GUÍA PARA EL EXAMEN EXTRAORDINARIO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

CCH ORIENTE

PANTALEÓN GÓMEZ CARRANZA

ALDO NICOLÁS ARENAS GARCÍA

RAMÓN SÁNCHEZ RIVAS

FERNANDO TOVAR CHÁVEZ

JOSÉ LUIS HERNÁNDEZ HERNÁNDEZ

MAURICIO ENRIQUE RODRÍGUEZ PÉREZ

COORDINACIÓN
Pantaleón Gómez Carranza

CICLO 2022 - 2023

Documento impreso o en línea elaborado para apoyar la preparación de un examen extraordinario, con base en el Programa de Estudio de la asignatura. Será elaborado colegiadamente y deberá incluir: a) introducción; b) instrucciones; c) presentación de cada unidad, indicando los conceptos clave; d) sugerencias de actividades de aprendizaje teórico-prácticas; e) autoevaluación del aprendizaje con base en problemas y preguntas representativas de los aprendizajes y f) fuentes consultadas que deberán presentarse en formato APA. Debe estar aprobada por una instancia de Dirección correspondiente y ser utilizada, por lo menos, en un periodo de exámenes.

Introducción

Este documento tiene el propósito de guiar y apoyar al estudiante (en particular a los estudiantes del plantel Oriente) en la preparación del examen extraordinario de la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral I, que se imparte en el Colegio de Ciencias y Humanidades. Es producto del interés y esfuerzo de un grupo de profesores del Área de Matemáticas del plantel Oriente del CCH. Se basa en el programa indicativo y vigente de la asignatura antes señalada y contiene las características que definen a una Guía para Examen Extraordinario en el Glosario de Términos del Protocolo de equivalencias.

Cada unidad se encuentra dividida en tres secciones, la primera sección inicia presentando los conceptos claves de toda la unidad, parte de los aprendizajes y temática, así como el desarrollo disciplinario y didáctico, de estos dos últimos aspectos. Utilizamos explicaciones teóricas, figuras y una gran cantidad y diversidad de ejemplos prácticos totalmente resueltos que permiten al alumno apropiarse de los conocimientos correspondientes. También proponemos un grupo de ejercicio para que el alumno practique lo aprendido. La estructura de la segunda sección solamente difiere de la primera en que no incluye los conceptos clave. En la tercera sección se observan las soluciones de todos los ejercicios propuestos en las secciones 1 y 2; también anexamos un el examen (con las soluciones) de auto evaluación con el fin de que el interesado mida los conocimientos y las habilidades que adquirió. En la parte final presentamos las referencias, en que el estudiante puede consultar los temas en los que desee profundizar; a los docentes les servirá para enriquecer o incrementar la complejidad de los ejercicios y contenidos abarcados en esta guía.

LOS AUTORES

La Guía para el Examen Extraordinario de Cálculo Diferencial e integral I ha sido escrita para que la utilices como apoyo y/o complemento en tu preparación para presentar el examen extraordinario de la asignatura del mismo nombre; para que repases, y/o conozcas los conceptos básicos y practiques a fondo los algoritmos de mayor representatividad y uso en el estudio del cálculo diferencial a nivel bachillerato.

Debes leer la sección (o la parte de tu interés) *antes* de intentar resolver los problemas y/o actividades que te proponemos. Ten en cuenta que leer sobre matemáticas es distinto a leer otro tipo de documentos, tales como una novela, un periódico o hasta libros de otras ramas del conocimiento. Regularmente las partes de textos de matemáticas (de interés para el lector), se leen y se releen varias veces para poder comprenderlas. Debes poner especial atención a los ejemplos resueltos y reconstruir su resolución; utiliza lápiz y papel a medida que los leas y, a continuación, intenta resolver los ejercicios propuesto en la sección. Siguiendo estos consejos seguramente podrás hacer tu tarea optimizando el tiempo e incrementando la comprensión de conceptos y habilidad en el uso de los algoritmos.

En el primer acercamiento a una unidad (o sección) memoriza las definiciones y trata de comprender los conceptos, sin embargo, no debes cometer el error de tratar como reglas a los ejercicios resueltos que observes. Las matemáticas no se aprenden memorizando, sino que son el *arte de modelar y posteriormente resolver problemas,* ¡no se trata de memorizar problemas resueltos! Para comprender significativamente una unidad o un tema, debes modelar y resolver problemas, muchos problemas; haz todos los que puedas, intenta escribir las soluciones en una forma lógica y detalladamente, paso a paso. Por lo general, en la resolución de un problema en matemáticas se realizan varios intentos, no te rindas ante un problema si no puedes resolverlo en los primeros intentos. Los primeros intentos en la resolución de problemas se relacionan con su comprensión y para esto se tienen que leer varias veces y relacionar con lo que ya aprendiste en tu curso y de los ejemplos resueltos de la guía. Lucha con cada problema hasta que lo resuelvas; una vez que hayas hecho esto unas cuantas veces, comprenderás el papel de las matemáticas en los procesos mentales del aprendizaje.

Las respuestas de todos los ejercicios y a todas las preguntas de los exámenes propuestos de todas las secciones y todas las unidades se encuentran en las secciones de fracción .3. En caso de que tu respuesta a cierto ejercicio difiera de la que te proponemos, no concluyas de inmediato que estás en error, tu respuesta y la propuesta pueden ser equivalentes y estar enlazadas por medio de ciertas consideraciones y ambas sean correctas.

CONTENIDO

CONTENIDO

1

PROCESOS INFINITOS Y LA NOCIÓN DE LÍMITE

PROPÓSITOS

Al finalizar la unidad: el alumno descubrirá intuitivamente el concepto de límite, a través de diversos problemas que involucren procesos infinitos mediante los diferentes registros: numérico, gráfico o simbólico

CONTENIDO

UNIDAD 1 CONCEPTOS CLAVE

Números naturales (o números enteros positivos). Se utilizan para contar, indican el total de objetos en un grupo.

Proceso. La repetición sucesiva de una fase, operación o acción en el estudio y la modelación de un problema matemático.

Fase, etapa o iteración. Cada una de las fases en un proceso.

Proceso finito. Si todas las etapas del proceso de pueden poner en relación biunívoca (relación uno a uno) con parte de los números naturales.

Proceso infinito. Si las etapas del proceso se pueden poner en relación biunívoca (relación uno a uno) con todos los números naturales.

Límite. Número al que se aproxima el modelo (función) de un proceso cuando la variable independiente de una función es aproximada “tanto como se desee” a un número específico.

Límite al infinito. Si al “incrementar indefinidamente” la variable independiente, la función (modelo) se aproxima a un valor determinado.

Indeterminación. Son expresiones de la forma: $\frac{0}{0}$, $\frac{a}{0}$ con $a \neq 0$.

Suma. Proceso de suma que incluye un “número finito de sumandos”.

Serie. Proceso ordenado de suma con un “número infinito de sumandos”.

Suma geométrica. Proceso ordenado de suma de n sumandos, tales que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$, siendo $r \neq 0$ constante, es decir, $S = a + ar + ar^2 + a^3 + \cdots + ar^{n-1}$, con $a \neq 0$, $r > 0$ y $r \neq 1$.

Serie geométrica. Proceso de suma infinito ordenado, tal que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$, siendo $r \neq 0$ constante, es decir, $S = a + ar + ar^2 + a^3 + \cdots$, con $a \neq 0$, $r > 0$ y $r \neq 1$.

Término dominante. En un polinomio en la variable x, aquél término con mayor potencia en la variable.

SECCIÓN 1.1 PROCESOS INFINITOS

APRENDIZAJES

1. Reconoce características de los procesos infinitos utilizando alguno de estos procedimientos: numérico, gráfico o algebraico.

2. Identifica el patrón de comportamiento en un proceso infinito.

3. Reconoce un proceso infinito de uno que no lo es.

4. Resuelve problemas en diversos contextos que involucren en su solución procesos infinitos.

5. Utiliza las representaciones gráfica, tabular o algebraica de un proceso infinito para analizar su comportamiento en cuanto a: cómo cambia la variable, qué comportamiento sigue, cuales son los valores siguientes, y a la larga como son estos.

6. Distingue aquellos procesos infinitos que tienen un resultado límite de los que no lo tienen.

TEMÁTICA

1. Situaciones numéricas, geométricas o algebraicas, que dan lugar a procesos infinitos.

2. Comportamiento de un proceso infinito: representación numérica, algebraica o gráfica.

En la presente sección nos aproximamos intuitivamente e informalmente al concepto de límite construyendo, y posteriormente analizando, diversos problemas matemáticos cuyos modelos se han construido a partir del análisis del comportamiento de sus etapas.

DEFINICIÓN 1 PROCESO

La repetición sucesiva y ordenada de una fase (iteración, paso o etapa), cuyo estudio conduce a la construcción de un modelo matemático.

Los procesos que estudiaremos en la presente unidad se encuentran aquellos que nos interesa estudiar se encuentran:
Los procesos en los que el número de etapas concluye (procesos finitos).
Los procesos en los que siempre existe una etapa más, es decir “nunca terminan) (procesos infinitos.
Para contar el número de etapas de un proceso, éstas suelen relacionarse con los números naturales (o parte de ellos), recuerda que el conjunto de los números naturales (también conocidos como números enteros positivos) es $IN = \{1,\ 2,\ 3,\ 4, \cdots\ \}$,
los puntos suspensivos indican que éstos continúan indefinidamente.

EJEMPLO 1 PROCESOS NUMÉRICOS

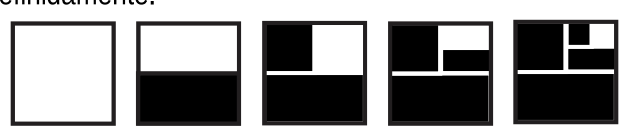
a. El proceso de suma $1+2+3+4+5+\cdots+n$, es un proceso de suma finita (simplemente de suma) y requiere de n etapas.

b. El proceso de suma $a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+\cdots$, es un proceso de suma infinita (los puntos suspensivos así lo indican).

EJEMPLO 2 PROCESOS GEOMÉTRICOS

a. CUBRIENDO EL INTERIOR DE UN CUADRADO.

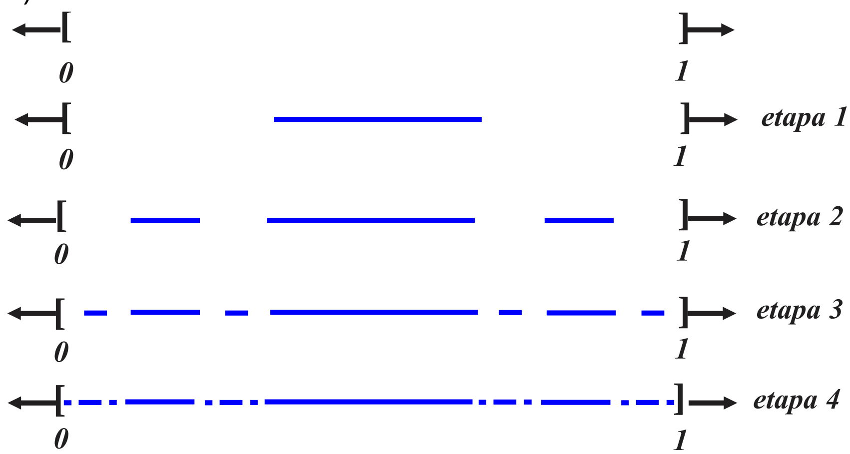
Se desea “cubrir” el interior de un cuadrado de lado de longitud 1 (figura anexa) utilizando el proceso:
Etapa 1. Con una superficie rectangular se cubre la mitad del cuadrado.
Etapa 2. Con una superficie rectangular se cubre la mitad de la superficie faltante en la etapa 1.
Etapa 3. Con una superficie rectangular cúbrase la mitad la mitad de la superficie faltante en la etapa 2.
El proceso continúa indefinidamente.



b. VARIANTE TERNARIA

Se va a “cubrir” el intervalo $[\,0\ ,\ 1\,]$ de la recta numérica de la siguiente forma.

Etapa 1. Se cubre el tercio central.
Etapa 2. Se cubren los novenos centrales, de los tercios, no cubiertos en la etapa anterior.
Etapa 3. Se cubren los veintisieteavos centrales de los novenos no cubiertos en la etapa anterior.
Etapa 4. Se cubren los ochentaiunavos centrales de los veintisieteavos no cubiertos en la etapa anterior.
El proceso puede continuar indefinidamente (proceso infinito) o detenerse en una etapa específica (proceso infinito).



EJEMPLO 4 OTROS PROCESOS

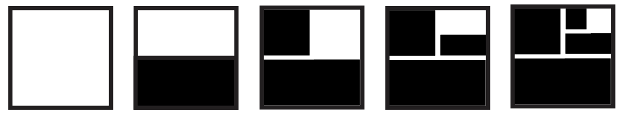
a. El costo de un automóvil recién adquirido fue $1000\,000$ pesos, anualmente su precio se devalúa un 15%. El proceso consiste en determinar el costo del automóvil con el transcurso de los años.
Etapa 1. Su costo al año de adquirido es $(0.85)(1000\,000)$ pesos.
Etapa 2. Su costo a los dos años de adquirido es $(0.85)(0.85)(1000\,000)$ pesos.
Etapa 3. Su costo a los tres años de adquirido es $(0.85)(0.85)(0.85)(1000\,000)$ pesos.
El proceso puede continuar indefinidamente o detenerse en una etapa específica.

b. Un persona aumenta su "peso" de 40 kilogramos un 4% mensualmente. El proceso consiste en calcular el peso de la persona mensualmente.
Mes 1. El peso de la persona es $(1.04)(40)$ kilogramos.
Mes 2. El peso de la persona es $(1.04)(1.04)(40)$ kilogramos.
Mes 3. El peso de la persona es $(1.04)(1.04)(1.04)(40)$ kilogramos.
El proceso de cálculo puede continuar indefinidamente o detenerse en un mes específico.

Un paso importante e imprescindible en el estudio de un proceso es la construcción de un modelo (función) que lo describa.

EJEMPLO 5 CONSTRUCCIÓN DE MODELOS

a. En el proceso de completar el área de un perímetro cuadrado de lado de longitud uno tenemos.



Con base en la figura anterior construimos la tabla.

Etapa	1	2	3	4	$\dots$	n
Área cubierta	$\frac{1}{2}=\frac{1}{2^1}$	$\frac{1}{4}=\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{16}=\frac{1}{2^4}$	$\dots$	$\frac{1}{2^n}$
Área total cubierta	$\frac{1}{2}=\frac{2^0}{2^1}$	$\frac{3}{4}=\frac{2^2-1}{2^2}$	$\frac{7}{8}=\frac{2^3-1}{2^3}$	$\frac{15}{16}=\frac{2^4-1}{2^4}$	$\dots$	$\frac{2^n-1}{2^n}$

Obtenemos el modelo $f(n)=\frac{2^n-1}{2^n}$, n es un número natural y representa el número de etapa.

b. VARIANTE TERNARIA

Se va a “cubrir” el intervalo $[0,1]$ en la recta numérica de la siguiente forma.

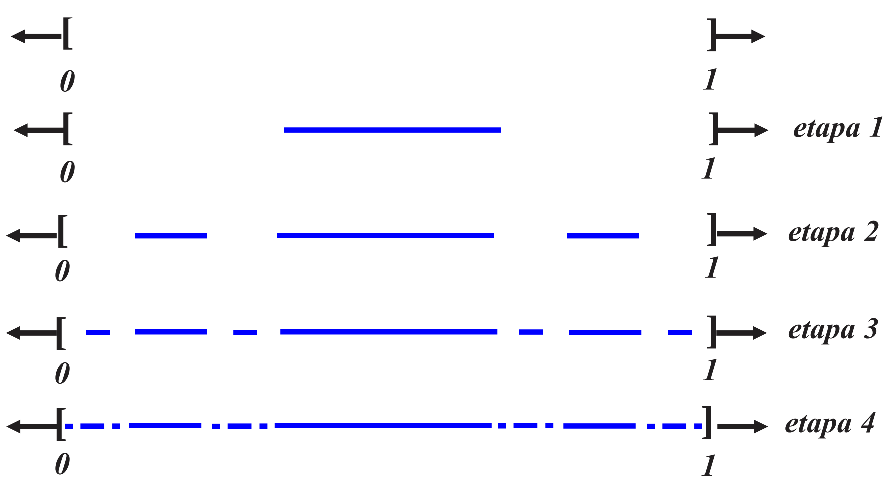
Etapa 1. Se cubre el tercio central.

Etapa 2. Se cubren los novenos centrales, de los tercios, no cubiertos en la etapa anterior.

Etapa 3. Se cubren los veintisieteavos centrales de los “novenos” no cubiertos en la etapa anterior.

Etapa 4. Se cubren los ochentaiunavos centrales de los veintisieteavos no cubiertos en la etapa anterior.

El proceso puede continuar indefinidamente (proceso infinito) o detenerse en una etapa específica (proceso infinito).



Construiremos modelaos para las características:

a. Número de segmentos rectilíneos para cubrir en función del número de etapa.

b. Longitud del segmento rectilíneo en la etapa.

c. Fracción del intervalo cubierta en la etapa.
Con base en la figura anterior construimos la tabla.

Etapa	número de segmentos utilizados en la etapa	longitud del segmento utilizado en la etapa	fracción del intervalo que falta por cubrir
1	$1=2^0$	$\frac{1}{3}=\frac{1}{3^1}$	$\frac{2}{3}$
2	$2=2^1$	$\frac{1}{9}=\frac{1}{3^2}$	$\frac{4}{9}=\frac{2^2}{3^2}$
3	$4=2^2$	$\frac{1}{27}=\frac{1}{3^3}$	$\frac{8}{27}=\frac{2^3}{3^3}$
4	$8=2^3$	$\frac{1}{81}=\frac{1}{3^4}$	$\frac{16}{3^4}=\frac{2^4}{3^4}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	2^{n-1}	$\frac{1}{3^n}$	$\frac{2^n}{3^n}=\left(\frac{2}{3}\right)^n$

Con base en la tabla anterior las respuestas de las preguntas son:
a. Obtenemos el modelo $f(n)=2^{n-1}$, n es un número natural y representa el número de etapa.

b. Obtenemos el modelo $f(n)=\frac{1}{3^n}=\left(\frac{1}{3}\right)^n$, n representa el número de etapa.

c. Obtenemos el modelo $f(n)=\frac{2^n}{3^n}$, n es un número natural y representa el número de etapa.

EJEMPLO 6 CONSTRUCCIÓN DE MODELOS (OTROS PROCESOS)

a. El costo de un automóvil recién adquirido fue $1000\,000$ pesos, anualmente su precio se devalúa un 15%. El proceso consiste en determinar el modelo que describe el costo del automóvil como función el transcurso de los años.
Etapa 1. Su costo al año de adquirido es $(0.85)(1000\,000)$ pesos.
Etapa 2. Su costo a los dos años de adquirido es $(0.85)(0.85)(1000\,000)$ pesos.
Etapa 3. Su costo a los tres años de adquirido es $(0.85)(0.85)(0.85)(1000\,000)$ pesos.
El proceso puede continuar indefinidamente o detenerse en una etapa específica.

Etapa	costo del automóvil en la etapa
1	$(0.85)(1000000)=(0.85)^1(1000000)$
2	$(0.85)(0.85)(1000000)=(0.85)^2(1000000)$
3	$(0.85)(0.85)(0.85)(1000000)=(0.85)^3(1000000)$
4	$(0.85)(0.85)(0.85)(0.85)(1000000)=(0.85)^4(1000000)$
$\vdots$	$\vdots$
n	$(0.85)^n(1000000)$

El modelo es $f(n)=(0.85)^n(1000000)$, donde n es un número natural y representa el número de etapa.

b. Un persona aumenta su "peso" de 40 kilogramos un 4% mensualmente. El proceso consiste en calcular el peso de la persona mensualmente.

Mes 1. El peso de la persona es $(1.04)(40)$ kilogramos.

Mes 2. El peso de la persona es $(1.04)(1.04)(40)$ kilogramos.

Mes 3. El peso de la persona es $(1.04)(1.04)(1.04)(40)$ kilogramos.

El proceso de cálculo puede continuar indefinidamente o detenerse en un mes específico.

Etapa	peso de la persona en la etapa
1	$(1.04)(40)=(1.04)^1(40)$
2	$(1.04)(1.04)(40)=(1.04)^2(40)$
3	$(1.04)(1.04)(1.04)(40)=(1.04)^3(40)$
4	$(1.04)(1.04)(1.04)(1.04)(40)=(1.04)^4(40)$
$\vdots$	$\vdots$
n	$(1.04)^n(40)$

El modelo es $f(n)=(1.04)^n(40)$, donde n es un número natural y representa el número de etapa.

La caracterización (determinación de propiedades) es muy importante en el estudio de otros procesos.

a. Finita $a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+\cdots+ar^{n-1}$.

b. Infinita $a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+\cdots$.

En los cursos de cálculo se justifica la *propiedad 1.1*.

PROPIEDAD 1 TOTAL DE UNA SUMA O DE UNA SERIE GEOMÉTRICA

a. Si $a\neq 0$, $0<r<1$, entonces

i. $T=a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+\cdots+ar^{n-1}=a\dfrac{1-r^n}{1-r}$.

ii. $T=a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+\cdots=\dfrac{a}{1-r}$.

b. Si $a\neq 0$, $r>1$, entonces

i. $T=a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+\cdots+ar^{n-1}=a\dfrac{1-r^n}{1-r}$.

ii. Se dice que $T=a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+\cdots$, diverge (tiene suma infinita).

OBSERVACIONES:

Tanto en $T=a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+\cdots+ar^{n-1}$ como en $T=a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+\cdots$:

i. El número a se conoce como factor constante. El número r se conoce como razón.

i. El cociente de dos sumandos consecutivos (posterior entre anterior) es r .

