
Luego, los valores de "x" y "y" en el álgebra, toman otro sentido si nos regresamos a la Geometría Analítica, ahora, son coordenadas del punto de intersección de las rectas dadas.
Por lo tanto, las coordenadas exactas del punto de intersección son: $P\left(-\frac{113}{103}, \frac{129}{103}\right)$ y las coordenadas aproximadas son: $P(-1.1, 1.25)$.

Lo anterior, se observa en la siguiente figura:



3.2.5 Distancia de una recta a un punto

Observe la siguiente figura, ¿Cuál de las siguientes distancias d_i del punto P a la recta L es la menor?



Efectivamente, la distancia más corta del punto P a la recta L es d_3 que es la longitud del segmento de recta perpendicular a la recta L. Las longitudes son números positivos.

La distancia de la recta L cuya ecuación es de la forma $Ax + By + C = 0$ al punto $P(x_1, y_1)$, el cual, no pertenece a la recta L, es igual a

$$d = \frac{Ax_1 + by_1 + c}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

El signo de la raíz se escoge, de tal manera que todo el cociente sea un número positivo. También, puede encontrar la siguiente expresión equivalente, donde las rectas verticales | | significan el valor absoluto de la cantidad dentro de ellas: si esta cantidad es negativa, resultara la misma cantidad con signo positivo y si esta cantidad es positiva, el resultado será la misma cantidad con signo positivo:

$$d = \left| \frac{Ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

¿Qué pasa con la distancia si el punto P pertenece a la recta? ¿Cuál es el valor de la distancia?

EJEMPLO 1: Encuentre la distancia de la recta L cuya ecuación es $y = \frac{5}{3}x - 1$ al punto $P(-4{,}5)$.

Observemos que, la ecuación de la recta no cumple con la condición de estar en la forma general, así que, tendremos que escribirla en esta forma, además, tenemos que asegurarnos de que el punto P no pertenezca a la recta L:

$$y = \frac{5}{3}x - 1$$

Multiplicamos toda la ecuación por el denominador 3:

$$(3)(y) = (3)\left(\frac{5}{3}x - 1\right)$$

$$3y = (3)\left(\frac{5}{3}x\right) - (3)(1)$$

$$3y = 5x - 3$$

Finalmente, la forma general de la ecuación de la recta es:

$$0 = 5x - 3y - 3$$

$$0 = Ax + By + C$$

Donde $A = 5,\ B = -3\ y\ C = -3$

Ahora verifiquemos que el punto P no pertenezca a la recta, ¿cómo hacemos esto?

Sustituyamos las coordenadas del punto P en cualesquiera de las ecuaciones anteriores, las cuales, recordemos que son equivalentes. Si obtenemos una identidad, entonces el punto sí pertenece a la recta; si llegamos a una contradicción, entonces el punto no pertenece a la recta:

Consideremos:

$$y = \frac{5}{3}x - 1$$

Aquí, sustituimos las coordenadas del punto $P(-4{,}5) = (x, y)$:

$$5 = \frac{5}{3}(-4) - 1$$

$$5 = -\frac{20}{3} - 1$$

$$5 = -\frac{23}{3}$$

Esto es una contradicción, las coordenadas del punto P no satisfacen la ecuación de la recta L, esto significa que P no es un punto que pertenezca a la recta L.

Ahora, estamos en condiciones de aplicar la expresión analítica de la distancia de un punto a la recta porque ya nos aseguramos de que la ecuación esté en la forma general y el punto no pertenece a la recta:

$$L\text{:}\ 5x - 3y - 3 = 0 \quad y \quad P(-4{,}5) = (x_1, y_1)$$

Sustituimos en:

$$d = \frac{Ax_1 + by_1 + c}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$d = \frac{5(-4) + (-3)(5) + (-3)}{\pm\sqrt{5^2 + (-3)^2}} = \frac{-20 - 15 - 3}{\pm\sqrt{25 + 9}} = \frac{-38}{\pm\sqrt{34}}$$

Observe que, el numerador es negativo, así que, el denominador, también, debe ser negativo para que, al aplicar la ley de los signos de la división, el resultado sea positivo, la distancia buscada es el valor positivo:

$$d = \frac{-38}{-\sqrt{34}} = \frac{38}{\sqrt{34}}\ unidades$$

Si racionalizamos el denominador, la respuesta queda así:

$$d = \left(\frac{38}{\sqrt{34}}\right)\left(\frac{\sqrt{34}}{\sqrt{34}}\right) = \frac{38\sqrt{34}}{34} = \frac{19\sqrt{34}}{17}\ u$$

Recuerde que es recomendable racionalizar el denominador cuando en el denominador existe una raíz.

EJEMPLO 2: Determine la distancia de la recta L cuya ecuación es $x = -7$ al punto $Q\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

¿Qué observa de la ecuación de la recta L? ¿Esta cumple con la condición para aplicar la fórmula de la distancia entre una recta y un punto? ¿Puede obtener la forma general de la ecuación dada? A simple vista, ¿podría decir si el punto Q pertenece a la recta o no?

La ecuación de la recta $x = -7$ puede escribirse en la forma general como sigue:

$$x = -7$$

$$x + 7 = 0$$

$$Ax + By + C = 0$$

Donde $A = 1, B = 0 \; y \; C = 7$. También, tenemos el punto $Q\left(\frac{1}{2}, 1\right) = (x_1, y_1)$. Sustituimos los valores en la fórmula:

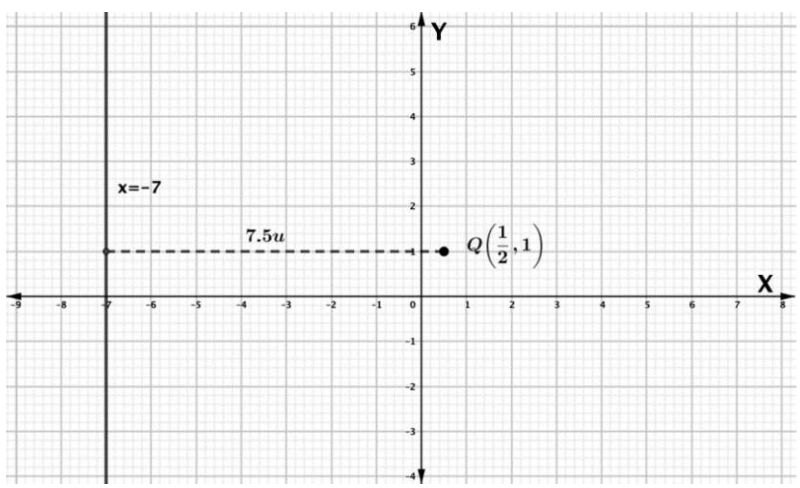
$$d = \frac{Ax_1 + by_1 + c}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$d = \frac{(1)\left(\frac{1}{2}\right) + 0(1) + 7}{\pm\sqrt{1^2 + 0^2}} = \frac{\frac{1}{2} + 7}{\pm\sqrt{1}} = \frac{\frac{15}{2}}{\pm 1}$$

Observe que el numerador es positivo, luego, en el denominador debemos tomar el signo positivo para que todo el cociente sea positivo. Finalmente, tenemos que la distancia buscada es:

$$d = \frac{\frac{15}{2}}{\frac{1}{1}} = \frac{15}{2} = 7.5 \; unidades$$

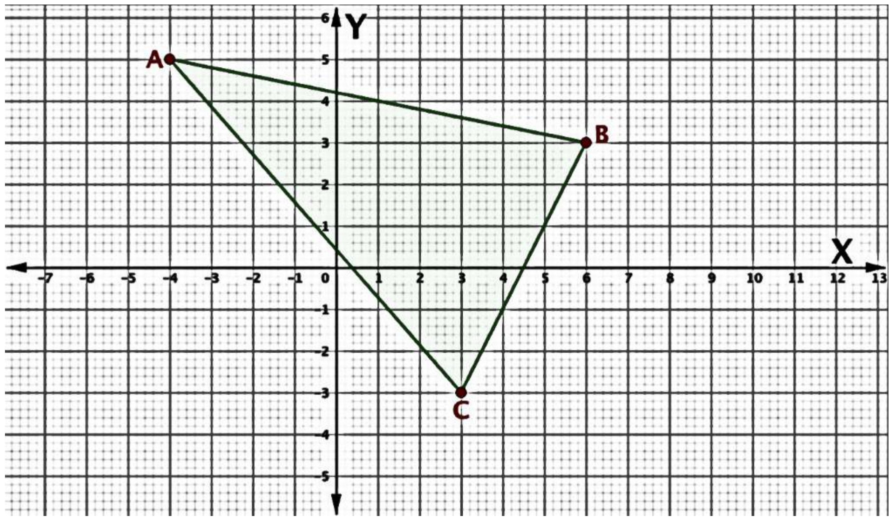
Esta distancia está representada en la siguiente figura:



3.2.6 Ecuaciones de las rectas notables del triángulo

A continuación, aprenderemos a encontrar la ecuación de la rectas mediatriz, mediana y altura de un triángulo. Estudiaste algo de esto en Geometría Euclidiana en Matemáticas II. Ahora, vamos a ver cómo se trabaja lo mismo, pero en Geometría Analítica.

En toda esta sección vamos a considerar el triángulo con vértices $A(-4{,}5)$, $B(6{,}3)$ y $C(3,-3)$, el cual, se denota como ΔABC y se muestra en la figura siguiente:



EJEMPLO 1: Considere el ΔABC. Obtenga la ecuación de cada recta que es mediatriz a cada lado del triángulo.

Recordemos la **definición de una mediatriz**: La **mediatriz** de un segmento es la recta perpendicular a él que pasa por su punto medio y tiene la propiedad de que sus puntos equidistan de los extremos del segmento.

¿Cuántas mediatrices tenemos que encontrar? ¿Qué elementos necesitamos conocer para obtener la ecuación de la mediatriz? Efectivamente, un punto que pertenezca a ella y el valor de su pendiente.

Consideremos encontrar la mediatriz del lado $\overline{AB}$ del ΔABC. No tenemos explícitamente el valor de la pendiente de la mediatriz, ¿tienes alguna idea de cómo obtenerla?

La mediatriz del lado $\overline{AB}$ es una recta perpendicular a este lado. Conocemos la condición que se requiere para que dos rectas sean perpendiculares: $m_1 m_2 = -1$ o bien, $m_1 = -\frac{1}{m_2}$.

Encontremos la pendiente del lado $\overline{AB}$ y llamémosla m_1.

Tenemos que, $A(-4{,}5) = (x_1, y_1)$ y $B(6{,}3) = (x_2, y_2)$. Sustituyendo en la expresión:

$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 5}{6 - (-4)} = \frac{-2}{10} = -\frac{1}{5}$$

Para encontrar la pendiente de la mediatriz, usamos la información de que la recta es perpendicular a $\overline{AB}$ y recordemos que:

La pendiente que queremos conocer es igual a menos uno entre la pendiente que conocemos.

Llamemos m_2 a la pendiente de la mediatriz del lado $\overline{AB}$, luego,

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

$$m_2 = -\frac{1}{-\frac{1}{5}} = \frac{-\frac{1}{1}}{-\frac{1}{5}} = 5$$

Ahora, encontraremos un punto que pertenece a la mediatriz y este no puede ser otro que el punto medio del lado $\overline{AB}$ porque debemos tener los requisitos que pide la definición para que la recta sea la mediatriz. Recuerde de la unidad 2 de esta guía cómo obtener este punto.

Retomemos los puntos $A(-4,5) = (x_1, y_1)\ y\ B(6,3) = (x_2, y_2)$ y sustituyamos en:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

El punto medio por donde pasa la mediatriz es:

$$\left(\frac{-4 + 6}{2}, \frac{5 + 3}{2}\right) = \left(\frac{2}{2}, \frac{8}{2}\right) = (1,4)$$

¡¡Ya tenemos la pendiente y un punto por donde pasa la mediatriz!! Ahora, encontremos su ecuación usando la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 4 = 5(x - 1)$$

$$y - 4 = 5x - 5$$

$$y = 5x - 5 + 4$$

Finalmente, la ecuación de la mediatriz del lado $\overline{AB}$ en su forma pendiente-ordenada al origen es:

$$y = 5x - 1$$

Desarrolle lo que falta para encontrar las otras dos ecuaciones restantes de cada mediatriz de los lados restantes del ΔABC.

EJEMPLO 2: Obtenga las coordenadas del punto donde se intersecan las mediatrices (llamado el **circuncentro**) del ejemplo 1 anterior.

¿Qué necesitas para obtener la intersección entre rectas? Así es, conocer las ecuaciones de las rectas y saber los métodos para resolver un sistema de ecuaciones.

En el ejemplo anterior se obtuvieron estas ecuaciones, tomaremos la ecuación de la mediatriz del lado $\overline{AB}$ y la del lado $\overline{BC}$ para formar el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$y = 5x - 1$ $y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{4}$
Ordenamos el sistema para resolverlo por el método de Suma y Resta: $-5x + y = -1$ $\frac{1}{2}x + y = \frac{9}{4}$
Nos deshacemos de las fracciones multiplicando la segunda ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores: $-5x + y = -1$ $4\left(\frac{1}{2}x + y\right) = (4)\left(\frac{9}{4}\right)$
Se obtiene el sistema más simple: $-5x + y = -1$ $2x + 4y = 9$
Una manera de resolver este sistema es multiplicando la primera ecuación por -4 y luego, sumamos términos semejantes: $(-4)(-5x + y) = (-4)(-1)$ $2x + 4y = 9$
Finalmente, el sistema queda así: $\begin{array}{r} 20x - 4y = 4 \\ \underline{2x + 4y = 9} \\ 22x + 0 = 13 \end{array}$ Despejamos “x”: $22x = 13$ $x = \frac{13}{22}$ Para encontrar el valor de “y” sustituimos en cualquiera de las dos ecuaciones originales: $y = 5x - 1 = 5\left(\frac{13}{22}\right) - 1 = \frac{65}{22} - 1 = \frac{65 - 22}{22} = \frac{43}{22}$

La intersección de las mediatrices es el punto $\left(\frac{13}{22}, \frac{43}{22}\right) \approx (0.6,2)$ llamado el **circuncentro**.
Observe que, para encontrar la intersección se tomaron las mediatrices de los lados $\overline{AB}\ y\ \overline{BC}$ pero se pudo tomar cualquier otro par de mediatrices como las de los lados $\overline{AC}\ y\ \overline{BC}$ o $\overline{AB}\ y\ \overline{AC}$ y obtendríamos el mismo punto de intersección. Sabemos que tienes la curiosidad e iniciativa para verificar este hecho.

EJEMPLO 3: Considere el ΔABC y obtenga la ecuación de cada recta mediana de este triángulo.

Recordemos la **definición de una mediana**: Una **mediana** de un triángulo es la recta que pasa por un vértice y por el punto medio del lado opuesto.

¿Cuántas medianas tiene el ΔABC? ¿Qué elementos necesitamos para obtener la ecuación de una mediana? Efectivamente, en este caso, necesitamos dos puntos conocidos de la mediana.

Vamos a obtener la mediana que parte del vértice A y llega al punto medio del lado opuesto $\overline{BC}$. Vamos a encontrar este punto medio.

Tenemos los puntos $B(6,3) = (x_1, y_1)\ y\ C(3,-3) = (x_2, y_2)$ para sustituir en:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$$\left(\frac{6+3}{2}, \frac{3+(-3)}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}, 0\right)$$

Ahora, tenemos el vértice $A(-4,5)$ y el punto medio $\left(\frac{9}{2}, 0\right)$ del lado opuesto al vértice A. Tenemos los requisitos para que la recta sea una mediana. La pendiente de esta recta mediana es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-5}{\frac{9}{2} - (-4)} = \frac{-5}{\frac{9}{2} + 4} = \frac{-5}{\frac{17}{2}} = -\frac{10}{17}$$

Tomando cualesquiera de los dos puntos y la pendiente podemos usar la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 5 = -\frac{10}{17}(x - (-4))$$

$$y - 5 = -\frac{10}{17}(x + 4)$$

$$y - 5 = -\frac{10}{17}x - \frac{40}{17}$$

$$y = -\frac{10}{17}x - \frac{40}{17} + 5$$

$$y = -\frac{10}{17}x + \frac{(-40) + 85}{17}$$

$$y = -\frac{10}{17}x + \frac{45}{17}$$

Esta es la ecuación de la mediana que pasa por el vértice A en su forma ordinaria.

Desarrolle lo que falta para encontrar las otras dos ecuaciones restantes de las medianas del ΔABC.

EJEMPLO 4: Obtenga las coordenadas del punto donde se intersecan las medianas (llamado el **baricentro o centro de gravedad**) del ejemplo 3 anterior.

Como se vio anteriormente, tenemos que encontrar la intersección entre cualesquiera dos rectas medianas y su curiosidad e iniciativa lo llevará a corroborar el resultado con la ecuación faltante.

Para encontrar el punto de intersección de las medianas consideremos la ecuación de la mediana que pasa por el vértice A y la que pasa por el vértice B para formar el siguiente sistema de ecuaciones lineales, el cual, se resolverá por el método de Suma y Resta:

$\frac{10}{17}x + y = \frac{45}{17}$ $-\frac{4}{13}x + y = \frac{15}{13}$
Nos deshacemos de las fracciones multiplicando cada ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores, es decir, la primera por 17 y la segunda por 13: $10x + 17y = 45$ $-4x + 13y = 15$
Vamos a eliminar la variable "x" multiplicando la primera ecuación por 4 y la segunda por 10: $4(10x + 17y) = (4)(45)$ $10(-4x + 13y) = (10)(15)$ Finalmente, tenemos el sistema: $\begin{array}{r} 40x + 68y = 180 \\ \underline{-40x + 130y = 150} \\ 0 + 198y = 330 \end{array}$

Resolvemos la ecuación:

$$198y = 330$$

$$y = \frac{330}{198} = \frac{5}{3}$$

Ahora, tenemos que encontrar el valor de “x” tomando cualesquiera de las ecuaciones originales:

$$10x + 17y = 45$$

$$10x + 17\left(\frac{5}{3}\right) = 45$$

$$10x + \frac{85}{3} = 45$$

$$10x = 45 - \frac{85}{3} = \frac{135 - 85}{3} = \frac{50}{3}$$

$$10x = \frac{50}{3}$$

$$x = \frac{\frac{50}{3}}{\frac{10}{1}} = \frac{50}{30} = \frac{5}{3}$$

$$x = \frac{5}{3}$$

Recuerde que tenemos que mostrar la máxima simplificación.
Por lo tanto, la intersección de las medianas, **el baricentro o centro de gravedad**, es el punto $\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

EJEMPLO 5: Considere el ΔABC y obtenga la ecuación de cada recta llamada altura de este triángulo.

Recordemos la **definición de altura**: Una **altura** de un triángulo es la recta que pasa por un vértice y es perpendicular a la recta que contiene al lado opuesto.

¿Cuántas alturas tiene el ΔABC? ¿Qué elementos necesitamos para obtener la ecuación de una recta llamada altura? ¡Muy bien! Un punto y su pendiente.

Determinemos la altura que pasa por el vértice A y cae perpendicularmente en el lado opuesto $\overline{BC}$. Conocemos la pendiente del lado $\overline{BC}$ y, también, la pendiente de una recta perpendicular a este lado por el trabajo hecho en el ejemplo 1.

La pendiente del lado $\overline{BC}$ es igual a 2, la altura que pasa por el vértice A tiene pendiente igual a $-\frac{1}{2}$ y, tenemos que, que el vértice $A(-4{,}5) = (x_1, y_1)$. Usaremos la forma punto-pendiente.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 5 = -\frac{1}{2}(x - (-4))$$

$$y - 5 = -\frac{1}{2}(x + 4)$$

$$y - 5 = -\frac{1}{2}x - 2$$

$$y = -\frac{1}{2}x - 2 + 5$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 3$$

Esta es la ecuación de la altura que pasa por el vértice A en su forma ordinaria. Desarrolla lo que falta para encontrar las otras ecuaciones de las alturas que faltan.

EJEMPLO 6: Encuentra las coordenadas del punto de intersección de las alturas (llamado **ortocentro**) del ejemplo 5 anterior.

Tenemos que encontrar la intersección de cualquier par de rectas llamadas alturas.

Consideremos la altura que pasa por el vértice A y la que pasa por el vértice B para formar el sistema de ecuaciones lineales, el cual, se va a resolver por el método de Suma y Resta:

$$\frac{1}{2}x + y = 3$$ $$-\frac{7}{8}x + y = -\frac{18}{8}$$
Nos deshacemos de las fracciones multiplicando la primera ecuación por 2 y la segunda por 8 para obtener un sistema más simple: $$x + 2y = 6$$ $$-7x + 8y = -18$$
Vamos a eliminar la variable "x": $$7(x + 2y) = (7)(6)$$ $$-7x + 8y = -18$$

Finalmente, tenemos el sistema:

$$\begin{array}{r} 7x + 14y = 42 \\ -7x + 8y = -18 \\ \hline 0 + 22y = 24 \end{array}$$

Resolvemos la ecuación:

$$22y = 24$$

$$y = \frac{24}{22} = \frac{12}{11}$$

Para encontrar el valor de "x", tomamos cualquier ecuación de las originales:

$$x + 2y = 6$$

$$x + 2\left(\frac{12}{11}\right) = 6$$

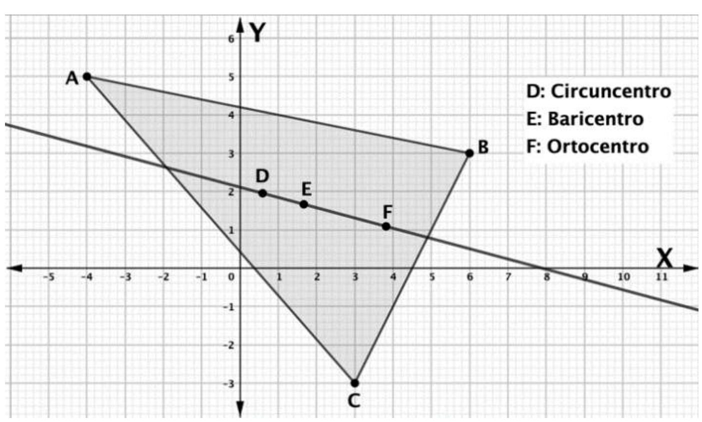
$$x + \frac{24}{11} = 6$$

$$x = 6 - \frac{24}{11} = \frac{66 - 24}{11} = \frac{42}{11}$$

$$x = \frac{42}{11}$$

Por lo tanto, la intersección de las alturas es el punto $\left(\frac{42}{11}, \frac{12}{11}\right)$ llamado el **ortocentro**.

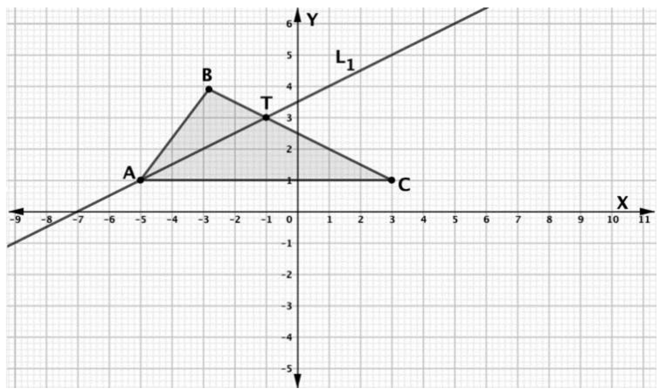
Si graficamos los puntos anteriores, podemos notar en la figura siguiente que los puntos llamados circuncentro, baricentro y ortocentro están alineados y forman parte de una recta que tiene el nombre especial de "**Recta de Euler**". Fácilmente puedes encontrar la ecuación de esta recta.



PROBLEMAS RESUELTOS.

A continuación, se resolverán ejercicios que involucran conocimientos vistos hasta ahora en la presente guía o en semestres anteriores.

1) Observa la siguiente figura y obtenga la ecuación de la recta L_1 y justifique porqué es la bisectriz del $\measuredangle BAC$.



Qué necesitamos para encontrar la ecuación de L_1? Efectivamente, un punto y la pendiente (o dos puntos). ¿Qué necesitamos para justificar que L_1 es una bisectriz? ¿Cuál es la definición de bisectriz? ¿Cómo encontramos uno de los ángulos que forma la bisectriz?

Observando la figura, tenemos el ΔABC con vértices $A(-5,1)$, $B\left(-\frac{141}{50},\frac{39}{10}\right)$ y $C(3,1)$ y tenemos el punto $T(-1,3)$.

Primero, observemos que la recta L_1 pasa por los puntos A y T, luego, tenemos que:

$A(-5,1) = (x_1, y_1)$ y $T(-1,3) = (x_2, y_2)$. Encontremos la pendiente de L_1:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-1}{-1-(-5)} = \frac{2}{-1+5} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Usando la forma punto-pendiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = \frac{1}{2}\big(x - (-5)\big)$$

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x + 5)$$

$$y - 1 = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} + 1$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

Es la ecuación de L_1 en su forma ordinaria.

Para justificar que L_1 es bisectriz del $\sphericalangle BAC$, recordemos la definición de bisectriz vista en matemáticas 2: **La bisectriz de un ángulo es la recta que pasa por el vértice de este y lo divide en dos ángulos iguales.**

El $\sphericalangle BAC$ está formado por el $\sphericalangle BAT$ y el $\sphericalangle TAC$, tenemos que encontrar sus medidas y verificar que son iguales. Observe la figura, ¿de cuántas maneras podemos encontrar la medida del $\sphericalangle TAC$? Una forma es usando el conocimiento del ángulo de inclinación de una recta y su relación con el valor de la pendiente y es la que vamos a usar a continuación, ¿cuál es la otra forma?

Tenemos que la pendiente de L_1 es $m = \frac{1}{2}$, luego, el valor de la pendiente es igual a la tangente de la medida del $\sphericalangle TAC$:

$$m = tan \sphericalangle TAC$$

$$\frac{1}{2} = tan \sphericalangle TAC$$

$$tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \sphericalangle TAC 26.5^0 = \sphericalangle TAC$$

Observa que, el ángulo de inclinación de recta L_1 con respecto al eje X, es igual al ángulo de inclinación del segmento $\overline{AT}$ con respecto a la recta $y = 1$. ¿Por qué? Puede revisar la unidad 2 de esta guía.

Ahora, encontremos la medida del $\sphericalangle BAT$, encontraremos la medida del $\sphericalangle BAC$ y restar la del $\sphericalangle TAC$ para observar el resultado, que es lo que vamos a hacer:

¿Cómo encontramos la medida del $\sphericalangle BAC$? Haciendo uso del conocimiento del ángulo entre dos rectas. Consideremos la recta que tiene el segmento $\overline{AC}$ y la recta cuyo segmento es $\overline{AB}$.

La pendiente de la recta con segmento $\overline{AC}$ es igual a cero, ¿por qué? Llamemos a esta pendiente $m_{AC} = 0$.

Para encontrar la pendiente de la recta que tiene el segmento $\overline{AB}$, consideremos los puntos $A(-5,1) = (x_1, y_1)\ y\ B\left(-\frac{141}{50}, \frac{39}{10}\right) = (x_2, y_2)$.