EJEMPLO 7 TOTALES DE PROCESOS GEOMÉTRICOS INFINITOS

a. Determinación del total del proceso $0.\bar{9}$ (la barra superior en el nueve indica que éste decimal se repite indefinidamente. $0.\bar{9}$ significa $0.\bar{9}=0.99999\cdots$, por tanto,

$$0.\bar{9}=0.99999\cdots=\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\frac{9}{10000}+\cdots=\frac{9}{10}\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\cdots\right)$$

El factor constante tiene valor $a=\dfrac{9}{10}$. El cociente de cualquier par de sumandos consecutivos (posterior entre anterior) es $r=\dfrac{1}{10}$, es decir $0<r<1$. Por tanto es aplicable la *propiedad 1. a. ii.*

El total de la suma es $T=\dfrac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}}=1$, es decir, $0.\bar{9}=1$.

b. Calculemos el total T de la serie $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{64}+\cdots$

$$T=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\cdots\right)$$

El factor constante tiene valor $a = \frac{9}{2}$. El cociente de cualquier par de sumandos consecutivos (posterior entre anterior) es $r = \frac{1}{2}$, es decir $0 < r < 1$. Por tanto es aplicable la *propiedad 1. b. ii.*

El total es $T = \dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$.

c. La serie (suma infinita) $2+2^2+2^3+2^4+\cdots$ puede rescribirse como

$$T = 2+2^2+2^3+2^4+\cdots = 2\left(1+2+2^2+2^3+\cdots\right)$$

Tiene como factor constante $a = 2$. El cociente de cualquier par de sumandos consecutivos (posterior entre anterior) es $r = 2 > 1$, Por tanto, es aplicable la *propiedad 1. b. ii.*
El total de la suma es $T = 2+2^2+2^3+2^4+\cdots = 2\left(1+2+2^2+2^3+\cdots\right)$ diverge ("es infinito").

d. La serie (suma infinita) $0.85+0.85^2+0.85^3+0{,}85^4+\cdots$, es de corte geométrico, nota:

$$0.85+0.85^2+0.85^3+0.85^4+\cdots = 0.85\left(0.85+0.85^2+0.85^3+\cdots\right),$$

tiene factor constante $a = 0.85$ y razón $r = 0.85$, por tanto,

$$T = 0.85+0.85^2+0.85^3+0.85^4+\cdots = 0.85\left(0.85+0.85^2+0.85^3+\cdots\right) = \frac{0.85}{1-0.85} = \frac{85}{15} = \frac{17}{3},$$

converge a $\frac{17}{3}$.

e. La serie (suma infinita) $1.04+1.04^2+1.04^3+1.04^4+\cdots$, también es geométrica, nota

$$T = 1.04+1.04^2+1.04^3+1.04^4+\cdots = 1.04\left(1+1.04+1.04^2+1.04^3+\cdots\right).$$

Es decir, su factor constante es $a = 1.04$ y razón $r = 1.04$, sin embargo, $r > 1$ y como consecuencia la *propiedad 1. b. ii.* indica que diverge (su "total es infinito").

EJEMPLO 8 TOTALES DE PROCESOS GEOMÉTRICOS FINITOS

a. La suma $\frac{4}{3}+\frac{16}{9}+\frac{64}{27}+\frac{256}{81}$ es geométrica (verifícalo) y es equivalente a

$$\frac{4}{3}+\frac{16}{9}+\frac{64}{27}+\frac{256}{81} = \frac{4}{3}\left(1+\frac{4}{3}+\frac{16}{9}+\frac{64}{27}\right).$$

Tiene razón $r = \frac{4}{3}$ y factor constante $a = \frac{4}{3}$, por la propiedad *1.a.i.*, su total es

$$T = \left(\frac{4}{3}\right)\frac{1-\left(\frac{4}{3}\right)^4}{1-\left(\frac{4}{3}\right)} = \left(\frac{4}{3}\right)\frac{1-\left(\frac{4}{3}\right)^4}{\frac{1}{3}} = \frac{700}{81}.$$

b. La suma $\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{8}+\frac{3}{16}+\frac{3}{32}+\frac{3}{64}$ equivale a

$$\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{8}+\frac{3}{16}+\frac{3}{32}+\frac{3}{64}=\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\right).$$

Tiene razón $r=\frac{1}{2}$ y factor constante $a=\frac{3}{2}$, por la propiedad *1.a.i.*, su total es

$$T=\left(\frac{3}{2}\right)\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{6}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)}=\left(\frac{3}{2}\right)\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{189}{64}.$$

Los procesos infinitos (y no infinitos) requieren de una notación que los caracterice.

NOTACIÓN 1 LA VARIABLE INDEPENDIENTE TIENDE O SE APROXIMA

La expresión $n\to+\infty$ indica que el número de etapas de un proceso es infinito, (el proceso es infinito).
La expresión $n\to a$ indica que tiene etapas a, es decir, el proceso es infinito.

NOTACIÓN 2 LA FUNCIÓN (MODELO) TIENDE O SE APROXIMA

Los símbolos $f(n)\to L$ indican que la característica descrita por el modelo $f(n)$ se aproxima al número (límite) L.
Los símbolos $f(n)\to+\infty$ indican que la característica descrita por el modelo $f(n)$ crece indefinidamente (es "muy grande").

La combinación de parejas de las notaciones anteriores da origen a las cuatro expresiones:

$$\lim_{n\to a} f(n)=L,\ \lim_{n\to a} f(n)=+\infty,\ \lim_{n\to+\infty} f(n)=L \text{ y } \lim_{n\to+\infty} f(n)=+\infty,$$

con ellas representaremos:

NOTACIÓN 3 REPRESENTACIÓN DE PROCESOS

i. $\lim_{n\to a} f(n)=L$, representa que un proceso es finito que tiene resultado finito (finito convergente).

ii. $\lim_{n\to a} f(n)=+\infty$, representa un proceso finito con resultado infinito (o divergente).

iii. $\lim_{n\to+\infty} f(n)=L$, representa un proceso infinito con resultado finito (infinito convergente).

iv. $\lim_{n\to+\infty} f(n)=+\infty$, un proceso es infinito y tiene resultado infinito (infinito divergente).

El número se llama L límite.

EJEMPLO 9 NOTACIÓN

a. En el proceso infinito del *ejemplo 7.a.* encontramos

$$0.\overline{9} = 0.99999\cdots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} + \cdots = 1.$$

Por tanto, en la notación antes definida podemos escribir:

$$\lim_{n\to+\infty} 0.\overline{9} = 1.$$

b. En el proceso infinito del *ejemplo 7.b.* encontramos

$$T = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots\right) = 1.$$

Por tanto, en la notación antes definida podemos escribir:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots\right) = 1.$$

c. En el proceso infinito del *ejemplo 7.c.* encontramos

$$T = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots = 2\left(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots\right) \text{ diverge.}$$

En la notación antes establecida queda

$$\lim_{n\to+\infty}\left(2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots\right) = +\infty.$$

d. En el proceso infinito del *ejemplo 7.d.* encontramos

$$T = 0.85 + 0.85^2 + 0.85^3 + 0.85^4 + \cdots = 0.85\left(0.85 + 0.85^2 + 0.85^3 + \cdots\right) = \frac{17}{3}.$$

Utilizando la definición antes descrita $\lim_{n\to+\infty}\left(0.85 + 0.85^2 + 0.85^3 + 0.85^4 + \cdots\right) = \frac{17}{3}$.

SECCIÓN 1.1
EJERCICIOS PROPUESTOS

1. DECIMÁL PERIÓDICO

Sea el proceso:

Etapa 1. 0.3

Etapa 2. $0.3 + 0.03$

Etapa 3. $0.3 + 0.03 + 0.03$

Etapa 4. $0.3 + 0.03 + 0.03 + 0.003$

Etapa 5. $0.3 + 0.03 + 0.03 + 0.003 + 0.0003$

El proceso se repite indefinidamente.

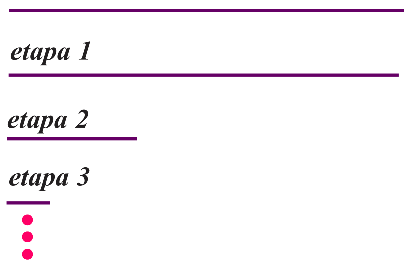
a. Expresa el proceso como una “suma geométrica infinita” en términos de potencias.

b. Verifica que el proceso es geométrico, obtén el factor constante a y la razón r.

c. Obtén la suma del proceso y clasifícalo.

2. BORRANDO UNA LÍNEA

De un segmento de línea recta de longitud uno se divide en tres partes iguales (en cada etapa) y los dos tercios de la derecha se borran. Observa la figura.



a. Si n representa el número de etapa, $L(n)$ la longitud del segmento en la etapa y $T(n)$ el total del segmento rectilíneo eliminado. Completa la tabla.

ETAPA n	$L(n)$	$T(n)$
1		
2		
3		
$\vdots$		
n		

b. En la quinta etapa, ¿cuál es la longitud que queda del segmento rectilíneo?

c. En la sexta etapa, ¿qué longitud del segmento rectilíneo ha sido eliminada).

3. CUBRIENDO UN CUADRADO

Sea un cuadrado con lado de longitud 1, considera el proceso (representemos por $A(n)$ el área sombreada en cada etapa):

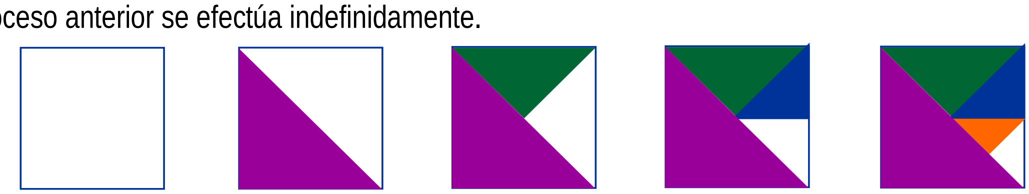
Etapa 1. Utilizar una diagonal para dividir el cuadrado en dos triángulos congruentes y sombrear uno de ellos.

Etapa 2. Dividir la parte sin sombrear en dos triángulos congruentes y sombrear uno de ellos.

Etapa 3. Repetir el proceso anterior con el triángulo sin sombrear.

Etapa 4. Repetir el proceso anterior con el triángulo sin sombrear.

El proceso anterior se efectúa indefinidamente.



etapa 1 *etapa 2* *etapa 3* *etapa 4*

a. Construye un modelo que proporciona el área sombreada en cada etapa.

b. Calcula $\underset{n\to 6}{\text{lím}}\, A(n)$ y clasifica este proceso.

c. Calcula $\lim_{n \to +\infty} A(n)$ y clasifica el proceso.

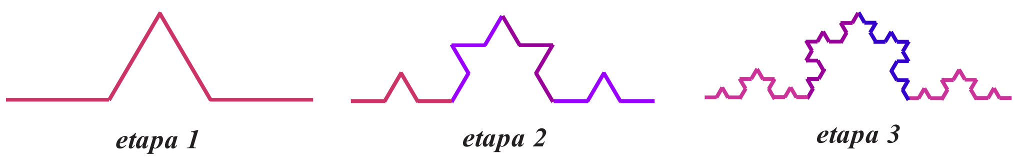
4. LONGITUD DE LA CURVA DE KOCH

Sea un segmento de recta de longitud 1, considera el proceso (representa por $l(n)$ la longitud de la curva en cada etapa):

Etapa 1. Divide el segmento de recta en tres partes de la misma longitud, suprime la parte central y sustitúyela por dos segmentos de recta congruentes al segmento de recta eliminado (dos de los extremos de los dos nuevos segmentos de recta son comunes y los otros dos extremos coinciden con los extremos del segmento original).

Etapa 2. Divide cada uno de los cuatro segmentos de recta de la etapa anterior en tres partes iguales, suprime las partes centrales y reemplázalas por con dos segmentos congruentes con las partes centrales (antes eliminadas) de manera que dos de sus extremos sean comunes y los otros dos extremos coincidan con los extremos del segmento original.

Etapa 3. Se repite el proceso anterior con cada uno de los segmentos rectilíneos de la curva.



Etapa n. Se repite el proceso anterior con cada uno de los segmentos rectilíneos de la curva de la etapa anterior.

a. Completa la tabla.

ETAPA n	NÚMERO DE SEGMENTOS S	LONGITUD DE CADA SEGMENTO L	LONGITUD DE LA CURVA M
1			
2			
3			
$\vdots$			
n			

b. Construye el modelo que describe el número total de segmentos rectilíneos hasta la etapa n.

c. Construye la longitud del segmento rectilíneo utilizado en la etapa n.

d. Construye el modelo que describe la longitud total de la curva hasta la etapa n.

e. Clasifica los procesos anteriores, utiliza la notación $\lim_{n \to a} f(n) = L$ para representar los procesos.

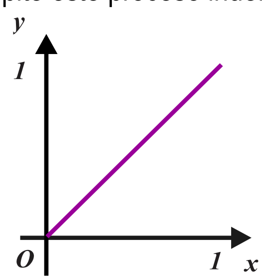
5. EL TRIÁNGULO QUE DESAPARECE

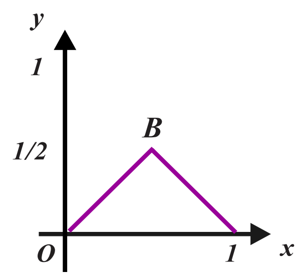
En el plano cartesiano, sea el segmento de recta $\overline{OA}$ con extremos en los puntos $O(0\ ,\ 0)$ y $A(1\ ,\ 1)$, su longitud es su longitud es $d=\sqrt{(1-0)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}$ unidades.

Etapa 1. Se dobla el segmento de recta $\overline{OA}$ de manera que, junto con el eje de las abscisas genera el triángulo con vértices en $O(0\ ,\ 0)$, $A(1\ ,\ 1)$ y $B\left(\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\right)$, la suma de las longitudes de los lados del triángulo que no se encuentran en el intervalo $[0\ ,\ 1]$ es también $d_1=\sqrt{2}$.

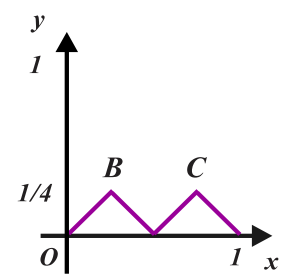
Etapa 2. Se doblan los segmentos de recta $\overline{OB}$ y $\overline{BA}$ de manera que, junto con el eje de las abscisas, cada uno de ellos genere dos triángulos con vértice común $B\left(\frac{1}{2}\ ,\ 0\right)$. Así la suma de las longitudes de los lados del triángulo que se encuentran en el intervalo $[0\ ,\ 1]$ es también $d_1=\sqrt{2}$.

Se repite este proceso indefinidamente.

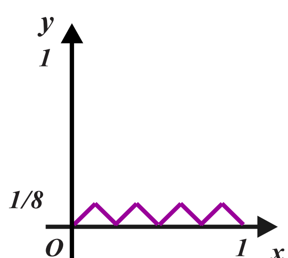




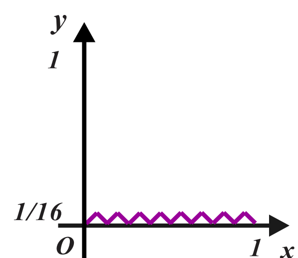
etapa 1



etapa 2



etapa 3



etapa 4

a. Completa la tabla.

ETAPA n	PERÍMETRO $p(n)$	ÁREA $A(n)$
1		
2		
3		
$\vdots$		
n		

b. Calcula $\underset{n \to +\infty}{lím} \, p(n)$ y clasifica el proceso.

c. Calcula $\underset{n \to +\infty}{lím} \, A(n)$ y clasifica el proceso.

SECCIÓN 1.2 NOCIÓN DE LÍMITE

APRENDIZAJES

7. Expresa simbólicamente el límite de un proceso infinito si éste existe.

8. Interpreta el límite de un proceso infinito.

9. Resuelve problemas en diversos contextos que involucren en su solución procesos infinitos.

10. Identifica cuál es el resultado límite de un proceso infinito.

11. Establece el valor límite de un proceso infinito dado en forma algebraica, con base en otras representaciones de dicho proceso.

TEMÁTICA

1. Acercamiento al concepto de límite de una función.

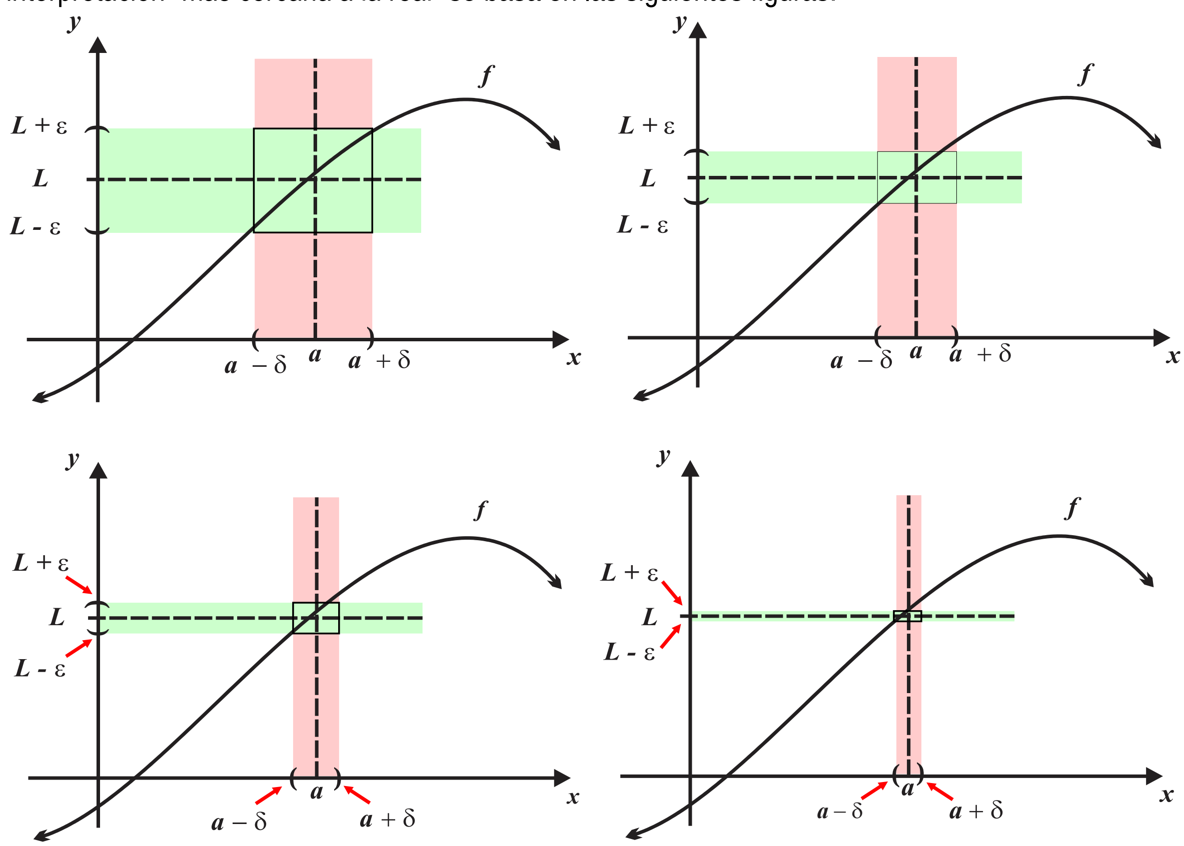
Notación de límite

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \cdot$$

La sección anterior incluye las expresiones

$$\underset{x\to+\infty}{\text{lím}}\, T(n)=L,\quad \underset{x\to+\infty}{\text{lím}}\, T(n)=+\infty,\quad \underset{x\to a}{\text{lím}}\, T(n)=+\infty \text{ y } \underset{x\to a}{\text{lím}}\, T(n)=L,$$

siendo la de mayor interés en los procesos del cálculo diferencial $\underset{x\to a}{\text{lím}}\, T(n)=L$, una interpretación "más cercana a la real" se basa en las siguientes figuras.



La expresión $\underset{x\to a}{\text{lím}}\, f(x)=L$ significa que si disminuimos el radio δ del intervalo centrado en el número a (que puede no contenerlo) las imágenes bajo $f(x)$ de los número de tal intervalo serán más próximas al número L (límite de la función). En esta sección son de nuestro interés las propiedades operativas de $\underset{x\to a}{\text{lím}}\, f(x)=L$.

PROPIEDAD 1 UNICIDAD DEL LÍMITE

Si $\underset{x\to a}{\text{lím}}\, f(x)=L$ y $\underset{x\to a}{\text{lím}}\, f(x)=M$, entonces $L=M$.

La propiedad *1* asegura:

¡Si existe el número $\underset{x\to a}{\text{lím}}\, f(x)$, entonces tiene un valor único L!, y L no depende de la forma en que se efectúe la aproximación de x al número a.

En la evaluación límites en los que intervienen las funciones algebraicas no debemos perder de vista la *propiedad 2*.

PROPIEDAD 2 LÍMITES BÁSICOS

Sea a un número real, n es un número entero, entonces:

a. Si $f(x)=C$, entonces $\lim\limits_{x\to a} C = C$.

b. Si $f(x)=x$, entonces $\lim\limits_{x\to a} x = a$.

c. Si $f(x)=x^n$, entonces $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n$.

d. Si $p(x)$ es una función polinomial, entonces $\lim\limits_{x\to a} p(x) = p(a)$.

e. Si $r(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ es una función racional, entonces $\lim\limits_{x\to a} r(x)=\dfrac{p(a)}{q(a)}$ siempre que $q(a)\neq 0$.

EJEMPLO 1 EVALUACIÓN DE LÍMITES BÁSICOS

a. Sea $f(x)=12$, entonces $\lim\limits_{x\to 8} f(x)=\lim\limits_{x\to 8} 12 = 12$.

b. Si $f(x)=\dfrac{3}{4}$, entonces $\lim\limits_{x\to -10} f(x)=\lim\limits_{x\to 8}\left(\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{3}{4}$.

c. i. Si $f(x)=x$, entonces $\lim\limits_{x\to -14} f(x)=\lim\limits_{x\to -14} x = -14$.

d. Si $f(x)=\dfrac{1}{2}x^3$, entonces $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{2}x^3=\dfrac{1}{2}(2)^3=4$.

e. i. Si $f(x)=2x^2+5x-2$, entonces

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\left(2x^2+5x-2\right)=2(-1)^2+5(-1)-2=-5.$$

f. Si $f(x)=3x^3-2x^2-x+4$, entonces

$$\lim_{x\to \frac{2}{3}} f(x)=\lim_{x\to \frac{2}{3}}\left(3x^3-2x^2-x+4\right)=3\left(\frac{2}{3}\right)^3-2\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)+4=\frac{10}{3}.$$

g. Si $f(x)=\dfrac{x^2-4x+6}{x^2+1}$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2-4x+6}{x^2+1}\right)=\dfrac{(0)^2-4(0)+6}{(0)^2+1}=6$.

h. Si $f(x)=\dfrac{x-6}{x^2+4x+16}$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 5}\left(\dfrac{x-6}{x^2+4x+16}\right)=\dfrac{5-6}{(5)^2+4(5)+16}=-\dfrac{1}{61}$.

i. Si $f(x)=3x-\sqrt{x-2}$, entonces

$$\lim_{x\to 6} f(x) = \lim_{x\to 6}\left(3x-\sqrt{x-2}\right) = 3(6)-\sqrt{2-6} = 18-\sqrt{-4},$$

es decir, éste límite no existe, observa el signo negativo en el interior del radical.

j. Si $f(x)=\sqrt{\dfrac{5x-1}{x+3}}$, entonces

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\sqrt{\frac{5x-1}{x+3}} = \sqrt{\frac{5(1)-1}{1+3}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1.$$

PROPIEDAD 3 PROPIEDADES OPERATIVAS DE LOS LÍMITES

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L_1$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L_2$ existen, entonces:

a. Homogeneidad $\lim\limits_{x\to a}(k)f(x)=(k)\lim\limits_{x\to a} f(x)=(k)(L_1)$.

b. Aditividad $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right]=L_1\pm L_2$.

c. Producto: $\lim\limits_{x\to a}(f\,g)(x)=L_1\cdot L_2$.

d. División; $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{L_1}{L_2}$, siempre que $L_2\neq 0$

EJEMPLO 2 USO DE LAS PROPIEDADES OPERATIVAS

a. $\lim\limits_{x\to -1}\left(3x^4-6\right)=\lim\limits_{x\to -1}\left(3x^4\right)-\lim\limits_{x\to -1}(6)$ Propiedad *b.*

$=(3)\lim\limits_{x\to -1}\left(x^4\right)+2$ Propiedad *a.*

$=(3)(-1)^4-6=-3.$ Evaluación.

b. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3-1}{2x+5}=\dfrac{\lim\limits_{x\to -2}\left(x^3-1\right)}{\lim\limits_{x\to -2}(2x+5)}$ Propiedad *c.*

$=\dfrac{\lim\limits_{x\to -2}\left(x^3\right)-\lim\limits_{x\to -2}(1)}{2\lim\limits_{x\to -2}(x)+\lim\limits_{x\to -2}(5)}$ Propiedad *b.*

$=\dfrac{(-2)^3-1}{(-4)+5}=-9.$ Evaluación.

Si “la sustitución” del número al que tiende la variable en la regla de correspondencia de la función produce indeterminación $\frac{0}{0}$, la *propiedad 4* puede ser de utilidad

PROPIEDAD 4 COMPORTAMIENTO ALREDEDOR DEL NÚMERO a.

Si $f = g$ en el intervalo I, $a \in I$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$, entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = L$.

La propiedad anterior fundamenta la *estrategia 1*.

ESTRATEGIA 1 EVALUACIÓN DE LÍMITES

Verifica que es posible aproximarse a $x = A$, en caso afirmativo sustituye $x = a$ en $f(x)$:

i. Si $f(a)$ existe, entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

ii. Si $f(a)$ no existe, entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ no existe.

Si obtienes una indeterminación $\frac{0}{0}$, $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ puede existir y deberás utilizar la propiedad *4*.

Las factorizaciones son de gran utilidad en la simplificación de funciones y posterior evaluación de límites.

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$,

$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$,

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$,

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$,

$a^m - b^n = (a-b)(a^{m-1} + a^{m-2}b^1 + \cdots + b^{n-1})$.

EJEMPLO 3 EVALUACIÓN DE LÍMITES

En todos los casos, la sustitución de $x = a$ en la función f se obtiene la forma indeterminada $\frac{0}{0}$, ¡verifícalo! por tanto, por tanto, la *estrategia 1.1* te será útil.

a. En $\lim\limits_{x \to 8} \frac{x^2 - 8x}{x - 8}$, tenemos $f(x) = \frac{x^2 - 8x}{x - 8} = \frac{x(x-8)}{x-8} = x$ siempre que $x \neq 8$, entonces

$$\lim_{x \to 8} \frac{x^2 - 8x}{x - 8} = \lim_{x \to 8} x = 8.$$

b. En $\lim\limits_{x \to 4} \frac{16 - x^2}{4 - x}$, tenemos $f(x) = \frac{16 - x^2}{4 - x} = \frac{(4-x)(4+x)}{4-x} = 4 + x$ siempre que $x \neq 4$, entonces

$$\lim_{x \to 4} \frac{4 - x^2}{4 - x} = \lim_{x \to 4} (4 + x) = 8.$$

c. En $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-10x+24}{x-6}$, tenemos $f(x)=\dfrac{x^2-10x+24}{x-6}=\dfrac{(x-6)(x-4)}{x-6}=x-4$ siempre que $x\neq 6$, así $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-10x+24}{x-6}=\lim\limits_{x\to 6}(x-4)=6-4=2$.

d. En $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{x^2+8x+7}$, tenemos $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+8x+7}=\dfrac{x+1}{(x+7)(x+1)}=\dfrac{1}{x+7}$ siempre que $x\neq -1$, de donde, $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+7}{x^2+8x+7}=\dfrac{6}{-1+7}=-1$.

e. En $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$ se tiene $f(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}=\dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}=(\sqrt{x}+\sqrt{2})$, siempre que $x\neq\sqrt{2}$, entonces $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}=\lim\limits_{x\to 2}(\sqrt{x}+\sqrt{2})=\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

f. En $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+8x+7}{x^2-6x-7}$, tenemos $f(x)=\dfrac{x^2+8x+7}{x^2-6x-7}=\dfrac{(x+1)(x+7)}{(x+1)(x-7)}=\dfrac{x+7}{x-7}$ siempre que $x\neq -1$, luego, $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+8x+7}{x^2-6x-7}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+7}{x-7}=\dfrac{-1+7}{-1-7}=-\dfrac{3}{4}$.

g. Para $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{x^3-125}$, es $f(x)=\dfrac{x-5}{x^3-125}=\dfrac{x-5}{(x-5)(x^2+5x+25)}=\dfrac{1}{x^2+5x+25}$ cuando $x\neq 5$, así $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{x^3-125}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{1}{x^2+5x+25}=\dfrac{1}{75}$.

h. Si $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x}$, entonces

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+9}-3}{x}=\frac{(\sqrt{x+9}-3)(\sqrt{x+9}+3)}{x(\sqrt{x+9}+3)}=\frac{x+9-9}{x(\sqrt{x+9}+3)}=\frac{1}{\sqrt{x+9}+3},$$

siempre que $x\neq 0$, luego, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+9}+3}=\dfrac{1}{6}$.

i. En $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{6}{x+8}$ la sustitución de $x_0=-8$ en $f(x)$ conduce a la forma indeterminada

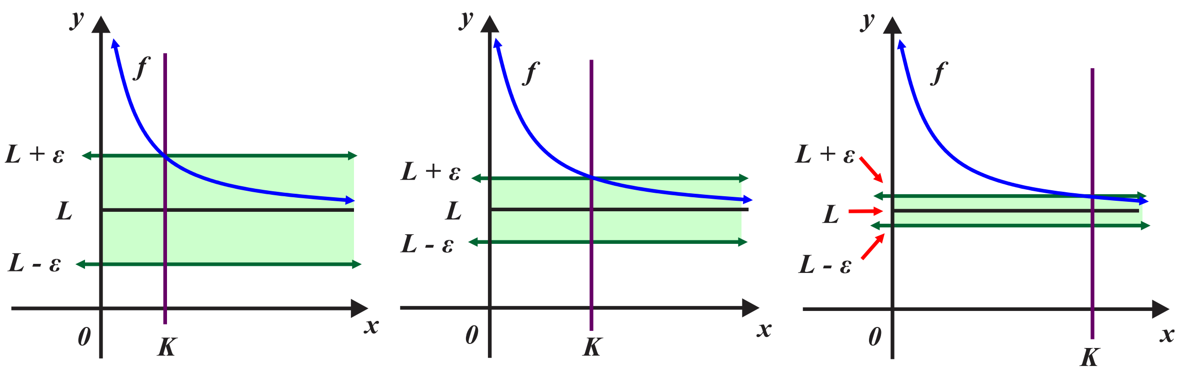
$$\frac{1}{-8+8}=\frac{1}{0}\text{, por tanto, }\lim_{x\to -8}\frac{6}{x+8}\text{ no existe.}$$

j. En $\lim\limits_{x\to 12}\dfrac{9}{(x-12)^2}$ la sustitución de $x_0=12$ en $f(x)=\dfrac{9}{(x-12)^2}$ conduce a la forma $\dfrac{9}{0}$, así, $\lim\limits_{x\to 12}\dfrac{9}{(x-12)^2}$ no existe.

LÍMITES CUANDO LA VARIABLE TIENDE AL INFINITO

En la sección previa se "dimos significado a la expresión" $\lim_{n\to+\infty} f(n) = L$, en términos de los "procesos infinitos", tal significado es impreciso y se encuentra en el contexto de los procesos discretos. Ahora aclaremos el significado de:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \text{ y } \lim_{x\to-\infty} f(x) = L, \text{ si } x \text{ es continua.}$$



Observa que en las figuras, a partir de la línea recta vertical de ecuación $x = K$ $(K > 0)$ la curva asociada a la función f se encuentra contenida en la franja (verde) del plano cartesiano que determinan las líneas rectas de ecuaciones $y = L - \varepsilon$ y $y = L - \varepsilon$, al disminuir el número ε, la franja $y = L - \varepsilon$ y $y = L - \varepsilon$ se hace más angosta y la línea recta vertical $x = K$ se desplaza a la derecha, conservándose el comportamiento antes señalado. Este comportamiento se simbólicamente como

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L.$$

En el caso $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ el comportamiento es similar al anterior pero, la curva asociada a la función y la franja amarilla se observarían en el segundo cuadrante del plano cartesiano

PROPIEDAD 5 COMPORTAMIENTO DE x^r CUANDO $r > 0$.

Si $r > 0$ es un número racional y k un número real, entonces:

a. $\lim_{x\to+\infty} \frac{k}{x^r} = 0$ y $\lim_{x\to-\infty} \frac{k}{x^r} = 0$.

b. Si x^r está definido, entonces $\lim_{x\to-\infty} \frac{k}{x^r} = 0$.

El cálculo de límites de las formas

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m} \text{ y } \lim_{x\to-\infty} \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m},$$

(donde n y m son números enteros) se realiza a partir de la *propiedad 6*.

PROPIEDAD 6 DE LOS TÉRMINOS LÍDERES (DOMINANTES

a. Sea $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ tal que $a_n x^n$ es el término líder, entonces

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} a_n x^n .$$

b. Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones polinomiales con términos líderes $a_n x^n$ y $b_m x^m$ respectivamente, entonces

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}, \text{ así mismo } \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}.$$

Las *propiedades 5 y 6* fundamentan la "*estrategia 2*".

ESTRATEGIA 2 EVALUACIÓN DE LÍMITES

1. Verifica que f esté definida para asignaciones "extremadamente grandes" a x.
2. Selecciona los términos dominantes, del numerador y del denominador.

a. Si el término dominante del numerador es de menor potencia que el término dominante del denominador, entones el límite de la función es 0.

b. Si ambas términos dominantes tienen igual potencia, entonces el límite de la función es el cociente de los coeficientes de los términos dominantes.

c. Si la potencia del término dominante del numerador es mayor que la potencia del término dominante del denominador, entones el límite de la función no existe (recuerda que esto se representa por $+\infty$ o $-\infty$).

EJEMPLO 4 EVALUACIÓN DE LÍMITES CUANDO LA VARIABLE CRECE INDEFINIDAMENTE

a. Puesto que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{x^8}$, $r = 8 > 0$, por tanto, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{x^8} = 0$.

b. Si $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(-\dfrac{9}{x^4} \right)$, entonces $r = 4 > 0$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(-\dfrac{9}{x^5} \right) = 0$.

c. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{\sqrt[8]{x}}$, entonces $r = \dfrac{1}{8} > 0$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{\sqrt[8]{x}} = 0$.

d. En $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{8}{\sqrt[5]{x}} = 0$, $x < 0$, también $r = \dfrac{1}{5}$, por tanto, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{8}{\sqrt[5]{x}} = 0$.

e. Si $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(-\dfrac{24}{x^6} \right)$, entonces $r = 6 > 0$ por tanto $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(-\dfrac{24}{x^6} \right) = 0$.

f. En $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{8x^2+2x-4}{4x^2-9}$ los términos dominantes so $8x^2$ y $4x^2$, por tanto

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{8x^2+2x-4}{4x^2-9} = \lim_{x\to+\infty} \frac{8x^2}{4x^2} = \lim_{x\to+\infty} 2 = 2.$$

g. En $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{7x-5}{3x^2+x+1}$, los términos dominantes son $7x$ y $3x^2$, entonces

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{7x-5}{3x^2+x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{7x}{3x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{7}{3x} = 0.$$

h. En $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{6x^4+x-12}{2x-7}$, los términos de mayor potencia son $6x^4$ y x, entonces

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{6x^4+x-12}{2x-7} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x^4}{2x} = \frac{6}{2} \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty.$$

i. En la evaluación de $\displaystyle \lim_{x\to-\infty} \frac{(2x-4)^3(x-7)^2(2x-6)}{x^3(3x+8)^3}$, primero se desarrollan los productos y luego se utilizan los términos dominantes, obtenemos

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(2x-4)^3(x-7)^2(2x-6)}{x^3(3x+8)^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(2x)^3(x)^2(2x)}{x^3(3x)^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{16x^6}{27x^6} = \frac{16}{27}.$$

j. En $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{9}}}}{4-\sqrt{x}}$, los “términos dominantes” son $\sqrt{x}$ y $-\sqrt{x}$, así

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{9}}}}{4-\sqrt{x}} = -1.$$

k. Si $\displaystyle \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{8}}}}{3-\sqrt{x}}$, observa que $\sqrt{x}$ no está definida si $x<0$, entonces

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{8}}}}{3-\sqrt{x}} \text{ no existe.}$$

l. Para evaluar $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{16x}-\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}}{\sqrt{4x}+\sqrt[3]{27x}}$ los términos dominantes son $\sqrt{16x}$ y $\sqrt{4x}$, luego:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{16x}-\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}}{\sqrt{4x}+\sqrt[3]{27x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{16x}}{\sqrt{4x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = 2.$$

SECCIÓN 1.2
EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Evalúa los límites.

a. $\lim\limits_{x\to 0}\left(5x^4 - x^3 + 5x^2 + x - 6\right)$.

b. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{x^2 - x + 2}{x-3}$.

c. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x-1}{5x+2}$.

d. $\lim\limits_{x\to -1}\left(\sqrt{8x^2+1} + x\right)$.

e. $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{\dfrac{1}{x+3}}$.

2. Desarrolla ilustrando el uso de las propiedades operativas propiedades operativas de los límites.

a. $\lim\limits_{x\to 2} x\left(x^4 - 2^4\right)\left(x+2\right)$.

b. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x^2-1}$.

3. En caso de existir evalúe el límite propuesto.

a. $\lim\limits_{t\to 7} \dfrac{t^2 - 5t - 14}{t-7}$.

b. $\lim\limits_{t\to -3} \dfrac{t^2 + 6t + 9}{t^2 + 7t + 12}$.

c. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1}{(x-1)^2}$.

d. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 3}{(x-1)^2}$.

e. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 9}{2x-6}$. 3.

f. $\lim\limits_{w\to 2} \dfrac{w^2 - 4w + 4}{w^2 - 4}$.

g. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{5x^4 + x^3 - 2x - 76}{x^3 - 2x^2 + x + 18}$.

h. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - x - 6}{x-3}$.

i. $\lim\limits_{t\to \frac{3}{2}} \dfrac{2t^2 + t - 6}{2t^2 - 5t + 3}$.

j. $\lim\limits_{p\to 1} \dfrac{3p^2 - 3}{p-1}$.

k. $\lim\limits_{v\to 4} \dfrac{v^2 - 16}{\sqrt{v} - 2}$.

l. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{5+h} - \sqrt{5}}{2h}$.

m. $\lim\limits_{h\to 3} \dfrac{\sqrt{2h+3} - h}{h-3}$.

n. $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 2}{x-8}$.

o. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{4x^2 + 2x^2}{2x^2 + x - 1}$.

p. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-5x^3 + 2x^2 - 4}{2x+3}$.

q. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1 - 3x^5}{x^5 + 2x^2 + 4}$.

r. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{(x-1)^4(2x+3)^2}{x^4(2x+1)^3}$.

s. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{49x} + \sqrt[3]{x} + 1}{4\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} - 2}$.

t. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^3 + 3x} + \sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[3]{x^2+3} + \sqrt[5]{x}}$.

1.3 SOLUCIONES Y EVALUACIÓN

SOLUCIÓN A EJERCICIOS PROPUESTOS

EXAMEN DE LA UNIDAD

SOLUCIÓN AL EXAMEN

SOLUCIONES

UNIDAD 1
EJERCICIOS PROPUESTOS

SECCIÓN 1.1 SOLUCIONES A EJERCICIOS

1. DECIMÁL PERIÓDICO

a. $0.3+0.03+0.003+0.0003+\cdots=\frac{3}{10}\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{3}{1000}+\cdots\right)$.

b. $a=\frac{3}{10}$ y $r=\frac{1}{10}$. c. $T=\frac{1}{3}$, proceso infinito convergente.

2. BORRANDO UNA LÍNEA

a.

ETAPA n	$L(n)$	$T(n)$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{8}{9}$
3	$\frac{1}{27}$	$\frac{26}{27}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$\left(\frac{1}{3}\right)^n$	$\frac{3^n-1}{3^n}$

b. $\lim_{n\to 5}\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{1}{243}$. c. $\lim_{n\to 6}\left(\frac{3^6-1}{3^6}\right)=\frac{728}{729}$.

3. CUBRIENDO UN CUADRADO

a. $A(n)=\frac{2^n-1}{2^2}$. b. $\lim_{n\to 6}A(n)=\frac{2^6-1}{2^6}=\frac{63}{64}$, proceso finito convergente (resultado finito).

c. $\lim_{n\to 6}A(n)=\frac{2^6-1}{2^6}=\frac{63}{64}$, proceso infinito convergente (resultado finito).

4. LONGITUD DE LA CURVA DE KOCH

a.

ETAPA n	NÚMERO DE SEGMENTOS S	LONGITUD DE CADA SEGMENTO L	LONGITUD DE LA CURVA M
1	4	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
2	$16 = 4^2$	$\frac{1}{9}=\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$\left(\frac{4}{3}\right)^2$
3	$64 = 4^3$	$\frac{1}{27}=\left(\frac{1}{3}\right)^3$	$\left(\frac{4}{3}\right)^3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	4^n	$\left(\frac{1}{3}\right)^n$	$\left(\frac{4}{3}\right)^n$

b. $S(n)=4^n$. c. $L(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^n$. d. $M(n)=\left(\frac{4}{3}\right)^n$.

e. $\lim\limits_{n\to+\infty} S(n)=\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n=+\infty$, proceso infinito divergente.

$\lim\limits_{n\to+\infty} L(n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$, proceso infinito convergente con límite 0.

$\lim\limits_{n\to+\infty} M(n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n=+\infty$, proceso infinito divergente.

5. EL TRIÁNGULO QUE DESAPARECE

a.

ETAPA n	PERÍMETRO $p(n)$	ÁREA $A(n)$
1	$1+\sqrt{2}$	$\frac{1}{4}$
2	$1+\sqrt{2}$	$\frac{1}{8}$
3	$1+\sqrt{2}$	$\frac{1}{16}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$1+\sqrt{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

b. $\lim\limits_{n \to +\infty} p(n) = 1 + \sqrt{2}$, proceso infinito con resultado finito.

c. $\lim\limits_{n \to +\infty} A(n) = 0$, proceso infinito con resultado finito.

SECCIÓN 1.2 SOLUCIONES A EJERCICIOS

1. a. -6. b. $-\frac{7}{10}$. c. 1. d.. 2. e. $\frac{1}{2}$.

2. a. Propiedad d. Propiedad b. Propiedad a. Evaluación 0.

b. Propiedad d. Propiedad b. Propiedad a. Evaluación, $-\frac{3}{2}$.

3. a. 9. b. 0. c. No existe. d. No existe. e. 3. f. 0. g. $-\frac{50}{7}$. h. 5. i. 7. j. 6. k. 32. l. $\frac{1}{4\sqrt{5}}$.

m. $-\frac{2}{3}$. n. $\frac{1}{12}$. o. $+\infty$. p. $-\infty$. q. -3. r. 0. s. $\frac{7}{4}$. t. 0.