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{39}{10} - 1}{-\frac{141}{50} - (-5)} = \frac{\frac{29}{10}}{\frac{-141 + 250}{50}} = \frac{\frac{29}{10}}{\frac{109}{50}} = \frac{1450}{1090} = \frac{290}{218} = \frac{145}{109}$$

Recuerda conseguir la máxima simplificación de los resultados. Sin pérdida de generalidad, llamemos $m_1 = m_{AC} = 0\ y\ m_2 = m_{AB} = \frac{145}{109}$. Recuerda el orden en que se consideran los valores de las pendientes: m_1 la pendiente de la recta que tiene el lado inicial del ángulo θ y m_2 la pendiente de la recta que tiene el lado terminal del ángulo θ, el cual, se considera en sentido contrario a las manecillas del reloj.

$$\tan \measuredangle BAC = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} = \frac{\frac{145}{109} - 0}{1 + \left(\frac{145}{109}\right)(0)} = \frac{\frac{145}{109}}{1} = \frac{145}{109}$$

$$\tan \measuredangle BAC = \frac{145}{109}$$

$$\measuredangle BAC = tan^{-1}\left(\frac{145}{109}\right)$$

$$\measuredangle BAC = 53^0$$

Luego, la medida del $\measuredangle BAT$ se obtiene así:

$$\measuredangle BAC = \measuredangle BAT + \measuredangle TAC$$

$$53^0 = \measuredangle BAT + 26.5^0$$

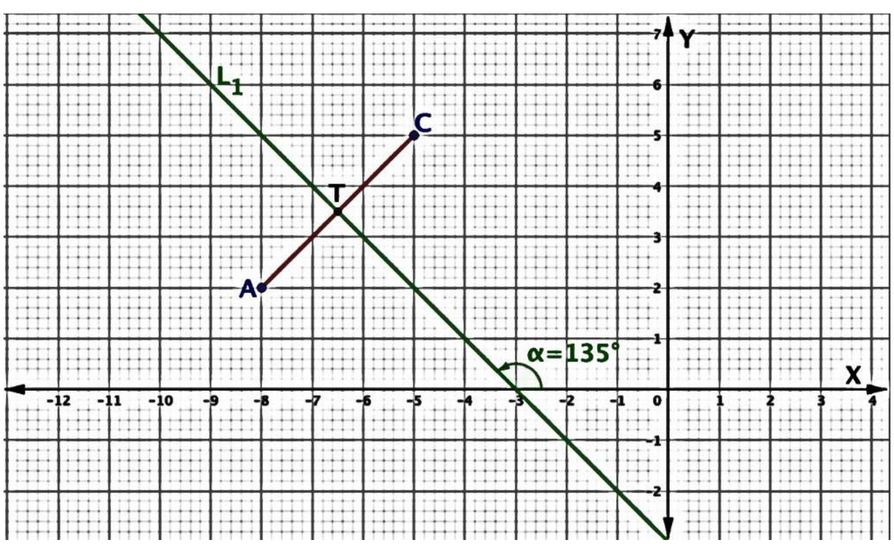
$$53^0 - 26.5^0 = \measuredangle BAT$$

$$26.5^0 = \measuredangle BAT$$

Los ángulos $\measuredangle TAC$ y $\measuredangle BAT$ tienen la misma medida, por lo tanto, la recta L_1 es la bisectriz del $\measuredangle BAC$.

2) Observa la siguiente figura y justifique porqué la recta L_1 que pasa por $T\left(-\frac{13}{2}, \frac{7}{2}\right)$ y tiene ángulo de inclinación $\alpha = 135^0$:

2.1) Es la mediatriz del segmento $\overline{AC}$ y encuentre su ecuación en la forma general.



Vamos a encontrar la ecuación de L_1 y usaremos el valor del ángulo de inclinación como sigue, donde m denota el valor de la pendiente de L_1:

$m = tan\alpha \implies m = tan135^0 \quad \therefore m = -1$

La recta L_1 tiene pendiente con valor igual a -1, así, su ecuación se obtiene de la siguiente manera si suponemos que $T\left(-\frac{13}{2}, \frac{7}{2}\right) = (x_1, y_1)$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - \frac{7}{2} = -1\left(x - \left(-\frac{13}{2}\right)\right)$$

$$y - \frac{7}{2} = -1\left(x + \frac{13}{2}\right)$$

$$y - \frac{7}{2} = -x - \frac{13}{2}$$

Nos deshacemos de las fracciones para obtener una ecuación más simple multiplicando por 2 toda la ecuación:

$$2\left(y - \frac{7}{2}\right) = (2)\left(-x - \frac{13}{2}\right)$$

$$2y - 7 = -2x - 13$$

$$2x + 2y - 7 + 13 = 0$$

$$2x + 2y + 6 = 0$$

$$Ax + By + C = 0$$

Observemos que los coeficientes y el término independiente son divisibles entre dos y se puede simplificar como sigue:

$$2x + 2y + 6 = 0$$

$$\frac{2x}{2} + \frac{2y}{2} + \frac{6}{2} = \frac{0}{6}$$

$$x + y + 3 = 0$$

$$Ax + By + C = 0$$

Todas estas ecuaciones del bloque anterior son equivalentes, finalmente la ecuación de la recta L_1 en su forma general es $x + y + 3 = 0$.

Para justificar que L_1 es la mediatriz del segmento $\overline{AC}$, necesitamos saber si el punto T es el punto medio del segmento $\overline{AC}$, además, debemos conocer el ángulo que forman el segmento $\overline{AC}$ y la recta L_1.

Obtengamos el punto medio del segmento $\overline{AC}$. Consideremos $A(-8,2) = (x_1, y_1)\ y\ C(-5,5) = (x_2, y_2)$, luego, denotemos el punto medio como PM_{AC}.

$$PM_{AC} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_1}{2}\right) = \left(\frac{-8 + (-5)}{2}, \frac{2 + 5}{2}\right) = \left(-\frac{13}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

Las coordenadas de este punto son iguales a las coordenadas del punto T, luego, la recta L_1 pasa por el punto medio del segmento $\overline{AC}$. Si L_1 es la mediatriz de $\overline{AC}$, estos deben ser perpendiculares:

Consideremos lo siguiente para obtener la pendiente del segmento $\overline{AC}$:

$A(-8,2) = (x_1, y_1)\ \ y\ \ C(-5,5) = (x_2, y_2)$

$$m_{AC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-2}{-5-(-8)} = \frac{3}{3} = 1$$

Sabemos que la pendiente de L_1 es igual a -1. Usemos el conocimiento de la definición para que dos rectas sean perpendiculares: La multiplicación de las pendientes es igual a menos uno:

$$(m_{AC})(m) = (1)(-1) = -1$$

Por lo tanto, podemos asegurar que la recta L_1 es la mediatriz del segmento $\overline{AC}$ porque ésta pasa por el punto medio del segmento y es perpendicular al mismo.

2.2) ¿Cuál sería un tercer punto B para formar un triángulo ΔABC isósceles? Justifique su respuesta.

Podemos tomar un punto sobre la mediatriz, demos cualquier número real como valor para x, por ejemplo, $x = -\frac{5}{2}$ y sustituyamos en la ecuación de la mediatriz para encontrar el valor de y:

$$x + y + 3 = 0$$

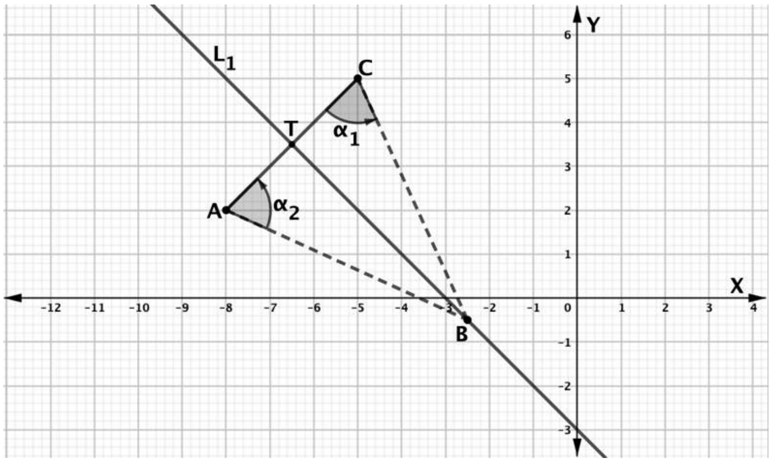
$$-\frac{5}{2} + y + 3 = 0$$

$$y = \frac{5}{2} - 3 = -\frac{1}{2}$$

Luego, otro punto que pertenece a la mediatriz es $B\left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, este punto equidista de los extremos del segmento $\overline{AC}$, usted puede revisar que la distancia de B a A es igual a la distancia de B a C. Esta es una propiedad que tiene la mediatriz.

2.3) Con el punto B obtenido en el inciso anterior, verifica el teorema del triángulo isósceles: Si un triángulo es isósceles, entonces los ángulos opuestos a lados iguales tienen la misma medida.

Hagamos un dibujo para entender la situación planteada:



Comprobemos que $\alpha_1 = \alpha_2$, haciendo uso del conocimiento del ángulo entre dos rectas. Observe en la figura que, los ángulos están indicados en sentido contrario a las manecillas del reloj y recuerde que la pendiente m_1 es la del segmento inicial del ángulo y la pendiente m_2 es la del segmento final del ángulo.

Primero encontremos el valor de α_1:

Sabemos que, $m_{AC} = 1$ por el inciso a), luego, si consideramos $B\left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right) = (x_1, y_1)\ y\ \ C(-5{,}5) = (x_2, y_2)$.

$$m_{BC} = \frac{5 - \left(-\frac{1}{2}\right)}{-5 - \left(-\frac{5}{2}\right)} = \frac{5 + \frac{1}{2}}{-5 + \frac{5}{2}} = \frac{\frac{11}{2}}{\frac{-5}{2}} = -\frac{11}{5}$$

Luego,

$$tan\alpha_1 = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} = \frac{-\frac{11}{5} - 1}{1 + \left(-\frac{11}{5}\right)(1)} = \frac{-\frac{16}{5}}{-\frac{6}{5}} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$

$$tan\alpha_1 = \frac{8}{3}$$

$$\alpha_1 = tan^{-1}\left(\frac{8}{3}\right)$$

$$\alpha_1 = 69.44^0$$

Ahora, encontremos el valor de α_2:

Así, tenemos que, una vez más usaremos el valor de $m_{AC} = 1$ y consideremos $A(-8{,}2) = (x_1, y_1)\ \ y\ \ B\left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right) = (x_2, y_2)$.

$$m_{AB} = \frac{-\frac{1}{2} - 2}{-\frac{5}{2} - (-8)} = \frac{-\frac{5}{2}}{-\frac{5}{2} + 8} = \frac{\frac{-5}{2}}{\frac{11}{2}} = -\frac{5}{11}$$

Luego,

$$tan\alpha_2 = \frac{1-\left(-\frac{5}{11}\right)}{1+(1)\left(-\frac{5}{11}\right)} = \frac{1+\frac{5}{11}}{1-\frac{5}{11}} = \frac{\frac{16}{11}}{\frac{6}{11}} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$

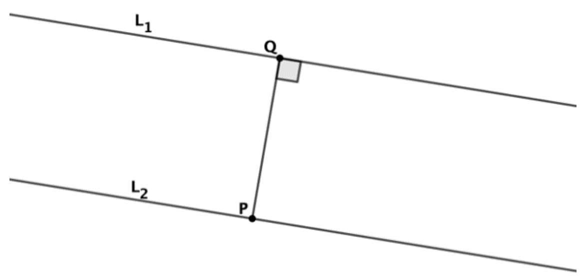
$$tan\alpha_2 = \frac{8}{3}$$

$$\alpha_2 = tan^{-1}\left(\frac{8}{3}\right)$$

$$\alpha_2 = 69.44^0$$

Por lo tanto, $\alpha_1 = \alpha_2$ y se verifica el teorema del triángulo isósceles.

3) Sean las rectas cuyas ecuaciones son $L_1 : \frac{1}{2}x + 3y = 22$ y $L_2 : x + 6y + 9 = 0$. Encuentra la longitud del segmento $\overline{PQ}$ que es perpendicular a la recta L_1 como se observa en la figura siguiente:



Hagamos un plan, pensemos cómo podemos abordar este ejercicio: Si queremos encontrar la longitud del segmento $\overline{PQ}$, podríamos pensar en dos maneras: Encontrar la distancia entre los puntos P y Q, asegurándonos de que ambas rectas dadas sean paralelas **(**¿qué pasaría si las rectas no fueran paralelas? Puede hacer un dibujo para representar esta situación y tratar de responder**)** o, también, usar el conocimiento de la distancia de un punto a una recta.

Desarrollaremos la primera, usted comprobará que la segunda manera es mucho más breve que la siguiente:

Como tenemos la ecuación de L_1 podemos encontrar un punto de ella dando cualquier valor real a x, por ejemplo y por facilidad, tomemos $x = 1$, luego, sustituimos en su ecuación:

$$\frac{1}{2}x + 3y = 22$$

$$\frac{1}{2}(1) + 3y = 22$$

$$3y = 22 - \frac{1}{2}$$

$$3y = \frac{44 - 1}{2} = \frac{43}{2}$$

$$y = \frac{\frac{43}{2}}{\frac{3}{1}} = \frac{43}{6}$$

Un punto que pertenece a L_1 es $Q\left(1, \frac{43}{6}\right)$, tenemos el dato de que el segmento $\overline{PQ}$ es perpendicular a la recta L_1, luego, podemos encontrar la pendiente de L_1 y, así, tendremos la pendiente del segmento $\overline{PQ}$, ¿por qué nos sirve esto? Porque el punto P se encuentra precisamente en este segmento y la intersección con la recta L_2, así que, el punto P debe satisfacer estas dos condiciones, por esto necesitamos la pendiente del segmento para encontrar su ecuación.

La pendiente de L_1 se puede conseguir encontrando la forma ordinaria de la ecuación de esta recta:

$$\frac{1}{2}x + 3y = 22$$

Multipliquemos por 2 toda la ecuación para quitar la fracción:

$$(2)\left(\frac{1}{2}x + 3y\right) = (2)(22)$$

$$x + 6y = 44$$

$$6y = 44 - x$$

Dividimos toda la ecuación entre 6 para despejar y:

$$\frac{6y}{6} = \frac{44 - x}{6} = \frac{44}{6} - \frac{x}{6}$$

$$y = \frac{22}{3} - \frac{1}{6}x$$

Reacomodando términos:

$$y = -\frac{1}{6}x + \frac{22}{3}$$

$$y = mx + b$$

Luego, la pendiente de L_1 es $m = -\frac{1}{6}$. Como el segmento $\overline{PQ}$ es perpendicular a esta recta (en símbolos: $\overline{PQ} \perp L_1$) su pendiente se obtiene:

$$m_{PQ} = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{-\frac{1}{6}} = \frac{-\frac{1}{1}}{-\frac{1}{6}} = 6$$

La ecuación de la recta que contiene al segmento $\overline{PQ}$ pasa por $Q\left(1, \frac{43}{6}\right) = (x_1, y_1)$ y tiene pendiente con valor igual a 6, usaremos la forma punto-pendiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - \frac{43}{6} = 6(x - 1)$$

$$y - \frac{43}{6} = 6x - 6$$

$$y = 6x - 6 + \frac{43}{6}$$

$$y = 6x + \frac{(-36) + 43}{6}$$

$$y = 6x + \frac{7}{6}$$

Ahora, tomamos la intersección de esta recta que contiene al segmento $\overline{PQ}$ y la recta L_2 para obtener las coordenadas del punto P, se forma así, el siguiente sistema de ecuaciones, el cual, se resolverá por el método de Suma y Resta:

$x + 6y + 9 = 0$ $y = 6x + \frac{7}{6}$
Ordenamos el sistema como sigue: $x + 6y = -9$ Multiplicando por 6 la segunda ecuación: $6y = 36x + 7$
El sistema queda así: $x + 6y = -9$ $-36x + 6y = 7$ Multiplicamos por -1 la primera ecuación para obtener el sistema: $-x \quad - \quad 6y = 9$ $\underline{-36x + 6y = 7}$ $-37x + 0 = 16$

Resolvemos la ecuación:

$$-37x = 16$$

$$x = \frac{16}{-37} = -\frac{16}{37}$$

Para encontrar el valor de "y" sustituimos el valor de "x" en cualquier ecuación original:

$$x + 6y = -9$$

$$\left(-\frac{16}{37}\right) + 6y = -9$$

$$6y = -9 + \frac{16}{37}$$

$$6y = \frac{-333 + 16}{37} = -\frac{317}{37}$$

$$y = \frac{-\frac{317}{37}}{\frac{6}{1}} = -\frac{317}{222}$$

Con esto, obtenemos que el punto P tiene las coordenadas $P\left(-\frac{16}{37}, -\frac{317}{222}\right)$. Para encontrar la longitud del segmento $\overline{PQ}$, usemos el conocimiento acerca de la distancia entre dos puntos:

Recordemos de la unidad 2 de esta guía, que:

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Consideremos lo siguiente: $P\left(-\frac{16}{37}, -\frac{317}{222}\right) = (x_1, y_1)\ y\ Q\left(1, \frac{43}{6}\right) = (x_2, y_2)$ para sustituir en la expresión anterior:

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d(P,Q) = \sqrt{\left(1 - \left(-\frac{16}{37}\right)\right)^2 + \left(\frac{43}{6} - \left(-\frac{317}{222}\right)\right)^2}$$

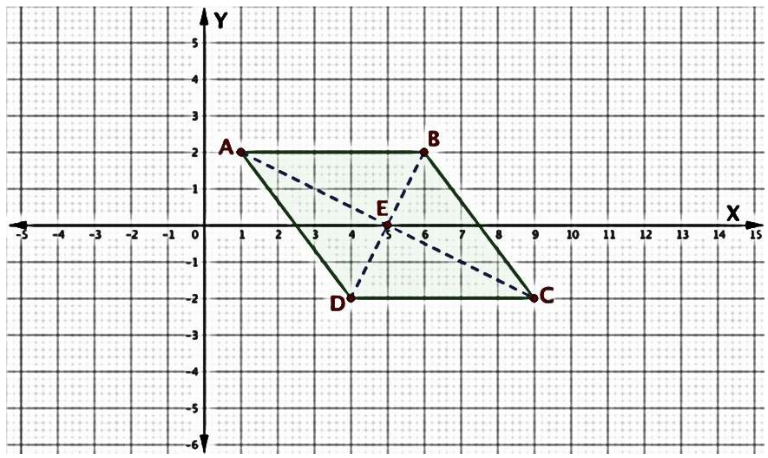
Haciendo las operaciones, llegamos a la siguiente expresión:

$$d(P,Q) = \sqrt{\frac{2809}{1369} + \frac{910116}{12321}}$$

Finalmente, $d(P,Q) \approx 8.71\, unidades$.

Recuerda que, al comienzo de este ejercicio se plantearon dos maneras de resolverlo, podrás verificar con mucha más facilidad que la segunda manera de usar el conocimiento de la distancia de un punto a una recta es mucho más corta que lo que acabamos de hacer para encontrar la longitud del segmento $\overline{PQ}$.

4) Observa la siguiente figura:



4.1) Justifica porqué las diagonales del paralelogramo son perpendiculares.

Tenemos que, los vértices del paralelogramo son: $A(1,2), B(6,2), C(9,-2)\ y\ D(4,-2)$.

Usaremos la definición de rectas perpendiculares: El producto de los valores de las pendientes debe ser igual a -1.

Primero, consideremos encontrar el valor de la pendiente de la diagonal $\overline{BD}$ con $B(6,2) = (x_1, y_1)\ \ y\ \ D(4,-2) = (x_2, y_2)$.

$$m_{BD} = \frac{-2-2}{4-6} = \frac{-4}{-2} = 2$$

Segundo, consideremos encontrar el valor de la pendiente de la diagonal $\overline{AC}$ con $A(1,2) = (x_1, y_1)\ \ y\ \ C(9,-2) = (x_2, y_2)$.

$$m_{AC} = \frac{-2-2}{9-1} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$$

Luego, $m_{BD}m_{AC} = (2)\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$. Por lo tanto, las diagonales son perpendiculares.

4.2) Para encontrar la medida del $\measuredangle\, DEC$, ¿puede usar el conocimiento del ángulo entre dos rectas? ¿por qué?

La respuesta es: NO. Porque la condición para usar la fórmula del ángulo entre dos rectas es, precisamente, que las rectas no sean perpendiculares, esto es, que se cumpla que: $m_1 m_2 \neq -1$ y hemos visto en el inciso anterior lo contrario. Veamos qué pasa si aplicamos dicha fórmula, donde la pendiente de la diagonal $\overline{BD}$ es igual a la pendiente del lado inicial $\overline{DE}$ y la pendiente de la diagonal $\overline{AC}$ es igual a la pendiente del lado terminal $\overline{EC}$ del $\measuredangle DEC$.

$$tan \measuredangle DEC = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} = \frac{-\frac{1}{2} - 2}{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(2)} = \frac{-\frac{5}{2}}{1 + (-1)} = \frac{-\frac{5}{2}}{1 - 1} = \frac{-\frac{5}{2}}{0}$$

Tenemos una <u>división entre cero</u> y hemos dicho que el resultado está indeterminado, no hay un valor preciso para esta división.

4.3) Verifica la propiedad de las diagonales de un paralelogramo: Las diagonales del paralelogramo se <u>bisecan</u> mutuamente, esto es, se dividen en dos partes iguales.

En otras palabras, se tiene que verificar que E es el punto medio tanto de la diagonal $\overline{AC}$ como de la diagonal $\overline{BD}$. Primero, necesitamos obtener las coordenadas del punto E con el conocimiento de la intersección entre dos rectas para comparar con las coordenadas del punto medio de las diagonales.

En el inciso D1) se obtuvieron los valores de las pendientes de las diagonales:

Ecuación de la recta cuyo segmento es $\overline{AC}$. Tomemos el punto $A(1,2) = (x_1, y_1)$, la pendiente de esta recta es $m_{AC} = -\frac{1}{2}$.	Ecuación de la recta cuyo segmento es $\overline{BD}$. Tomemos el punto $B(6,2) = (x_1, y_1)$, la pendiente de esta recta es $m_{BD} = 2$.
$y - y_1 = m(x - x_1)$ $y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1)$ $y - 2 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + 2$ $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ Multiplicando por 2 toda la ecuación anterior: $2y = -x + 5$	$y - y_1 = m(x - x_1)$ $y - 2 = 2(x - 6)$ $y - 2 = 2x - 12$ $0 = 2x - y - 12 + 2$ $0 = 2x - y - 10$ Ordenamos: $-2x + y = -10$

Ordenamos: $x + 2y = 5$	

Resolveremos el sistema por el método de Suma y Resta:

$$x + 2y = 5$$

$$-2x + y = -10$$

Multiplicamos la segunda ecuación por 2:

$$(2)(x + 2y) = (2)(5)$$

$$-2x + y = -10$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{array}{r} 2x + 2y = 10 \\ -2x + y = -10 \\ \hline 0 + 3y = 0 \end{array}$$

$$3y = 0$$

$$y = \frac{0}{3} = 0$$

Observa que, en esta división el denominador es igual a 3 distinto de cero, así que, el valor de la división existe. Luego, $y = 0$.

Para encontrar el valor de x, sustituimos en cualquier ecuación original:

$$-2x + y = -10$$

$$-2x + 0 = -10$$

$$-2x = -10$$

$$x = \frac{-10}{-2} = 5$$

Con esta información, tenemos las coordenadas del punto $E(5,0)$.

Ahora, encontremos las coordenadas del punto medio de las diagonales y comparemos los resultados.

Llamemos PM_{BD} al punto medio de la diagonal $\overline{BD}$:

$$PM_{BD} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{6 + 4}{2}, \frac{2 + (-2)}{2}\right) = (5,0)$$

Ahora, llamemos PM_{AC} al punto medio de la diagonal $\overline{AC}$:

$$PM_{AC} = \left(\frac{1 + 9}{2}, \frac{2 - 2}{2}\right) = (5,0)$$

Tenemos que, $PM_{BD} = PM_{AC} = E$. Con esto, confirmamos que el punto E corta a la mitad ambas diagonales, las diagonales se bisecan mutuamente.

4.4) Verifica qué lados del paralelogramo son paralelos.

Tenemos cuatro lados, intuitivamente, al ver la figura, podemos tomar por parejas los lados $\overline{AB}\ y\ \overline{CD}$ y los lados $\overline{AD}\ y\ \overline{BC}$. Usando la definición de rectas paralelas deberíamos obtener que los valores de cada pendiente son iguales si tomamos las parejas mencionadas.

Para la primera pareja, observemos que los lados son paralelos con el eje X, ¿qué recuerda acerca de la pendiente de una recta horizontal? Su valor es cero. ¿Cuál es la ecuación de una recta horizontal? $y = b$.

La ecuación de la recta cuyo segmento es $\overline{AB}$ es $y = 2$.

La ecuación de la recta cuyo segmento es $\overline{CD}$ es $y = -2$.

Ambas tienen la misma pendiente igual a cero, son paralelas.

Para la segunda pareja, ya sabemos encontrar la pendiente de estos segmentos que es lo mismo que la pendiente de las rectas que los contienen.

Si consideramos $A(1,2) = (x_1, y_1)$ y $D(4, -2) = (x_2, y_2)$. La pendiente del segmento $\overline{AD}$ es:

$$m_{AD} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2 - 2}{4 - 1} = \frac{-4}{3}$$

Si consideramos $B(6,2) = (x_1, y_1)\ y\ C(9, -2) = (x_2, y_2)$. La pendiente del segmento $\overline{BC}$ es:

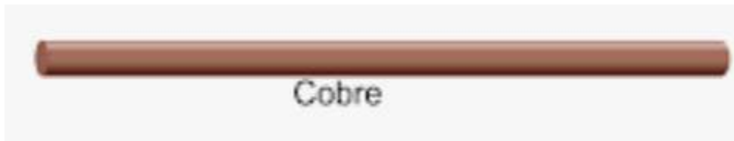
$$m_{BC} = \frac{-2 - 2}{9 - 6} = \frac{-4}{3}$$

Tenemos que, $m_{AD} = m_{BC}$, por lo tanto, las rectas son paralelas y, por consiguiente, sus respectivos segmentos, también.

¿Qué pasa si tomamos los lados $\overline{AD}\ y\ \overline{AB}$? ¿Cómo comprobamos si son paralelos o perpendiculares o ninguna de las dos opciones anteriores?

Problemas de aplicación que se modelan y se resuelven con la Geometría Analítica.

PROBLEMA RESUELTO 1: Sea R la resistencia eléctrica en ohmios de un pedazo de alambre de cobre de diámetro y longitud fijos, a una temperatura T en grados centígrados. Si $R = 0.017$ ohm cuando $T = 0^0$ y $R = 0.0245$ ohm cuando $T = 100^0$ y si la relación entre R y T es lineal, obtenga la función que exprese la relación entre R y T.



Identificamos en el planteamiento que la resistencia del alambre de cobre (qué tanto pasa corriente eléctrica) depende de la temperatura del alambre. Luego, del conocimiento en Matemáticas 1, la variable independiente es T y la variable dependiente es R, esto es importante porque al formar los puntos, estos deben tener un orden.