UNIDAD 1 EXAMEN

1. Sea un triángulo rectángulo con catetos de longitud uno.

Etapa 1.

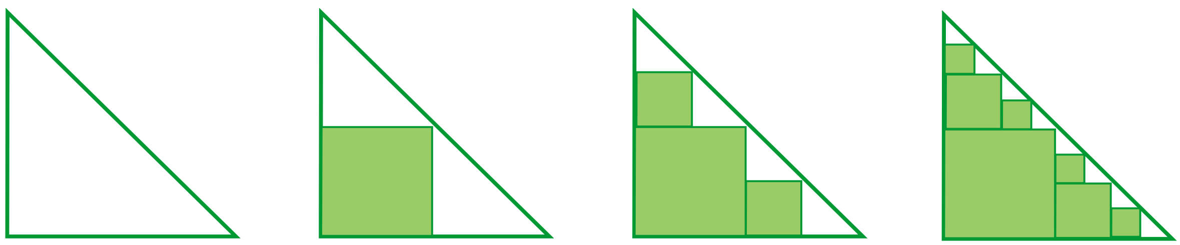
Localiza los puntos medios de cada lado, supón que son los vértices de un cuadrado (el otro vértice es el punto de intersección de los catetos) y traza un cuadrado y calcula su área.

Etapa 2.

Repite el proceso anterior con los triángulos generados en la etapa 1.

Etapa 3.

Repite el proceso anterior con los triángulos generados en la etapa 2.



Si el proceso se repite indefinidamente, construye el modelo $A(n)$ que describe el área de la región cubierta por los cuadrados en la etapa n proceso, clasifícalo como convergente o divergente, si es el caso determina su total.

Evalúa los límites.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x+\sqrt{x+1}\right)\left(3x+2\right)$.

3. $\lim\limits_{t\to -3}\dfrac{t^3-27}{t+3}$.

4. $\lim\limits_{z\to -2}\dfrac{2z^3-2z^2-4z+16}{z+2}$.

5. $\lim\limits_{u\to 1}\dfrac{u^4-16}{u^3-8}$.

6. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{h+4}-2}{h}$.

7. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{(3x+1)^2(x-2)(x+1)}{x^3\left(2x^2+1\right)^2}$.

8. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{16x}+4\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}}{\sqrt{36x}+\sqrt[3]{27x}}$

UNIDAD 1 SOLUCIÓN AL EXAMEN

1. $A(n)=\dfrac{2^n-1}{2^n}$ o $A(n)=1-\dfrac{1}{2^n}$, n es un número natural. Converge a $\dfrac{1}{2}$.
2. 2.
3. No existe (divergente)
4. 28.
5. $\dfrac{15}{7}$.
6. $\dfrac{1}{4}$.
7. 0.
8. $\dfrac{2}{3}$.

2

EL CONCEPTO DE DERIVADA, VARIACIÓN Y RAZÓN DE CAMBIO

PROPÓSITOS

Al finalizar la unidad: el alumno interpretará el concepto de derivada a partir del análisis de la variación y de la razón de cambio, al resolver problemas en diferentes contextos cuyos modelos sean funciones polinomiales.

CONTENIDO

CONCEPTOS CLAVE

Función. Relación o modelo entre dos variables, que transforma un número (asignación a la primera variable) en un único número de la segunda variable.

Partes de una Función. Regla de correspondencia, dominio y recorrido (rango).

Función polinomial. Su dominio es el conjunto de los números reales. Su regla de correspondencia es $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$.

Función lineal. La función polinomial con regla de correspondencia $p(x) = a_1 x^1 + a_0$.

Función cuadrática. Función polinomial con regla de correspondencia $p(x) = a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$.

Función cúbica. Tiene regla de correspondencia $p(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$.

Razón. Comparación de dos cantidades (con distintas unidades) utilizando una división.

Cambio en una variable. Diferencia (resta) entre dos asignaciones numéricas.

Cambio en una función. Diferencia (resta) entre dos imágenes.

Razón de cambio en promedio. División con: denominador resta de dos números distintos del dominio; numerador resta entre las dos imágenes correspondientes al dominio.

Función "razón de cambio en promedio". En una razón de cambio promedio es variable uno de los elementos de la resta, como consecuencia, es en el numerador es variable la imagen correspondiente.

Pendiente. Número que indica el nivel de inclinación de un segmento rectilíneo (o una línea recta) en el plano cartesiano.

Línea recta tangente. A una curva en un punto P es una recta que toca a la curva solo en dicho punto, llamado *punto de tangencia o de contacto*.

Línea recta normal. Línea recta perpendicular a la línea recta tangente, contiene el punto de tangencia (o contacto).

SECCIÓN 2.1 CAMBIO Y RAZÓN DE CAMBIO PROMEDIO

APRENDIZAJES

1. Reconoce en diversos contextos la variación y la razón de cambio en funciones lineales. Explica el significado de la razón de cambio y verifica que es una constante, a través de procesar la información de las situaciones planteadas.

2. Reconoce en diversos contextos la variación y la razón de cambio de las funciones cuadráticas en un intervalo dado, a través de procesar la información de las situaciones planteadas.

3. Reconoce en diversos contextos la variación y la razón de cambio de Las funciones cúbicas en un intervalo dado, a través de procesar la información de las situaciones planteadas.

TEMÁTICA

En diferentes contextos, variación y razón de cambio promedio e instantánea en:

1. Funciones polinomiales de grado no mayor a tres.

Una función real de variable real es un "modelo matemático" que describe el comportamiento de dos variables (la dependiente) en términos de la variable de la que es controlada (le asignamos los valores o números). En esta unidad nos concretaremos a estudiar los elementos que destacan en la descripción del cambio de una función real de variable real sobre un intervalo de su dominio.

DEFINICIÓN 1 CAMBIO EN UNA FUNCIÓN

Sea: la función $f : I \to IR$, sean x_1 y $x_2 \in I$, entonces:

a. El número $\Delta x = x_2 - x_1$ es el cambio (incremento) de la variable x en el intervalo $[\ x_1\ ,\ x_2\ ]$.

b. Si $f(x_1)$ y $f(x_2)$ son las imágenes de x_1 y x_2 respectivamente, el cambio o incremento de la función f es $\Delta f = f(x_2) - f(x_1)$.

Ciertos modelos de situaciones reales de diversas ramas del conocimiento son funciones que relacionan una variable independiente x con una variable dependiente $y = f(x)$, si la variable independiente cambia de un valor inicial x_1 a otro valor x_2 y la otra variable lo hace desde $y_1 = f(x_1)$ hasta $y_2 = f(x_2)$, la razón de cambio promedio de $y = f(x)$ con respecto al cambio en la variable x sobre el intervalo $[\ x_1\ ,\ x_2\ ]$ es

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \text{ siempre que } x_2 \neq x_1.$$

DEFINICIÓN 2 RAZÓN DE CAMBIO PROMEDIO COMO NÚMERO Y COMO FUNCIÓN

Sea: la función $f : I \to IR$, x_1 y $x_2 \in I$, entonces:

a. Si $\Delta x = x_2 - x_1$ ($x_2 \neq x_1$) el cambio de x y $\Delta f = f(x_2) - f(x_1)$ es el cambio correspondiente en f, entonces el número

$$\overline{f}(x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \text{ (siempre que } x_2 \neq x_1\text{)},$$

es la razón de cambio promedio de f sobre el intervalo $[\ x_1\ ,\ x_2\ ]$.

b. Sean $\Delta x = x - x_1$ un cambio (o incremento) en la variable x y $\Delta y = f(x) - f(x_1)$ el cambio correspondiente en la función f, entonces la función

$$\overline{f}(x) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \text{ (siempre que } x \neq x_1\text{)},$$

se conoce como "función razón de cambio promedio" asociada a f sobre $[\ x_1\ ,\ x\ ]$.

EJEMPLO 1 CAMBIO, CAMBIO PROMEDIO DE UNA FUNCIÓN LINEAL

El modelo $P(x) = 4x$ describe el perímetro de un cuadrado de lado de longitud x (evidentemente $x \geq 0$).

a. Si x cambia de 4 a 12, entonces el cambio en la variable "longitud de lado" es $\Delta x = 12 - 4 = 8$.
b. Puesto que

$$p(4) = 4(4) = 16 \text{ y } p(12) = 4(12) = 48,$$

el cambio en el perímetro en el intervalo $[4, 12]$ es

$$\Delta p = 48 - 16 = 32.$$

c. La razón de cambio promedio de $p(x) = 4x$ sobre el intervalo $[4, 12]$ es

$$\bar{p} = \frac{32}{8} = 4.$$

d. Sobre el intervalo $[4, x]$, tenemos:

$$p(4) = 4(4) = 16 \text{ y } p(x) = 4x,$$

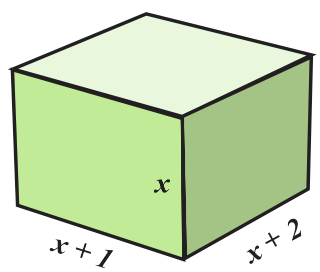
entonces

$$\bar{p}(x) == \frac{4x - 16}{x - 4} = \frac{4(x-4)}{x-4} = 4,$$

es la función que describe la razón de cambio promedio (por el contexto del problema $x \geq 0$).

EJEMPLO 2 CAMBIO, CAMBIO PROMEDIO DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

La caja de la figura no tiene tapadera y sus dimensiones dependen de la longitud de altura, que representamos por la variable (independiente) no negativa x.



La función (cuadrática) que modela su área tiene regla de correspondencia

$$A(x) = (x+1)(x+2) + 2x(x+1) + 2x(x+1)$$

o bien

$$A(x) = 5x^2 + 9x + 2, \text{ si } x \geq 0$$

a. El cambia de la altura sobre el intervalo $[1, 5]$ es $\Delta x = 5 - 1 = 4$ unidades. También:

$$A(5) = 5(5)^2 + 9(5) + 2 = 172 \text{ y } A(1) = 5(1)^2 + 9(1) + 2 = 16$$

luego, el cambio en su área es de

$$\Delta A(x) = A(5) - A(1) = 172 - 16 = 156 \text{ unidades,}$$

y la razón de cambio promedio del área del área respecto al cambio en la altura es:

$$\overline{A}(5)=\frac{A(5)-A(1)}{\Delta x}=\frac{156}{4}=39.$$

b. Si la altura cambia de cambia de 1 a x unidades, entonces la función que describe la razón de cambio promedio del área es:

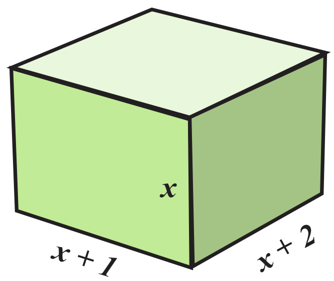
$$\overline{A}(x)=\frac{A(x)-A(1)}{x-1}=\frac{5x^2+9x+2-16}{x-1}=\frac{5x^2+9x-14}{x-1}=5x+14,\text{ si } x\neq 1,$$

es decir,

$$\overline{A}(x)=5x+14,\text{ si } x\neq 1 \text{ (por el contexto del problema } x\geq 0\text{)..}$$

EJEMPLO 3 CAMBIO, CAMBIO PROMEDIO DE UNA FUNCIÓN CÚBICA

La caja de la figura no tiene tapadera y sus dimensiones dependen de la longitud de altura que está representada por la variable (independiente) x no negativa.



La función (cúbica) que modela su volumen es

$$V(x)=x(x+1)(x+2)=x^3+3x^2+2x,\text{ con } x\geq 0.$$

a. Si la altura cambia de 1 a 5 unidades, este cambio es $\Delta x=5-1=4$ unidades.

Puesto que:

$V(x)=x^3+3x^2+2x$,

$$V(5)=(5)^3+3(5)^2+2(5)=210 \text{ y } V(1)=(1)^3+3(1)^2+2(1)=6,$$

el cambio en el volumen sobre $[1,5]$ es

$$\Delta V=V(5)-V(1)=210-6=204,$$

por tanto, la razón de cambio promedio del volumen respecto al cambio en la altura es:

$$\overline{V}(5)=\frac{V(5)-V(1)}{\Delta x}=\frac{204}{4}=51.$$

b. Si la altura cambia sobre el intervalo $[1,x]$, entonces la función que describe la razón de cambio promedio del volumen al cambiar la altura es:

$$\overline{V}(x)=\frac{V(t)-V(1)}{x-1}=\frac{x^3+3x^2+2x-6}{x-1}=x^2+4x+6,\text{ si } x\neq 1,\text{ o bien,}$$

$$\overline{V}(x)=x^2+4x+6,\text{ si } x\neq 1 \text{ (por el contexto del problema } x\geq 0\text{).}$$

PROPIEDAD 1 FUNCIÓN RAZÓN DE CAMBIO PROMEDIO DE UNA FUNCIÓN POLINOMIAL DE GRADO TRES EN EL INTERVALO $[x_1 \ , \ x]$.

Sea f una función definida sobre el intervalo $[x_1 \ , \ x]$:

a. Si $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, entonces

$$\overline{f}(x) = A\left(x^2 + x \cdot x_1 + x_1^2\right) + B(x + x_1) + C \text{, si } x \neq x_1 \ .$$

COROLARIO

b. Si $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ y $x \neq x_1$, entonces $\overline{f}(x) = A(x + x_1) + B$.

c. Si $f(x) = Ax + B$ y $x \neq x_1$, entonces $\overline{f}(x) = A$.

Hagamos algunos cálculos.

EJEMPLO 4 OBTENCIÓN DE LA FUNCIÓN RAZÓN DE CAMBIO PROMEDIO

Apliquemos la *propiedad 1.c* y obtengamos la función “razón de de cambio promedio” sobre el intervalo solicitado.

a. Si $f(x) = 8x + 2$ y $[3 \ , \ x]$, entonces $A = 8$ y $\overline{f}(x) = 8$.

b. Si $f(x) = -10x + 6$, entonces $A = -10$ y $\overline{f}(x) = -10$.

EJEMPLO 5 FUNCIÓN RAZÓN DE CAMBIO PROMEDIO COMO FUNCIÓN

Apliquemos la *propiedad 1.b* y obtengamos la función “razón de de cambio promedio” en el intervalo solicitado.

a. Si $f(x) = -4x^2 + 2x - 5$ sobre $[1 \ , \ x]$, entonces $A = -4$, $B = 2$, $C = -5$ y $x_1 = 1$, si los sustituimos en $\overline{f}(x) = A(x + x_1) + B$ obtenemos

$$\overline{f}(x) = -4(x + 1) + 2 \ .$$

b. Si $f(x) = \frac{1}{8}x^2 - 6x + 10$ y $[-3 \ , \ t]$, entonces $A = \frac{1}{8}$, $B = -6$, $C = 10$ y $x_1 = -3$.

Sustituimos estos números en $\overline{f}(x) = A(x + x_1) + B$ y obtenemos

$$\overline{f}(x) = \frac{1}{8}(x - 3) - 6 \ .$$

EJEMPLO 6 CAMBIO PROMEDIO COMO FUNCIÓN

a. Si $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 2x^2 + 3x - 12$ sobre $[4 \ , \ x]$, entonces $A = \frac{1}{4}$, $B = -2$, $C = 3$, $D = -12$ y $x_1 = 4$. Sustituimos estos números en

$$\overline{f}(x) = A\left(x^2 + x \cdot x_1 + x_1^2\right) + B(x + x_1) + C$$

obtenemos

$$\overline{f}(x)=\frac{1}{4}\left(x^2+4x+4^2\right)-2\left(x+4\right)+3, \text{ o bien } \overline{f}(x)=\frac{1}{4}x^2-x-1.$$

b. Sea $f(x)=8x^3-25$ en $[0\ ,\ x]$, entonces $A=8$, $B=0$, $C=0$, $D=-25$ y $x_1=0$. Sustituimos estos números en

$$\overline{f}(x)=A\left(x^2+x\cdot x_1+x_1^2\right)+B\left(x+x_1\right)+C$$

y obtenemos

$$\overline{f}(x)=8\left(x^2+x\cdot 0+0^2\right)+0\left(x+0\right)+0, \text{ entonces } \overline{f}(x)=8x^2.$$

SECCIÓN 2.1
EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Obtén la "razón de de cambio promedio" en el intervalo solicitado.

a. $f(x)=6$, sobre el intervalo $[-2\ ,\ 2]$.

b. $f(x)=12x$, sobre el intervalo $[1\ ,\ 8]$.

c. $f(x)=-15x$, sobre el intervalo $[-5\ ,\ 8]$.

d. $f(x)=-4x+6$, sobre el intervalo $[0\ ,\ 6]$.

e. $f(x)=\frac{1}{9}x-6$, sobre el intervalo $[-1\ ,\ 3]$.

f. $f(x)=x^2-4$, sobre el intervalo $[-2\ ,\ 2]$.

g. $f(x)=2x^2-5x+1$, sobre el intervalo $[1\ ,\ 3]$.

h. $f(x)=-x^2+2x-1$, sobre el intervalo $[-2\ ,\ 0]$.

i. $f(x)=x^3+4x^2-x+4$, sobre el intervalo $[1\ ,\ 5]$.

j. $f(x)=-2x^3+x^2+4x+2$, sobre el intervalo $[0\ ,\ 2]$.

k. $f(x)=x^3-x^2$, sobre el intervalo $[-1\ ,\ 1]$.

2. Calcula la función razón de cambio promedio en el intervalo señalado.

a. Para $f(x)=-12$ sobre $[8\ ,\ x]$.

b. Para $f(x)=8$ sobre $[-2\ ,\ x]$.

c. Para $f(x)=\frac{2}{7}x+9$, sobre el intervalo $[3\ ,\ x]$.

d. Para $f(x)=6-3x$, sobre el intervalo $[-5\ ,\ x]$.

e. Si $f(x)=-4x^2+x+5$ en $[0\ ,\ x]$.

f. Si $f(x)=\frac{1}{3}x^2-2x+4$ sobre $[1\ ,\ x]$.

g. $f(x)=-3x^3+5x+2$ en $[3\ ,\ x]$.

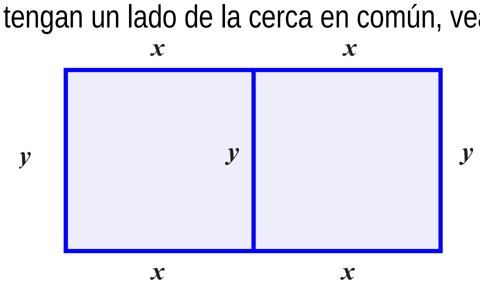
h. $f(x)=-x^3+2x^2-x+2$ en $[5\ ,\ x]$.

3. La longitud de las doce aristas de un cubo de lado de longitud x se describe por la función $l(x)=12x$, siempre que $[0\ ,\ x]$, ¿cuál es la función razón de cambio promedio?

4. Relación de variación directa: si y varía directamente con x (equivalentemente, es directamente proporcional a x), entonces existe una constante m diferente de cero, tal que $y=mx$, en funciones esto se escribe $f(x)=mx$, cuando $[0\ ,\ x]$, ¿cuál es la función razón de cambio promedio?

5. El área de una superficie cilíndrica de altura fija de longitud h se modela por la función $A(r)=2\pi hr+2\pi h\ r^2$, definida sobre el intervalo $[0\ ,\ r]$. Determina la función que describe el cambio promedio del área en términos del radio.

6. Con $300\ metros$ de cerca se quieren limitar dos terrenos rectangulares iguales (de las mismas dimensiones) de manera que tengan un lado de la cerca en común, vea la *figura anexa*.



La función que describe la situación es: $A(x)=200x-\frac{8}{3}x^2$, siempre que $0\le x\le 75$.

Construye la función que describe el cambio promedio del área en términos de las base de los rectángulos.

7. La función que describe el comportamiento del volumen de un tanque cilíndrico (altura $h\ge 0$ conocida y constante) cuyos extremos están coronados por semiesferas es

$$V(r)=\pi hr^2+\frac{4}{3}\pi r^3,\ \text{siempre que } r\ge 0 \text{ y } h\ge 0.$$

Obtén la función que describe la razón de cambio promedio del volumen respecto al cambio en el radio.

8. El volumen de un cubo de lado de longitud x está descrito por la función cúbica $V(x)=x^3$, siempre que $x \geq 0$. Construye la función que describe su razón de cambio promedio respecto al cambio en la longitud del lado.

SECCIÓN 2.2 CAMBIO INSTANTÁNEO CONCEPTO DE DERIVADA

APRENDIZAJES

5. Utiliza a los procesos infinitos como una forma de obtener la razón de cambio instantánea de una función polinomial y la interpreta como un límite.

6. Identifica a la derivada de una función polinomial en un punto como el límite de las razones de cambio promedio.

7. Interpreta en el contexto de una situación o problema modelado por una función polinomial, la información que proporciona su derivada.

8. Calcula la pendiente de la recta tangente en un punto de la gráfica de una función polinomial, como el límite de las rectas secantes.

9. Calcula la derivada de funciones polinomiales con grado menor o igual a tres, en un punto, usando el límite del cociente de Fermat.

10. Utiliza la función derivada para resolver problemas en diferentes contextos.

TEMÁTICA

Concepto de derivada:

1. Notación.

2. Representación algebraica.

3. Derivada de funciones del tipo: $f(x) = cx^n$.

4. Reglas de derivación para:
- Función constante.
- Función lineal.
- Constante por una función.
- Suma de funciones.
- Producto de funciones.
- Cociente de funciones.
- Funciones del tipo $(f(x))^n$ con $f(x)$ polinomial y n un número racional.