Notemos que podemos formar los puntos $P(x, y) = (T, R)$: $A(0{,}0.017)\ y\ \ B(100{,}0.0245)$. Haciendo uso de la Geometría Analítica, obtenemos la pendiente de la recta que pasa por estos dos puntos:

$$m = \frac{0.0245 - 0.017}{100 - 0} = \frac{0.0075}{100} = 0.000075 = \frac{3}{40000}$$

Tomamos cualquiera de los dos puntos A o B y la pendiente m para encontrar la ecuación de la recta en su forma ordinaria usando la forma punto-pendiente. Si tomamos el punto $A(0{,}0.017) = (x_1, y_1)$, tenemos:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0.017 = \frac{3}{40000}(x - 0)$$

$$y - 0.017 = \frac{3}{40000}x$$

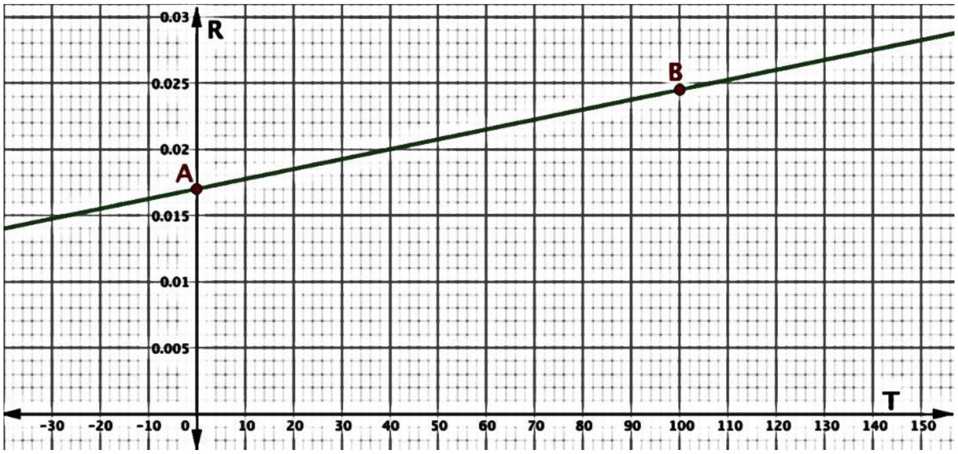
$$y = \frac{3}{40000}x + 0.017$$

$$y\ =\ mx\ +\ b$$

Ahora, nos regresamos al contexto del problema que nos plantearon donde la variable “x” representa a T y la variable “y” representa a R. Como la resistencia depende de la temperatura, el símbolo para denotar esto es: R(T), luego, la función lineal queda así:

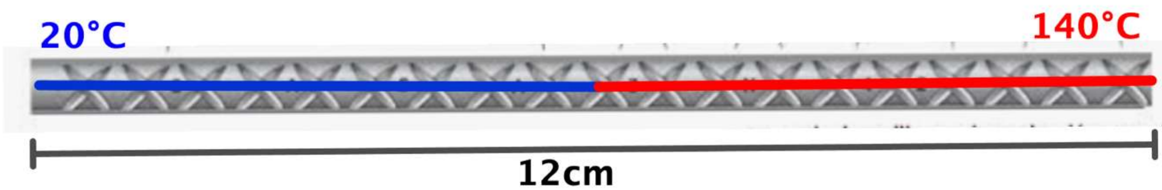
$$R(T) = \frac{3}{40000}T + 0.017$$

La recta asociada a esta ecuación se puede observar en la siguiente imagen:



Esta gráfica nos indica que, a mayor temperatura, tenemos mayor resistencia del alambre de cobre, en otras palabras, cuando mayor es la temperatura fluye menos corriente eléctrica por el cobre.

PROBLEMA RESUELTO 2: Si la superficie de una varilla uniforme está aislada y si sus extremos se conservan a una temperatura constante, entonces la temperatura en cualquier punto de la varilla está en función lineal de la distancia a un extremo. Suponga que, en una varilla de 12 centímetros, un extremo se conserva a 20^0C mientras el otro extremo se conserva a 140^0C. Determine la función lineal para la temperatura en términos de la distancia del extremo que está a 20^0C.



El planteamiento claramente nos está indicando que la variable independiente es la distancia d y la variable dependiente es la temperatura t. También, observamos que se crean puntos de la forma: $(x,y)=(d,T)$. Así, tenemos los puntos $A(0{,}20)\ y\ B(12{,}140)$, con los cuales, encontraremos la pendiente de la recta que pasa por estos dos puntos:

$$m=\frac{140-20}{12-0}=\frac{120}{12}=10$$

Usemos el punto $A(0{,}20)=(x_1,y_1)$, para encontrar la ecuación de la recta en su forma pendiente-ordenada al origen, tenemos lo siguiente:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-20=10(x-0)$$

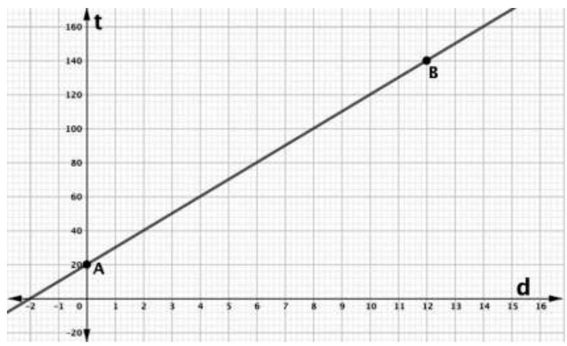
$$y - 20 = 10x$$

$$y = 10x + 20$$

Ahora, nos regresamos al contexto del problema donde la variable “x” representa la distancia “d” y la variable “y” representa la temperatura “t”. Comot depende de d, esto lo simbolizamos como: $t(d)$, luego, la función lineal queda así:

$$t(d) = 10d + 20$$

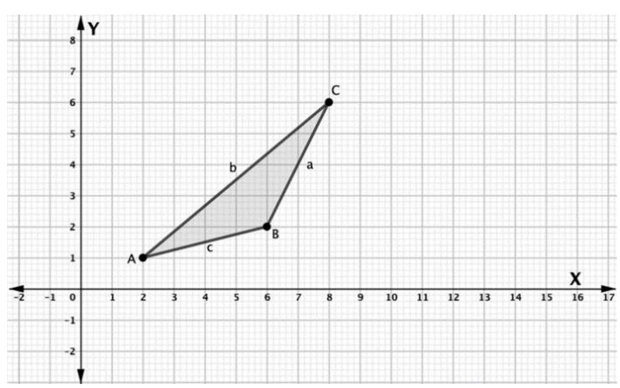
La recta asociada a esta ecuación se observa en la figura siguiente:



Esta gráfica nos indica que, si nos acercamos al extremo derecho de la varilla, la temperatura va aumentando y si nos acercamos al extremo izquierdo, la temperatura desciende. Observa que, la única parte de la recta que nos interesa es el segmento $\overline{AB}$, es la única parte que tiene sentido considerar porque la varilla sólo mide 12 centímetros.

PROBLEMAS PROPUESTOS.

1) Observa la siguiente figura, diga qué clasificación tiene el triángulo por sus lados (equilátero, isósceles o escaleno) y por sus ángulos (acutángulo, rectángulo u obtusángulo). Los vértices del triángulo son $A(2,1), B(6,2)\ y\ C(8,6)$.



2) Encuentra la ecuación en su forma simétrica que pasa por el punto $P(-4,5)$ y es paralela a la recta que pasa por los puntos $R(0,-3)\ y\ S(6,6)$.
3) Determina la ecuación en su forma ordinaria que pasa por el punto $T(-7,-2)$ y es perpendicular a la recta cuya ecuación es $\frac{x}{-2}+\frac{y}{-5}=1$.
4) Determina la ecuación general de la recta con ordenada al origen igual a 8 y es perpendicular a la recta cuya ecuación es $\frac{1}{9}x=\frac{2}{3}y-\frac{8}{9}$
5) Encuentra la ecuación de la mediatriz del segmento de recta entre $A(-3,4)\ y\ B(6,-2)$.
6) Genera un triángulo isósceles y justifique porqué sus vértices forman un triángulo isósceles.
7) Obtén la medida del ángulo formado por las rectas $L_1: \frac{x}{6}+\frac{y}{3}=1$ y $L_2: \frac{x}{-4}+\frac{y}{5}=1$.
8) Sea el triángulo con vértices $A(-7,6), B(-5,-2)\ y\ C(3,4)$, obtén la ecuación de la mediana que pasa por el vértice A y obtenga el área de cada uno de los dos triángulos que se forman al interior del ΔABC y compare ambos valores del área. ¿Este resultado se cumplirá para cualquier triángulo?
9) Determina los vértices del ΔABC formado por las rectas cuyas ecuaciones son: $L_1: 5x=1-7y$, $L_2: y=-8+2x$ y $L_3: x-10y+34=0$ y determine si el $\measuredangle CAB$ es agudo, obtuso o recto.
10) Calcula la longitud de la altura que pasa por el vértice Q del ΔPQR con vértices: $P\left(-\frac{9}{2},1\right)$, $Q\left(\frac{3}{2},3\right)\ y\ R(6,5)$.

AUTOEVALUACIÓN

1) Encuentra la ecuación de la recta en su forma general que pasa por los puntos $p(1,2)\ y\ Q(2,3)$.
 A) $0 = x - 2y + 1$
 B) $2x - y - 1 = 0$
 C) $-x + y - 1 = 0$
 D) $0 = x - y + 1$

2) Encuentra la forma simétrica de la ecuación $y = 2x + 1$.
 A) $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1$
 B) $\frac{x}{-2} + \frac{y}{1} = 1$
 C) $\frac{x}{-\frac{1}{2}} + \frac{y}{1} = 1$
 D) $\frac{x}{1} + \frac{y}{-\frac{1}{2}} = 1$

3) La distancia de una recta que pasa por los puntos $(-1,0)\ y\ (0,1)$ al punto P(x,y) es de 3 unidades, encuentra las coordenadas del punto P que está sobre la recta que pasa por el punto (0,1).

$A)\ \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2} + 1\right) y \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2} + 1\right)$
B) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2} + 1\right)\ y \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{2\sqrt{2}}{2} + 1\right)$
C) $\left(\frac{3\sqrt{2}}{1}, -\frac{3\sqrt{2}}{2} + 1\right)\ y\ \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$
D) $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2} + 1\right)\ y \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2} + 1\right)$

4) Halla el ángulo entre las rectas L_1 que pasa por los puntos $(-3,0)\ y\ (2,1)$ y la recta L_2 cuya ecuación es $2x + 3y - 1 = 0$.
A) 45^0
B) 135^0
C) 120^0
D) 145^0

5) Encuentra el ángulo de inclinación de la recta que pasa por el punto $(1,3)$ y es paralela a la recta cuya ecuación es $3y + 5x = 2$.
A) 147^0
B) 121^0
C) 135^0
D) 118^0

6) Dado el ΔABC cuyos vértices son $A(1,5), B(-2,0)\ y\ C(4,-1)$, halla el ángulo entre los lados $\overline{AB}\ y\ \overline{BC}$.

A) 70.5^0
B) 70^0
C) 68.5^0
D) 23^0

7) Del triángulo anterior ΔABC encuentra la ecuación de la recta que pasa por el vértice $(4,-1)$ y es paralela al lado $\overline{AB}$.

A) $5x - 3y - 23 = 0$
B) $-5y + 3x = -23$
C) $-5x - 3y - 23 = 0$
D) $-5x + 3y + 23 = 0$

8) Del ΔABC, encuentra la ecuación de la recta que pasa por el vértice $(4,-1)$ y es perpendicular a la recta que encontraste en el ejercicio 7.

A) $0 = -3x + 5y = 7$
B) $-3x - 5y + 7 = 0$
C) $-3x - 5y - 7 = 0$
D) $0 = 3x - 5y - 7$

9) Del ΔABC, encuentra la ecuación de la altura que pasa por el vértice $(1,5)$.

A) $6x - y = -1$
B) $0 = 6x + y - 1$
C) $0 = 6x - y - 1$
D) $0 = 6x - y + 1$

10) Encuentra el punto de intersección de las rectas $L_1: 5x + 2y - 2 = 0\ y$ la recta cuya ecuación es $x = 2$.

A) $(4,2)$
B) $(-2,-4)$
C) $(2,-4)$
D) $(-4,2)$

11) Determina la distancia del punto $(-5,4)$ a la recta cuya ecuación es $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1$.

A) 3u
B) 5.9 u
C) 4u
D) 4.8 u

SOLUCIONES A LA AUTOEVALUACIÓN

PREGUNTA	RESPUESTA
1	D
2	C
3	A
4	B
5	B
6	C
7	B
8	B
9	C
10	C
11	D

REFERENCIAS

- de Oteyza, E., Lam, E., Hernández, C., Carrillo, A. y Ramírez, A. (2011). *Geometría analítica*. Pearson Educación.
- Lehmann, C. (2008). *Geometría analítica.* Limusa.
- *Programas de Estudio del Área de Matemáticas*. Matemáticas I-IV. Colegio de Ciencias y Humanidades. México. 2016.
- Ruiz, J. (2017). *Matemáticas 3: geometría analítica básica.* Grupo Editorial Patria.
- Ruiz, J. (2005). *Geometría analítica*. Publicaciones Cultural.

UNIDAD 4

LA PARÁBOLA Y SU ECUACIÓN CARTESIANA

Propósitos. El estudiantado será capaz de obtener la ecuación de una parábola a partir de su definición (foco y directriz) o de elementos necesarios y suficientes. Identificará sus elementos a partir de la ecuación. Resolverá problemas que involucren a la parábola y sus propiedades.

Al finalizar esta unidad pretendemos que alcances los aprendizajes siguientes:

- Identifica los elementos que definen la parábola.
- Reconoce la simetría de esta curva.
- Obtiene por inducción la definición de la parábola como lugar geométrico
- Deduce la ecuación de la parábola con vértice en el origen y fuera de él.
- Entiende que un punto pertenece a una parábola sí y sólo sí, sus coordenadas satisfacen la ecuación correspondiente.
- Determina el vértice, foco, directriz, el eje de simetría y el lado recto de la parábola, a partir de su ecuación cartesiana
- Grafica parábolas dadas sus ecuaciones y viceversa.
- Transforma la ecuación general a la ordinaria para encontrar sus elementos.
- Resuelve problemas que involucren la intersección de una recta con una parábola y entre parábolas.

PRESENTACIÓN

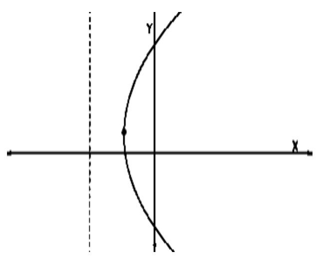
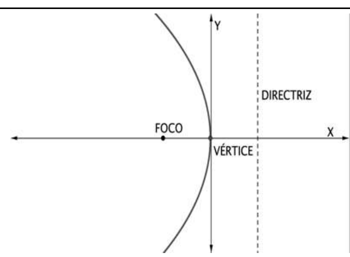
En esta unidad se tratará una de las tres curvas llamadas cónicas. El origen del nombre y las curvas se remontan a la civilización griega alrededor del siglo III a. C. Fue el astrónomo Apolonio de Perga (262 – 200 a.n.e.) quien escribió sobre las secciones cónicas, el método que utilizó está mucho más próximo a los métodos de la geometría analítica actual que a los métodos puramente geométricos de su época. Los griegos obtuvieron las curvas al cortar conos (de arcilla) con cuchillos, los nombres elipse e hipérbola los utilizó Apolonio y fue Arquímedes (287 – 212 a. C) el que utilizó el de parábola. Los nombres fueron utilizados anteriormente por los pitagóricos (siglo VI a.C.) al resolver ecuaciones cuadráticas por el uso de áreas.

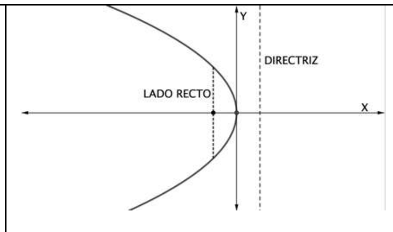
En el desarrollo de la unidad se estudia la parábola como lugar geométrico para el caso de parábolas cuya directriz y eje de simetría son paralelos a los ejes. Se analizan sus representaciones algebraicas como la relación entre la gráfica y sus ecuaciones ordinarias y generales. Relaciona los parámetros de la parábola con sus representaciones gráficas y sus ecuaciones.

En esta unidad se favorece el manejo de los procedimientos analíticos para los procedimientos de construcción y análisis que nos lleven a la deducción del lugar geométrico de la parábola, identificando sus características, elementos y parámetros. A través de los procedimientos analíticos se deducen las diversas formas de representación algebraica, apoyándose de la definición de la parábola y la relación entre sus parámetros.

Los griegos sabían construir rectas tangentes a esta curva, utilizando sólo regla y compás y descubrieron varias de sus aplicaciones. La importancia de esta cónica también radica, precisamente, en que tiene varias aplicaciones prácticas en diversas áreas del conocimiento. Algunas construcciones como los puentes o túneles, a veces son convenientes construirlos en forma de parábola, ya que dan una mejor estructura; la ecuación de la parábola nos ayuda a estudiar problemas de cinemática sobre todo objetos en movimiento, caída libre, entre otros, la parábola tiene varias aplicaciones más, en esta guía estudiaremos algunas de ellas. Se presenta un apartado de ejercicios de aplicación donde se resuelven problemas que involucran la parábola y sus propiedades.

CONCEPTOS CLAVES

Subtema	Figura	Expresión analítica	Parámetros
Lugar geométrico			
Elemento de la parábola		$V(h,k)$ $F(h+p,k)$ $x=h-p$	Vértice Foco Ecuación de la directriz
La distancia del vértice al foco y del vértice a la directriz		a) Si $p>0$ se abre hacia la arriba o a la derecha b) Si $p<0$ se abre hacia abajo o a la izquierda	p

Longitud del lado recto		$\|4p\|$	p
Forma canónica de la parábola		Vértice en el origen: $y^2 = 4px$ Vértice fuera del origen: $(y-k)^2 = 4p(x-h)$	Los valores de p, h y k
Forma general de la parábola		$x^2 + Dx + Ey + F = 0$	Coeficientes D, E y F

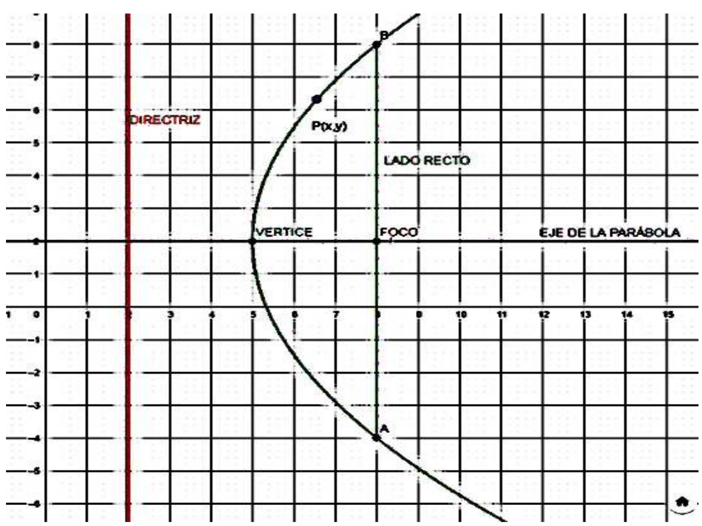
CONOCIMIENTOS PREVIOS

Lugar geométrico: en el conjunto de parejas ordenas que cumplen una condición determinada.

Simetría: se dice que un punto tiene simetría con respecto a otro punto o a un eje si los elementos se encuentran a la misma distancia del punto o del eje.

4.Conceptos básicos para esta unidad.

<u>Parábola:</u> Es el lugar geométrico de todos los puntos que se encuentran a la misma distancia de un punto fijo llamado foco y una recta fija llamada directriz.



Eje de simetría: es la recta que divide un lugar geométrico de tal forma que dado un punto A siempre existirá un punto A’, de tal forma que se ubiquen a la misma distancia del eje de simetría.

Eje de la parábola: Es un eje de simetría pues divide a la parábola en dos partes iguales. Es perpendicular a la directriz y pasa por el vértice y el foco de la parábola. También, se llama eje focal porque pasa por el foco.

Vértice de la parábola: es el punto donde la parábola cambia de dirección. El vértice de la parábola se encuentra sobre el eje de la parábola y es el punto medio entre el foco y la directriz. Lo denotaremos con V.

Foco de la parábola: es el punto que se encuentra a una distancia p del vértice y se encuentra sobre el eje de la parábola. Lo denotaremos con F(p,0), o bien, F(0,p).

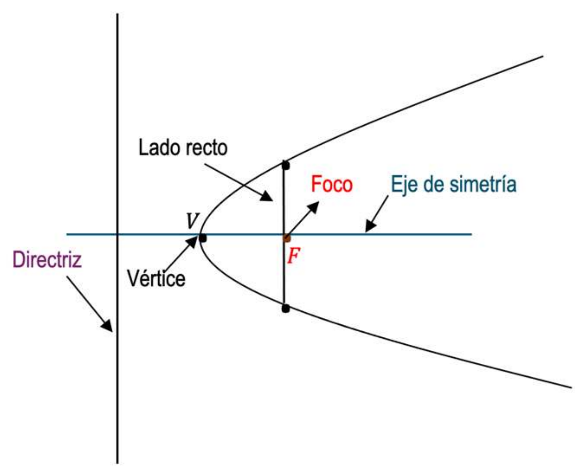
Directriz: recta perpendicular al eje de la parábola y se encuentra a una distancia p del vértice de la parábola. La denotaremos con D: $x = a$, o bien, D: $y = b$.

Lado recto: segmento de recta perpendicular al eje de la parábola y que pasa por el foco. Lo denotaremos con LR= $|4p|$. Donde el símbolo | | significa el valor absoluto, el resultado será el valor positivo de lo que está en el interior.

4.1 La parábola como lugar geométrico y ecuación ordinaria de la parábola.

Una **parábola** es el conjunto de todos los puntos de un plano que son equidistantes de un punto fijo (foco) y de una recta fija del plano (directriz). El punto fijo se llama **foco** y la recta fija se llama **directriz.**

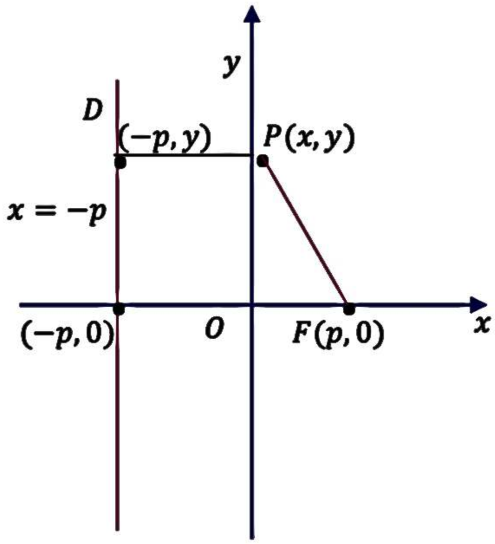
Una forma típica de una parábola se muestra a continuación.



Suponemos que el vértice de la parábola se encuentra en el origen y el foco se encuentra en $F(p, 0)$.

La forma más sencilla de la ecuación de la parábola es cuando el vértice está en el origen y su eje de simetría está en uno de los ejes coordenados.

Tomemos como el eje de simetría de la parábola al eje X, elijamos $p > 0$ y designemos a las coordenadas del foco como $F(p, 0)$, entonces la ecuación de la directriz será $x = -p$, ya que todo punto $P(x, y)$ que pertenece a la parábola está a la misma distancia del foco que de la directriz como se observa a continuación:



Ecuación de la parábola, eje de simetría en el eje x

Siguiendo la condición de lo que es una parábola, tomemos la distancia del punto P al punto F y ésta tiene que ser igual en longitud a la distancia del punto P a la directriz. Usando la fórmula de la distancia entre dos puntos:

$$\sqrt{(x-p)+y^2} = x + p$$

$$(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2$$

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$$

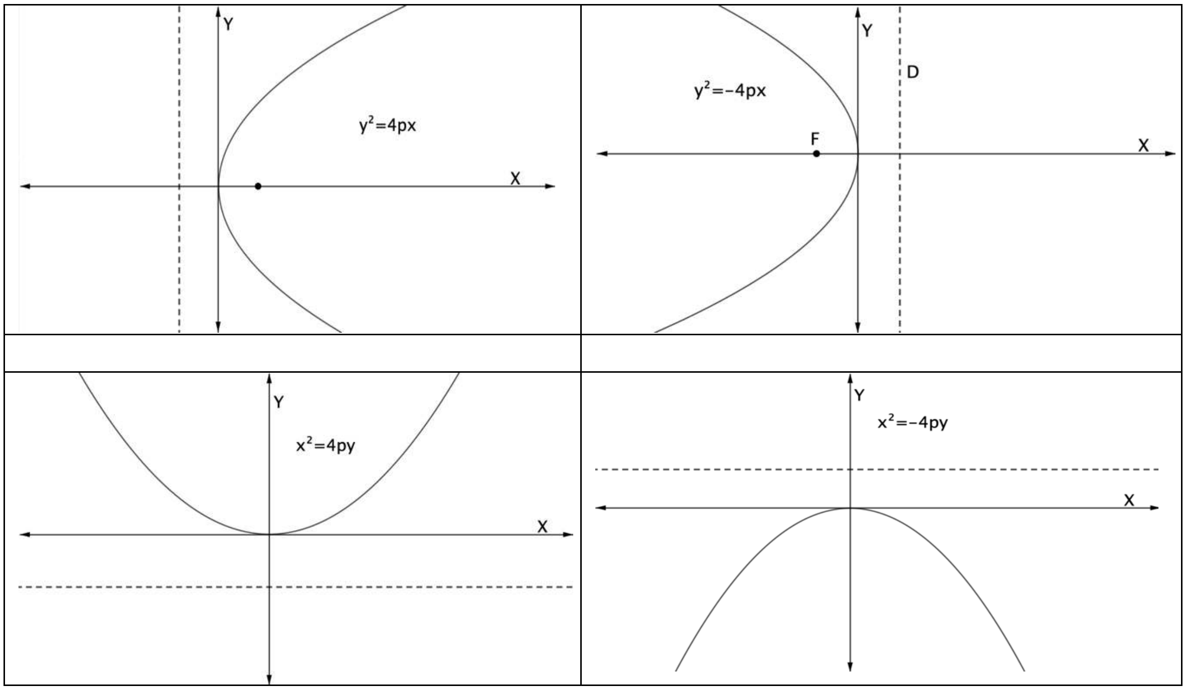
$$\boxed{y^2 = 4px}$$

Esta es la **ecuación ordinaria de la parábola** con vértice en el origen y eje de simetría el eje X. La longitud del lado recto es $|4p|$ y las coordenadas de sus extremos son $(p, -2p)$ y $(p, 2p)$.

De manera análoga, se obtiene la **ecuación ordinaria de la parábola** con vértice en el origen y eje de simetría el eje Y:

$$\boxed{x^2 = 4py}$$

A continuación, se muestran los diferentes casos para la ecuación de una parábola con vértice en el origen del plano y su respectiva gráfica.



NOTA: Como se describió con anterioridad, el eje de simetría o eje focal (porque pasa por el foco) es la recta que “parte” exactamente a la mitad a la parábola. Una rama de la parábola se refleja exactamente en la otra rama con respecto al eje de simetría como si éste simulara un espejo.

Para este trabajo, consideramos que te podría ayudar la siguiente tabla:

Parábola	Horizontal	Vertical
Ecuación	$y^2 = 4px$	$x^2 = 4py$
Vértice	V(0,0)	V(0,0)
Foco	$F(p, 0)$	$F(0, p)$
Directriz	$x = -p$	$y = -p$
Eje de simetría	Eje X	Eje Y
Lado recto	|4p|	

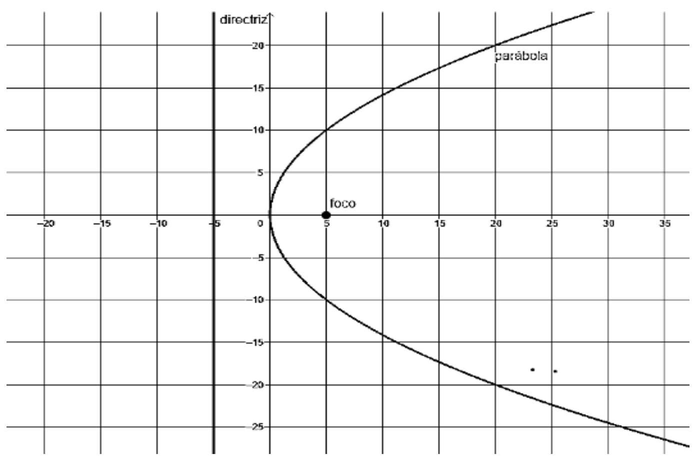
4.2 Ecuación de la parábola con eje de simetría sobre uno de los ejes de coordenadas y vértice en el origen, con sus elementos: foco, directriz y lado recto.

NOTA IMPORTANTE: En los siguientes problemas, en una ecuación de la parábola se coloca el signo menos antes del término $4px$, pero en otra, no. A veces nos porporcionan el signo de p, pero otras veces, no. Tú debes elegir si poner el signo de menos o no, antes del término $4px$ tomando en cuenta las condiciones que da el problema, de tal manera que se cumpla que la parábola abra hacia la izquierda o hacia abajo como en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 1: Encuentra la ecuación de la parábola cuyo vértice está en el origen de coordenadas, sabiendo que, la parábola está situada en el semiplano derecho, es simétrica con respecto al eje X y su parámetro es $\mathrm{p} = 5$.

Solución. Por la tabla anterior, la ecuación de la parábola es de la forma $y^2 = 4px$ y p tiene signo positivo, la parábola abre hacia la derecha, además porque su eje de simetría es el eje X. Sustituyendo el valor del parámetro p se tiene:

$y^2 = 4px = 4(5)x \ \therefore y^2 = 20x$. Las coordenadas del vértice son V(0,0), las coordenadas del foco son F(p,0)=F(5,0) y la ecuación de la directiz es $x = -p,\ x = -5$. Observe la gráfica siguiente.



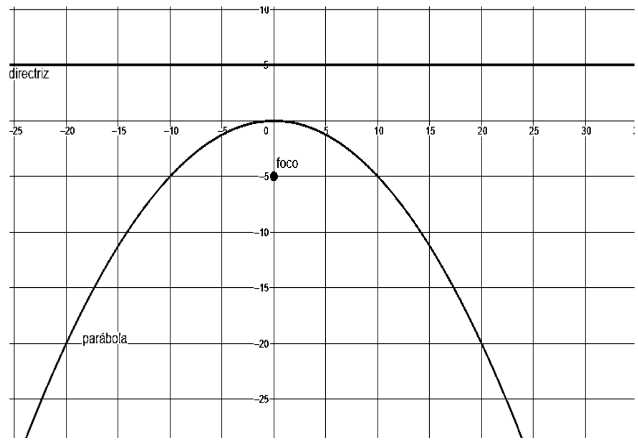
EJEMPLO 2.

La parábola está situada en el semiplano inferior, simétrica con respecto al eje Y y su parámetro es $\mathrm{p} = 5$, encuentra su ecuación.

Solución. Usando la tabla anterior, el vértice de la parábola se encuentra en (0,0). La parábola abre hacia abajo, entonces la ecuación tiene la forma $x^2 = -4py$, sustituyendo el parámetro p, se tiene:

$$x^2 = -4py = -4(5)y \ \therefore x^2 = -20y$$

Con esta información, encontramos el signo de p: $-20 = 4p \implies -5 = p$ y tenemos que el signo de p es negativo. Uniendo todos los elmentos, las coordenadas del vétice son V(0,0), las coordenadas del foco son F(0,p)= F$(0, -5)$, la ecuación de la directiz es $y = -p$, $y = -(-5) = 5$ y la gráfica se muestra a continuación:



PROBLEMA RESUELTO 1.

Encuentra la ecuación de la parábola y su lado recto, cuyo foco es el punto $\mathrm{F}(0, -3)$ y tiene por directriz a la recta D: $\mathrm{y} - 3 = 0$.

Solución**.** La definición de la parábola dice que la distancia de cualquier punto $P(x, y)$ al foco, debe de ser igual a la distancia del punto $P(x, y)$ a la directriz D, analíticamente tenemos:

$$d(P, F) = d(P, D)$$

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B}}$$

Como las coordenadas del foco son F$(0, -3)$ y la directriz tiene como ecuación D: $y = 3$, entonces sustituimos en la ecuación anterior:

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y + 3)^2} = y - 3$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación, tenemos:

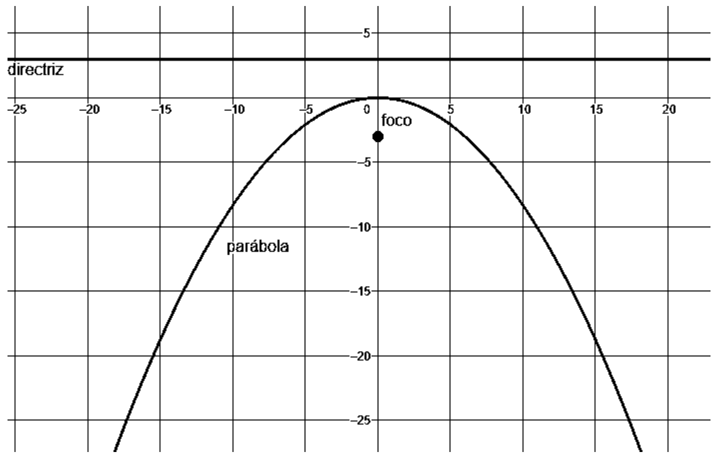
$$x^2 + y^2 + 6y + 9 = y^2 - 6y + 9$$

$$x^2 = -6y - 6y + 9 - 9$$

$$x^2 = -12y$$

Esta es la ecuación de la parábola que tiene vértice en el origen V(0,0), abre hacia abajo porque su eje de simetría es el eje Y y $4p = -12$, así tenemos que la longitud del lado recto es $|4p| = |-12| = 12$. Para encontrar el foco y la ecuación de la directriz, despejamos a p de $4p = -12$:

$p = \frac{-12}{4} = -3$. El valor de p es negativo. Con esto, las coordenadas del foco son F(0,p) = F$(0, -3)$. La ecuación de la directriz es $y = -(-3) = 3$, como se observa en la siguiente gráfica:



PROBLEMA RESUELTO 2.

Encuentra la ecuación de la parábola que tiene su vértice en el origen, eje de simetría el eje Y, y pasa por el punto $(-3, -5)$.

Solución. El vértice está en V(0,0), A(−3,5) es un punto que pertenece a la parábola y ésta tiene como eje de simetría al eje Y, entonces su ecuación es de la forma $x^2 = 4py$, sustuimos las coordenadas del punto A$(-3, -5)$ en la ecuación:

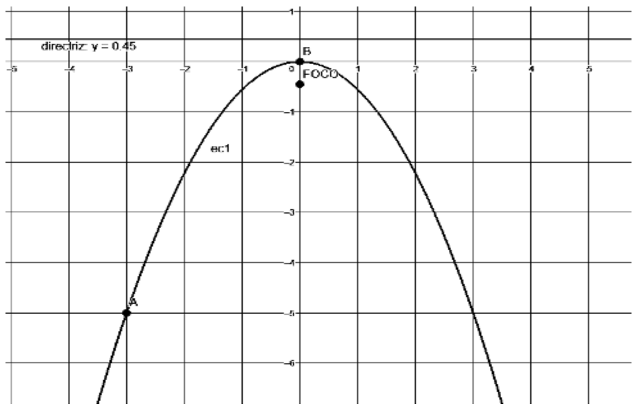
$$(-3)^2 = 4p(-5)$$

$$-\frac{9}{20} = p \text{ , o bien, } p = -\frac{9}{20}$$

Ahora, sustituimos el valor de p en la ecuación:

$$x^2 = 4py \implies x^2 = 4\left(-\frac{9}{20}\right)y \quad \therefore x^2 = -\frac{9}{5}y, \ o \ bien, \ 5x^2 = -9y$$

Uniendo los elementos, las coordenadas del vétice son V(0,0), las coordenadas del foco son $F(0, p) = F\left(0, -\frac{9}{20}\right)$ y la ecuación de la directiz es: $y = -p = -\left(-\frac{9}{20}\right) = \frac{9}{20}$ la parábola se muestra en la gráfica:

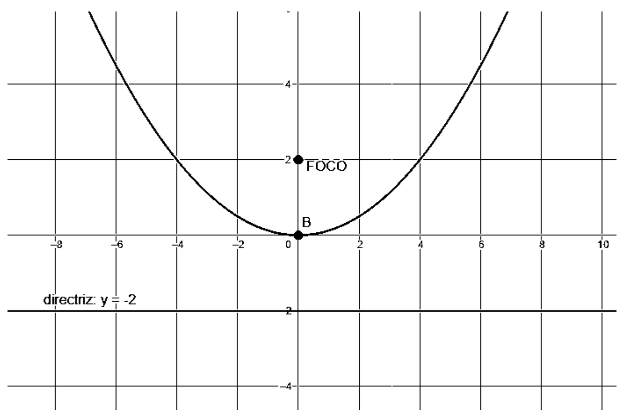


PROBLEMA RESUELTO 3.

La ecuación de una parábola es $\mathrm{x}^2 = 8\mathrm{y}$. Encuentra las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto.

Solución. La ecuación tiene la forma $x^2 = 4py$, entonces $4p = 8$ y $p = \frac{8}{4} = 2$.

Sabemos que el vértice se encuentra en V(0,0), las coordenadas del foco son $F(0, p) = F(0, 2)$, la ecuación de la directriz es $y = -p \implies y = -2$, la longitud del lado recto es LR=|4p|=8 y lo puede comprobar en la gráfica siguiente, cuente las unidades del segmento que pasa por el foco y es perpendicular al eje de simetría.



PROBLEMA RESUELTO 4.

Encuentra el foco, la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto de la parábola $8\mathrm{y}^2 = 12\mathrm{x}$ con vértice en el origen.

Solución. Si despejamos y^2, tendrá la forma: $y^2 = 4px$.

$$y^2 = \frac{12}{8}x \implies y^2 = \frac{3}{2}x$$

Tenemos que, $4p = \frac{3}{2} \Rightarrow p = \frac{3}{8}$, el valor de p es positivolo y esto significa que la parábola abre hacia la derecha, además porque su eje de simetría es el eje X. Con esto, las coordenadas del foco son $F(p,0)=F\left(\frac{3}{8},0\right)$, la ecuación de la directriz es $x=-p$; $x=-\frac{3}{8}$, finalmente la longitud del lado recto es $|4p|=4\left(\frac{3}{8}\right)=\frac{3}{2}$. En tu cuaderno, has un bosquejo de la gráfica y verifica con una App.

PROBLEMA RESUELTO 5.

Deduce la ecuación de la parábola, cuyo vértice está en el origen de coordenadas y la parábola abre hacia la izquierda, es simétrica respecto al eje X y su parámetro p vale $p=\frac{1}{4}$.

Solución. La ecuación de la parábola es de la forma $y^2=-4px$ porque abre hacia la izquierda. Si sustituimos p en ella, la ecuación resulta: $y^2=-4\left(\frac{1}{4}\right)x \Rightarrow y^2=-x$. Tenemos que, $4p=-1 \Rightarrow p=-\frac{1}{4}$. Encontramos el signo de p y es negativo. La ecuación de la directriz es $x=-p \Rightarrow x=-\left(-\frac{1}{4}\right) \Rightarrow x=\frac{1}{4}$. Las coordenadas del foco son $F(p,0)=\left(-\frac{1}{4},0\right)$. Se te sugiere hacer un bosquejo de la gráfica en tu cuaderno y después usar una App para verificar.

PROBLEMAS PROPUESTOS.

1. Hallar las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz, la longitud del lado recto y hacer el bosquejo de la gráfica de las parábolas con vértice en el origen, cuyas ecuaciones son las siguientes:

a) $x^2=-6y$

b) $x^2-16y=0$

c) $y^2=-x$

d) $y^2+3x=0$

2. Encuentre la ecuación de la parábola con vértice en el origen y cuyo foco es F$(0,-2)$.

3. Determine la ecuación de la parábola con vértice en el origen y cuya ecuación de la directriz es $x-3=0$.

4. Hallar la ecuación de la parábola con vértice en el origen y tiene su eje de simetría en el eje X y pasa por el punto $(-1,-3)$.

5. Halle la ecuación de la parábola con vértice en el origen con parámetro $p=\frac{1}{2}$.

6. Determine la ecuación de la parábola con vértice en el origen y la longitud de su lado recto LR= 16.

4.2 Representación algebraica y gráfica de una parábola.

4.2.1 Ecuación ordinaria de la parábola con vértice fuera del origen.

Anteriormente, hemos estudiado parábolas con vértice en el origen:

$$x^2 = 4py$$

$$y^2 = 4px$$

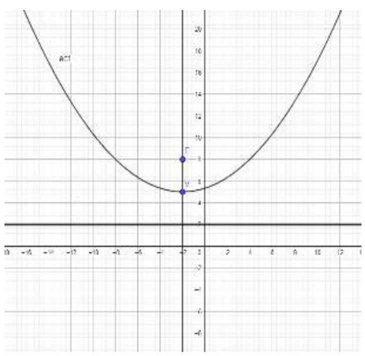
El caso anterior se generaliza, ahora, estudiaremos las parábolas con vértice fuera del origen, cuando éste vértice está en $V(h, k)$ las ecuaciones anteriores se transforman en:

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

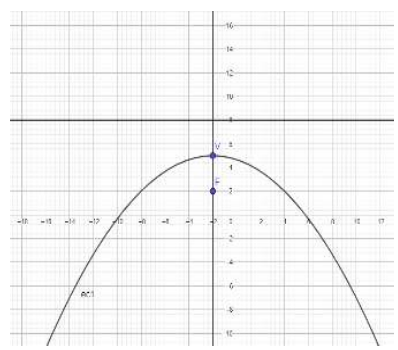
y

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

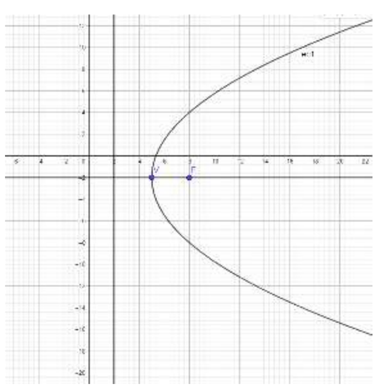
Es la **ecuación ordinaria de la parábola con vértice en V(h,k).** También, con las características descritas para cada una de ellas referente al signo del parámetro p. Es decir, si p es positivo la parábola abre hacia arriba o a la derecha, si p es negativo la parábola abre a la izquierda o hacia abajo.



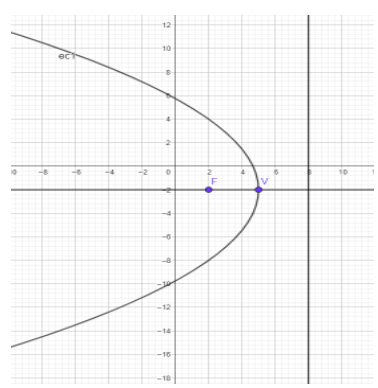
$(x - h)^2 = 4p(y - k)$



$(x - h)^2 = -4p(y - k)$



$(y - k)^2 = 4p(x - h)$



$(y - k)^2 = -4p(x - h)$

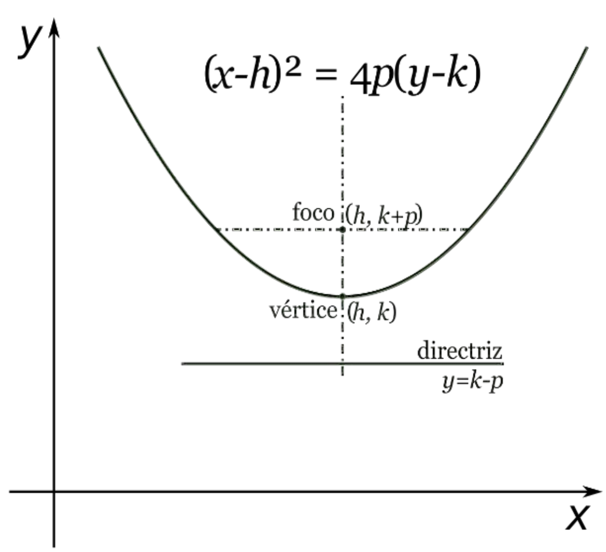
Observa que, ahora el vértice ya no se encuentra en el origen, sino que puede ser cualquier punto V(h, k) en el plano cartesiano. La siguiente tabla ayudará:

Parábola	Parábola horizontal	Parábola vertical
Ecuación	$(y-k)^2 = 4p(x-h)$	$(x-h)^2 = -4p(y-k)$
Vértice	V(h,k)	V(h,k)
Foco	F(h+p,k)	F(h,k+p)
Directriz	x=h−p	y=k−p
Eje de simetría	y=k	X=h
Lado recto	|4p|	

Vamos a deducir la ecuación de una parábola en general con vértice en $V(h, k)$ y foco en $F(h, k+p)$. Partimos de la definición de la parábola:

Una **parábola** es el conjunto de todos los puntos de un plano que son equidistantes de un punto fijo (foco) y de una recta fija del plano (directriz). El punto fijo se llama **foco** y la recta fija se llama **directriz.**

En este caso la directriz se encuentra en $y = k - p$ veamos la siguiente gráfica:



Cualquier punto de la parábola p(x,y), debe de cumplir con la definición.

Como la parábola abre hacia arriba, tenemos que, la distancia de la directriz al punto P es:

$$\mathrm{d(D,P)} = \frac{y-k+p}{\sqrt{1}} = y-k+p$$

Y la distancia del foco al punto P es: $d(F,P) = \sqrt{(x-h)^2+(y-k-p)^2}$

Ambas longitudes deben ser iguales:

$$d(D,P) = d(F,P)$$

$$y-k-p = \sqrt{(x-h)^2+(y-k+p)^2}$$

Elevamos al cuadrado y desarrollamos:

$$(y-k+p\ )^2 = (x-h)^2+(y-k+p)^2$$

$$y^2+k^2+p^2-2yk+2yp-2kp = (x-h)^2+y^2+k^2+p^2-2yk+2yp-2kp$$

$$4yp+4kp = (x-h)^2$$

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

Hemos obtenido la ecuación de la parábola vertical con vértice en V(h,k). Que abre hacia arriba o hacia abajo.

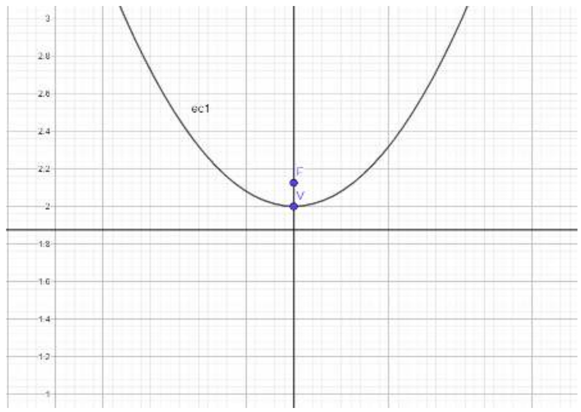
De manera análoga, se obtiene la ecuación de la parábola con vértice en V(h,k), que abre hacia la derecha o izquierda y recibe el nombre de parábola horizontal.

EJEMPLO: Encuentra la ecuación de la parábola con vértice en el punto $V(1,-2) = V(h,k)$, eje de simetría paralelo al eje de las ordenadas y que pasa por el punto $\mathrm{P}(3{,}6)$.

Solución.La forma de la ecuación es: $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ porque el eje de simetría en paralelo al eje Y. Sustituyendo los valores del vértice, encontramos que:

$(x-1)^2 = 4p(y+2)$, sabemos que la parábola pasa por el punto $P(3{,}6) = P(x,y)$ y también, sustituimos estos valores: $(3-1)^2 = 4p(6+2) \Rightarrow 4 = 4p(8) \Rightarrow p = \frac{1}{8}$, de esta manera, se deduce que la ecuación de la parábola es: $(x-1)^2 = \frac{1}{8}(y-(-2))^2$. Las coordenadas del foco son $F(h,k+p) = F\left(1,-2+\frac{1}{8}\right) = \left(1,\frac{-15}{8}\right)$. La ecuación de la directriz $y = k-p = -2-\frac{1}{8} = \frac{-17}{8}$. Entonces, $y = \frac{-17}{8}$. Finalmente, la ecuación de la parábola con vértice en $\mathrm{V}(1,-2)$ es:

$$(x-1)^2 = 4\left(\frac{1}{8}\right)(y+2)^2 \quad \therefore (x-1)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)(y+2)^2$$



EJEMPLO: Encuentra la ecuación de la parábola con foco en $F(5,3)$ y directriz en $y = -1$.

Solución. La distancia del foco a la directriz es de 4u, así que $p = 2$, porque la distancia del foco al vértice es igual a la distancia del vértice a la directriz; en este caso el eje de simetría es la recta $x = 5$. Por lo que, la parábola abre hacia arriba y la ecuación tiene la forma:

$$(x-h)^2 = 4(p)(y-k)$$

Sustituyendo valores la abscisa del vértice $h = 5$ porque tiene la misma abscisa del foco y el valor de $p = 2$; con respecto al valor de k, tiene que estar a la mitad de la longitud del foco a la directriz, el valor de $k = 1$.

$$(x-5)^2 = 4(2)(y-1)$$

$$(x-5)^2 = 8(y-1)$$

Esta es la ecuación de la parábola con vértice $(h,k) = V(5,1)$. Desarrollemos los binomios:

El binomio al cuadrado: $(\mathrm{x}-5)^2 = \mathrm{x}^2 - 10\mathrm{x} + 25$ y desarrollamos $8(\mathrm{y}-1) = 8\mathrm{y} - 8$

Por lo que la ecuación desarrollada queda:

$$\mathrm{x}^2 - 10\mathrm{x} + 25 = 8\mathrm{y} - 8$$

Igualamos a cero:

$$\mathrm{x}^2 - 10\mathrm{x} + 25 - 8\mathrm{y} + 8 = 0$$

Reduciendo obtenemos la Ecuación General de la Parábola:

$$\mathrm{x}^2 - 10\mathrm{x} - 8\mathrm{y} + 33 = 0$$

Lo que a continuación se estudia.

4.3 Ecuación general de la parábola.

Consideremos la ecuación de la parábola vertical:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

Desarrollamos el binomio y la multiplicación de ambos lados:

$$x^2 - 2hx + \ h^2 = 4py - 4pk$$

Agrupamos los términos sin variable:

$$x^2 - 2hx - 4py + (h^2 + 4pk) = 0$$

Si nombramos $-2h = D, -4p = E$ y $(h^2 + 4pk) = F$, tenemos:

$$x^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Que es la **ecuación general de la parábola vertical**. De manera análoga, se obtiene la ecuación general de la parábola horizontal:

$$y^2 + Dy + Ex + F = 0$$

En la ecuación general los coeficientes deben ser enteros y el primer coeficiente debe ser positivo. Veamos el siguiente ejemplo.

EJEMPLO: Encuentra la ecuación general de la parábola con foco en (4,-3) y directriz en x=2

Solución. Ubique el foco y la directriz en el plano y observará que por la posición del foco y de la directriz, se trata de una parábola horizontal que abre hacia la derecha, La distancia del foco a la directriz es de 2 u, así que $p = 1$, en este caso el eje de simetría es $y = -3,$ la recta perpendicular a la directriz. La ecuación tiene la forma:

$$(y-k)^2 = 4(p)(x-h)$$

Sustituyendo los parámetros p=1 y como el foco es F(h+p,k)=$(4,-3)$, tenemos que:

$h + 1 = 4 \ \ \Rightarrow h = 3$ y $\ k = -3$, entonces las cooderandas del vértice son $V(h,k) = V(3,-3)$, sustituyendo valores:

$$(y+3)^2 = 4(1)(x-3)$$

Desarrollando ambos miemboros de la ecuación:

El binomio al cuadrado: $(y+3)^2 = y^2 + 6y + 9$ y desarrollamos $4(x-3) = 4x - 12$

Por lo que la ecuación queda:

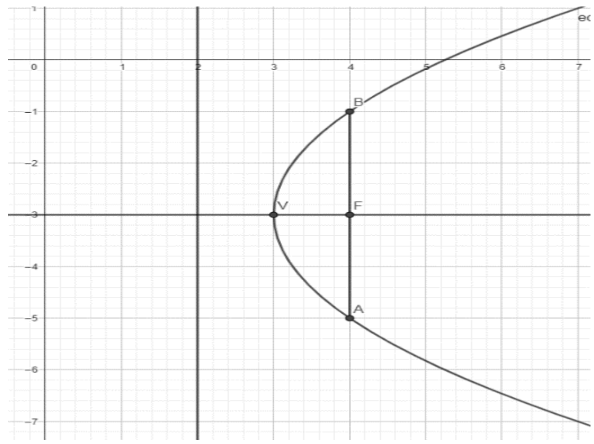
$$y^2 + 6y + 9 = 4x - 12$$

Igualamos a cero y reducimos términos:

$$y^2 + 6y + 9 - 4x + 21 = 0$$

Finalmente, la ecuación general de la parábola es:

$$y^2 + 6y - 4x + 21 = 0$$



Recuerde que en la ecuación general los coeficientes deben de ser enteros y el primer coeficiente debe ser positivo.

EJEMPLO**:** Determina la ecuación general y la gráfica de la parábola con foco en (3,-5) y vértice en (6,-5).

Solución. Por la posición del foco y del vértice, la parábola es horizontal y abre hacia la izquierda. La distancia del vértice al foco es de 3 unidades, entonces $p = -3$, el signo negativo es porque la parábola abrea hacia la izquierda. Sustituimos valores:

$$(y - k)^2 = 4(p)(x - h)$$

$$(y + 5)^2 = 4(-3)(x - 6)$$

$$(y + 5)^2 = -12(x - 6)$$

Desarrollando como en el ejemplo anterior tenemos:

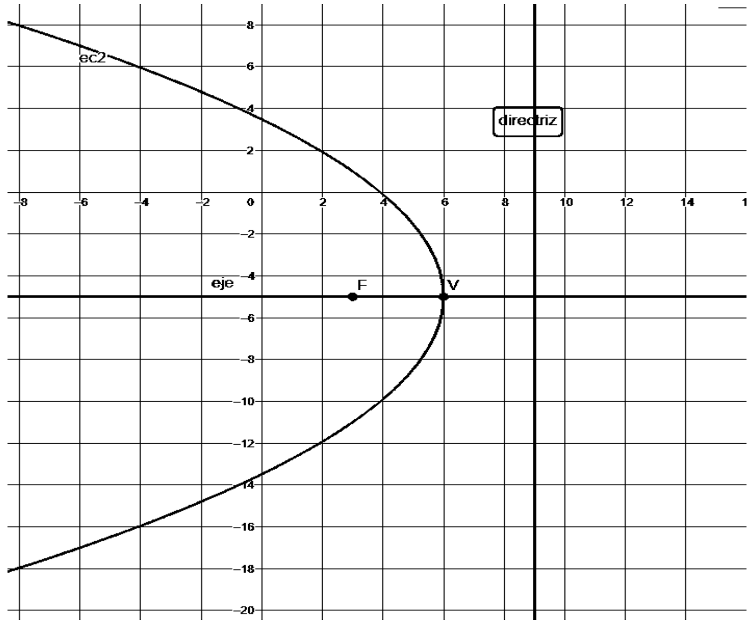
$$y^2 + 10y + 25 = -12x + 72$$

$$y^2 + 10y + 25 + 12x - 72 = 0$$

$$y^2 + 12x + 10y - 47 = 0$$

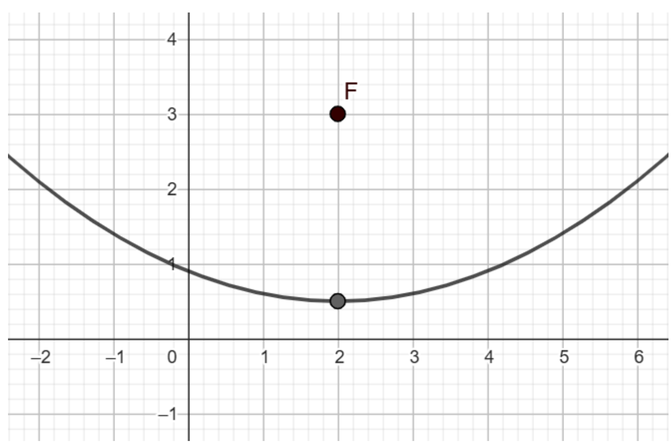
Esta es la ecuación general de la parábola con vértice en V(6,-5).

De manera adicional, podemos obtener el lado recto de esta parábola, ya que: $\mathrm{LR} =$ $|4p|$=$|4(-3)|$=|-12|=12. Dibuja en la gráfica el lado recto.