Algunos de los modelos que describen el comportamiento de situaciones de diversas ramas del conocimiento (Física, Química, Biología, Economía, entre otras) son funciones que relacionan una variable "dependiente" $y = f(x)$ con otra variable "independiente" x. Si la variable independiente cambia del valor inicial x_1 a otro valor x, la variable $y = f(x)$ lo hace de $f(x_1)$ a $f(x)$ y la razón de cambio promedio de $y = f(x)$ con respecto a la variable x en el intervalo $[x_1, x]$ es definida por la relación

$$\overline{f}(x) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}.$$

Es frecuente que el intervalo donde se requiere calcular "la razón de cambio promedio" sea de la menor longitud posible". El estudio de estas situaciones conduce a definir la "razón de cambio puntual" de $y = f(x)$ en el punto de la recta real (o número) x_1, de la siguiente forma

$$f'(x_1) = \underset{x \to x_1}{lím} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}.$$

DEFINICIÓN 1 RAZÓN DE CAMBIO PUNTUAL COMO NÚMERO Y COMO FUNCIÓN

a. Sea $f : I \to IR$ una función real de variable real, tal que $x_1 \in I$, la razón de cambio puntual de f en x_1 es el número

$$f'(x_1) = \underset{x \to x_1}{lím} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = \underset{\Delta x \to 0}{lím} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

b. La "función razón de cambio puntual" (representada por $f'(x)$) asignada a la función f transforma a todo número $x_1 \in I$ en su razón de cambio puntual.

$$f'(x) = \underset{t \to x}{lím} \frac{f(x) - f(x)}{t - x} = \underset{\Delta x \to 0}{lím} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

NOTA.

En la definición 1:

- $\underset{x \to x_1}{lím} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$ o es $f'(x) = \underset{t \to x}{lím} \frac{f(x) - f(x)}{t - x}$ "cociente de Fermat".
- $\underset{\Delta x \to \Delta x}{lím} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$ o $\underset{\Delta x \to 0}{lím} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ es el "cociente de Newton".
- Ambos "cocientes" conducen al mismo resultado.

EJEMPLO 1. RAZÓN DE CAMBIO PUNTUAL (APLICANDO EL COCIENTE DE FERMAT)

Obtengamos la función que describe la razón de cambio instantáneo en el número x_1.

a. Si $f(x) = 3x - 2$, si $x_1 = 6$.

i. $f(x) = 3x - 2$

ii. $f(6) = 3(6) - 2 = 16$.

iii. $\overline{f}(x) = \dfrac{3x - 2 - (16)}{x - 6} = \dfrac{3x - 18}{x - 6} = \dfrac{3(x - 6)}{x - 6} = 3$.

iv. $f'(6) = \lim\limits_{x \to 6} 3 = 3$.

b. Cuando $f(x) = 3x^2 + 4$, si $x_1 = -2$.

i. $f(x) = 3x^2 + 4$

ii. $f(-2) = 3(-2)^2 + 4 = 16$.

iii. $\overline{f}(x) = \dfrac{3x^2 + 4 - (16)}{x - (-2)} = \dfrac{3x^2 - 12}{x + 2} = \dfrac{3(x + 2)(x - 2)}{x + 2} = 3x - 6$.

iv. $f'(-2) = \lim\limits_{x \to -2} 3(x - 2) = -12$.

c. Para $f(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$, si $x_1 = 0$.

i. $f(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$.

ii. $f(0) = 2(0)^3 - (0)^2 + 2(0) - 1 = -1$.

iii. $\overline{f}(x) = \dfrac{2x^3 - x^2 + 2x - 1 - (-1)}{x - (0)} = \dfrac{2x^3 - x^2 + 2x}{x} = 2x^2 - x + 2$.

iv. $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0}\left(2x^2 - x + 2\right) = 2$.

En el *ejemplo 2* resolvemos el problema anterior utilizando

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}.$$

EJEMPLO 2. RAZÓN DE CAMBIO PUNTUAL (APLICANDO EL COCIENTE DE NEWTON)

a. Si $f(x) = 3x - 2$, si $x_1 = 6$.

i. $f(6 + \Delta x) = 3(6 + \Delta x) - 2 = 18 + 3\Delta x - 2 = 16 + 3\Delta x$

ii. $f(6) = 3(6) - 2 = 16$.

iii. $\overline{f}(x) = \dfrac{16 + 3\Delta x - 16}{\Delta x} = \dfrac{3\Delta x}{\Delta x} = 3$.

iv. $f'(6) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(3) = 3$.

b. $f(x) = 3x^2 + 4$, si $x_1 = -2$.

i. $f(x) = 3x^2 + 4$.

ii. $f(-2+\Delta x)=3(-2+\Delta x)^2+4=3\left(4-4(\Delta x)+(\Delta x)^2\right)+4=16-12(\Delta x)+3(\Delta x)^2$.

iii. $f(-2)=3(-2)^2+4=16$

$$\overline{f}(x)=\frac{16-12(\Delta x)+3(\Delta x)^2-16}{\Delta x}=\frac{-12(\Delta x)+3(\Delta x)^2}{\Delta x}=-12+3(\Delta x).$$

iv. $f'(-2)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(-12+3(\Delta x))=-12$.

c. $f(x)=2x^3-x^2+2x-1$, si $x_1=0$.

i. $f(x)=2x^3-x^2+2x-1$

ii. $f(0+\Delta x)=2(0+\Delta x)^3-(0+\Delta x)^2+2(0+\Delta x)-1=2(\Delta x)^3-(\Delta x)^2+2(\Delta x)-1$.

$f(0)=2(0)^3-(0)^2+2(0)-1=-1$.

iii. $\overline{f}(x)=\dfrac{2(\Delta x)^3-(\Delta x)^2+2(\Delta x)-1-(-1)}{\Delta x}=\dfrac{2(\Delta x)^3-(\Delta x)^2+2(\Delta x)}{\Delta x}=2(\Delta x)^2-(\Delta x)+2$

iv. $f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(2(\Delta x)^2-(\Delta x)+2\right)=2$.

EJEMPLO 3. FUNCIÓN RAZÓN DE CAMBIO (APLICANDO EL COCIENTE DE FERMAT)

a. $f(x)=6x+8$.

i. $f(t)=6t+8$

ii. $\overline{f}(x)=\dfrac{6t+8-6x+8}{t-x}=\dfrac{6t-6x}{t-x}=\dfrac{6(t-x)}{t-x}=6$.

iv. $f'(x)=\lim\limits_{t\to x}6=6$.

b. $f(x)=4x^2-2x+2$.

i. $f(t)=4t^2-2t+2$

ii. $\overline{f}(x)=\dfrac{4t^2-2t+2-\left(4x^2-2x+2\right)}{t-x}=\dfrac{4t^2-2t+2-4x^2+2x-2}{t-x}$

$$=\frac{4\left(t^2-x^2\right)-2(t-x)}{t-x}=\frac{4(t-x)(t+x)-2(t-x)}{t-x}=4(t+x)-2$$

iv. $f'(x)=\lim\limits_{t\to x}[4(t+x)-2]=4(x+x)-2=8x-2$.

c. $f(x)=x^3-x-2$.

i. $f(t)=t^3-t-2$.

ii. $\overline{f}(x)=\dfrac{t^3-t-2-\left(x^3-x-2\right)}{t-x}=\dfrac{t^3-x^3-t+x}{t-x}=\dfrac{(t-x)\left(t^2+tx+x^2\right)-(t-x)}{t-x}$

$=t^2+tx+x^2-1$

iv. $f'(x)=\lim\limits_{x\to x}\left(t^2+tx+x^2-1\right)=x^2+x^2+x^2-1=3x^2-1$.

Se resuelve el ejemplo anterior utilizando el cociente de Newton.

EJEMPLO 4. FUNCIÓN RAZÓN DE CAMBIO (APLICANDO EL COCIENTE DE NEWTON)

a. $f(x)=6x+8$.

i. $f(x+\Delta x)=6(x+\Delta x)+8$.

ii. $f(x+\Delta x)-f(x)=6(x+\Delta x)+8-(6x+8)=6\Delta x$

iii. $\overline{f}(x)=\dfrac{6\Delta x}{\Delta x}=6$.

iv. $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}6=6$.

b. $f(x)=4x^2-2x+2$.

i. $f(x+\Delta x)=4(x+\Delta x)^2-2(x+\Delta x)+2$.

ii. $f(x+\Delta x)-f(x)=4(x+\Delta x)^2-2(x+\Delta x)+2-\left(4x^2-2x+2\right)$.

$=4x^2+8x(\Delta x)+4(\Delta x)^2-2x-2(\Delta x)+2-4x^2+2x-2$

$=8x(\Delta x)+4(\Delta x)^2-2(\Delta x)$

iii. $\overline{f}(x)=\dfrac{8x(\Delta x)+4(\Delta x)^2-2(\Delta x)}{\Delta x}=8x+4(\Delta x)-2$.

iv. $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}=(8x+4(\Delta x)-2)=8x-2$.

c. $f(x)=x^3-x-2$.

i. $f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^3-(x+\Delta x)-2$.

ii. $f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^3-(x+\Delta x)-2-\left(x^3-x-2\right)$.

$=x^3+3x^2(\Delta x)+3x(\Delta x)^2-x-(\Delta x)-2-x^3+x+2$

$=3x^2(\Delta x)+3x(\Delta x)^2-(\Delta x)$

iii. $\overline{f}(x)=\dfrac{3x^2(\Delta x)+3x(\Delta x)^2-(\Delta x)}{\Delta x}=3x^2+3x(\Delta x)-1$.

iv. $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}=\left(3x^2+3x(\Delta x)-1\right)=3x^2-1$.

El proceso de cálculo de una función derivada se simplifica aplicando la siguiente propiedad.

PROPIEDAD 1 DERIVADA DE UNA FUNCIÓN POLINOMIAL

a. Si $f(x)=K$, entonces $\frac{df}{dx}=f'(x)=0$.

b. Si $f(x)=Ax+B$, entonces $\frac{df}{dx}(x)=f'(x)=A$.

c. Si $f(x)=Ax^2+Bx+C$, entonces $\frac{df}{dx}(x)=f'(x)=2Ax^2+B$.

d. Si $f(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+D$, entonces $\frac{df}{dx}(x)=f'(x)=3Ax^2+2Bx+C$.

EJEMPLO 5. OBTENCIÓN DE LA FUNCIÓN DERIVADA DE FUNCIONES POLINOMIALES

a. La función $f(x)=-14$ es lineal (en particular constante), por tanto, $f'(x)=0$.

b. La función $f(x)=13x-8$ es lineal, por tanto, $f'(x)=13$.

c. $f(x)=-\frac{2}{3}x+5$ es lineal, por tanto, $f'(x)=-\frac{2}{3}$.

d. $f(x)=-7x^2-\frac{1}{9}x-8$ es una función cuadrática, entonces $f'(x)=-14x-\frac{1}{9}$.

e. $f(t)=t(2t-1)=2t^2-t$ es una función cuadrática, entonces $f'(t)=4t-1$.

f. $f(w)=w^2+2w+7$ es una función cuadrática, entonces $f'(w)=2w+2$.

g. $f(x)=-4x^3+2x^2-8x+11$ es una función cúbica, entonces $f'(x)=-12x^2+4x-8$.

h. Si $f(z)=z^2(z+6)-5z$, entonces $f(z)=z^3+6z^2-5z$ y $f'(z)=3z^2+12z-5$.

i. Si $f(y)=(y+2)^2(y-1)$, entonces $f(y)=y^3+3y^2-4$ luego $f'(y)=3y^2+6y$..

j. Si $g(t)=(t+2)^3$, entonces $g(t)=t^3+6t^2+12t+8$ y $g'(t)=3t^2+12t+12$.

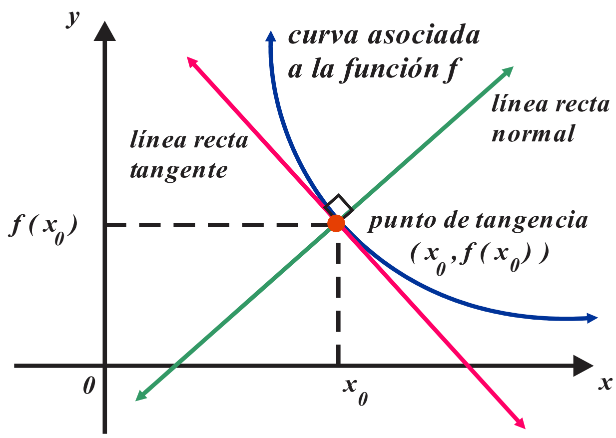
En el plano cartesiano xy la función derivada f' (asociada a la función f) describe el comportamiento de la pendiente de la línea recta tangente, a la curva asociada a la función f en sus puntos (x, y). Si $x=x_0$, la línea recta tangente en el punto (x_0, y_0) a la curva asociada f tiene pendiente $m=f'(x_0)$. De acuerdo con la forma punto pendiente de la línea recta $y-y_0=m(x-x_0)$, la línea recta tangente tiene ecuación:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

El lector debe tener en cuenta:

i. Una *línea recta tangente* a una curva, interseca (sin cruzarla) a esta en un solo punto (localmente), el punto de intersección (o corte) se conoce como punto de tangencia.

ii. La *línea recta normal* es perpendicular a la línea recta tangente en el punto de tangencia.



La ecuación de la línea recta normal asociada a la curva de f en el punto de tangencia $(x_0 \; , \; f\,(x_0))$ tiene ecuación $y - f\,(x_0) = -\dfrac{1}{f'\,(x_0)}(x - x_0)$.

EJEMPLO 6. ECUACIÓN DE LA LÍNEA RECTA TANGENTE Y DE LA LÍNEA RECTA NORMAL

Sea la función con regla de correspondencia $f\,(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - x + 4$. Obtén la ecuación de la línea recta tangente y la ecuación de la línea recta normal a la curva asociada a f si $x = 2$.

Ordenada del punto de tangencia $f\,(2) = \dfrac{1}{2}(2)^2 - (2) + 4 = 4$.

LÍNEA RECTA TANGENTE

Función derivada asociada $f'\,(x) = x - 1$.

Pendiente de la línea recta tangente $m_T = f'\,(2) = 2 - 1 = 1$.

Ecuación de la línea recta tangente $y - 4 = 1(x - 2)$, en la forma general $x - y + 2 = 0$.

LÍNEA RECTA NORMAL

La pendiente se obtiene $m_T \cdot m_N = -1$, luego $(1) \cdot m_N = -1$, de donde $m_N = -1$.

Ecuación de la línea recta normal $y - 4 = (-1)(x - 2)$, en la forma general $x + y - 6 = 0$.

EJEMPLO 7. ECUACIÓN DE LA LÍNEA RECTA TANGENTE Y DE LA LÍNEA RECTA NORMAL

Sea la función con regla de correspondencia $f(x)=x^3-x^2+x+2$. Obtén la ecuación de la línea recta tangente y la ecuación de la línea recta normal a la curva asociada a f en el punto de tangencia $T(1,3)$.

Si sustituyes las coordenadas del punto $T(1,3)$ en $f(x)=x^3-x^2+x+2$ obtienes la identidad $0\equiv 0$, por tanto, el problema está bien planteado.

LÍNEA RECTA TANGENTE

Función derivada asociada $f'(x)=3x^2-2x+1$.

Pendiente de la línea recta tangente $m_T=f'(1)=3(1)^2-2(1)+1=2$.

Ecuación de la línea recta tangente $y-3=2(x-1)$, en la forma general $2x-y+1=0$.

LÍNEA RECTA NORMAL

La pendiente se obtiene $m_T\cdot m_N=-1$, luego $(2)\cdot m_N=-1$, de donde $m_N=-\frac{1}{2}$.

Ecuación de la línea recta normal $y-3=\left(-\frac{1}{2}\right)(x-1)$, en la forma general $x+2y-7=0$.

SECCIÓN 2.2
EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Obtén la función derivada.

a. $f(x)=-36$, en $x_1=4$. $f'(4)=0$.

b. $f(x)=\frac{3}{8}$, en $x_1=8$. $f'(8)=0$.

c. $f(x)=-12x$, en $x_1=0$. $f'(0)=-12$.

d. $f(x)=\frac{2}{5}x+16$, en $x_1=-3$. $f'(-3)=\frac{2}{5}$.

e. $f(x)=-4x^2+2x+1$, en $x_1=2$. $f'(2)=-14$.

f. $f(x)=3x^2-\frac{1}{2}x+1$, en $x_1=1$. $f'(1)=\frac{11}{2}$.

g. $f(x)=x^3-2x^2+x-9$, en $x_1=0$. $f'(0)=1$.

h. $f(x)=\frac{2}{3}x^3-3x^2+5x-2$, en $x_1=-1$. $f'(-1)=13$.

2. Aplica la *definición 1* y obtén la función “razón de de cambio instantáneo” en el número x_1 indicado.

a. $f(x) = 40$.

b. $a(t) = -8$.

c. $f(z) = -6z + 2$.

d. $v(t) = -\frac{1}{15}t - 15$.

e. $f(w) = -4w^2 - 3w + 1$.

f. $f(y) = 2y^2 - \frac{1}{4}y$.

g. $g(x) = 2x^3 - x^2 + 5x - 6$.

h. $h(p) = -p^3 - 8p^2 + 5p$.

3. Obtén la ecuación de la línea recta tangente y de la línea recta normal.

a. $f(x) = 4x^2 + 2x - 8$ si $x = 1$.

b. $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 8$ si $T(1, -6)$.

2.3 SOLUCIONES Y EVALUACIÓN

SOLUCIÓN A EJERCICIOS PROPUESTOS

EXAMEN DE LA UNIDAD

SOLUCIÓN AL EXAMEN

SOLUCIONES

UNIDAD 2
EJERCICIOS PROPUESTOS

SECCIÓN 2.1 SOLUCIONES A EJERCICIOS

1. a. 0. b. 12. c. -15. d. -4. e. $\frac{1}{9}$. f. 0. g. 1. h. 4. i. 54. j. -10. k. 1.

2. a. $\overline{f}(x)=0$. b. $\overline{f}(x)=0$. c. $\overline{f}(x)=\frac{2}{7}$. d. $\overline{f}(x)=-3$. e. $\overline{f}(x)=-4x+1$.

f. $\overline{f}(x)=\frac{1}{3}x-\frac{5}{3}$.g. $\overline{f}(x)=-3x^2-9x-22$. h. $\overline{f}(x)=-x^2-3x-16$.

3. $\overline{l}(x)=12$. 4. $\overline{f}(x)=m$. 5. $\overline{A}(r)=2\pi hr+2\pi h$, sobre el intervalo $[0, r]$.

6. $\overline{A}(x)=-\frac{8}{3}x+200$, si $0\le x\le 75$. 7. $\overline{V}(r)=\frac{4}{3}\pi r^2+4hr$, sobre el intervalo $[0, r]$.

8. $\overline{V}(x)=x^2$ sobre $[0, x]$.

SECCIÓN 2.2 SOLUCIONES A EJERCICIOS

1. a. $f'(4)=0$. b. $f'(8)=0$. c. $f'(0)=-12$. d. $f'(-3)=\frac{2}{5}$. e. $f'(2)=-14$.

f. $f'(1)=\frac{11}{2}$. g. $f'(0)=1$. h. $f'(-1)=13$.

2. a. $f'(x)=0$. b. $a'(t)=0$. c. $f'(z)=-6$. d. $v'(t)=-\frac{1}{15}$. e. $f'(w)=-8w-3$.

f. $f'(y)=4y-\frac{1}{4}$. g. $g'(x)=6x^2-2x+5$. h. $h'(p)=-3p^2-16p+5$.

3.
a. Tangente $10x-y-12=0$, normal $x+10y-19=0$.
b. Tangente $3x-y-9=0$, normal $x+3y-17=0$.

UNIDAD 2 EXAMEN

1. Calcula la razón de cambio promedio:
$f(x)=6x-2$, si $x_1=-4$ y $x_2=5$.

2. Calcula la función que describe la razón de cambio promedio de $f(x)=4x^2-6$ sobre el intervalo $[-1\,,\,x]$.

3. Calcula la pendiente del segmento rectilíneo de la función sobre el intervalo indicado.
$f(x)=-3x^2+8$ en $[-1\,,\,2]$.

4. Calcula la derivada de la función en el número señalado. $f(x)=12x^2+6$, en $x_0=-1$.

5. Calcula la función derivada asociada a $V(r)=r^2+\pi\frac{r^2}{h}$.

6. En una región rectangular la longitud de la base (x) es el doble que la longitud de la altura. Construye la función que modela la razón de cambio promedio del área respecto a la longitud de la base.

7. Obtén la ecuación de la línea recta tangente (forma general) a la curva asociada a $f(x)=-x^2+4x-4$ en el punto $T(1,-1)$.

8. Obtén la ecuación de la línea recta normal (forma general) a la curva asociada a $f(x)=x^3+6x^2-5x+10$ en el punto $T(2\,,\,22)$.

UNIDAD 2 SOLUCIÓN AL EXAMEN

1. $\overline{f}(x)=6$.
2. $\overline{f}(x)=4x-4$.
3. $m=-3$.
4. $f'(-1)=18$.
5. $V(r)=r^2+\pi\frac{r^2}{h}$. $V'(r)=2r+2\frac{\pi r}{h}$.
6. $\overline{A}(x)=\frac{x}{2},\ x\geq 0$.
7. $2x+y-3=0$.
8. $x+31y-374=0$.

3

DERIVADAS DE FUNCIONES ALGEBRAICAS

PROPÓSITOS

Al finalizar la unidad:
el alumno usará el concepto de derivada a través de su representación algebraica, para identificar patrones de comportamiento y obtendrá las reglas de derivación; utilizará estas reglas para obtener la derivada de una función de manera eficaz y la reconocerá como otra función. Además aplicará las reglas de derivación en diferentes contextos.

CONTENIDO

CONCEPTOS CLAVE

Función derivada. La función f' que se obtiene al aplicar el operador $\underset{t\to x}{lím}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$ (equivalentemente $\underset{\Delta x\to 0}{lím}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$) a la función f .

Suma de funciones. La función que se obtiene de sumar dos funciones con dominio común.

Producto de funciones. La función que se obtiene al multiplicar dos funciones cuyos dominios coinciden.

División de funciones. La función que se obtiene al dividir dos funciones cuyos dominios coinciden, la función divisor no debe incluir al cero entre sus imágenes.

Composición de funciones. Función que se obtiene al aplicar una función a otra (cuidando aspectos existencia).

Regla de la cadena. Propiedad operativa utilizada para derivar composiciones de funciones.

Razón de cambio puntual. La función que se obtiene al aplicar el operador $\underset{t\to x}{lím}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$ (equivalentemente $\underset{\Delta x\to 0}{lím}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$) a la función f en un número de su dominio.

Razón de cambio instantáneo. Cuando en la razón de cambio puntual la variable independiente es el tiempo.

Pendiente de la línea recta tangente. Cuando la razón de cambio puntual tiene como contexto la el plano cartesiano.

Rapidez. Cambio instantáneo de la función distancia (con el tiempo).

Aceleración (magnitud). Cambio instantáneo de la función velocidad (con el tiempo).

SECCIÓN 3.1 DERIVACIÓN DE FUNCIONES ALGEBRAICAS

APRENDIZAJES

1. Identifica el patrón de comportamiento de derivadas de funciones del tipo: $f(x)=x^n$ obtenidas utilizando la definición y determina su regla de derivación.

2. Obtiene la derivada de una función polinomial de 1°, 2° y 3° grados usando la definición en su representación:

$$\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$$

3. Identifica geométricamente la relación de la representación de la derivada:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

con la representación anterior.

4. Obtiene derivadas utilizando los dos límites anteriores.

5. Explica la relación existente entre la derivada de una función lineal y la pendiente de la recta; identifica dicha relación en el caso de la función constante.

6. Identifica patrones de comportamiento de las derivadas en operaciones con funciones: suma, producto, cociente y de la forma $[f(x)]^n$ para obtener las reglas de derivación correspondientes.

7. Obtiene la derivada de funciones algebraicas usando las reglas de derivación y la regla de la cadena.

TEMÁTICA

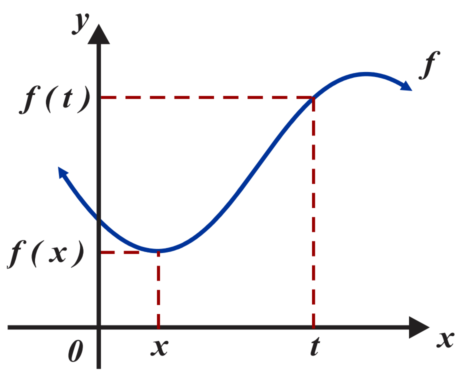
1. Derivada de funciones del tipo $f(x)=cx^n$.

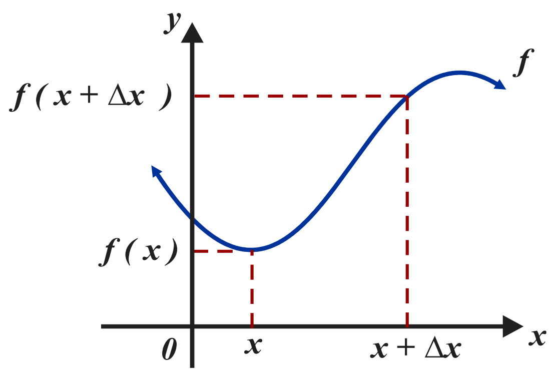
2. Reglas de derivación para:
- Función constante.
- Función lineal.
- Constante por una función.
- Suma de funciones.
- Producto de funciones.
- Cociente de funciones.
- Funciones del tipo $[f(x)]^n$ con $f(x)$ polinomial y n un número racional.

Si la función $f: I \to IR$ es derivable significa que es posible aplicar la transformación

$$\lim_{t\to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} \text{ (equivalentemente } \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\text{)}$$

obteniendo así una nueva función representada por f'.





Entre las clases básicas de funciones derivables se encuentran las que tienen regla de correspondencia $f(x)=Cx^n$ en donde C y n son números reales. La derivada de la función $f(x)=Cx^n$ se presenta en la *propiedad 1*, propiedad que no es muy complicado justificar.

PROPIEDAD 1 DERIVADA DE UNA FUNCIÓN $f(x)=Cx^n$

Si $f(x)=Cx^n$, entonces $f'(x)=nx^{n-1}$.

EJEMPLO 1. DERIVADAS DE FUNCIONES DE LA FORMA $f(x)=Cx^n$

a. Si $f(x)=x^7$, entonces $f'(x)=7x^{7-1}=7x^6$.

b. $f(x)=x^{-4}$, entonces $f'(x)=-4x^{-4-1}=-4x^{-5}$.

c. $f(x)=x^{\frac{2}{5}}$, entonces $f'(x)=\frac{2}{5}x^{\frac{2}{5}-1}=\frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}$.

d. $f(x)=4x^2$, entonces $f'(x)=(2)4x^{2-1}=8x^{-1}$.

e. $f(x)=-3x^{-6}$, entonces $f'(x)=-6(-3)x^{-6-1}=18x^{-7}$.

Aplicando la propiedad 1 es posible obtener la función derivada de funciones con aspecto más complejo.

RECUERDA:

- Si $x\neq 0$, entonces $x^{-n}=\frac{1}{x^n}$.

- Si $x \neq 0$, entonces $x^n = \dfrac{1}{x^{-n}}$.
- Si n es un número entero positivo, entonces $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.
- Si $m,\ n$ son números enteros positivos, entonces $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$.

EJEMPLO 2. DERIVADAS DE FUNCIONES DE LA FORMA $f(x) = Cx^n$

a. Puesto que $f(x) = \dfrac{8}{x^3} = 8x^{-3}$, entonces $f'(x) = -3(8)x^{-3-1} = -24x^{-4} = -\dfrac{24}{x^4}$.

b. Puesto que $f(x) = \dfrac{4}{x^{-5}} = 4x^5$, entonces $f'(x) = 5(4)x^{5-1} = 20x^5$.

c. Puesto que $f(x) = 3\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, entonces

$$f'(x) = \frac{1}{2}(3)x^{\frac{1}{2}-1} = \left(\frac{1}{2}\right)3x^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{2\sqrt{x}}.$$

d. Debido a $f(x) = \sqrt[3]{x^7} = x^{\frac{7}{3}}$, tenemos $f'(x) = \dfrac{7}{3}x^{\frac{7}{3}-1} = \dfrac{7}{3}x^{\frac{4}{3}} = \dfrac{7}{3}\sqrt[3]{x^4}$.

e. Debido a $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x^5}} = \dfrac{3}{x^{\frac{2}{5}}} = 3x^{-\frac{2}{5}}$, tenemos

$$f'(x) = -\frac{3}{5}(4)x^{-\frac{2}{5}-1} = -\frac{12}{5}x^{-\frac{7}{5}} = -\frac{12}{5x^{\frac{7}{5}}} = -\frac{12}{5\sqrt[5]{x^7}}.$$

Frecuentemente una función puede interpretarse como el resultado de de un grupo de operaciones entre otras funciones (si es el caso se debe tener en cuenta el dominio de cada una de ellas para así obtener el dominio de la función resultante). Si se desea obtener la función derivada asociada a una función que puede interpretarse como una combinación de operaciones entre funciones derivables se aplican las propiedades operativas de la derivada.

PROPIEDAD 2 HOGENEIDAD Y ADITIVIDAD

Si f y g son funciones derivables y C un número real distinto de cero.

a. Si $f = Cg$, entonces $f' = Cg'$ (propiedad de homogeneidad).

b. Si f y g son funciones derivables, entonces la función $(f+g)$ es derivable y $(f+g)' = f' + g'$ (propiedad de aditividad).

La *Propiedad 2* puede rescribirse como $(f+Cg)' = f' + Cg'$, misma que recibe el nombre de linealidad.

EJEMPLO 3. USO DE LA PROPIEDAD DE LINEALIDAD

a. Para obtener la función derivada asociada a la función $f(x) = 4x^2 + 3x - \sqrt{x}$, conviene escribirla en la forma $f(x) = 4x^2 + 3x - x^{\frac{1}{2}}$. Si aplicamos las *propiedades 1 y 2*., obtenemos

$$f'(x) = (2)4x^{2-1} + 3x^{1-1} - \left(\frac{1}{2}\right)x^{\frac{1}{2}-1} = 8x + 3x^0 - \left(\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}}$$

finalmente

$$f'(x) = 8x + 3 - \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

b. Para obtener la función derivada asociada a $f(x) = 3\sqrt[3]{x} + 2\sqrt{x} - \frac{6}{x}$, primero la rescribimos en la forma

$$f(x) = 3x^{\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}} - 6x^{-1}$$

posteriormente aplicamos las *propiedades 1 y 2*., obtenemos

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3}\right)3x^{\frac{1}{3}-1} + \left(\frac{1}{2}\right)2x^{\frac{1}{2}-1} - (-1)6x^{-1-1},$$

simplificamos

$$f'(x) = x^{-\frac{2}{3}} + x^{-\frac{1}{2}} + 6x^{-2} = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{6}{x^2}, \text{ o bien } f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{6}{x^2}.$$

DERIVADAS DE PRODUCTOSY DIVISIÓN DE FUNCIONES

Las funciones (derivables) pueden interpretarse, ya sea como el producto de dos funciones derivables, o en su caso, como una división de funciones derivables, en ambos casos pueden derivarse aplicando la *propiedad 3*.

PROPIEDAD 3 DERIVADAS DE PRODUCTOS Y DIVISIONES

Sean f y g son funciones derivables.

a. Si $F = f \cdot g$, entonces $F = f \cdot g$ es derivable y $F' = f \cdot g' + g \cdot f'$.

b. Si $g \neq 0$ y $F = \frac{f}{g}$, entonces $F = \frac{f}{g}$ es derivable y $F' = \frac{g \cdot f' - f \cdot g'}{g^2}$.

EJEMPLO 4. DERIVADAS DE PRODUCTOS

Obtén la función derivada y rescríbela de manera que no incluya potencias fraccionarias.

a. Para derivar $F(x) = (2x^4 - x + 3)(-3x^2 + 8x - 9)$.

Sean:

$$f(x)=\left(2x^4-x+3\right) \qquad g(x)=\left(-3x^2+8x-9\right)$$

$$f'(x)=8x^3-1 \qquad g'(x)=-6x+8$$

Sustituimos en $F'=f\cdot g'+g\cdot f'$ y obtenemos

$$F'(x)=\left(2x^4-x+3\right)\left(-6x+8\right)+\left(-3x^2+8x-9\right)\left(8x^3-1\right).$$

b. Derivemos $F(x)=\left(4\sqrt{x}+\frac{1}{4}x^2\right)\left(2x^4-6x^2\right)$.

Sean:

$$f(x)=4\sqrt{x}+\frac{1}{4}x^2 \qquad g(x)=2x^4-6x^2$$

$$f'(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{2}x \qquad g'(x)=12x^3-24x$$

entonces

$$F'(x)=\left(4\sqrt{x}+\frac{1}{4}x^2\right)\left(12x^3-24x\right)+\left(2x^4-6x^2\right)\left(\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{2}x\right).$$

c. Para derivar $F(x)=\left(1-2x+6\sqrt{x}\right)\left(2x^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{4}x\right)$, sean:

$$f(x)=1-2x+6\sqrt{x} \qquad g(x)=2x^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{4}x$$

$$f'(x)=-2+\frac{3}{\sqrt{x}} \qquad g'(x)=3\sqrt{x}+\frac{3}{4}$$

luego

$$F'(x)=\left(1-2x+6\sqrt{x}\right)\left(3\sqrt{x}+\frac{3}{4}\right)+\left(2x^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{4}x\right)\left(-2+\frac{3}{\sqrt{x}}\right).$$

EJEMPLO 5. DERIVADAS DE DIVISIONES

a. Para derivar $F(x)=\dfrac{6}{\frac{1}{4}x^4-x^2+2x+6}$.

Sean:

$$f(x)=6 \qquad g(x)=\frac{1}{4}x^4-x^2+2x+6$$

$$f'(x)=0 \qquad g'(x)=x^3-2x+2$$

$$F'(x)=\frac{\left(\frac{1}{4}x^4-x^2+2x+6\right)(0)-2x\left(x^3-2x+2\right)}{\left(\frac{1}{4}x^4-x^2+2x+6\right)^2}=\frac{-2x^4+4x^2-4x}{\left(\frac{1}{4}x^4-x^2+2x+6\right)^2}.$$

b. Para derivar $F(x)=\frac{5x+3}{x^4-2}$, sean:

$$f(x)=5x+3 \qquad g(x)=x^4-2$$

$$f'(x)=5 \qquad g'(x)=4x^3$$

entonces

$$F'(x)=\frac{\left(x^4-2\right)(5)-(5x+3)4x^3}{\left(x^4-2\right)^2}=-\frac{15x^4+12x^3+10}{\left(x^4-2\right)^2}.$$

c. Para obtener la función derivada asociada $F(x)=\frac{12\sqrt[3]{x}}{4\sqrt{x}+x-1}$, sean:

$$f(x)=12\sqrt[3]{x} \qquad g(x)=4\sqrt{x}+x-1$$

$$f'(x)=\frac{4}{\sqrt[3]{x^2}} \qquad g'(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}+1$$

entonces

y,

$$F'(x)=\frac{\left(4\sqrt{x}+x-1\right)\left(\frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}\right)-12\sqrt[3]{x}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}+1\right)}{\left(4\sqrt{x}+x-1\right)^2}.$$

d. $F(x)=\frac{x+\sqrt{x}}{1-x-x^2}$.

Sean:

$$f(x)=x+\sqrt{x} \text{ y } g(x)=1-x-x^2,$$

entonces

$$f'(x)=1+\frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ y } g'(x)=-1-2x,$$

$$F'(x)=\frac{\left(1-x-x^2\right)\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)+\left(x+\sqrt{x}\right)(1+2x)}{\left(1-x-x^2\right)^2}.$$

EJEMPLO 6. DERIVADA PUNTUAL

a. Si $F(x)=\left(-2x^3-x+3\right)(6x-8)$, calcula $F'(0)$.

Sean:

$$f(x) = -2x^3 - x + 3 \qquad g(x) = -3x^2 + 8x - 9$$
$$f'(x) = -6x^2 - 1 \qquad g'(x) = -6x + 8$$

Sustituimos en $F' = f \cdot g' + g \cdot f'$ y obtenemos

$$F'(x) = \left(-2x^3 - x + 3\right)\left(-6x + 8\right) + \left(-3x^2 + 8x - 9\right)\left(-6x^2 - 1\right),$$

luego

$$F'(0) = \left(-2(0)^3 - (0) + 3\right)\left(-6(0) + 8\right) + \left(-3(0)^2 + 8(0) - 9\right)\left(-6(0)^2 - 1\right) = 33.$$

b. Si $F(x) = \dfrac{3x^2 + 6x - 2}{x^5 - 4x^3 - 5x + 1}$, calcula $F'(1)$.

Sean:

$$f(x) = 3x^2 + 6x - 2 \qquad g(x) = x^5 - 4x^3 - 5x + 1$$
$$f'(x) = 6x + 6 \qquad g'(x) = 5x^4 - 12x^2 - 5$$

$$F'(x) = \frac{\left(x^5 - 4x^3 - 5x + 1\right)\left(6x + 6\right) + \left(3x^2 + 6x - 2\right)\left(5x^4 - 12x^2 - 5\right)}{\left(x^5 - 4x^3 - 5x + 1\right)^2}$$

y

$$F'(0) = \frac{(-7)(12) + (7)(-12)}{(-7)^2} = -\frac{24}{7}.$$

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Sean dos funciones: $f(x)$ y $g(x)$, de modo que el dominio de la segunda de ellas esté contenido en el recorrido o codominio de la primera función. Si construimos una nueva función de manera que, asocie a cada elemento del dominio de $g(x)$ el valor de $f(g(x))$, tendremos una composición de funciones, esta operación se representa

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ y se lee g seguida de f.

EJEMPLO 7. IDENTIFICACIÓN DE LAS FUNCIONES COMPONENTES DE UNA COMPOSICIÓN

a. Si $F(x) = \left(8x^4 + 4x^3 - 6x + 4\right)^6$, entonces podemos considerar como función interna a $g(x) = 8x^4 + 4x^3 - 6x + 4$ y función externa a $f(x) = x^6$.

$$F(x) = \overbrace{\left(\underbrace{8x^4 + 4x^3 - 6x + 4}_{\textit{función interna}}\right)^6}^{\textit{función externa}}.$$

b. Si $F(x)=\sqrt[3]{\frac{x^4}{4}-2x^3+9x-7}$, entonces podemos considerar como función interna a $g(x)=\frac{x^4}{4}-2x^3+9x-7$ y función externa a $f(x)=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$.

$$F(x)=\overbrace{\sqrt[3]{\underbrace{\frac{x^4}{4}-2x^3+9x-7}_{función\ interna}}}^{función\ externa}.$$

iii. En la función $F(x)=\left(\frac{3x-\sqrt{x}}{5x+8}\right)^5$ puede considerarse como función interna a la función $g(x)=\frac{3x-\sqrt{x}}{5x+8}$ y como función externa a la función $f(x)=x^5$.

$$F(x)=\overbrace{\left(\frac{3x-\sqrt{x}}{\underbrace{5x+8}_{función\ interna}}\right)^5}^{función\ externa}.$$

iv. En $F(x)=4+\left(\frac{x+3}{2x-6}\right)^4$ puede considerarse como función interna a $g(x)=\frac{x+3}{2x-6}$ y como función externa a $f(x)=x^4$.

$$F(x)=4+\overbrace{\left(\frac{x+3}{\underbrace{2x-6}_{función\ interna}}\right)^4}^{función\ externa}$$

La propiedad que se utiliza para derivar una composición de funciones se denomina regla de la cadena.

PROPIEDAD 4 REGLA DE LA CADENA

Sean f y g dos funciones tales que: g es derivable en x y f es derivable en $g(x)$, entonces

$$F'(x)=(f\circ g)'(x)=f'(g(x))g'(x).$$

EJEMPLO 6. DERIVACIÓN DE FUNCIONES COMPUESTAS

a. La función derivada de $F(x)=\left(4-3x+6x^2\right)^{25}$ se obtiene de la forma:

i. Sean: $g(x)=4-3x+6x^2$ la función interna, $f(x)=x^{25}$ la función externa.

ii. $g'(x)=-3+12x$ y $f'(x)=25x^{24}$.

iii. $f'(g(x))=25\left(4-3x+6x^2\right)^{24}$

iv. $F'(x)=f'(g(x))g'(x)=25\left(4-3x+6x^2\right)^{24}(-3+12x)$.

b. Una forma de obtener la función derivada de $F(x)=\dfrac{4}{\left(x^4-4x^2\right)^{32}}$ es la siguiente:

i. La rescribimos en la forma $F(x)=\dfrac{4}{\left(x^4-4x^2\right)^{32}}=4\left(x^4-4x^2\right)^{-32}$.

ii. Sean: $g(x)=x^4-4x^2$ la función interna y $f(x)=4x^{-32}$ la función externa.

iii. $g'(x)=4x^3-8x$ y $f'(x)=-128x^{-33}$.

iv. $f'(g(x))=-128\left(x^4-4x^2\right)^{-33}$.

v. $F'(x)=f'(g(x))g'(x)=-128\left(x^4-4x^2\right)^{-33}\left(4x^3-8x\right)$.

c. Para obtener la función derivada de $F(x)=\sqrt[3]{6x^3+2x^2-5x+1}$, sean:

i. Sean: $g(x)=6x^3+2x^2-5x+1$ la función interna, $f(x)=\sqrt[3]{x}$ la función externa.

ii. $g'(x)=18x^2+4x-5$ y $f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

iii. $f'(g(x))=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{\left(6x^3+2x^2-5x+1\right)^2}}$.

iv. $f'(g(x))g'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{\left(6x^3+2x^2-5x+1\right)^2}}\left(18x^2+4x-5\right)$.

o bien

$$F'(x)=f'(g(x))g'(x)=\frac{18x^2+4x-5}{3\sqrt[3]{\left(6x^3+2x^2-5x+1\right)^2}}.$$

d. Derivada de $L(x)=\left(x^2+4x\right)^8\left(2x+x^5\right)^6$.

$$L(x)=\left(x^2+4x\right)^8\left(2x+x^5\right)^6$$

puede tratarse como el producto con factores

$$L_1(x)=\left(x^2+4x\right)^8 \text{ y } L_2(x)=\left(2x+x^5\right)^6.$$

Para derivar los factores utilizamos la regla de la cadena.

Derivada de $L_1(x)=\left(x^2+4x\right)^8$.

Sean $f_1(x)=x^8$ y $g_1(x)=x^2+4x$, entonces

$$f_1'(x)=8x^7 \text{ y } g_1'(x)=2x+4.$$

Además

$f_1'(g_1(x))=8(x^2+4x)^7$, luego

$$L_1'(x)=f_1'(g_1(x))g_1'(x)=8(x^2+4x)^7(2x+4).$$

Derivada de $L_2(x)=(2x+x^5)^6$.