A lo largo de esta Unidad se han dado ejemplos donde, a partir de algunos elementos de la parábola, se encuentra la ecuación y su gráfica. Ahora, dada la gráfica (o elementos de la parábola), se encuentra su ecuación. Veamos:

EJEMPLO: A partir de la siguiente gráfica de la parábola, encuentra su ecuación general.



Solución. El foco tiene coordenadas *F*(2,3), el vértice es *V*(2,0.5), su eje es paralelo al eje Y, y *p=2.5.* Así que, su ecuación es de la forma:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

Al sustituir los valores correspondientes en esta ecuación, se obtiene:

$$(x-2)^2 = 4(2.5)(y-0.5)$$

Esta es la ecuación ordinaria de la parábola. Para obtener su ecuación general, desarrollamos el binomio del lado izquierdo de la ecuación, distribuimos en el lado derecho de la misma y simplificamos, dando como resultado:

$$x^2 - 4x - 10y + 9 = 0$$

EJEMPLO: Grafica la parábola cuya ecuación general es:

$$4x^2 - 8x - 12y + 4 = 0$$

Solución. Dividiendo entre 4 a toda la ecuación para simplifar los coeficientes y sumando un 1 en ambos miembros de la ecuación para completar el trinomio cuadrado perfecto del lado izquierdo, obtenemos:

$$x^2 - 2x + 1 - 3y + 1 = 0 + 1$$

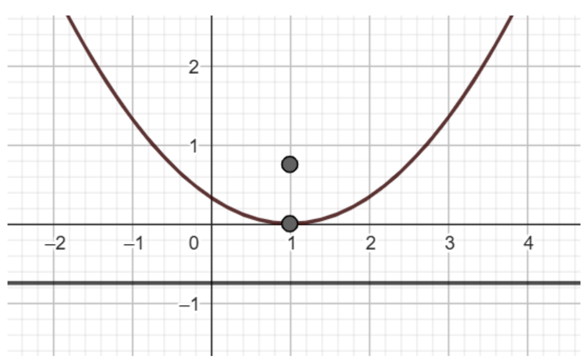
Si escribimos ese trinomio como un binomio al cuadrado, nos queda:

$$(x - 1)^2 = 3y$$

Que es equivalente a:

$$(x - 1)^2 = 3(y - 0)$$

Por lo tanto, la parábola abre hacia arriba y tiene su vértice en V(h,k)=V(1,0). Ahora, 4*p*=3, así que *p*=3/4. Luego, el foco tiene coordenadas F(h,k+p)=F$\left(1, \frac{3}{4}\right)$ y la directriz tiene ecuación $y = k - p = 0 - \frac{3}{4} \implies y = -\frac{3}{4}$. Un esbozo de su gráfica es:



PROBLEMA RESUELTO 1: Una parábola pasa por los puntos $(-1,1)$, $(2,3)$ y $(1,-5)$ y su eje de simetría es paralela al eje Y, encuentra su ecuación.

Solución. Como su eje se simetría es paralelo al eje de las ordenadas, entonces es de la forma $x^2 + Dx + Ey + F = 0$, pasa por los puntos dados, así que deben satisfacer a la ecuación, se obtiene el sistema siguiente:

$$1 - \quad D + \quad E + F = 0$$

$$4 + 4D + 3E + F = 0$$

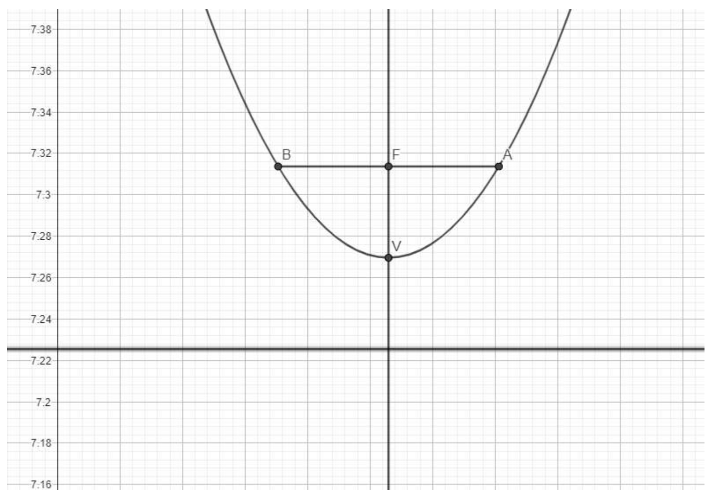
$$1 + \quad D - 5E + F = 0$$

Cuya solución es: $D = -\frac{9}{17}$, $E = -\frac{3}{17}$ y $F = -\frac{23}{17}$, por lo tanto, la ecuación de la parábola es:

$$x^2 - \frac{9}{17}x - \frac{3}{17}y - \frac{23}{17} = 0$$

Multiplicando por 17 toda la ecuación, tenemos la ecuación general y su gráfica:

$$17x^2 - 9x - 3y + 23 = 0$$



PROBLEMA RESUELTO 2: Encuentra el vértice de la parábola con foco $F(-2,4)$ y cuya ecuación de la directriz es: $x + 3 = 0$.

Solución. Por definición de la parábola se cumple: $\sqrt{(x+2)^2 + (y-4)^2} = x + 3$

elevando al cuadrado $\quad x^2 + 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = x^2 + 6x + 9$

simplificando $\quad y^2 - 2x - 8y + 11 = 0$

¿Cómo encontrarías el vértice?

Dada la ecuación general $y^2 - 2x - 8y + 11 = 0$

Separaremos la varible y, como sigue:

$$y^2 - 8y = 2x - 11$$

Completando el TCP: $\quad y^2 - 8y + \left(\frac{8}{2}\right)^2 = 2x - 11 + \left(\frac{8}{2}\right)^2$

$$y^2 - 8y + 16 = 2x - 11 + 16$$

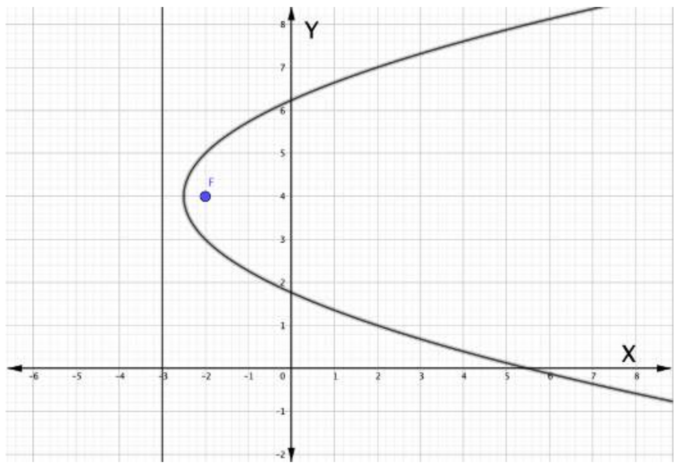
Simplificando:

$$(y-4)^2 = 2x+5$$

$$(y-4)^2 = 2(x+2.5)$$

$$(y-k)^2 = 4(p)(x-h)$$

Por lo tanto, las coordenadas del vértice son $V(h,k) = (-2.5,4)$ y $4p = 2 \ \Rightarrow p = \frac{1}{2}$. El lado recto LR=|4p|=|2|=2. ¿Cuáles son las coordenadas del foco? $F(h+p,k) = F\left(-2.5+\frac{1}{2},4\right) = (-2,4)$. La ecuación de la directriz es $x = h - p = -2.5 - \frac{1}{2} = -3 \ \Rightarrow x = -3$



PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Una parábola tiene ecuación $y^2 - 4y + 8x - 4 = 0$, encuentra el vértice, el foco, así como la ecuación de su directriz.

2. Encuentra la ecuación de la parábola con vértice en $V(6,-2)$, el eje de simetría está dado por la ecuación $y+2=0$ y pasa por el punto $P(1,-3)$.

3. Obtenga las coordenadas del vértice, del foco, la ecuación de la directriz y el lado recto, de la parábola cuya ecuación es: $y^2 + 12x + 10y - 47 = 0$.

4. Halla la ecuación de la parábola cuyo lado recto es el segmento que une los puntos $(-2,5)$ y $(-2,-3)$.

5. Obtenga las coordenadas del vértice, del foco, la ecuación de la directriz y el lado recto, de la parábola cuya ecuación es $x^2 + 8x - 14y + 37 = 0$

6. Obtenga las coordenadas del vértice, del foco, la ecuación de la directriz y el lado recto, de la parábola cuya ecuación es: $x^2 - 10x - 12y + 57 = 0$

7. Hallar la ecuación de la parábola cuyo vértice está en la recta con ecuación $-3x + 2y = 0$, con eje de simetría paralelo al eje x y que pase por los puntos $(3,5)$ y $(6,-1)$.

4.4 Sistemas de ecuaciones formados por una parábola y una recta, y formados por dos parábolas.

Después de haber estudiado a la recta y a la parábola, resulta de interés resolver problemas que involucren a ambos lugares geométricos. Veamos ejemplos.

EJEMPLO: Determinar los puntos de intersección de la recta cuya ecuación es $x + 2y - 3 = 0$ y la parábola $y^2 = x$.

Solución. Se genera un sistema de dos ecuaciones, una lineal y una cuadrática, con dos incógnitas, podemos usar cualquiera de los métodos algebraicos que conocemos para resolver sistemas de ecuaciones lineales, así, dado que está despejada x en la segunda ecuación se puede sustituir en la primera, de lo cual se obtiene:

$$y^2 + 2y - 3 = 0$$

El problema ahora se ha reducido a resolver una ecuación cuadrática con una incógnita. Nótese que esta ecuación se puede resolver por factorización del producto de dos binomios con un término común, de lo que se tiene:

$$(y+3)(y-1) = 0$$

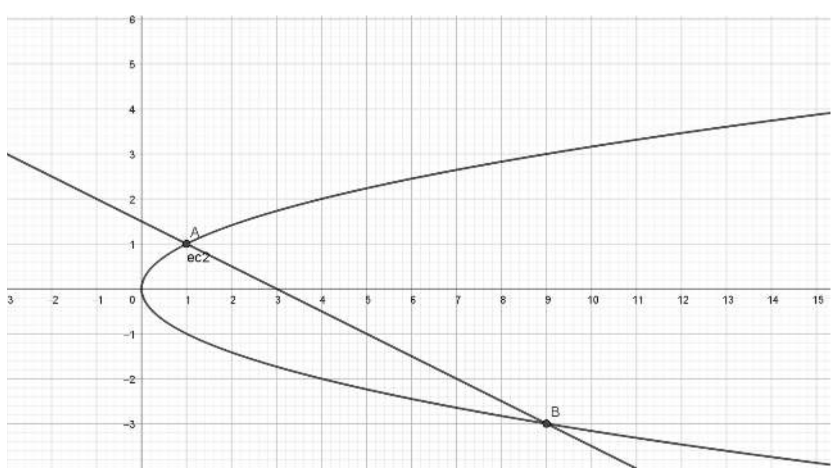
Las soluciones de esta ecuación son:

$$y + 3 = 0 \quad \Rightarrow y = -3, \text{ o } y - 1 = 0 \ \Rightarrow y = 1.$$

Ahora, determinaremos el valor de x para cada solución de y, la cual se puede obtener sustituyendo en la segunda ecuación:

$y^2 = x \ \Rightarrow (-3)^2 = x \ \Rightarrow 9 = x$,entonces un punto de intersección es $(9, -3)$.
$y^2 = x \ \Rightarrow 1^2 = x \Rightarrow \ 1 = x$, por lo que, el otro punto de intersección es $(1,1)$.

Podemos usar un software graficador para verificar la respuesta:



EJEMPLO: Determinar los puntos de intersección de las gráficas representadas por las siguientes ecuaciones: $x^2 - 2 = y$ y $-x^2 + 6 = y$.

Solución.Tenemos nuevamente un sistema de ecuaciones, pero ahora formado por dos ecuaciones cuadráticas con dos incógnitas. Se usará el método de igualación dado que en ambas ecuaciones está despejada la incógnita y ,de lo cual se obtiene:

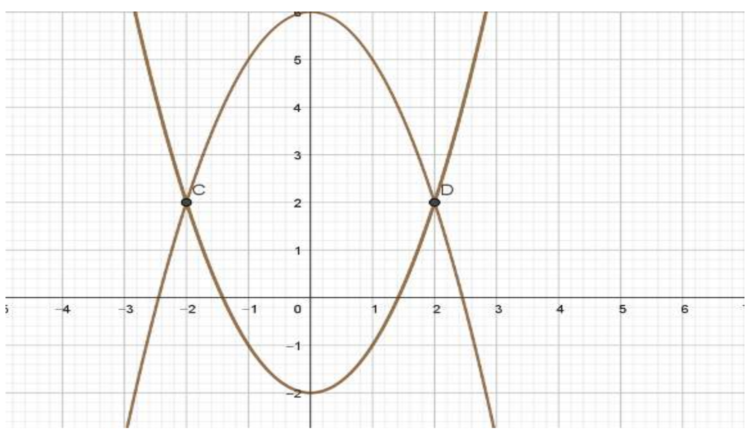
$$x^2 - 2 = -x^2 + 6$$

Se tiene ahora una ecuación cuadrática con una incógnita, de donde se despeja x: $2x^2 = 8 \Longrightarrow x^2 = 4$. Por lo tanto, $x = \pm 2$.

Ahora, se determinan los valores de y para cada valor de x , lo cual se puede obtener sustituyendo, por ejemplo, en la primera ecuación:

$$y = 2^2 - 2 = 2 \text{ y } y = (-2)^2 - 2 = 2.$$

Por lo tanto, los puntos de intersección son: $(2{,}2)$ y $(-2{,}2)$.
Lo anterior se puede comprobar en un software graficador:



PROBLEMA RESUELTO 1: Encuentra la altura de un punto de arco parabólico de 20 metros de altura y 30 metros de base, situado a una distancia de 12 metros del centro del arco.

Solución. Sin pérdida de generalidad, supongamos que la parábola tiene su vértice en el punto $V(0{,}20)$ y la base se coloca en el eje de las x como se muestra en la figura siguiente:

La ecuación de la parábola será de la forma:

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

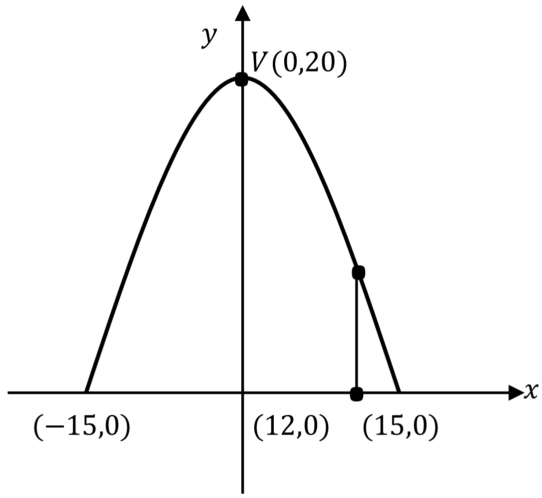
con los datos dados se tiene

$$x^2 = 4p(y - 20)$$

como la parábola pasa por el punto $(15,0)$ se debe cumplir que:

$$15^2 = 4p(-20) \Rightarrow 4p = -\frac{15^2}{20} = -\frac{45}{4}$$

La ecuación es: $x^2 = -\frac{45}{4}(y-20)$



Para encontrar la altura pedida, se sustituye el valor de $x = 12$ y se obtiene el valor de y, se tiene $12^2 = -\frac{45}{4}(y-20)$. Por lo tanto, $y = 20 - \frac{12^2(4)}{45} = \frac{36}{5} = 7.2$ metros.

PROBLEMA RESUELTO 2: Se dispara una flecha desde una altura a 10 metros sobre el piso. Llega al suelo a 200 metros de la base donde se disparó. Deduce una ecuación de la trayectoria de la flecha, ¿cómo dibujaría la parábola en el plano de coordenadas?

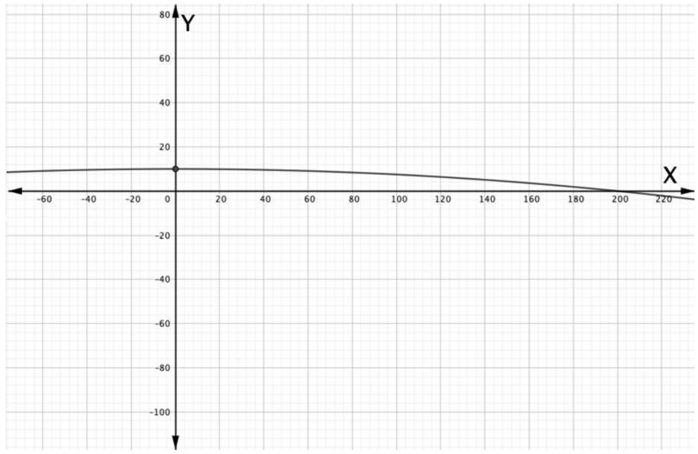
Solución**:** Si consideramos la trayectoria de la felcha sin fijarnos en la resistencia del aire y la fuerza de gravedad, podemos pensar que se trata de una parábola vertical que abre hacia abajo y que tiene la forma:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

Consideremos el vértice sobre el eje Y: $V(0,10)$ y las coordenadas del punto donde cae la flecha son $P(200,0)$. Sustituimos los valores en la ecuación:

$$(x-0)^2 = 4p(y-10) \implies (200)^2 = 4p(0-10) \implies 40000 = -40p$$

Despejando p: $-1000 = p$. Por lo tanto, la ecuación de la parábola que describe la trayectoria de la flecha es: $x^2 = -4000\,(y-10)$. La gráfica se muestra a continuación.



PROBLEMA RESUELTO 3: Encuentra la ecuación de la recta tangente a la parábola

$$y^2 = 4ax$$

En un punto $P(x_1, y_1)$ cualquiera de ella.

Solución. Utilizando la forma punto pendiente, la forma de la recta es

$y = m(x - x_1) + y_1$, sustituyendo a y en la ecuación de la parábola se obtiene:

$$[m(x - x_1) + y_1]^2 = 4ax$$

$$m^2x^2 - 2m^2x_1x + m^2x_1^2 + 2my_1(x - x_1) + y_1^2 =$$

$$= 4axm^2x^2 - 2m^2x_1x + m^2x_1^2 + 2my_1x - 2my_1x_1 + y_1^2 = 0$$

$$4axm^2x^2 - 2(m^2x_1 - my_1 + 2a)x + m^2x_1^2 - 2my_1x_1 + y_1^2 = 0$$

Para que la recta sea tangente, el discriminante debe de ser cero, así

$$4(m^2x_1 - my_1 + 2a)^2 - 4m^2(m^2x_1^2 - 2my_1x_1 + y_1^2) = 0$$

simplificando $\qquad x_1m^2 - y_1m + a = 0$

cuya solución en m es: $\qquad m = \frac{y_1 \pm \sqrt{y_1^2 - 4ax_1}}{2x_1} = \frac{y_1}{2x_1}$ ya que $y^2 = 4ax$

así la ecuación de la recta tangente es: $\qquad y = \frac{y_1}{2x_1}(x - x_1) + y_1$

simplificando nuevamente, se obtiene: $\qquad y = \frac{y_1}{2x_1}(x + x_1)$

PROBLEMA RESUELTO 4: Determina la ecuación de la recta tangente a la parábola $y^2 = 4ax$, cuando se conoce la pendiente m de la recta.

Solución. La forma de la recta es: $y = mx + b$, $(m \neq 0)$ donde la ordenada al origen b se desconoce, sustituyendo en la ecuación de la parábola, obtenemos

$$(mx + b)^2 = 4ax$$

desarrollando $$m^2x^2 + 2mbx + b^2 = 4ax$$

uniendo términos $$m^2x^2 + (2mb - 4a)x + b^2 = 0$$

para que sea tangente, el discriminante debe de ser cero.

$$(2mb - 4a)^2 - 4m^2b^2 = 0$$

simplificando $$4m^2b^2 - 16amb + 16a^2 - 4m^2b^2 = 16a(-mb + a) = 0$$

por lo que $b = \frac{a}{m}$

Por lo tanto, la ecuación de la recta es: $y = mx + \frac{a}{m}$

PROBLEMA RESUELTO 5: Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya distancia al punto fijo $P(-2,3)$ sea igual a su distancia a la recta $x + 6 = 0$.

Solución. Sea $Q(x, y)$ un punto cualquiera con las propiedades descritas en el problema, las distancias son:$D(P, Q) = \sqrt{(x + 2)^2 + (y - 3)^2}$ y $D(Q, recta) = x + 6$, como deben de ser iguales. se tiene:

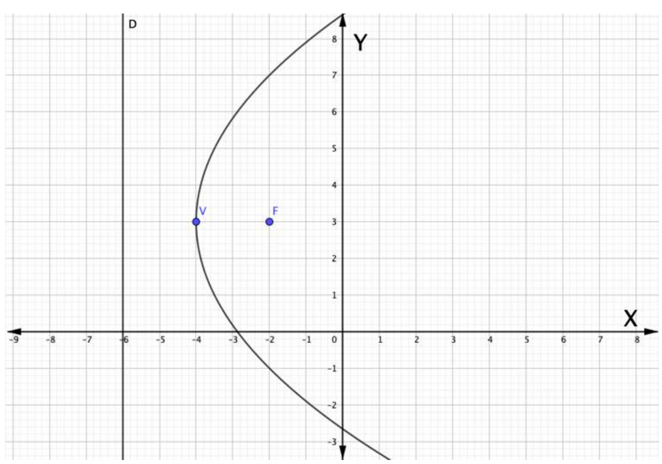
$$\sqrt{(x + 2)^2 + (y - 3)^2} = x + 6$$

elevando al cuadrado $$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = (x + 6)^2$$

simplificando $$(y - 3)^2 = 8x + 32$$

$$(y - 3)^2 = 8(x + 4)$$

El lugar geométrico es una parábola con vértice en $V(-4,3)$, que abre hacia la derecha.



PROBLEMAS PROPUESTOS.

1. Determina el lugar geométrico de todos los puntos cuya distancia a un punto fijo es siempre igual a su distancia a una recta fija.
2. Determina las coordenadas del vértice, la distancia del vértice al foco y la distancia del lado recto, para la parábola $(x-3)^2 = 8(y+4)$.
3. Encuentra la ecuación general de la parábola cuya ecuación es: $y^2 = -2(x-8)$.
4. Encuentra la ecuación de la parábola con vértice en el origen, eje de simetría el eje y y pasa por el punto $A(-2,-4)$.
5. Diga cuáles son las coordenadas del foco de la parábola $y^2 - 6y + 12x + 45 = 0$
6. Encuentra la ecuación de la parábola que tiene vértice $V(5,6)$ y foco $F(13,6)$
7. Determina la ecuación de la parábola que tiene como foco al punto $(0,3)$ y directriz $y = -3$.
8. El vértice de una parábola es el punto $(-1,-1)$ y el foco $(-1,3)$, encuentra su ecuación en forma general.
9. Halla la ecuación de la parábola que tiene como vértice al punto $V(3,2)$ y foco $F(5,2)$
10. Determina la ecuación de la parábola con vértice en el origen y foco en el punto $F(0,2)$.
11. Encuentra el vértice y el foco de la parábola $y^2 - 4y - 8x + 28 = 0$
12. Halla la ecuación de la parábola en su forma general que tiene como directriz a la recta $x = 5$ y el foco está en $F(1,-1)$.
13. Encuentra las coordenadas del foco de la parábola con ecuación cartesiana: $x^2 - 4y - 12 = 0$
14. Determina el vértice de la ecuación de la parábola es $2x^2 - 4x - 16y + 66 = 0$.
15. Encuentra la forma canónica de la parábola con foco en $F(-2,2)$ y directriz con ecuación $x = 4$.
16. Obtén la ecuación general de la parábola cuyo vértice es el punto $V(2,-3)$ y tiene foco en el punto $F(1,-3)$.
17. Halla la ecuación de la directriz de la parábola cuya ecuación es: $(x-4)^2 = -8(y-2)$.
18. Encuentra la ecuación de la parábola con foco en el punto $F(-3,0)$ y con directriz la recta cuya ecuación es $y - 4 = 0$.

19. Un arco parabólico tiene una altura de 20 metros y un ancho de 36 metros en la base. Si el vértice de la parábola se encuentra en la parte alta del arco. ¿A qué altura sobre la base tiene un ancho de 18 metros?

20. Un faro emplea un reflector parabólico de $1\ m$. de diámetro. ¿Qué profundidad debe de tener para que la fuente luminosa se coloque a media distancia entre el vértice y el plano de la orilla?

21. Un faro tiene un reflector parabólico de $6\ m$ de diámetro y $3\ m$ de profundidad ¿A qué distancia del vértice debe colocarse el bulbo luminoso?

22. Encuente las intersecciones de la elipse con la recta, cuyas ecuaciones son:

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1\ \ y\ \ y=3x+2.$

23. Encuentre las intersecciones de la circunferencia con la parábola, cuyas ecuaciones son:

$x^2+y^2=9\ \ y\ \ y^2=25(x-1)$.

AUTOEVALUACIÓN

1. Hay una tubería de desagüe recta y un pozo, si cada casa de ubica a la misma distancia de la tubería recta y del pozo. La distribución de las casas forma:
   a) Una recta
   b) Una circunferencia
   c) Un círculo
   d) Una parábola

2. La ecuación $4y^2 - 4y - 8x + 28 = 0$ representa:
   a) Una elipse con eje vertical
   b) Una elipse con eje horizontal
   c) Una parábola con eje vertical
   d) Una parábola con eje horizontal

3. Cuál es la ecuación de la parábola con vértice (-5,3) y foco (-2,3):
   a) $y^2 - 12x - 6y - 51 = 0$
   b) $y^2 + 12x - 6y - 51 = 0$
   c) $y^2 - 12x - 6y + 51 = 0$
   d) $y^2 - 12x + 6y + 51 = 0$

4. La ecuación de la parábola $(x-4)^2 = 16(y+4)$ en su forma ordinaria:
   a) $x^2 - 8x - 16y + 48 = 0$
   b) $x^2 - 8x - 16y - 48 = 0$
   c) $x^2 - 8x + 16y - 80 = 0$
   d) $x^2 - 8x - 16y + 80 = 0$

5. Un chico en su patineta salta y alcanza una altura máxima de 9cm logrando una distancia de 24 cm. Suponiendo que salta desde el origen y su trayectoria es una parábola. ¿Cuál es la ecuación que describe la trayectoria?
   a) $x^2 - 16y = 144$
   b) $x^2 + 24x - y = 0$
   c) $x^2 - 24x - y = 0$
   d) $y^2 - 16x - 16y + 120 = 0$

6. Indique cuales son las coordenadas del foco y del vértice de la parábola cuya ecuación es: $2y^2 - 12y - 6x - 51 = 0$.
   a) V(3, 1/4 ,3) F(3, -3/4)
   b) V(3, -1/4) F(3, -3/4)
   c) V(1/4 ,3) F(3/4,3)
   d) V(-1/4 ,3) F(-3/4,3)

7. Encontrar la ecuación en forma general de la parábola que abre a la izquierda, con foco en F(-2, -1), su lado recto está comprendido entre los segmentos de recta de los puntos A(-2,3) y B(-2,-5).
   a) $y^2 + 8x - 16 = 0$
   b) $y^2 - 8x - 16 = 0$
   c) $y^2 - 8x - 16 = 0$
   d) $y^2 + 16x - 8 = 0$

SOLUCIONES A LA AUTOEVALUACIÓN

PREGUNTA	RESPUESTA
1	D
2	D
3	A
4	B
5	B
6	D
7	A

REFERENCIAS.

de Oteyza, E., Lam, E., Hernández, C., Carrillo, A. y Ramírez, A.. (2007). *Conocimientos Fundamentales de Matemáticas, Trigonometría y Geometría Analítica*. México: Pearson educación.

Hirsch, C. y Schoen, H. (1987). *Geometría Analítica*. México: Mc Graw–Hill.

Lehmann, C. (2008). *Geometría Analítica con Trigonometría*. Limusa.