Sean $f_2(x)=x^6$ y $g_2(x)=2x+x^5$, entonces

$$f_2'(x)=6x^5 \text{ y } g_2'(x)=2+5x^4.$$

Además

$f_2'(g_2(x))=6(2+5x^4)^5$, luego

$$L_2'(x)=f_2'(g_2(x))g_2'(x)=6(2x+x^5)^5(2+5x^4).$$

Aplicando la regla de derivación de un producto de funciones,

$$L'(x)=(x^2+4x)^8\left[6(2x+x^5)^5(2+5x^4)\right]+(2x+x^5)^6\left[8(x^2+4x)^7(2x+4)\right],$$

o bien

$$L'(x)=6(x^2+4x)^8 6(2x+x^5)^5(2+5x^4)+8(2x+x^5)^6(x^2+4x)^7(2x+4)$$

e. Derivemos la función $R(x)=\sqrt{\dfrac{6x-2}{x^2+1}}$.

La función $R(x)=\sqrt{\dfrac{6x-2}{x^2+1}}$ puede interpretarse como la función

$$f(x)=\sqrt{x}$$

compuesta con la función

$$g(x)=\frac{6x-2}{x^2+1}.$$

i. Sean: $g(x)=\dfrac{6x-2}{x^2+1}$ la función interna, $f(x)=\sqrt{x}$ la función externa.

ii. $g'(x)=\dfrac{6(x^2+1)-2x(6x-2)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-6x^2+4x+6}{(x^2+1)^2}$ y $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

iii. $f'(g(x))=\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{6x-2}{x^2+1}}}$.

iv. $R'(x)=f'(g(x))g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{6x-2}{x^2+1}}}\dfrac{-6x^2+4x+6}{(x^2+1)^2}$.

SECCIÓN 3.1
EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Obtén la función derivada y rescríbela de manera que no incluya potencias fraccionarias.

a. $f(x) = 2x - \dfrac{6}{\sqrt[3]{x}} - \dfrac{1}{4}x^{-2}$.

b. $f(z) = \dfrac{4}{\sqrt{z}} + 9\sqrt[3]{z} + \dfrac{5}{2}z^{-2} + 4$.

c. $f(r) = -12\sqrt[3]{r^5} + \dfrac{6}{r} + \dfrac{2}{r^3}$.

d. $g(w) = \dfrac{2}{5} - \sqrt[4]{w^3} - \dfrac{8}{\sqrt[3]{w^5}} - 3w$.

e. $h(s) = s^5 + 12s - 4\sqrt[4]{s} + \dfrac{2}{s^{-4}} - 2$.

2. Obtén la función derivada.

a. $F(x) = \left(2x^3 - 5x^2\right)\left(2x^2 - 4x^3 - 3\right)$.

b. $F'(x) = -35x^4 + 68x^3 - 33x^2 - 6x - \dfrac{2}{x^2} + 4$

c. $G(z) = \left(z + z^2\right)\left(z^3 + 2z^{-2} + 1\right)$.

3. Obtén la función derivada.

a. $F(w) = \dfrac{4}{w+1}$.

b. $H(y) = \dfrac{2y}{y^2 + 16}$.

c. $G(m) = \dfrac{m^2 + 2m - 1}{m+1}$.

d. $F(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt{x} + 1}$.

4. Obtén la función derivada y evalúala donde se indica.

a. $a(t) = \left(t^3 + 6t\right)\left(1 - 2t^2\right)$, $a'(1)$.

b. $f(t) = \dfrac{t^3 + 3t}{7 - t^2}$, $f'(1)$.

c. $r(s) = \dfrac{s^2 - 2s}{s^2 + 2s + 1}$, $r'(0)$.

5. Obtén la función derivada.

a. $H(t)=\left(t^2+1\right)^2\left(t^2-1\right)^2$.

b. $v(t)=\left(t^2+1\right)^3(t-4)^2$.

c. $v(t)=\sqrt{\dfrac{t+1}{t^3-1}}$.

d. $a(t)=\dfrac{(t+4)^2}{(t+2)^4}$.

e. $v(t)=\dfrac{(2t+3)^2}{\sqrt{t+2}}$.

f. $v(t)=\dfrac{10}{\sqrt[5]{t^2+2t+4}}$.

g. $v(x)=\dfrac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2-x}$.

h. $F(x)=\sqrt{\dfrac{8x}{\left(2+x^2\right)^4+16}}$.

i. $F(x)=\left(\sqrt{x}+1\right)^{-1}\left(\sqrt{x^2+1}\right)$.

SECCIÓN 3.2 PROBLEMAS DE APLICACIÓN

APRENDIZAJES

8. Identifica a la derivada como una función que proporciona la pendiente de la recta tangente en cualquier punto de la gráfica de la función original.

9. Identifica a la derivada de una función que proporciona la razón de cambio instantáneo.

10. Utiliza la función derivada para resolver problemas en diferentes contextos.

TEMÁTICA

3. Problemas de aplicación de cambio instantáneo, por ejemplo: cálculo de tangentes, cálculo de velocidades, cálculo de tasa marginal.

La interpretación de la función derivada (o en su caso la derivada en un punto) apoya el análisis de situaciones (y la resolución de problemas) relacionadas con: líneas rectas tangentes, razones de cambio puntuales, razones de cambio instantáneas, entre otras. Por otra parte, una vez que podemos calcular "derivadas", podemos abordar algunas situaciones (como las antes señaladas) de manera un poco más sencilla, veamos algunas de ellas.

PROPIEDAD 1 ECUACIÓN DE LA LÍNEA RECTA TANGENTE DE UNA FUNCIÓN

Si f una función derivable sobre el intervalo I que contiene al número x_0, entonces:

a. La línea recta tangente a la curva asociada a f en el punto $(x_0, f(x_0))$ (punto de contacto o tangencia) tiene pendiente $m_T = f'(x_0)$ y ecuación $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

b. La línea recta normal a la curva asociada a f que contiene al punto $(x_0, f(x_0))$ (punto de contacto o tangencia) tiene pendiente $m_T = f'(x_0)$ y ecuación $y - f(x_0) = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$, siempre que $f'(x_0) \neq 0$.

EJEMPLO 1. LÍNEA RECTA TANGENTE Y LÍNEA RECTA NORMAL A UNA CURVA

a. Obtengamos la ecuación de: la recta tangente y de la recta normal a la curva de

$$f(x) = 2\sqrt{4-x}\text{, si } x_0 = -5.$$

i. Obtenemos la ordenada del punto de tangencia evaluamos en $x_0 = 1$, por tanto, $y_0 = 2\sqrt{4-(-5)} = 6$, luego, el punto de tangencia es $p_T(-2, 4)$.

ii. La derivada de $f(x) = 2\sqrt{2-x}$ es la función

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{2-x}}\text{, entonces } m_T = f'(1) = \frac{-1}{\sqrt{2-1}} = -1.$$

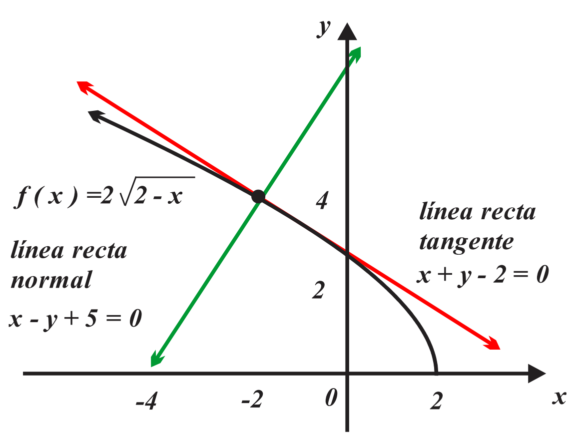
iii. Si sustituimos $m_T = -1$, $x_0 = -2$ y $y_0 = 4$ en la forma punto pendiente de la línea recta obtenemos que, la línea recta tangente tiene ecuación

$y - 4 = -1(x - (-2))$, o bien $x + y - 2 = 0$.

iv. La línea recta normal y la línea recta tangente son perpendiculares y se intersecan en el punto $p_T(-2, 4)$ y el producto de sus pendientes es menos uno, es decir, $m_T \cdot m_n = -1$. Luego

$(-1) \cdot m_n = -1$, es decir, $m_n = 1$.

La línea recta normal tiene pendiente $m_n = 1$ y contiene al punto $p_T(-2, 4)$,por tanto, su ecuación es $y - 4 = 1(x - (-1))$, escrita en la forma general $x - y + 5 = 0$.



b. Obtengamos la ecuación de: la recta tangente y de la recta normal a la curva de $f(x)=\frac{5}{x^2+4}$ en el punto $p_T(1\ ,\ 1)$ de su curva.
La función derivada es

$$f'(x)=-\frac{10x}{\left(x^2+4\right)^2}\text{ , también } m_T=f'(1)=-\frac{10}{\left(1^2+4\right)^2}=-\frac{2}{5}$$

La ecuación de la línea recta con $m_T=-\frac{2}{5}$ y que contiene al punto $p_T(2\ ,\ 1)$ es

$$y-1=-\frac{2}{5}(x-1)\text{ o en su forma general } 2x+5y-7=0.$$

EJEMPLO 2. VELOCIDAD Y ACELERACIÓN DE UNMÓVIL
a. La altura que alcanza una pelota respecto al suelo en el tiempo t (en segundos) está descrita por la función

$$y(t)=-6t^2+20t+25\text{ metros, } t\geq 0.$$

i. Entonces la función que describe la velocidad instantánea de la pelota en el tiempo $v(t)=y'(t)=t$ es

$$v(t)=y'(t)=-12t+20\ \frac{m}{s}.$$

ii. La velocidad instantánea de la pelota a los 3 segundos es

$$v(3)=-8(3)+10=-14\ \frac{m}{s}.$$

iii. Su velocidad instantánea es cero cuando $-12t+20=0$, es decir, a los $t=\frac{10}{6}$ segundos.

iv. Su aceleración instantánea la modela la función $a(t)=v'(t)=-12\ \frac{m}{s^2}$.

b. Una partícula se desplaza de acuerdo a la función $s(t)=-16t^2+20t+32$ metros, $t\geq 0$.
i. Entonces la función que describe su velocidad instantánea de la partícula al tiempo t es

$$v(t)=s'(t)=-32t+20$$

ii. La velocidad instantánea de la partícula a los 4 segundos es $v(4)=-32(4)+20=-108\ \frac{m}{s}$.

iii. Su velocidad instantánea es cero si $-32t+20=0$, es decir, a los $t=\frac{5}{8}$ segundos.

iv. Su aceleración instantánea la modela la función $a(t)=v'(t)=-12\ \frac{m}{s^2}$.

EJEMPLO 3. CRECIMIENTO DE BACTERIAS
Cierta región se encuentra afectada por una epidemia generada por una bacteria. La Secretaría de Salud estima que t días después de haber iniciado, el número de infectados se modela por la función $p(t)=\left(10t^2-t^3\right)^2$.

a. Entonces el modelo que describe el crecimiento de infectados es $p'(t)$, es decir,

$$p'(t) = 2\left(10t^2 - t^3\right)\left(20t - 3t^2\right).$$

b. La rapidez a la que se expande el virus a los 3 días.

$$p'(2) = 2\left(10(2)^2 - (2)^3\right)\left(20(2) - 3(2)^2\right) = 4158 \text{ personas por semana.}$$

SECCIÓN 3.2
EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Deriva la función $s(t) = \dfrac{t^2+4}{t^2+1}$ y calcula la pendiente de la línea recta tangente en $t = 2$.

2. Obtén todos los valores de la variable independiente en los que la curva asociada a $f(t) = \dfrac{t}{t^2+4}$ tiene líneas rectas tangentes de pendiente cero.

3. Obtén la ecuación de la línea recta tangente y la ecuación de la línea recta normal a la curva asociada a $f(x) = x^4 - 3x^3 + 5$ en el punto de abscisa $x_0 = 1$.

4. Determina la ecuación de la línea recta tangente a la curva asociada $f(x) = x^2 - 3x + 4$ que es paralela a la línea recta de ecuación $3x - y - 2 = 0$.

5. Una partícula se mueve a largo del eje X de acuerdo con la función $X(t) = 2t^3 + 5t^2 + 2$, en donde t representa el tiempo medido en segundos y X en metros.
Determina la función velocidad y la función aceleración en cualquier instante t.

6. La función que describe el movimiento rectilíneo de un objeto es $x(t) = t^3 - 27t + 8$.
¿En qué momento la velocidad en nula? Calcula la aceleración en el instante en que la velocidad es nula.

7. Calcula la aceleración a los 2 segundos, de un objeto con rapidez se modela por $r(t) = 5t^4 + 10$, con $t > 0$ (r tiene unidades de metros por segundo).

8. La rapidez de un móvil se describe por la función $r(t) = t^4 - 200t$, $t > 0$ metros por segundo, determina el cambio instantáneo en la aceleración a los 2 segundos.

3.3 SOLUCIONES Y EVALUACIÓN

SOLUCIÓN A EJERCICIOS PROPUESTOS

EXAMEN DE LA UNIDAD

SOLUCIÓN AL EXAMEN

SOLUCIONES

UNIDAD 3
EJERCICIOS PROPUESTOS

SECCIÓN 3.1 SOLUCIONES A EJERCICIOS

1. a. $f'(x)=2+\dfrac{2}{\sqrt[3]{x^4}}+\dfrac{1}{2x^3}$. b. $f'(z)=\dfrac{2}{\sqrt{z^3}}+\dfrac{3}{\sqrt[3]{z^2}}-\dfrac{5}{z^3}$.

   c. $f'(r)=-20\sqrt[3]{r^2}-\dfrac{6}{r^2}-\dfrac{6}{r^4}$. d. $g'(w)=-\dfrac{3}{4\sqrt[4]{w}}+\dfrac{40}{3\sqrt[3]{w^8}}-3$.

   e. $h'(s)=5s^4+12-\dfrac{1}{\sqrt[4]{s^3}}+8s^3$.

2. a. $F'(x)=-48x^5+120x^4-40x^3-18x^2+30x$.

   b. $F'(x)=-35x^4+68x^3-33x^2-6x-\dfrac{2}{x^2}+4$. c. $G'(z)=5z^4+4z^3+2z-\dfrac{2}{z^2}+1$.

3. a. $F'(w)=-\dfrac{4}{(w+1)^2}$. b. $H'(y)=\dfrac{32-2y^2}{\left(y^2+16\right)^2}$.

   c. $G'(m)=\dfrac{m^2+2m+3}{(m+1)^2}$. d. $F'(x)=\dfrac{x+2\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}$.

4. a. $a'(1)=-37$. b. $f'(1)=\dfrac{11}{9}$. c. $r'(0)=-2$

5. a. $H'(t)=6t^5-10t^4+12t^3-12t^2+6t-2$.

   b. $v'(t)=6t\left(t^2+1\right)^2(t-4)^2+2(t-4)\left(t^2+1\right)^3$.

   c. $v'(t)=\dfrac{-2t^3-3t^2-1}{2\sqrt{t+1}\left(t^3-1\right)^{\frac{3}{2}}}$. d. $a'(t)=\dfrac{2(t+4)(-t-6)}{(t+2)^5}$.

   e. $v'(t)=\dfrac{12t^2+44t+39}{2(t+2)\sqrt{t+2}}$. f. $v'(t)=-\dfrac{2(2t+2)}{\left(t^2+2t+4\right)^{\frac{6}{5}}}$.

   g. $v'(x)=\dfrac{-2x^5-x^2+2x}{\left(\left(1+x^2\right)^2-x\right)^2}$. h. $F'(x)=\dfrac{\sqrt{2}\left(-x^2+18\right)}{\sqrt{x}\left(x^2+18\right)^{\frac{3}{2}}}$.

   i. $F'(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{2(x+1)\sqrt{x+1}\sqrt{x^2+1}}$.

SECCIÓN 3.2 SOLUCIONES A EJERCICIOS

1. $\frac{12}{25}$. 2. $t=2$ y $t=-2$. 3. Tangente $5x+y-8=0$. Normal $x-5y+14$. 4. $3x-y-4=0$.
5. $v(t)=6t^2+10t$ y $a(t)=12t^2+10$. 6. $t=3$ segundos. $a=18$ unidades de aceleración.
7. $a=160\ m\cdot s^{-2}$. 8. $a'(4)=48$.

UNIDAD 3 EXAMEN

1. Si $f(x)=\left(4-x^2\right)\left(4-\frac{1}{x+1}\right)$, entonces $f'(0)$.

2. Si $f(x)=\frac{7+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2+8}}$, calcula $f'(0)$.

3. Si $v(t)=\sqrt{9\left(\frac{1}{t}+t\right)\left(t^2+6t\right)}$, evalúa $v'(1)$.

4. Si $a(x)=\left(\frac{2}{x^2-2\sqrt[3]{x}}\right)^2$, evalúa $a'(1)$.

5. Obtén la ecuación de la línea recta tangente a la parábola asociada a la función $f(x)=x^2+x$ y que paralela a la línea recta de ecuación $3x+y-2=0$ (forma general).

6. Determina las ecuaciones de las líneas rectas que contienen al punto $(2,-3)$ y son tangentes a la curva asociada a la función $f(x)=x^2+x$ (forma general).

7. Dos motociclistas M_1 y M_2 parten del mismo punto P (ambos con velocidad constante).
M_1 viaja al oriente con velocidad $V_1=25\frac{Kms.}{h}$ y M_1 viaja al norte con velocidad $V_2=60\frac{Kms.}{h}$.
¿Con qué razón aumenta la distancia que los separa en el tiempo $t=2$ horas?

8. La longitud del radio de una circunferencia aumenta a razón de 1 centímetro por segundo ¿Cuál es la razón de cambio del área de la circunferencia cuando el radio es 5 centímetros?

UNIDAD 3 SOLUCIÓN AL EXAMEN

1. $f'(0)=4$. 2. $f'(0)=\frac{1}{2\sqrt{2}}$. 3. $v'(1)=\frac{24}{\sqrt{14}}$. 4. $a'(1)=4$.

5. $3x+y-5=0$.

6. $x+y+1=0$ y $11x-y-25=0$.

7. $V_2=65\frac{Kms.}{h}$.

8. $A'(5)=10\pi\frac{cms^2}{s}$.

4

COMPORTAMIENTO GRÁFICO Y PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

PROPÓSITOS

Al finalizar la unidad:
el alumno contrastará la gráfica de una función y sus primeras dos derivadas para obtener información sobre el comportamiento de la función; utilizará dicha información para resolver problemas de optimización

CONTENIDO

CONCEPTOS CLAVE

Intervalo. Subconjunto o parte de los números reales.

Cero de una función. Número en el dominio de la función cuya imagen bajo esta es cero.

Función monótona creciente. Dados dos números x_1 y x_2 de su dominio, tales que: si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$.

Función monótona de creciente. Dados dos números x_1 y x_2 de su dominio, tales que: si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) > f(x_2)$.

Función derivada. Función obtenida al aplicar a la función f el operador

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \; \left(\lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \right).$$

Pendiente de la línea recta tangente. En el contexto del plano cartesiano, número que se obtiene al aplicar la función derivada a un número del dominio de la función original.

Número o punto crítico. Los números del dominio de la función que satisfacen la ecuación $f'(x) = 0$.

Valor extremo. Imagen bajo f de un número crítico.

Concavidad. La parte de la curva asociada a una función en que la línea recta tangente a una curva se encuentra totalmente “por abajo” (o por arriba) de ella.

Punto de inflexión. Punto de la curva asociada a una función en que cambia el sentido de la concavidad.

Problema de optimización. Situación en que el propósito consiste en determinar el máximo o el mínimo de una característica.

SECCIÓN 4.1 LA DERIVACIÓN EN EL ANÁLISIS DE FUNCIONES

APRENDIZAJES

1. Interpreta en forma gráfica y algebraica los intervalos en donde una función es creciente o constante.

2. Esboza la gráfica de la derivada de una función dada la gráfica de la misma.

3. Deduce a través de un análisis gráfico, las relaciones existentes entre la gráfica de una función y sus dos primeras derivadas: signo de la primera derivada asociado con crecimiento o decrecimiento de la función, derivada nula con puntos críticos, signo de la segunda derivada, con concavidad y segunda derivada nula con un posible cambio de concavidad o punto de inflexión.

4. Calcula los puntos críticos de una función y los clasifica en máximos, mínimos o puntos de inflexión.

5. Analiza el tipo de concavidad de la función a partir del signo de la segunda derivada.

6. Esboza la gráfica de una función utilizando la información que proporcionan su primera y segunda derivada.

7. Infiere que los criterios de la primera y segunda derivada, sintetizan el análisis realizado entre las gráficas de f, f' y f''.

TEMÁTICA

1. Situaciones que propician el análisis de las relaciones entre la gráfica de una función y sus derivadas.

2. Comportamiento gráfico de una función.

3. Puntos de inflexión.

4. Gráfica de $f'(x)$ y $f''(x)$ a partir de $f(x)$ y viceversa.

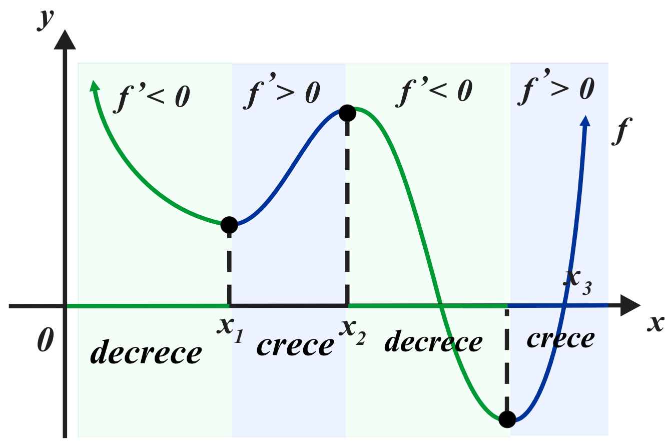
MONOTONÍA

En una función derivable f, las líneas rectas tangentes en sus puntos pueden ser negativas, nulas o positivas. La figura anexa muestra la relación existente entre la curva asociada a la función f y el signo de la pendiente de la línea recta tangente (de su función derivada f').

i. Sobre los "intervalos verdes" las secciones de la curva asociada a la función (en color verde) decrece, la derivada es negativa y las pendientes de las líneas rectas tangentes son negativas.

ii. Sobre los "intervalos azules" las secciones de la curva asociada a la función (en color azul) crece, la derivada es positiva y las pendientes de las líneas rectas tangentes son positivas.

iii. En los puntos negros de la curva: las líneas rectas tangente tienen pendiente cero, es decir la función derivada es cero ($f' = 0$) y son imágenes con valores extremos relativos o locales, máximos o mínimos.