Morales, H. y Molina, A. (2002). *Geometría Analítica:* Limusa.

Ramírez, A. (2013). *Matemáticas III*. Trillas.

Ruiz, J. (2005). *Trigonometría*. Reverté.

Swokowski, E. y Cole, J. (2011). *Álgebra y trigonometría con Geometría Analítica*. Grupo Patria Cultural.

UNIDAD 5

CIRCUNFERENCIA, ELIPSE Y SUS ECUACIONES CARTESIANAS

Propósito. El estudiantado, será capaz de obtener las ecuaciones cartesianas de la circunferencia y la elipse y trazar sus gráficas correspondientes, dado cualquier conjunto de elementos definitorios. Resolverá problemas donde tales curvas se presenten, con el fin de avanzar en la consolidación del método analítico y desarrollar su habilidad de reconocimiento de formas y estructuras.

Al finalizar esta unidad pretendemos que alcances los siguientes aprendizajes:

La Circunferencia

- Deduce la ecuación ordinaria de la circunferencia e identifica sus elementos (radio y coordenadas del centro).
- Obtiene la ecuación general de la circunferencia.
- Obtiene la ecuación ordinaria a partir de la ecuación general y determina el centro y el radio de una circunferencia.
- Resuelve problemas de corte geométrico.

La elipse

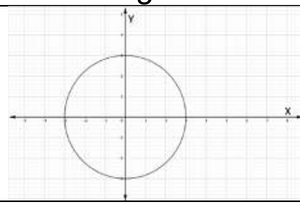
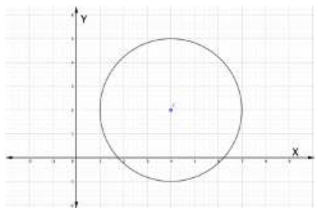
- Obtiene la definición de elipse como lugar geométrico e identificará sus elementos.
- Obtiene la ecuación cartesiana de una elipse, con ejes paralelos a los ejes cartesianos.
- Reconoce los tipos diferentes de simetría de la elipse.
- Identifica el papel de los parámetros a, b, c en la gráfica de la elipse y los emplea en su construcción.
- Determina los elementos de la elipse transformando la ecuación general a su forma ordinaria.
- Resuelve problemas geométricos y en otros contextos.

PRESENTACIÓN

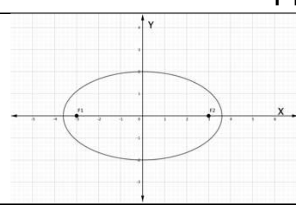
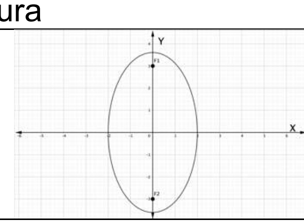
La elipse y la circunferencia junto con la parábola son llamadas secciones cónicas, ya que son la intersección entre un plano y un cono. Estas curvas aparecen en la naturaleza y su aplicación es muy amplia, por ejemplo, Kepler descubrió en 1602 que la órbita de marte era una elipse con el sol en uno de sus focos. Podemos observarla también en varios fenómenos cotidianos, así, si se tiene un vaso (cilindro circular recto) y se le vierte agua hasta la mitad, al inclinar el vaso la superficie describe con la intersección del vaso una elipse.

Su historia se remonta a la antigua Grecia, con los trabajos de Hipócrates de Quíos aunque el nombre de elipse se le atribuye a Apolonio de Pérgamo, el gran estudioso griego de las cónicas. La historia de la circunferencia es más antigua, se remonta a los Babilonios. En esta unidad se estudiarán ambas curvas desde la geometría analítica.

CONCEPTOS CLAVE DE LA CIRCUNFERENCIA

Subtema	Figura	Expresión Analítica	Parámetros
Ecuación de la circunferencia con centro en el origen		$x^2 + y^2 = r^2$	Las coordenadas del centro C(0,0) y el radio r
Forma canónica u ordinaria de la ecuación de la circunferencia		$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$	El centro V(h,k) y el radio r.
Forma general de la circunferencia		$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$	Los coeficientes: D, E y F.
Tangente a una circunferencia		Depende de la ecuación de la circunferencia y de la recta.	El punto de tangencia y la ecuación de la circunferencia

CONCEPTOS CLAVE DE LA ELIPSE

Subtema	Figura		Parámetros
			
	Expresión Analítica		
Elipse	Horizontal	Vertical	
Centro	$C(h,k)$	$C(h,k)$	El centro C(h,k)
Vértices	$V_1(h-a,k)$ $V_2(h+a,k)$	$V_1(h,k-a)$ $V_2(h,k+a)$	h, k y a
Focos	$F_1(h-c,k)$ $F_2(h+c,k)$	$F_1(h,k-c)$ $F_2(h,k+c)$	h, k y c
Relación entre a, b y c	$a > c$ $b^2 = a^2 - c^2$	$b^2 = a^2 - c^2$	Dos valores de tres.
Ecuación del eje focal	$y = k$	$x = h$	El valor de *k* o *h*
Longitud del lado recto	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2b^2}{a}$	Los valores de a y b

Excentricidad	$e=\frac{c}{a}, 0<e<1$	$e=\frac{c}{a}, 0<e<1$	Los valores de a y c
Ecuación en su forma canónica con centro en $C(h,k)$	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$	Los valores de c, h, a y b
Forma general	$Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$ $(AB>0)$	$Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$ $(AB>0)$	Los coeficientes
Tangente a una elipse	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$y-y_1=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1)$	La ecuación de la elipse y el punto de tangencia.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Localización de puntos en el plano.

Gráficar curvas y rectas dada un ecuación.

Manejo de la ecuación simétrica de la recta.

Encontrar la ecuación de un lugar geométrico.

Distancia entre dos puntos.

Fórmula de la distancia de un punto a una recta.

Elementos de geometría analítica: triángulo, mediatriz, bisectriz, mediana y meditriz.

5.1 Ecuación ordinaria de la circunferencia

La circunferencia es el lugar geométrico de los puntos que mantienen una distancia constante a un punto fijo. El punto fijo recibe el nombre de centro y la distancia constante se llama radio. Consideremos a las coordenadas de centro $C=(h,k)$ y un punto en la circunferencia $P=(x,y)$. Entonces se cumple la relación:

$$d(C,P)=r$$

Donde r es el radio de la circunferencia y d indica la distancia entre los puntos C y P. Luego,

$$d(C,P)=\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}$$

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=r$$

Elevamos al cuadrado y obtenemos lo que se conoce como la **ecuación ordinaria de la circunferencia con centro fuera del origen:**

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

Observación: Cuando el centro coincide con el origen, es decir, $C = (0,0)$, la ecuación toma la forma:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Que se conoce como la **ecuación de la circunferencia con centro en el origen**. Veamos algunos ejemplos de esta última expresión:

EJEMPLO: Encuentra la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio 8.

Solución. Como el radio es igual a 8, sustituimos en la ecuación anterior, ya que el centro de la circunferencia es C(0,0).

$$x^2 + y^2 = 8^2 \implies x^2 + y^2 = 64$$

EJEMPLO: Determina el radio de la circunferencia cuya ecuación es: $x^2 + y^2 = 7$.

Solución. Sabemos que, $r^2 = 7 \implies r = \pm\sqrt{7} \implies$ el radio no puede tener longitud negativa, así que, tomamos $r = \sqrt{7}$, el valor positivo.

Ahora, vamos a trabajar con la ecuación ordinaria de la circunferencia con centro fuera del origen:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

EJEMPLO**:** Encuentre el centro y el radio de la circunferencia con ecuación:

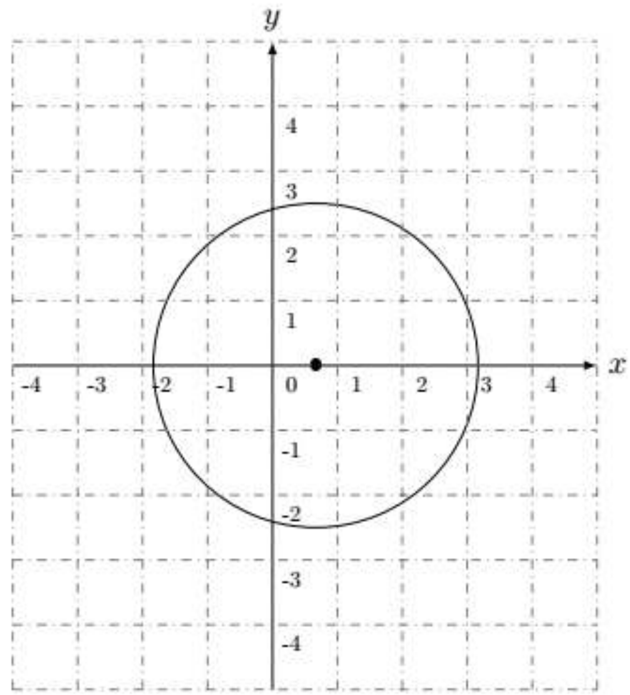
$$\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{4}$$

Solución**.** Partimos de que nos dan la ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria, podemos reescribirla como sigue para hacer visible el valor de k=0 y el radio al cuadrado:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + (y-0)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

De esta manera, podemos identificar con facilidad su centro $C = \left(\frac{2}{3}, 0\right)$ y su radio $r = \frac{5}{2}$. La gráfica se muestra a continuación.



EJEMPLO: Encuentre la ecuación de la circunferencia cuyo centro se localiza en el punto $(1{,}1)$ y que pasa por el punto $(3{,}4)$.

Solución. Tenemos las coordenadas del centro de la circunferencia $C(h,k) = C(1{,}1)$, entonces la ecuación tiene la forma,

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = r^2$$

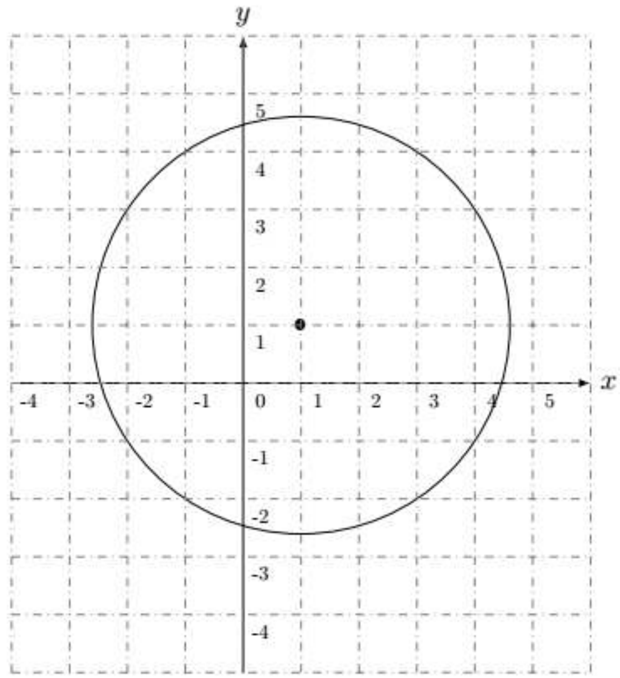
De donde falta determinar el radio r. Para encontrar el valor del radio usamos el dato de que el punto $(3{,}4)$ es parte de la circunferencia. Sabemos que la distancia del centro a cualquier punto de la circunferencia debe ser igual al radio, entonces,

$$r = \sqrt{(3-1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{13}$$

Por lo tanto, la ecuación de la circunferencia con las codiciones dadas:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 13^2$$

A continuación, se muestra la gráfica:



5.2 Ecuación general de la circunferencia

La ecuación general de la circunferencia se obtiene a partir de la ecuación ordinaria al desarrollar los binomios al cuadrado y sumar términos semejantes:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

$$\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2-2\mathrm{hx}-2\mathrm{ky}+\mathrm{h}^2+\mathrm{k}^2-\mathrm{r}^2=0$$
$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

Esta última ecuación se llama **ecuación general de la circunferencia**, donde:

$$D=-2h$$

$$E=-2k$$

$$F=h^2+k^2-r^2$$

EJEMPLO: Halla la ecuación general de la circunferencia a partir de su ecuación ordinaria:

$$(x+1)^2+(y+3)^2=49$$

Solución. Desarrollamos los binomios al cuadrado y sumamos términos semejantes para igualar a cero:

$$x^2+2x+1+y^2+6y+9=49$$

$$x^2+y^2+2x+6y-39=0$$

Es la ecuación general de la circunferencia dada su ecuación ordinaria.

EJEMPLO: Encontrar la ecuación en su forma general de la circunferencia dada su forma ordinaria: $(x-17)^2+(y+9)^2=3^2$

El desarrollo de los binomios: $(x-17)^2 = x^2-34x+289$

Y el segundo binomio: $(y+9)^2 = y^2+18y+81$

Escribiendo los términos en orden e igualando con cero se obtiene la ecuación en forma general:

$$x^2-34x+289 = y^2+18y+81$$

5.3 Relación entre la ecuación ordinaria y la ecuación general

Anteriormente, vimos cómo encontrar la ecuación general de la circunferencia a partir de su ecuación ordinaria. De manera inversa, podemos obtener la ecuación ordinaria de la circunferencia a partir de la ecuación general al completar los cuadrados. Consideremos la ecuación general:

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

Para completar el trinomio cuadrado perfecto (TCP), sumamos de ambos lados de la ecuación los términos $\frac{D^2}{4}$ y $\frac{E^2}{4}$ y agrupamos como sigue,

$$\left(x^2+Dx+\frac{D^2}{4}\right)+\left(y^2+Ey+\frac{E^2}{4}\right)=-F+\frac{D^2}{4}+\frac{E^2}{4}$$

Como los términos que sumamos son los que se necesitan para completar el cuadrado, se simplifica como sigue:

$$\left(\mathrm{x}+\frac{\mathrm{D}}{2}\right)^2+\left(\mathrm{y}+\frac{\mathrm{E}}{2}\right)^2=\frac{\mathrm{D}^2+\mathrm{E}^2-4\mathrm{F}}{4}$$

Como, $\frac{D^2}{4}=h$, $\frac{E^2}{4}=k$ y $\frac{\mathrm{D}^2+\mathrm{E}^2-4\mathrm{F}}{4}=r^2$ son cantidades constantes, la ecuación anterior se puede reescribir como:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

Ahora, tenemos las siguientes condiciones:

- Si $\mathrm{D}^2+\mathrm{E}^2-4\mathrm{F}>0$, la ecuación representa una circunferencia con centro en $C=\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$ y radio $r=\frac{D^2+E^2-4F}{4}$.
- Si $\mathrm{D}^2+\mathrm{E}^2-4\mathrm{F}<0$, entonces la ecuación no representa ningún lugar geométrico.
- Si $D^2+E^2-4F=0$, entonces la ecuación representa un punto.

EJEMPLO: Escriba la siguiente ecuación general de la circunferencia en su forma ordinaria,

$$6x^2 + 36x + 6y^2 - 96y = -9$$

Solución. Lo primero que haremos será agrupar los términos y obtener el factor común.

$$6(x^2 + 6x) + 6(y - 16y) = -9$$

Observando los términos que están dentro del paréntesis, podemos observar que el término que hace falta para completar el cuadrado es $\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9$ y $\left(\frac{16}{2}\right)^2 = 64$ respectivamente:

$$6(x^2 + 6x + 9) + 6(y - 16y + 64) = -9 + 54 + 384$$

$$6(x + 3)^2 + 6(y - 8)^2 = 429$$

$$(x + 3)^2 + (y - 8)^2 = \frac{143}{2}$$

La ecuación corresponde a una circunferencia de centro $C = (-3{,}8)$ y radio $r = \sqrt{\frac{143}{2}}$

EJEMPLO: Halla la ecuación en su forma ordinaria de la ecuación de la circunferencia en su forma general:

$$x^2 + y^2 + 16x - 8y + 16 = 0$$

Completando el trinomio cuadrado perfecto para x y para y se tiene:

$$x^2 + 16x + \left(\frac{16}{2}\right)^2 + y^2 - 8y + \left(\frac{-8}{2}\right)^2 = -64 + 64 + 16$$

Factorizando el primer miembro y simplificando el segundo:

$(x + 8)^2 + (y - 4)^2 = 16$ que corresponde a la ecuación ordinaria de la circunferencia. La ventaja de esta ecuación es que se aprecia fácilmente el centro $C(-8{,}4)$ y el radio $r^2 = 16 \implies r = \sqrt{16} \implies r = 4$.

5.4 Problemas de aplicación

En esta sección vamos a analizar algunas de aplicaciones geométricas que podemos resolver echando mano de la ecuación de la circunferencia.

PROBLEMA RESUELTO 1**. Encontrar la ecuación de la recta tangente a una circunferencia** con ecuación:

$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 20, \text{ en el punto } (6{,}7).$$

Solución**.** Para encontrar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia, vamos a calcular la pendiente de la recta que une al punto $(6,7)$ con el centro de la circunferencia con coordenadas $C(h,k) = C(4,3)$:

$$m_1 = \frac{7-3}{6-4} = 2$$

Como la pendiente de la recta tangente m_2 debe ser perpendicular a la recta que une al centro con el punto $(6,7)$, tenemos por las condiciones de perpendicularidad que,

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{2}$$

Utilizando la forma punto pendiente de la recta, obtenemos la ecuación de la recta tangente como sigue:

$$(y-7) = -\frac{1}{2}(x-6)$$

PROBLEMA RESEUELTO 2. **Encontrar la ecuación de la circunferencia dados tres puntos**. Encuentre la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $P = (9,8)$, $Q = (2,9)$ y $R = (8,1)$.

SOLUCIÓN**.** Para resolver este problema vamos a considerar la ecuación general de la circunferencia,

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Como los punto P, Q, R son puntos de la circunferencia y deben satisfacer la ecuación, los sustituimos y obtenemos,

$$9^2 + 8^2 + D9 + E8 + F = 0$$

$$2^2 + 9^2 + D2 + E9 + F = 0$$

$$8^2 + 1^2 + D8 + E1 + F = 0$$

Reacomodamos los términos lo que tenemos es un sistema de ecuaciones donde las incógnitas son D, E y F,

$$9D + 8E + F = -145$$

$$2D + 9E + F = -85$$

$$8D + E + F = -65$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones y obtenemos como solución que $D = -10$, $E = -10$ y $F = 25$. Por lo tanto, la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos P, Q y R es la siguiente en su forma general.

$$x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$$

PROBLEMA RESUELTO 3**. Intersección de una recta con una circunferencia**. Encuentre los puntos de intersección de la circunferencia con ecuación: $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 4 = 0$ y la recta $x + 3y = 1$

Solución**.** Primero despejamos la variable x de la ecuación de la recta y obtenemos $x = 1 - 3y$ y posteriormente la sustituimos en la ecuación de la circunferencia.

$$(1 - 3y)^2 + y^2 + 4(1 - 3y) - 2y + 4 = 0$$

Simplificamos y obtenemos la ecuación,

$$10y^2 - 20y + 9 = 0$$

Despejamos el valor de y ,

$$y_1 = \frac{-10 + \sqrt{10}}{10}$$

$$y_2 = \frac{-10 - \sqrt{10}}{10}$$

Para encontrar el valor de las correspondientes abscisas, sustituimos y_1 y y_2 en la ecuación $x = 1 - 3y$ y obtenemos,

$$x_1 = \frac{-20 - 3\sqrt{10}}{10}$$

$$x_2 = \frac{-20 + 3\sqrt{10}}{10}$$

Por lo tanto, los puntos de intersección de la recta con la circunferencia, son P$\left(\frac{-20-3\sqrt{10}}{10}, \frac{-10+\sqrt{10}}{10}\right)$ y Q$\left(\frac{-20+3\sqrt{10}}{10}, \frac{-10-\sqrt{10}}{10}\right)$.

PROBLEMAS PROPUESTOS.

En las siguientes ecuaciones, determina el centro y el radio de la circunferencia. En cada caso, haz una gráfica:

1. a) $x^2 + y^2 = 34$ b) $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 25$

c) $(x-3)^2 + y^2 = 2$ d) $x^2 + (y-5)^2 = 9$

2. Determina el centro, el radio y la gráfica de las siguientes circunferencias:

a) $x^2 + y^2 - 9 = 0$ b) $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 22 = 0$

3.Determina la ecuación ordinaria y general de la circunferencia que tiene centro C(3, - 4) y radio r = $\sqrt{70}$.

4. Determina la ecuación ordinaria y general de la circunferencia de centro C(2, 7) y radio r = 5.

5. Dar la ecuación de la circunferencia, en su forma general, que tiene centro en C(-4, 2) y diámetro 8.

6. Dar la ecuación de la circunferencia, en su forma general, que tiene centro en C(-1, 3) y pasa por el punto R(2, -4).

7. Escribe la ecuación de la circunferencia, en su forma ordinaria, cuyos extremos de uno de su diámetro son (-3,5) y (7,-3).

8. Obtén el centro y el radio de la circunferencia $x^2 + y^2 – 6x + 8y + 9 = 0$.

9. Obtén el centro y el radio de la circunferencia: $x^2 + y^2 – 6x + 8y = 0$.

10. El centro y el radio de la circunferencia: $x^2 + y^2 - 36 = 0$.

11. Determina si el punto (5,5) se encuentra dentro, sobre o fuera de la circunferencia cuya ecuación es $x^2 + y^2 – 8x + 10y -12 = 0$.

12. Determina si las siguientes circunferencia se cortan en dos puntos; son tangentes, es decir, se tocan en un solo punto; o no se cruzan:

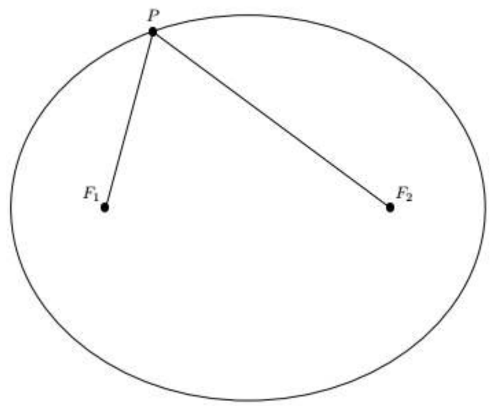
$x^2 + y^2 + 2x - 4y -20 = 0$, $2x^2 + 2y^2 – 12x -4y + 12 = 0$.

13. Determinar la ecuación de la circunferencia con centro en (-2, 1) y es tangente al eje de las ordenadas.

14. Una estación de radio está ubicada en un mapa en las coordenadas (50, 35). El máximo alcance de su emisión es de 15 kilómetros. Determina la ecuación que represente a las coordenadas de todos los puntos de máximo alcance de la estación.

5.5 Elementos de la elipse

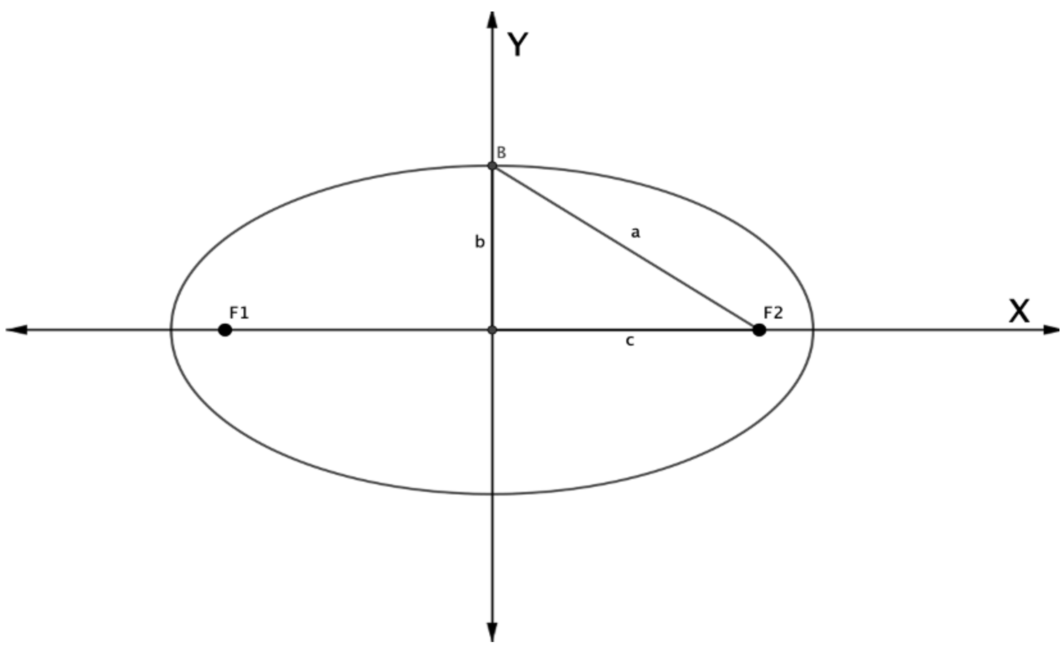
La elipse es el lugar geométrico de los puntos cuya sumas de sus distancias a dos puntos fijos, es constante. Los puntos fijos reciben el nombre de focos.



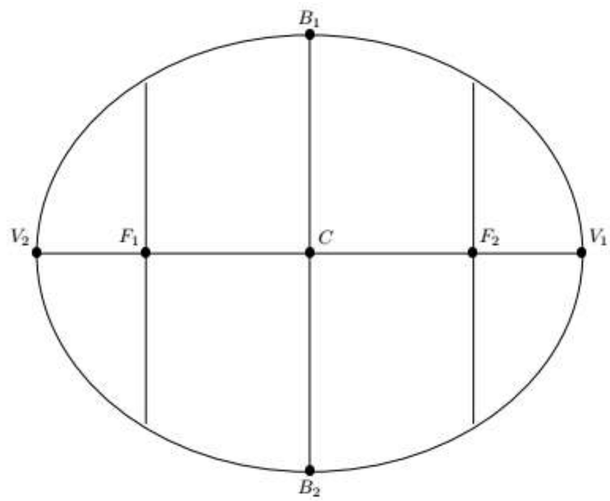
Consideremos un punto P en la elipse y los focos F_1, F_2. Entonces se cumple la relación siguiente, donde a es una constante positiva.

$$d(F_1, P) + d(F_2, P) = 2a$$

Un poco más adelante, tendrán sentido los parámetros a, b y c de la figura siguiente:



Sobre la elipse hay varios elementos relevantes que se deben identificar. El punto C que se encuentra entre los focos F_1 y F_2 recibe el nombre de “centro de la elipse”. A los puntos V_1 y V_2 se les conoce como vértices de la elipse, y existen otros puntos importantes que son los puntos B_1 y B_2. Al segmento V_1V_2 se le conoce como eje mayor. Al segmento B_1B_2 se le conoce como eje menor. A las rectas perpendiculares al eje mayor que pasan por los focos se les conoce como lados rectos. Observa la figura.



Renombramos algunas cantidades relevantes:

$$a = d(C, V_1) = d(C, V_2)$$

$$b = d(C, B_1) = d(C, B_2)$$

$$c = d(C, F_1) = d(C, F_2)$$

Estas tres cantidades se relacionan por la expresión,

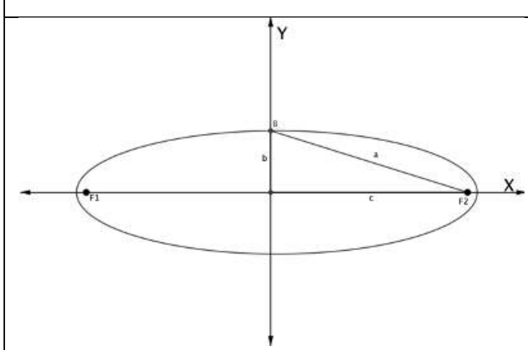
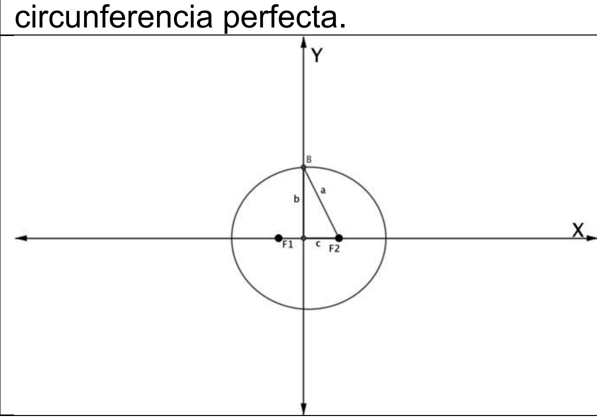
$$a^2 = b^2 + c^2$$

La longitud del lado recto se calcula por,

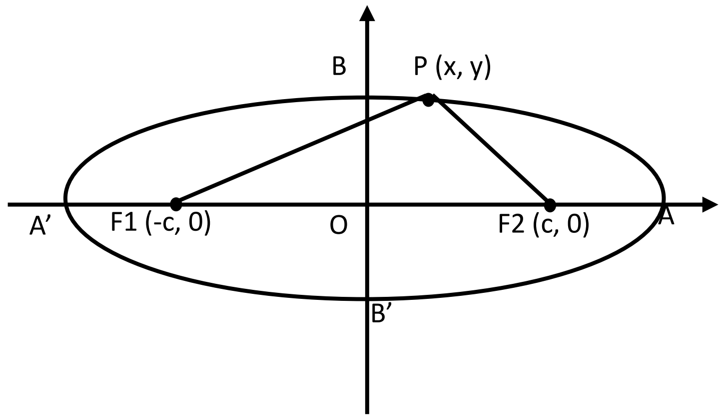
$$LR = \frac{2b^2}{a}$$

Finalmente, definimos la excentricidad como,

$$e = \frac{c}{a}, 0 < e < 1$$

Si e ≈ 1, la elipse se va aplanando o alargando.	Si e ≈ 0, la elipse se aproxima a una circunferencia, cuando $e = 0$, los focos coinciden con el centro y se dibuja una circunferencia perfecta.
	

5.6 Deducción de la ecuación de la elipse horizontal con centro en el origen.



Escribiendo las distancias: $d(P, F) + d(P, F') = 2a$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

Otra manera conveniente es: $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

Elevando al cuadrado ambos miembros y desarrollando se obtiene:

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

Al simplificar términos semejantes se obtiene:

$$4cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Dividiendo entre (4) y asociando como: $cx - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

Elevando al cuadrado ambos miembros, desarrollando y simplificando:

$$c^2x^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2$$

Escribiendo como: $c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$

Multiplicando por (- 1) ambos miembros: $a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$

Factorizando en ambos miembros: $x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$

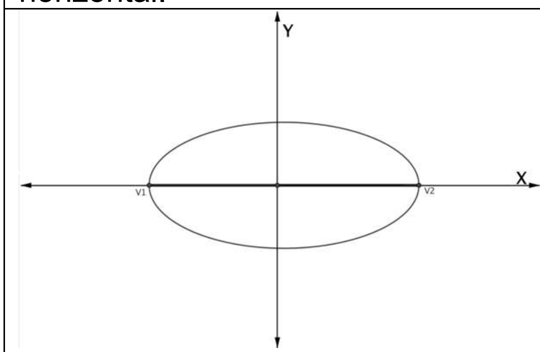
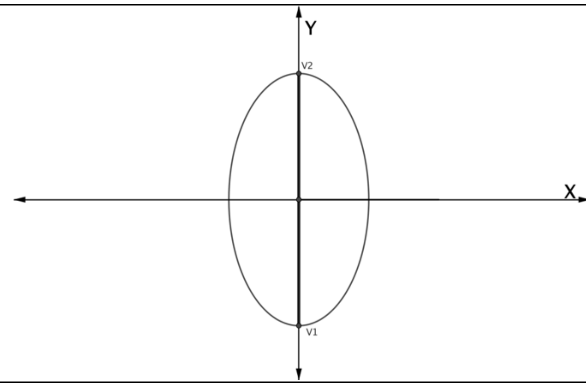
Sabemos que: $a^2 - c^2 = b^2$, entonces al sustituir en la expresión anterior se obtiene:

$$x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Al dividir ambos miembros entre **a^2b^2,** se obtiene: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

La cual es llamada **ecuación de la elipse horizontal en su forma ordinaria o simétrica.**

Análogamente, se obtiene la ecuación de la elipse vertical en su forma ordinaria y simétrica. La siguiente tabla puede ayudar a recordar y puedes observar la diferencia en cada ecuación.

Elipses con centro en el origen	
Eje mayor horizontal. Elipse horizontal.	Eje mayor vertical. Elipse vertical.
	
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ El valor mayor es: a.	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ El valor mayor es: a.

EJEMPLO: Determina los elementos de la elipse: vértices, puntos B, focos, lado recto y excentricidad, representada por la ecuación siguiente y traza su gráfica:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

De los denominadores 4 y 9, el mayor es 9 y se encuentra debajo de y^2, entonces la elipse está en posición vertical y los vértices y los focos están en el eje Y. Además, tenemos que: $a^2 = 9 \; y \; b^2 = 4$

Comparando la ecuación con las fórmulas del segundo caso en la tabla anterior, se tiene:

$a^2 = 9 \Longrightarrow$ **a** = $\sqrt{9} = 3$. Los vértices que se encuentran sobre el eje mayor y tienen coordenadas:

$$V1(0,-a) = V1(0,-3)\ y\ V2(0,a) = V2(0,3)$$

$\mathbf{b}^2 = 4 \Longrightarrow b = \sqrt{4} = 2$. Los puntos B, se encuentran sobre el eje menor y tienen coordenadas:

$$B1(-b,0) = B1(-2,0)\ y\ B2(b,0) = B2(2,0)$$

Por la relación $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$, obtenemos que $\mathbf{a^2 - b^2 = c^2}$ de manera que:

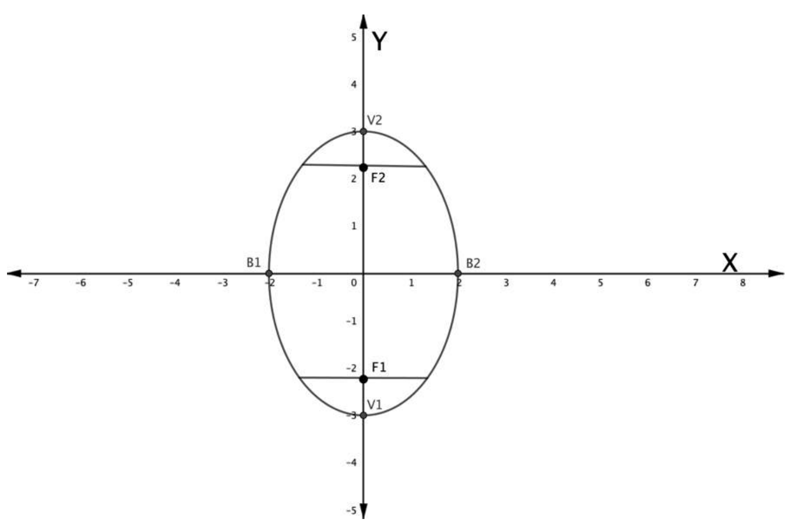
$$9 - 4 = c^2 \Longrightarrow 5 = c^2 \Longrightarrow \sqrt{5} = c$$

Las coordenadas de los focos son: $F1(0,-c) = F1\left(0,-\sqrt{5}\right)\ y\ F2(0,c) = F2\left(0,\sqrt{5}\right)$.

Longitud del lado recto es $LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(4)}{3} = \frac{8}{3}$

La excentricidad es: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

Al graficar la elipse, ésta se alarga un poco porque el valor de la excentricidad se acerca a 1.



EJEMPLO: Encuentra los elementos de la elipse y traza la gráfica. Observa que no siempre se da la ecuación en forma ordinaria como es el siguiente caso:

$$9x^2 + 36y^2 = 324$$

Este tipo de problemas se resuelve dividiendo toda la ecuación entre el término independiente para obtener la igualdad con 1:

$$9x^2 + 36y^2 = 324$$

$$\frac{9x^2}{324} + \frac{36y^2}{324} = \frac{324}{324}$$

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Con esta forma es más fácil ver qué valores tiene a y b. De los dos denominadores 36 y 9, el mayor es 36, entonces por la tabla anterior $a^2 = 36$ y se trata de una elipse horizontal. Su eje mayor es el eje X.

$a^2 = 36 \implies a = \sqrt{36} = 6$. Los vértices se encuentran sobre el eje mayor y tienen coordenadas:

$$V1(-a,0) = V1(-6,0)\ y\ \ V2(a,0) = V2(6,0)$$

$\mathbf{b}^2 = 9 \implies b = \sqrt{9} = 3$. Los vértices de los puntos B están sobre el eje menor y tiene coordenadas:

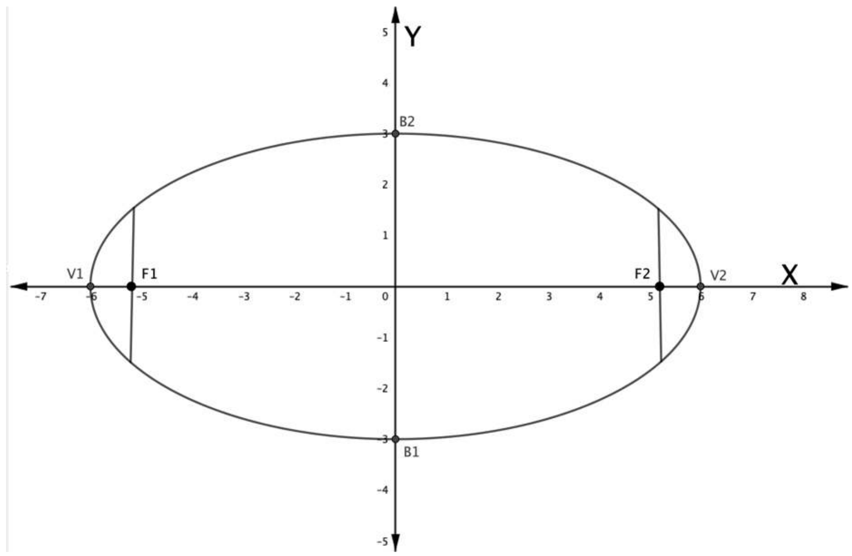
$$B1(0,-b) = B1(0,-3)\ \ y\ \ B2(0,b) = B2(0,3)$$

Por la relación $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$, obtenemos que $\mathbf{a^2 - b^2 = c^2}$. Sustituyendo, $36 - 9 = c^2 \implies 27 = c^2 \implies \sqrt{27} = c$. Los focos tienen coordenadas:

$$F1(-c,0) = F1\left(-\sqrt{27},0\right)\ \ y\ \ F2(c,0) = F2\left(\sqrt{27},0\right)$$

Longitud del lado recto es: $LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(9)}{6} = \frac{18}{6} = 3$

La excentricidad es: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{27}}{6} \approx 0.8660$. Lo que indica que la elipse se alarga o se aplana como en la figura.



PROBLEMAS PROPUESTOS

Determina los elementos de las siguientes elipses (centro, ejes, vértices, focos, lado recto y excentricidad) y traza la gráfica correspondiente.

1. $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1$

2. $\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{25}=1$

3. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

4. $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{169}=1$

5. $4x^2 + 9y^2 = 36$

6. $4x^2 + y^2 = 16$

7. $9x^2 + 4y^2 = 144$

8. $x^2 + 4y^2 = 64$

Ahora se tratará el **problema inverso:** conocidos algunos datos de elipses que tienen el centro en el origen, hallar las ecuaciones y los elementos faltantes.

EJEMPLO: Las condiciones de la elipse son: a = 8, b = 3 y el eje focal o eje mayor está sobre el eje X.

Solución: Como el eje focal está en el eje X, entonces la elipse es horizontal y tiene como coordenadas de sus vértices en V1(8,0) y V2(-8,0) y las coordenadas de los puntos B1(0, 3) y B2(0,-3).

El valor de c se determina por la relación $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$ de manera que: $c=\sqrt{a^2 - b^2}$

$\rightarrow c=\sqrt{64-9}=\sqrt{55}$, los focos están en F1$(\sqrt{55}, 0)\ y\ F2(-\sqrt{55}, 0)$

La ecuación, el lado recto y su excentricidad son:

$$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{9}=1 \qquad lr=\frac{2\cdot 9}{8}=\frac{18}{8} \qquad e=\frac{\sqrt{55}}{8}=0.9270$$

EJEMPLO: Las condiciones son: a = 11, c = 5 y eje mayor sobre el eje Y.

Solución. Los focos y los vértices están en F(0, $\pm$ 5) y V(0, $\pm$ 11).

El valor de b se determina por la relación $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$ de manera que:

$b=\sqrt{a^2 - c^2}=\sqrt{121-25}=\sqrt{96}$, luego los puntos B están en B($\pm\sqrt{96}$, 0)

La ecuación, el lado recto y su excentricidad son:

$$\frac{x^2}{96}+\frac{y^2}{121}=1 \qquad lr=\frac{2\cdot 96}{11}=\frac{192}{11} \qquad e=\frac{5}{11}=0.4545$$

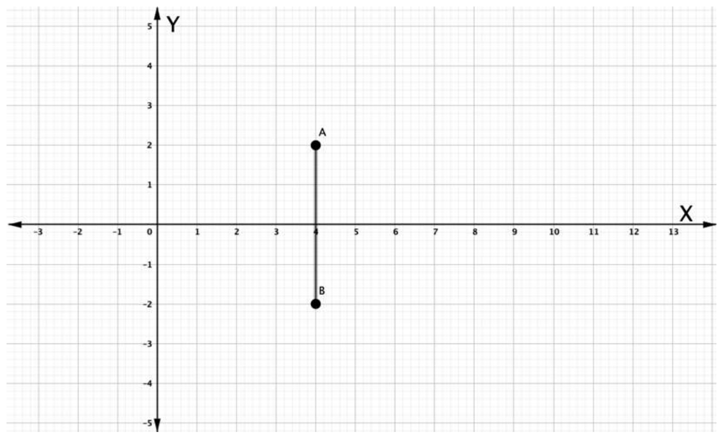
PROBLEMAS PROPUESTOS

Conocidas las siguientes condiciones, escribe una ecuación de la elipse que tenga centro C(0, 0) y traza la gráfica.

1. **a** = 6, **b** = 4, focos sobre eje Y.
2. **a** = 6, **c** = 4, focos sobre eje X.
3. **a** = 6, lado recto = 3, focos sobre eje Y.
4. **b** = 4, lado recto = 4, focos sobre eje X.
5. **a** = 9, **b** = 5, vértices del eje mayor sobre eje X.
6. **b** = 3, **c** = 4, vértices del eje mayor sobre eje Y.
7. Vértices A($\pm$5, 0) y focos F($\pm$4, 0).
8. Un foco F(0, $\pm$3) y **b** = 4.

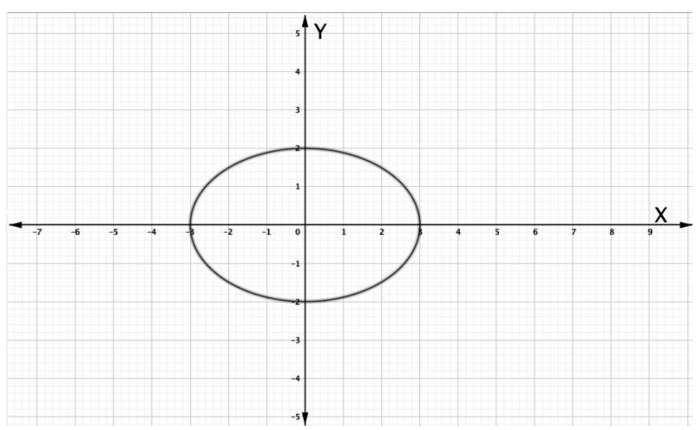
5.7 Simetría con respecto a los ejes y al centro.

Observa lo siguiente, supongamos que $(x,y)=A(4,5)$, si reemplazamos la coordenada y por $-y$, entonces el punto tendrá coordenadas $(x,-y)=B(4,-5)$, lo que se puede observar de manera geométrica en el plano.



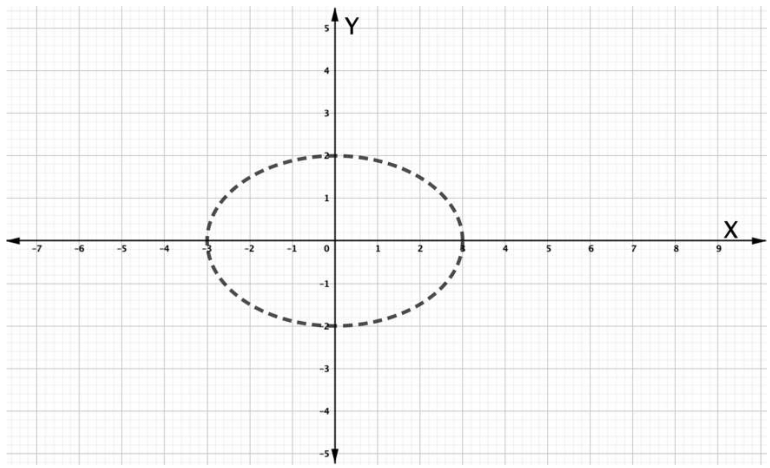
El eje X funge como espejo y el punto A se reflejó en el punto B con respecto al eje X. Formalmente, decimos que A y B son simétricos con respecto al eje X y, éste es el eje de simetría del segmento que une a A con B.

Ahora consideremos la siguiente ecuación de la elipse horizontal $E_1: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, veamos qué sucede si sustituimos la coordenada y por $-y$: $E_2: \frac{x^2}{9} + \frac{(-y)^2}{4} = 1$, sabemos que cualquier número real elevado al cuadrado tiene un resultado positivo, así, E_2: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Esto significa que la ecuación no se alteró, quedó igual, entonces la elipse es simétrica con respecto al eje X.



La semi elipse superior se reflejó en la semi elipse inferior, con esto tenemos que, la elipse con centro en el origen cuya ecuación es $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, es simétrica con respecto al eje X.

¿Qué pasará si ahora sustituimos la variable x por la variable $-x$? Haciendo uso de la misma ecuación de la elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, procedamos a sustituir $\frac{(-x)^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, lo que implica que $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, tenemos la misma ecuación que la original. La elipse con centro en el origen es simétrica, pero ahora con respecto al eje Y como se muestra en el plano cartesiano.



La semi elipse derecha se refleja en la semi elipse izquierda con respecto al eje Y. La elipse con centro en el origen cuya ecuación es $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, es simétrica, también con respecto al eje Y.

Ahora, ¿qué pasará si sustituimos la variable x por $-x$ y la variable y por $-y$? Haciendo uso de la misma ecuación $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, veamos cómo resulta: $\frac{(-x)^2}{9}+\frac{(-y)^2}{4}=1$, lo que implica que $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, tenemos que la ecuación original no se alteró. Esto significa que, la elipse horizontal es simétrica con respecto al origen del plano cartesiano.

Esto se generaliza para cualquier elipse con centro en el origen, ya sea horizontal o vertical. Si la elipse no tiene su centro en el origen, se sigue cumpliendo lo anterior, es sólo que ahora, una elipse horizontal será simétrica con respecto a la recta $x=h$ paralela al eje Y, y será simétrica con respecto a la recta $y=k$ que es paralela al eje X. Análogamente para la elipse vertical. Las elipses con centro fuera del origen, no tienen simetría con respecto al origen del plano cartesiano porque al sustituir la variable x por $-x$ y la variable y por $-y$, no obtenemos la ecuación original, puedes descubrirlo.

En resumen, tenemos tres tipos de simetría de la elipse: Simetría con respecto al eje X, simetría con respecto al eje Y, y simetría con respecto al origen, esto último sólo para el caso de las elipses con centro en el origen.

5.8 La elipse y los parámetros de su representación algebraica**.**

5.8.1 Ecuación ordinaria de la elipse con centro fuera del origen.

Para encontrar la ecuación ordinaria de la elipse consideramos las coordenadas del centro $C = (h, k)$. No confunda C mayúscula con c minúscula, la primera es el nombre del centro y la segunda es un valor. Como c es la distancia focal, las coordenadas de los focos se pueden escribir como sigue,

$$F_1 = (h - c, 0)$$

$$F_2 = (h + c, 0)$$

Si $P = (x, y)$ es un punto de la elipse, siguiendo la definición se tiene la siguiente ecuación,

$$\sqrt{\big(x-(h-c)\big)^2 + (y-k)^2} + \sqrt{\big(x-(h+c)\big)^2 + (y-k)^2} = 2a$$

Utilizando la relación $a^2 = b^2 + c^2$, llegamos a la **ecuación ordinaria de la elipse con el eje mayor paralelo al eje X, es una elipse horizontal con centro en Ch,k).**

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Razonando de manera análoga se tiene que la ecuación ordinaria con el eje mayor paralelo al eje Y, es una elipse vertical con centro en C(h,k).

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

EJEMPLO: Encuentre la ecuación de la elipse horizontal con centro en $C = (-4,4)$ y cuyo eje mayor tiene longitud 34 y la del eje menor es de 16.

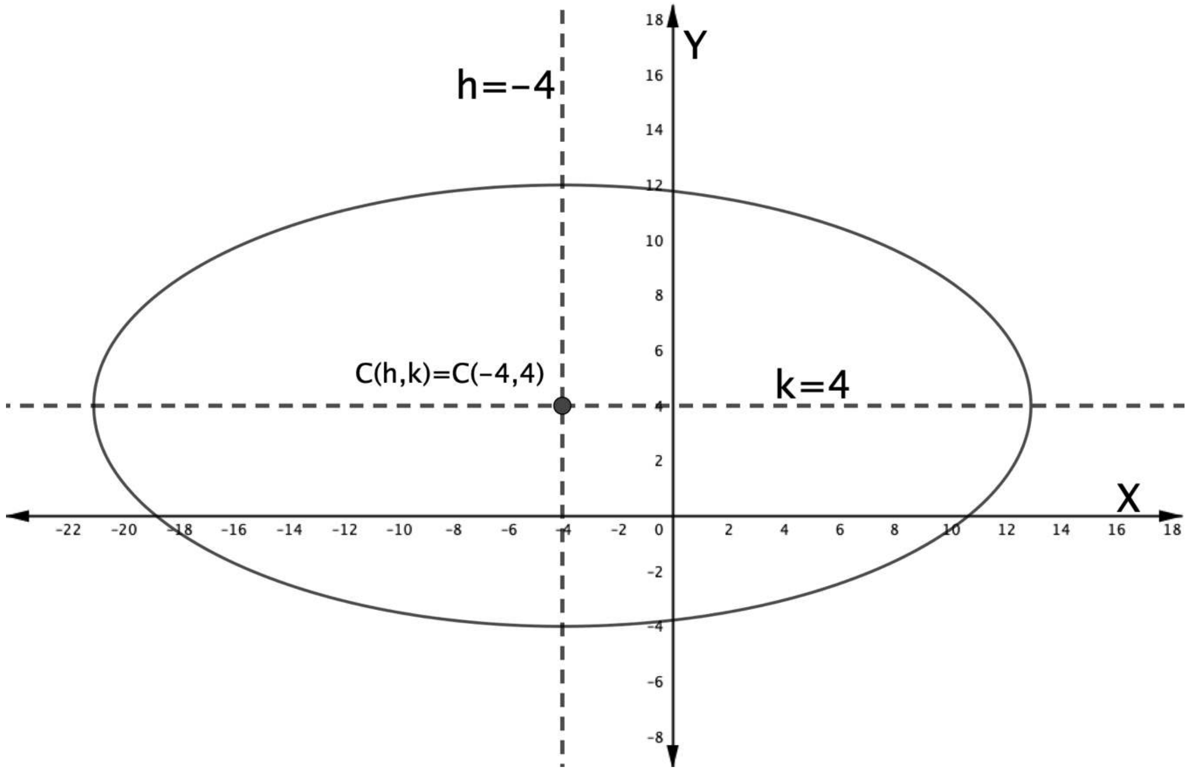
Solución**.** El eje mayor vale 2a=34 y el eje menor vale 2b=16, despejando y elevando al cuadrado:

$$a^2 = \left(\frac{34}{2}\right)^2 = 289 \quad y \quad b^2 = \left(\frac{16}{2}\right)^2 = 64$$

Sustituimos y obtenemos que la ecuación buscada es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x+4)^2}{289} + \frac{(y-4)^2}{64} = 1$$



EJEMPLO: Encuentre la ecuación de la elipse con eje mayor paralelo al eje x, de longitud 14, cuyo centro se localiza en el punto $C=(4,-3)$ y que tiene excentricidad $e=\frac{1}{2}$.

Solución. Como nos dan el centro y nos dicen que el eje mayor es paralelo al eje x, tenemos que ecuación de la elipse tiene que tener la forma,

$$\frac{(x-4)^2}{a^2}+\frac{(y+3)^2}{b^2}=1$$

Es una elipse horizontal, también, sabemos que la longitud del eje mayor es 14. De aquí obtenemos que, 2a=14 y $a=7$, de manera que sólo falta determinar el valor de b. Para encontrar el valor de b utilizamos el dato de la excentricidad. Por definición de excentricidad tenemos la siguiente ecuación,

$$e=\frac{c}{a}\Rightarrow \frac{c}{a}=\frac{1}{2}\Rightarrow \frac{c}{7}=\frac{1}{2}\Rightarrow c=\frac{7}{2}$$

Como a, b y c están relacionadas por la expresión,

$$a^2=b^2+c^2\Rightarrow a^2-c^2=b^2\Rightarrow \sqrt{a^2-c^2}=b$$

Tenemos que, $b=\sqrt{7^2-\left(\frac{7}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{147}{4}}$. La ecuación de la elipse es,

$$\frac{(x-4)^2}{49}+\frac{(y+3)^2}{\frac{147}{4}}=1$$

5.9 Ecuación general de la elipse

La ecuación general de la elipse se obtiene a partir de la ecuación ordinaria al desarrollar los binomios al cuadrado y reagrupar. Sin pérdida de generalidad, partimos de la siguiente ecuación de la elipse horizontal:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Multiplicamos por a^2b^2,

$$b^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2=a^2b^2$$

Desarrollamos y ordenamos,

$$b^2x^2+a^2y^2-2b^2hx-2a^2ky+b^2h^2+a^2k^2-a^2b^2=0$$

Con $A=b^2, C=a^2,\ -2b^2h=D, -2a^2k=E\ y\ \ b^2h^2+a^2k^2-a^2b^2=F$ se tiene la forma,

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0.$$

A esta forma es a lo que se le conoce como **la ecuación general de la elipse**.

EJEMPLO: Un caso en el que se requiere de varias operaciones algebraicas es cuando se da la ecuación de la elipse en forma general. Se requiere encontrar la forma ordinaria de:

$$16x^2 + 7y^2 - 64x + 42y + 15 = 0$$

$16(x^2 - 4x) + 7(y^2 + 6y) = -15$ se factorizó el coeficiente de los términos cuadráticos.

$16(x^2 - 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2) + 7(y^2 + 6y + \left(\frac{6}{2}\right)^2) = -15 + 16\left(\frac{4}{2}\right)^2 + 7\left(\frac{6}{2}\right)^2$ se completaron los trinomios cuadrados perfectos sumando en ambos miembros la misma cantidad.

$$16(x^2 - 4x + 4) + 7(y^2 + 6y + 9) = - 15 + 16(4) + 7(9)$$

$$16(x - 2)^2 + 7(y + 3)^2 = 112$$

Se factorizaron los trinomios cuadrados perfectos.

$$\frac{16(x - 2)^2 + 7(y + 3)^2 = 112}{112}$$

Se dividió la expresión entre el término independiente.

$$\frac{16(x-2)^2}{112}+\frac{7(y+3)^2}{112}=\frac{112}{112}$$

$$\frac{(x-2)^2}{\frac{112}{16}}+\frac{(y+3)^2}{\frac{112}{7}}=1$$ Se simplificaron los numeradores y denominadores.

Por lo tanto, la ecuación en su forma ordinaria es: $\frac{(x-2)^2}{7}+\frac{(y+3)^2}{16}=1$

EJEMPLO: Transforma la siguiente ecuación de la elipse de su forma ordinaria a su forma general:

$$\frac{(x+4)^2}{284}+\frac{(y-4)^2}{64}=1$$

Solución. Para transformar la ecuación de la elipse vamos a multiplicar la ecuación por 284x64=18176 para obtener,

$$64(x+4)^2+284(y-4)^2=18176$$

Desarrollamos y simplificamos,

$$64(x^2+8x+16)+284(y^2-8y+16)=18176$$

$$64x^2+512x+1024+284y^2-2272y+4544=18176$$

Finalmente, obtenemos la ecuación en su forma general:

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

$$64x^2+284y^2+512x-2272y-12608=0$$

EJEMPLO: Transforma la ecuación de la elipse de su forma general a su forma ordinaria,

$$9x^2+16y^2+36x-96y+36=0$$

Para obtener la forma ordinaria, vamos a utilizar el método de completar cuadrados, reescribimos la ecuación en la siguiente forma,

$$9(x^2+4x)+16(y^2-6y)+36=0$$

Para la expresión (x^2+4x) el término que se requiere para completar cuadrados es 4. Para la expresión (y^2-6y) el término que se requiere para completar el cuadrado es 9. Luego escribimos,

$$9(x^2+4x+4-4)+16(y^2-6y+9-9)+36=0$$

Entonces,

$$9(x^2+4x+4)-36+16(y^2-6y+9)-144+36=0$$

Los términos que quedan dentro del paréntesis se convierten en un trinomios cuadrado completo,

$$9(x+2)^2 + 16(y-3)^2 - 144 = 0$$

Finalmente dividimos entre 144 y acomodamos los términos,

$$\frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Determinar todos los datos de la elipse y trazar la gráfica:

   $4x^2 + 6y^2 - 16x + 36y + 46 = 0$

2. Dar la ecuación de la elipse cuyos vértices son los puntos V1(-6, 8) y V1(6, 8), y los focos son los puntos F1(-2, 8) y F2(2, 8).

3.Determinar la ecuación de la elipse y trazar la gráfica cuando: F1(3, 5), F2(-3, 5), longitud del eje menor es 8.

4.Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve, de tal manera que la suma de las distancias a los puntos F1(2, -3) y F2(-2, -3) es siempre 6.

5. Determinar todos los datos de la elipse y trazar la gráfica:

   $6x^2 + y^2 - 3x + y - 27/16 = 0$

6.Determinar todos los datos de la elipse y trazar la gráfica:

   $x^2 + 4y^2 - 2x - 24y + 21 = 0$

7.Determinar todos los datos de la elipse y trazar la gráfica:

   $9x^2 + 4y^2 + 72x = 0$

8.Dar la ecuación de la elipse que tiene e = 1/2 y los vértices del eje mayor están en V1(-3, 4) y V2(5, 4).

9.a) Un punto P(x,y) se mueve de forma que el producto de las pendientes de las dos rectas que unen P con los dos puntos fijos (-2,1) y (6,5) es constante y es igual a -4. Demostrar que dicho lugar es una elipse y hallar su centro.

9.b) En la misma situación ¿cuál sería el lugar geométrico si el producto fuera igual a -1?

10. Un arco de 80 metros de luz tienen forma semielíptica. Sabiendo que su altura es de 30 metros, hallar la altura del arco en un punto situado a 15 metros del centro.

11. La órbita de la Tierra es una elipse en uno de cuyos focos está el Sol. Sabiendo que el semieje mayor de la elipse mide $1.485\text{X}10^8$ km y que la excentricidad es aproximadamente $\frac{1}{62}$, hallar la máxima y la mínima distancias de la Tierra al Sol.

12.Determinar todos los datos de la elipse y trazar la gráfica:

$$6x^2 + y^2 - 3x + y - 27/16 = 0$$

13. Determinar todos los datos de la elipse y trazar la gráfica:

$$x^2 + 4y^2 - 2x - 24y + 21 = 0$$

14. Determinar todos los datos de la elipse y trazar la gráfica:

$$9x^2 + 4y^2 + 72x = 0$$

5.10 Intersección de cónicas

El interés por la intersección de las cónicas es un reflejo de mentes curiosas de antaño, conocer en dónde se intersecan las cónicas se torna en un juego de curiosidad porque puedes combinar diversas cónicas y podría pasar que no existiera la intersección entre ellas, o bien, se intersecan en dos puntos, tal vez, son tangentes una de la otra, son la misma cónica o, en un caso ajeno al Programa de estudio, se podrían intersecar en cuatro puntos como en el caso de la hipérbola. Graficar las cónicas para observar cómo se comportan de manera geométrica y ver sus puntos de intersección, llena de satisfacción y sorpresa en algunos casos, en donde, tal vez, la imaginación no alcanza a visualizar correctamente.

EJEMPLO: Encuentra los puntos de intersección de la elipse y la parábola cuyas ecuaciones son las siguientes, respectivamente:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{81} = 1 \;\; y \;\; y^2 = 16x$$

Lo que se hace en estos casos, es sustituir la segunda ecuación en la primera:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{16x}{81} = 1$$

Multiplicamos ambos miembros de la ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores:

$$\frac{2025\,x^2}{25} + \frac{2025(16x)}{81} = 2025$$

$$81x^2 + 400x - 2025 = 0$$

Es una ecuación cuadrática que vamos a resolver:

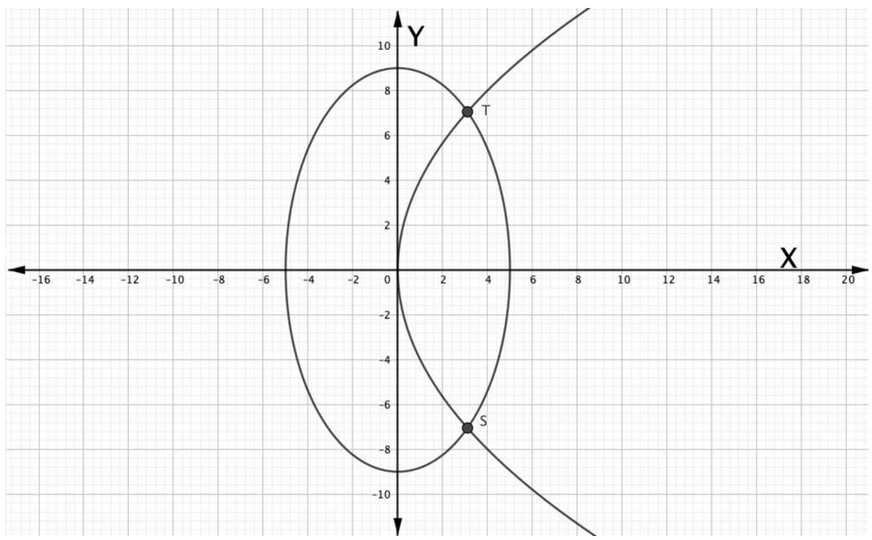
$$x = \frac{-400 \pm \sqrt{160000 + 656100}}{162} = \frac{-400 \pm 903.38}{162}$$

$$x_1 = -8.04 \;\; y \;\; x_2 = 3.11$$

Analicemos estos resultados, x_1 es solución de la ecuación cuadrática, pero no tiene sentido como solución para las intersecciones que buscamos porque la parábola abre hacia la derecha y tiene vértice en el origen, las abscisas de sus puntos son valores positivos, además recordemos que la parábola es simétrica con respecto al eje X. Esto implica que, tenemos la misma abscisa para dos puntos, sustituyamos x_2 en la ecuación de la parábola para encontrar las ordenadas.

$$y^2 = 16x = 16(3.11) = 49.76 \implies y = \pm\sqrt{49.76} = \pm 7.05$$

Por lo tanto, los puntos de intersección de la elipse y la parábola son: $T(3.11, 7.05)\ y\ S(3.11, -7.05)$.



5.11 Problemas de aplicación

PROBLEMA RESUELTO 1**.** Un médico realizará una operación para remover las piedras en los riñones de un paciente utilizando un "litotriptor". Un litotriptor es un dispositivo que tiene forma de elipsoide y funciona emitiendo ondas de choque de alta energía bajo el agua desde el foco F más cercano al vértice V. Si el litotriptor tiene una altura de 15cm y 18cm de ancho, ¿A qué distancia de la piedra en el riñón desde el foco F se debe colocar el dispositivo?

Solución. Para resolver el problema podemos trabajar con la elipse que se genera al realizar un corte transversal sobre el elipsoide. Pensando a la elipse como una elipse vertical centrada en el origen, por los datos del problema (altura de 15cm y ancho de 18cm) podemos reconocer que el valor de semieje mayor es 15 y la del semieje menor es 9. Calculamos la distancia focal con ayuda de la relación $a^2 = b^2 + c^2$, así: $15^2 - 9^2 = c^2$

De manera que $c = 12$. Como la piedra que se removerá con el dispositivo debe estar en el lugar del otro foco de la elipse, la distancia a la que debe estar la piedra en el riñón a partir del foco F es de 24cm.

PROBLEMA RESUELTO 2. El planeta mercurio de desplaza en una órbita elíptica que tiene excentricidad de 0.206 y eje mayor de 0.774 UA. Si el sol se encuentra en uno de los focos de la elipse, encuentre la distancia máxima y mínima que se alcanzan entre Mercurio y el Sol.

Solución. Como nos dan el valor de la excentricidad y el valor del semieje mayor, podemos obtener la distancia focal a partir de la ecuación: $e = \frac{c}{a}$

Así, tenemos que $c = ea = 0.206 * 0.077 = 0.0158$ UA. Luego la distancia más corta a la que estará del Sol es,

$$d_1 = a - c = 0.077 - 0.0158 = 0.0612 \text{ UA}$$

La distancia más lejana que estará del Sol es

$$d_2 = a + c = 0.077 + 0.0158 = 0.0928 \text{ UA}$$

AUTOEVALUACIÓN

Ecuación ordinaria de la circunferencia.

1. Los extremos en el diámetro de una circunferencia son los puntos (2,3) y $(-4,5)$. Encuentre la ecuación ordinaria.

a)$(x-8)^2+(y-3)^2=25$

b)$(x+10)^2+(y-5)^2=6$

c)$(x+1)^2+(y-4)^2=10$

d)$(x-1)^2+(y-3)^2=12$

2. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto (7,–6) y que pasa por el punto (2,2).

a)$(x-7)^2+(y+6)^2=89$

b) $(x+5)^2+(y-4)^2=36$

c)$(x+7)^2+(y-6)^2=100$

d) $(x+2)^2+(y+2)^2=4$

3. Hallar la ecuación de una circunferencia que tiene su centro en el punto (0,-2) y es tangente a la recta 3x+2y-12=0

a) $(x+2)^2+y^2=4$

b) $x^2+(y-2)^2=16$

c) $x^2+(y+2)^2=9$

d) $x^2+(y+2)^2=4$

4. Hallar la longitud de la cuerda de la circunferencia $x^2+y^2=25$ que está sobre la recta x–7y+25=0.

a) 3.5

b) 8.02

c) 4.2

d) 7.07

5. Encuentre la ecuación de la circunferencia cuyo centro está sobre el eje x y que pasa por los puntos (1,3) y (4,6).

a) $(x-4)^2+y^2=49$

b) $(x-7)^2+y^2=45$

c) $(x-4)^2+y^2=25$

d) $(x-3)^2+y^2=30$

6. Hallar la ecuación de la recta tangente al círculo $(x-4)^2+(y-3)^2=20$ en el punto (6,7).

a) $x-2y+10=0$

b) $x+2y-20=0$

c) $2x-2y+12=0$

d) $3x-4y+1=0$

7. La ecuación de una circunferencia es $x^2+y^2=50$. El punto medio de una cuerda de esta circunferencia es el punto (-2,4). Hallar la ecuación de la cuerda.

a) $3x-4y+11=0$

b) $x-2y+6=0$

c) $2x-2y+12=0$

d) $3x-4y+1=0$

Ecuación general de la circunferencia

8. Hallar el área de un círculo cuya ecuación es:
$9x^2+9y^2+72x-12y+103=0.$

a) 3π

b) 4π

c)5π

d)6π

9. Encuentre el centro de la circunferencia que pasa por los puntos (0,0), (3,6) y (7,0).

a)$(1,7)$
b)$\left(\frac{7}{2},2\right)$
c)$(3,3)$
d)$\left(2,\frac{1}{3}\right)$

10. La ecuación de una circunferencia es $4x^2+4y^2-16x+20y+25=0$. Hallar la ecuación de una circunferencia concéntrica que es tangente a la recta 5x–12y=0.

a)$(x-2)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=9$
b) $(x-2)^2+(y-4)^2=25$
c)$(x+7)^2+\left(y-\frac{5}{7}\right)^2=12$
d) $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+(y+9)^2=4$

11. Hallar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia: $x^2+y^2+2x-2y-39=0$ en el punto (4,5).

a)x-24y+43=0
b)3x+2y-12=0
c)5x+4y-40=0
d)27x+35y-7=0

12. Determinar el valor de la constante k para que la recta 2x+3y+k=0 sea tangente a la circunferencia $x^2+y^2+6x+4y=0$.

a)1 y 36
b)-3 y 8
c)2 y 7
d)-1 y 25

Ecuación ordinaria de la elipse

1. Hallar la ecuación de la elipse cuyos vértices son los puntos (4,0), (-4,0) y cuyos focos son los puntos (3,0), (-3,0).

a) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$

b) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$

c) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

d) $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{6}=1$

2. Hallar la ecuación de la elipse cuyos focos son los puntos (2,0), (-2,0) y se excentricidad es igual a $\frac{2}{3}$.

a) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1$

b) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$

c) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

d) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$

3. Hallar la ecuación de la elipse cuyos focos son los puntos (3,0), (-3,0) y la longitud de uno de sus lados rectos es igual a 9.

a) $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{16}=1$
b) $\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{7}=1$
c) $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{47}=1$
d) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$

4. Hallar la excentricidad de la elipse que tiene su centro en el origen, uno de sus vértices en el punto (0,-7) y pasa por el punto $\left(\sqrt{5},\frac{14}{3}\right)$.

a) $\frac{2\sqrt{10}}{7}$

b) $\frac{2\sqrt{23}}{9}$
c) $\frac{2\sqrt{47}}{3}$
d) $\frac{2\sqrt{19}}{5}$

5. Hallar la ecuación de una elipse cuyo centro está en el origen, su eje mayor coincide con el ejex y pasa por los puntos $(\sqrt{6},-1)$ y $(2,\sqrt{2})$.

a) $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{16}=1$
b) $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$
c) $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{9}=1$
d) $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{6}=1$

6. Los focos de una elipse son los puntos (-4,-2) y (-4,-6) y la longitud de cada lado recto es 6. Hallar la ecuación de la elipse.

a) $\frac{(x+4)^2}{12}+\frac{(y+4)^2}{16}=1$
b) $\frac{(x+2)^2}{10}+\frac{(y+6)^2}{16}=1$
c) $\frac{(x+3)^2}{12}+\frac{(y+2)^2}{32}=1$
d) $\frac{(x+4)^2}{10}+\frac{(y+4)^2}{36}=1$

7. Hallar la ecuación de una elipse cuyos focos son los puntos (3,8),(3,2) y la longitud de su eje menor es 8.

a) $\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y-5)^2}{16}=1$
b) $\frac{(x-3)^2}{100}+\frac{(y-5)^2}{16}=1$
c) $\frac{(x+5)^2}{32}+\frac{(y+3)^2}{8}=1$
d) $\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y-5)^2}{25}=1$

Ecuación general de la elipse

8. Determine las coordenadas de los vértices de la ecuación $x^2+4y^2-6x+16y+21=0$.

a)(5,-2),(1,-2)
b)(4,3),(-1,5)

c)(7,3),(-3,8)
d)(9,5),(-3,-4)

9. Determine la longitud del eje mayor de la ecuación:
$4x^2 + 9y^2 + 32x - 18y + 37 = 0.$

a)8
b)6
c)4
d)10

10. Determine la longitud del eje menor de la ecuación:
$4x^2 + 9y^2 + 32x - 18y + 37 = 0.$

a)6
b)2
c)1
d)4

11. Hallar la excentricidad de la ecuación $9x^2 + 4y^2 - 8y - 32 = 0.$

a)$\frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
c)$\frac{\sqrt{7}}{2}$
d)$\frac{\sqrt{5}}{3}$

12. La ecuación de una familia de elipses es $4x^2 + 9y^2 + ax + by - 11 = 0.$ Hallar la ecuación del elemento de la familia que pasa por los puntos (2,3) y (5,1).

a) $3x^2 + 2y^2 - 2x + 5y - 12 = 0$
b)) $4x^2 + 9y^2 - 4x + 25y - 12 = 0$
c)$2x^2 + 5y^2 - 3x + 6y - 14 = 0$
d)$4x^2 + 9y^2 - 16x - 18y - 11 = 0$

SOLUCIÓN A LA AUTOEVALUACIÓN

Circunferencia		Elipse	
PREGUNTA	RESPUESTA	PREGUNTA	RESPUESTA
1	C	1	A
2	A	2	D
3	C	3	D
4	D	4	A
5	B	5	B
6	B	6	A
7	B	7	D
8	C	8	A
9	B	9	B
10	A	10	D
11	C	11	D
12	D	12	D

REFERENCIAS

- Ayres, F. (1970). *Trigonometría Plana y Esférica*. McGraw–Hill.
- Lehmann, C. (2008). Geometría Analítica, México: Limusa.
- Sullivan, M. (1997). *Precalculo*. Pearson Education.
- Swokowski, E. y Cole, J. (2011). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica.* Cengage Learning

EXAMEN EXTRAORDINARIO

1.Calcula el perímetro de un cuadrado cuya diagonal mide $\sqrt{98}$ cm. Indica la razón trigonométrica que se utiliza para determinar la medida del lado del cuadrado.

A) *A* =28 cm, $sen(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
B) *A*= 36 cm, $cos(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$
C) *A*=49 cm, $tan(45°) = 1$
D) *A*= 7.1 cm, $sen(45°) = 0.7071$

2.Desde la cima de un faro, que tiene una altura de 500 metros sobre el nivel del mar, el guardafaros observa un bote que navega directamente hacia él. Si el ángulo de depresión del bote cambia de 30° a 47° durante el periodo de observación, encuentra la distancia *d* aproximada que ha recorrido el bote durante el tiempo de observación.

A) $d \approx$ 866
B) $d \approx$ 466.257
C) $d \approx$ 399.742
D) $d \approx$ 1332.257

3.Calcular la altura aproximada *h* de un puente, sabiendo que tiene 17 m de largo y los ángulos medidos desde los extremos del puente miden hasta el pie de la altura, respectivamente 40° y 47°.
A) $h \approx$ 10.942
B) $h \approx$ 8.002
C) $h \approx$ 9.00
D) h = 6.823

4.Las coordenadas de un cuadrilátero están dadas por A(0,0), B(4,1) C(5,5) y D(1,4) . Determina que tipo de cuadrilátero es ABCD, calcula su perímetro *P* y área *A*.

A) Cuadrado, $P = 4\sqrt{17}$, A = 16.247
B) Rectángulo, $P = 2\sqrt{17}+2\sqrt{16}$, A = 16.49
C) Rombo, $P = 4\sqrt{17}$, A = 15
D) Paralelogramo , $P = 4\sqrt{17}$, A = 17

5.Encuentra la razón $r = \frac{AP}{PB}$, en que P de coordenadas *(-2,3)* divide al segmento $\overline{AB}$, Si las coordenadas de A son (-4, 2) y de B son (4, 6).

A) 3
B) $\frac{1}{2}$

C) $\frac{3}{2}$
D) $\frac{1}{3}$

6.Determina la pendiente m y la medida del ángulo de inclinación θ de la recta que pasa por los puntos $P_1(-2\,,4)$ y $P_2(4\,,-6)$.

A) $m = -5/3$ θ≈121°

B) $m = 5/3$ θ≈100°

C) $m = -3/5$ θ≈59°

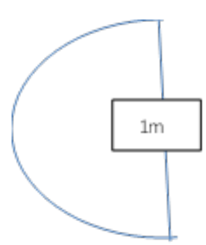
D) $m = 3/5$ θ≈ −59°

7. Determinar el área de un triángulo rectángulo formado por los ejes coordenados y la recta cuya ecuación es $y = -\frac{5}{4}x - 5$.
A) 10
B) 12
C) 15
D) 20

8. Un punto *P(x,y)* se mueve de tal manera que siempre equidista de los puntos P_1(-2,3) y P_2(3,-1). Determina la ecuación del lugar geométrico que genera *P(x,y).*

A) $8x - 10y + 3 = 0$
B) $10x - 8y + 3 = 0$
C) $10x + 8y - 3 = 0$
D) $-8x - 10y + 3 = 0$

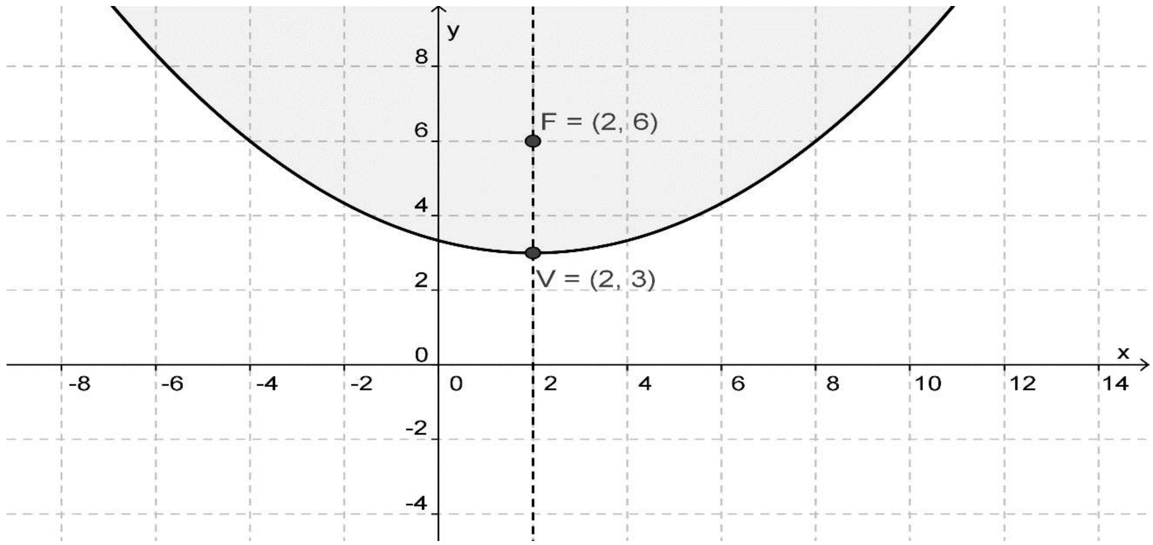
9. Un faro emplea un reflector parabólico de de diámetro (lado recto). Suponemos el vértice en el origen. ¿Cuál es la ecuación de la parábola que representa la parábola del reflector? Ver figura.



A) $x^2 - y = 0$
B) $x^2 - 4y = 0$
C) $4x^2 - y = 0$

D) $4x^2 - y = 0$

10. Encuentra la ecuación general de la parábola cuya gráfica se muestra:



A) $y^2 - 4x - 12y + 40 = 0$

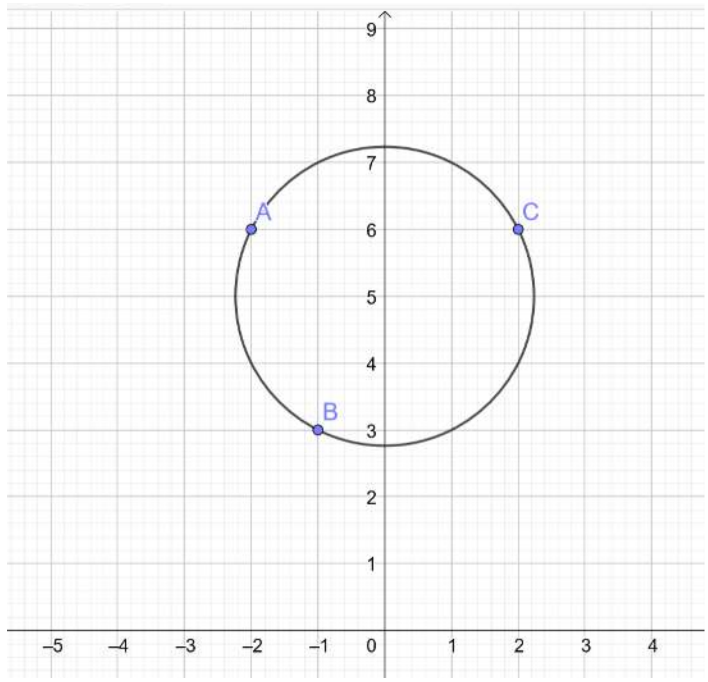
B) $x^2 - 4x - 12y + 40 = 0$

C) $x^2 + 4x + 12y - 40 = 0$

D) $y^2 - 2x - 6y + 20 = 0$

11. Si la ecuación de la parábola es $2x^2 - 3x - 6y - 22 = 0$ entonces su vértice es:
A) $V(0.75, 5.23)$
B) $V(-0.75, 5.23)$
C) $V(0.75, -5.23)$
D) $V(-0.75, -5.23)$

12. Un jardinero desea hacer un prado con la figura de una circunferencia como se muestra a continuación. Él ha dibujado un plano cartesiano y localizado por donde desea que pase el prado. Determina la ecuación de la figura con la información que se te proporciona en la gráfica. Escribe la ecuación en forma canónica.



A) $x^2 + (y + 5)^2 = 5$

B) $(x - 5)^2 + y^2 = 5$
C) $(x + 5)^2 + y^2 = \sqrt{5}$
D) $x^2 + (y - 5)^2 = 5$

13. Hallar el área de un círculo cuya ecuación es $9x^2 + 9y^2 + 72x - 12y + 103 = 0$.
A) 3π
B) 4π
C) 5π
D) 6π

14. Hallar la ecuación de la elipse cuyos focos son los puntos (3,0), (-3,0) y la longitud de uno de sus lados rectos es igual a 9.

A) $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{16} = 1$
B) $\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{7} = 1$
C) $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{47} = 1$
D) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$

15. Encuentre los vértices de triángulo cuyos lados forman parte de las rectas:
$3x + y - 1 = 0$, $-4x + y - 3 = 0$ y $-x + y + 11 = 0$

A) $A\left(-\frac{2}{7}, \frac{23}{7}\right), B(-3, -8)\ y\ C\left(-\frac{14}{3}, \frac{47}{3}\right)$
B) $A\left(-\frac{2}{7}, \frac{13}{7}\right), B(3, -8)\ y\ C\left(-\frac{14}{3}, -\frac{47}{3}\right)$
C) $A\left(-\frac{2}{7}, \frac{13}{7}\right), B(3,8)\ y\ C\left(\frac{14}{3}, -\frac{47}{3}\right)$
D) $A\left(-\frac{2}{7}, -\frac{13}{7}\right), B(-3, -8)\ y\ C\left(-\frac{14}{3}, -\frac{47}{3}\right)$

16.Determine si las siguientes rectas son paralelas, o si son perpendiculares escriba el punto de intersección:

$$L_1: 3x + y - 1 = 0\ \ y\ \ L_2: -x + 3y - 10 = 0$$

A) Perpendiculares, $P\left(-\frac{7}{10}, -\frac{31}{10}\right)$.

B) Son paralelas.
C) Perpendiculares, $P\left(-\frac{7}{10}, \frac{31}{10}\right)$.

D) Ninguna de las anteriores.

SOLUCIONES A LAS PREGUNTAS DEL EXAMEN EXTRAORDINARIO

1	A
2	C
3	B
4	D
5	D
6	A
7	A
8	B
9	A
10	B
11	B
12	B
13	C
14	D
15	B
16	C

¡Mucho éxito!