PROPIEDAD 1 MONOTONÍA

Sea f una función derivable sobre el intervalo abierto $I = (a, b)$, entonces:

a. f (o su curva asociada) es creciente sobre el intervalo I, sí y sólo si $f' > 0$, para todo $x \in I$.

b. f (o su curva asociada) es decreciente sobre el intervalo I, sí y sólo si $f' < 0$, para todo $x \in I$.

La propiedad *1* proporciona (y justifica) el algoritmo a seguir para determinar los intervalos en los que una función (derivable) es creciente y los intervalos en que es decreciente.

ESTRATEGIA 1 INTERVALOS DE CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO DE f DERIVABLE

Obtén la función derivada e iguálela a cero, las soluciones de esta ecuación son las abscisas de los puntos en que cambia el carácter de monotonía (creciente o decreciente) de la función.

ii. En la recta real marca las soluciones antes obtenidas y genera los intervalos en los que las soluciones dividen a la recta real.

iii. Toma un número de prueba en cada uno de los intervalos.

iv. Determina el signo de la derivada en cada intervalo (evaluando el punto de prueba correspondiente).

EJEMPLO 1 INTERVALOS DE CRECIMIENTO, INTERVALOS DE DECRECIMIENTO

a. La función $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x$ tiene como dominio al conjunto de todos los números reales. Además $f'(x)=x^2-4x+3$.

Si $f'(x)=0$, entonces $x^2-4x+3=0$, de donde obtenemos $(x-1)(x-3)=0$.

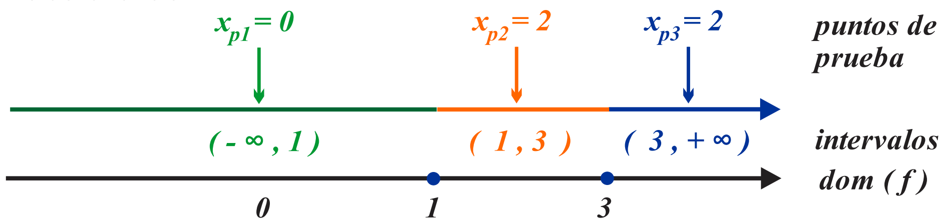
Las soluciones de

$$(x-1)(x-3)=0 \text{ son los números } x=1 \text{ y } x=3,$$

mismos que dividen y generan los intervalos

$$I_1(-\infty,\ 1),\ I_2(1,\ 3) \text{ y } I_3(3,\ +\infty),$$

en el dominio de la función.



En cada intervalo seleccionamos un número x_{pi} al que denominamos número de prueba, por ejemplo,

$$0 \ en \ I_1(-\infty,\ 1),\ 2 \ en \ I_2(1,\ 3) \text{ y } 4 \ en \ I_3(3,\ +\infty).$$

Utilizando los números de prueba determinamos el signo de $f'(x)$ en cada intervalo, luego

$$f'(0)=(0)^2-4(0)+3=3, \text{ signo positivo.}$$

$$f'(2)=(2)^2-4(2)+3=-1, \text{ signo negativo.}$$

$$f'(3)=(4)^2-4(4)+4=4, \text{ signo positivo.}$$

La información obtenida se resume en la tabla

Intervalo	Número de prueba x_{pi}	Signo de $f'(x_p)$	Carácter de f
$I_1(-\infty,\ 1)$	$x_{p1}=0$	$f'(0)=3$, positivo.	creciente
$I_2(1,\ 3)$	$x_{p2}=2$	$f'(2)=-1$, negativo.	decreciente
$I_3(3,\ +\infty)$	$x_{p3}=4$	$f'(3)=4$, positivo.	creciente

b. El dominio de la función $f(x)=\frac{x^2+x+2}{x}$ es el conjunto $(-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$. Además

$$f'(x)=\frac{x^2-2}{x^2}.$$

Si $f'(x)=0$, entonces $x^2-2=0$. Las soluciones de la ecuación $x^2-2=0$ son los números

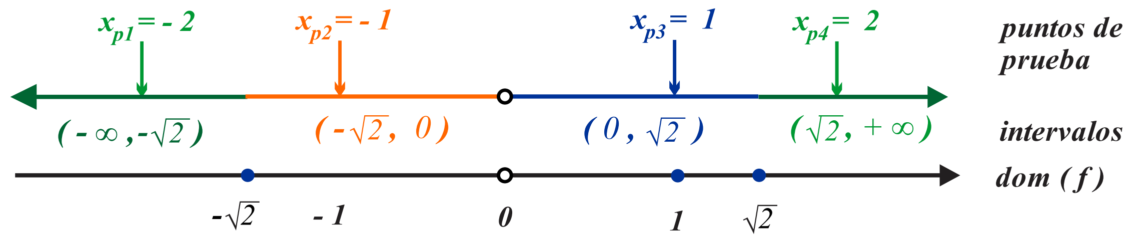
$$x=-\sqrt{2} \text{ y } x=\sqrt{2},$$

se considera $x=0$ dado que en este número no está definida la función derivada.

mismos que dividen y generan los intervalos

$$I_1(-\infty,\ -\sqrt{2}),\ (-\sqrt{2},\ 0),\ I_3(0,\ \sqrt{2}) \text{ y } I_4(\sqrt{2},\ +\infty).$$

en el dominio de la función.



En cada intervalo seleccionamos un número x_{pi} al que denominamos número de prueba, por ejemplo,

$$-2 \ en \ I_1\left(-\infty, \ -\sqrt{2}\right), \ -1 \ en \left(-\sqrt{2}, \ 0\right), \ 1 \ en \ I_3\left(0, \ \sqrt{2}\right) \text{ y } 2 \ en \ I_4\left(\sqrt{2}, \ +\infty\right).$$

Utilizando los números de prueba determinamos el signo de $f'(x)$ en cada intervalo, luego

$$f'(-2) = \frac{(-2)^2 - 2}{(-2)^2} = \frac{1}{2}, \text{ signo positivo.}$$

$$f'(-1) = \frac{(-1)^2 - 2}{(-1)^2} = -1, \text{ signo negativo.}$$

$$f'(1) = \frac{(1)^2 - 2}{(1)^2} = -1, \text{ signo negativo.}$$

$$f'(2) = \frac{(2)^2 - 2}{(2)^2} = \frac{1}{2}, \text{ signo positivo.}$$

La información obtenida se sistematiza en la tabla.

Intervalo	Número de prueba x_{pi}	Signo de $f'(x_p)$	Carácter de f
$I_1\left(-\infty, \ -\sqrt{2}\right)$	$x_{p1} = -2$	$f'(-2) = \frac{1}{2}$, positivo	creciente
$I_2\left(-\sqrt{2}, \ 0\right)$	$x_{p2} = -1$	$f'(-1) = -1$, negativo	decreciente
$I_3\left(0, \ \sqrt{2}\right)$	$x_{p3} = 1$	$f'(1) = -1$, negativo	decreciente
$I_4\left(\sqrt{2}, \ +\infty\right)$	$x_{p4} = 2$	$f'(2) = \frac{1}{2}$, positivo	creciente

Los números (junto con sus respectivas imágenes) en los que se anula (o no existe) la función derivada f' asociada a una función f desempeñan un papel básico en la optimización de características de situaciones cuyos modelos son funciones.

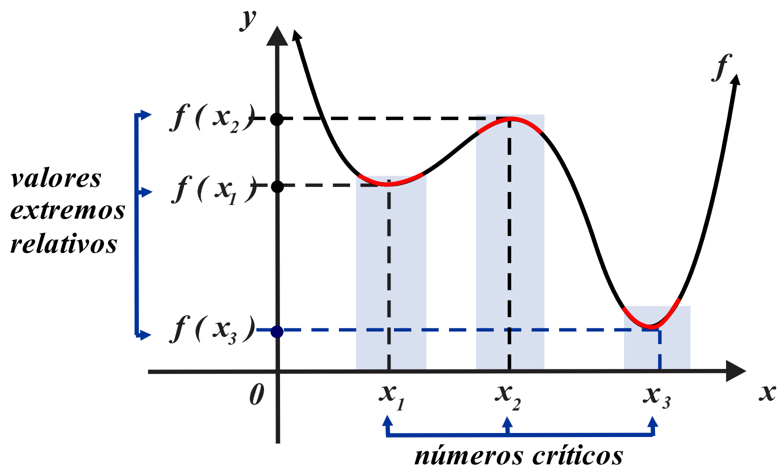
PROPIEDAD 2 NÚMEROS CRÍTICOS Y VALORES EXTREMOS RELATIVOS O LOCALES

Sea f una función derivable alrededor de x_0.

a. Si $f'(x_0) = 0$, entonces x_0 es número crítico de f.

b. Si $f'(x_0)$ no existe, entonces x_0 es número crítico de f.

c. Si $f'(x_0)$ existe, entonces el número $f(x_0)$ es un valor extremo relativo.



Un proceso de obtención los valores extremos de una función se fundamentan en la *estrategia 2* que presentamos a continuación.

ESTRATEGIA 2 DETERMINACIÓN DE NÚMEROS CRÍTICOS Y VALORES EXTREMOS

i. Obtén la función derivada e iguálela a cero, las soluciones de esta ecuación son parte de los números críticos de la función.

ii. Identifica los números en que la función derivada f' no existe y que pertenecen al dominio de la función f, éstos son otros de los números críticos.

iii. Evalúa la función f en los números críticos obtenidos.

EJEMPLO 2 NÚMEROS CRÍTICOS Y VALORES EXTREMOS

a. $f(x)=x^3-6x^2+9x$.

i. El dominio son todos los números reales (por ser una función polinomial).

ii. La función derivada es $f(x)=3x^2-12x+9x$, por tanto, de $3x^2-12x+9x=0$ obtenemos $3(x-3)(x-1)=0$, los números críticos son $x_1=1$ y $x_2=3$.

iii. Los valores extremos son $f(1)=(1)^3-6(1)+9(1)=4$ y $f(3)=(3)^3-6(3)+9(3)=0$.

b. $f(x)=(x-1)^2(x+2)$.

i. El dominio son todos los números reales (por ser una función polinomial).

ii. En este caso $f'(x)=3(x-1)(x+1)$. Los números críticos son $x_1=-1$ y $x_2=1$.

iii. Los valores extremos son $f(-1)=(-1-1)^2(-1+2)=4$ y $f(1)=(1-1)^2(1+2)=0$.

c. $f(x)=\dfrac{2}{x^2+4x}$.

i. El dominio no incluye a los números 0 y -4.

ii. $f'(x)=-\dfrac{2(2x+4)}{(x^2-4x)^2}$.

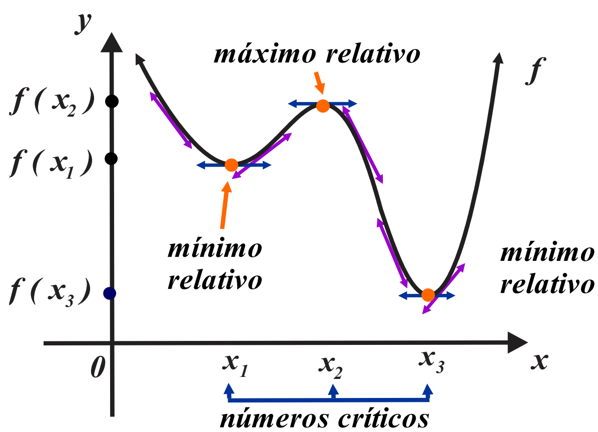
La función derivada no está definida cuando $x = -4$ y $x = 0$, sin embargo, no son números críticos por no pertenecer al dominio de la función.

De $-\dfrac{2(2x+4)}{(x^2-4x)^2} = 0$ obtenemos $2x + 4 = 0$, por tanto, el único número crítico es $x = -2$.

iii. El único valor extremo es $f(-2) = \dfrac{2}{(-2)^2 + 4(-2)} = -\dfrac{1}{2}$.

CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA

Los números críticos (junto con sus respectivas imágenes) de la función f desempeñan un papel básico en la optimización de características de situaciones modeladas por funciones. La clasificación inicial de los valores extremos de una función es en valores máximos y valores mínimos, vea la siguiente figura.



El comportamiento de las pendientes de las líneas rectas tangentes a una curva alrededor de un máximo y de un mínimo.

i. Alrededor de un valor máximo, el signo de la función derivada primero es positivo, luego es cero y finalmente negativo.

ii. Alrededor de un mínimo, el signo de la función derivada primero es negativo, posteriormente es cero y finalmente positivo.

PROPIEDAD 3 CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA

Sea x_0 un número crítico de una función continua sobre el intervalo abierto $I = (a, b)$, $x_0 \in I$.
Si la función f es derivable en el intervalo (a, b), excepto quizá en x_0, si el signo de f':

a. Cambia de positivo a negativo alrededor de x_0, entonces $f(x_0)$ es un valor máximo relativo de f.

b. Cambia de negativo a positivo alrededor de x_0, entonces $f(x_0)$ es un valor mínimo relativo de f.

c. No cambia de signo alrededor de x_0, $f(x_0)$ no es ni valor mínimo relativo ni valor máximo relativo de f.

La propiedad anterior justifica la ***“estrategia** 3”*, que es de gran utilidad en el análisis de los valores extremos de relativos de la función f .

ESTRATEGIA 3 CARÁCTER DE LOS VALORES EXTREMOS

i. Aplica la estrategia 2. ii. Verifica si existe cambio de signo alrededor de los números críticos.

EJEMPLO 3 ANÁLISIS DE LOS VALORES EXTREMOS
Determina:
i. El dominio de la función.
ii. Los números críticos y los valores extremos relativos.
iii. Los intervalos de monotonía y clasifica los valores extremos.
a. $f\left(x\right)=x^3-6x^2+9x$.
i. El dominio son todos los números reales (por ser una función polinomial).
ii. Si derivamos obtenemos la función $f'\left(x\right)=3x^2-12x+9x$, por tanto,

$$3x^2-12x+9x=0 \text{ o bien } 3\left(x-3\right)\left(x-1\right)=0,$$

los números críticos son $x_1=1$ y $x_2=3$. Los valores extremos respectivos son

$$f\left(1\right)=\left(1\right)^3-6\left(1\right)+9\left(1\right)=4, \text{ asimismo } f\left(3\right)=\left(3\right)^3-6\left(3\right)+9\left(3\right)=0.$$

iii. Los intervalos de monotonía y clasificación de los valores extremos son

Intervalo	x_p	$f'\left(x_p\right)$	Signo de $f'\left(x_p\right)$	Carácter de f
$I_1\left(-\infty,\ 1\right)$	0	$f'\left(0\right)=0$	sin signo	
$I_2\left(1,\ 3\right)$	2	$f'\left(2\right)=6$	negativo	decreciente
$I_3\left(3,\ +\infty\right)$	4	$f'\left(4\right)=36$	positivo	creciente

Si $x_1=1$ la función $f'\left(x\right)$ no cambia de signo, por tanto, la *estrategia 3* no proporciona información sobre el valor extremo $f\left(1\right)=4$.

Alrededor de $x_2=3$ el signo de la función $f'\left(x\right)$ cambia de negativo a positivo, como consecuencia $f\left(3\right)=0$ es un valor mínimo de $f\left(x\right)=x^3-6x^2+9x$. El punto $p\left(3,\ 0\right)$ es un mínimo de $f\left(x\right)=x^3-6x^2+9x$.

b. $f\left(x\right)=\left(x-1\right)^2\left(x+2\right)$.
i. El dominio son todos los números reales (por ser una función polinomial).
ii. En este caso $f'\left(x\right)=3\left(x-1\right)\left(x+1\right)$. Los números críticos son $x_1=-1$ y $x_2=1$. Los valores extremos son

$$f\left(-1\right)=\left(-1-1\right)^2\left(-1+2\right)=4 \text{ y } f\left(1\right)=\left(1-1\right)^2\left(1+2\right)=0.$$

iii. Los intervalos de monotonía y clasificación de los valores extremos son

Intervalo	x_p	$f'(x_p)$	Signo de $f'(x_p)$	Carácter de f
$I_1(-\infty,\ -1)$	-2	$f'(-2)=9$	positivo	creciente
$I_2(-1,\ 1)$	0	$f'(0)=-3$	negativo	decreciente
$I_3(1,\ +\infty)$	2	$f'(2)=9$	positivo	creciente

Si $x_1=-1$ el signo de $f'(x)$ cambia de positivo a negativo, luego, $f(-1)=4$ es un valor máximo y el punto $p(-1,\ 4)$ es máximo de $f(x)=(x-1)^2(x+2)$.

Alrededor de $x_2=1$ el signo de $f'(x)$ cambia de negativo a positivo, luego, $f(1)=0$ es un valor mínimo y el punto $p(-1,\ 4)$ es mínimo de $f(x)=(x-1)^2(x+2)$.

c. $f(x)=\dfrac{2}{x^2+4x}$.

i. El dominio no incluye a los números 0 y -4.

ii. $f'(x)=-\dfrac{2(2x+4)}{\left(x^2-4x\right)^2}$, la función derivada no está definida cuando $x=-4$ y $x=0$, sin embargo, no son números críticos por no pertenecer al dominio de la función.

De $-\dfrac{2(2x+4)}{\left(x^2-4x\right)^2}=0$ obtenemos $2x+4=0$, por tanto, el único número crítico es $x=-2$ y el único valor extremo es $f(-2)=\dfrac{2}{(-2)^2+4(-2)}=-\dfrac{1}{2}$.

iii. Los intervalos de monotonía y clasificación de los valores extremos son

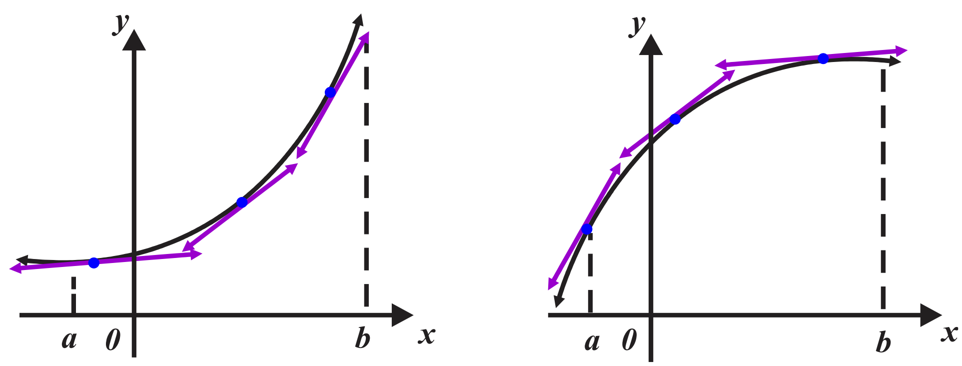
Intervalo	x_p	$f'(x_p)$	Signo de $f'(x_p)$	Carácter de f
$I_1(-\infty,\ -2)$	$-\dfrac{5}{2}$	$f'\left(-\dfrac{5}{2}\right)=\dfrac{32}{225}$	positivo	creciente
$I_2(-2,\ +\infty)$	$-\dfrac{3}{2}$	$f'\left(-\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{32}{225}$	negativo	decreciente

Alrededor de $x=-2$ el signo de la función $f'(x)$ cambia de negativo a positivo, por tanto, $f(-2)=-\dfrac{1}{2}$ es un valor mínimo de $f(x)=\dfrac{2}{x^2+4x}$ y $p(0,\ 1)$ es un mínimo de

$$f(x)=\frac{2}{x^2+4x}.$$

CONCAVIDADES

La posición de las líneas rectas tangentes en una curva determina la forma en que ésta crece (o decrece). La función $f^{(2)}$ (derivada de la función f') y segunda derivada de la función f), describe el comportamiento de la curva asociada a la función f. La primera parte de la siguiente *figura* muestra las dos formas (genéricas) como puede crecer (o decrecer) la curva asociada la función f sobre el intervalo (a, b).



i. En el primer caso las líneas rectas tangentes se encuentran por debajo de la curva y en el segundo caso se encuentran por encima de ella.
ii. Las pendientes de las líneas rectas tangentes que se encuentran por abajo de la curva son crecientes, y si se encuentran por encima de la curva son decrecientes.

Tales observaciones constituyen un criterio para determinar los intervalos (abiertos) sobre los cuales la curva asociada a la función f (dos veces derivable) es cóncava hacia arriba o es cóncava hacia abajo. El criterio consiste en determinar los intervalos en los que la función derivada f' es creciente y los intervalos donde es decreciente, esto equivale a identificar los intervalos sobre los que se cumple que $f^{(2)} > 0$ y los intervalos sobre los que dónde $f^{(2)} < 0$.

PROPIEDAD 3 CRITERIO DE CONCAVIDAD

Sea f dos veces derivable sobre (a, b), entonces:
a. Si $f^{(2)} > 0$ para toda $x \in (a, b)$, entonces la curva asociada a f es cóncava hacia arriba.
b. Si $f^{(2)} < 0$ para toda $x \in (a, b)$, entonces la curva asociada a f es cóncava hacia abajo.

Por otra parte, los puntos de cambia la concavidad de una curva (asociada a una función doblemente derivable) se llaman puntos de inflexión. Analíticamente, los puntos de inflexión pueden identificarse considerando: ya sea un cambio de concavidad, o revisando el comportamiento de función tercera derivada y verificando que ésta es distinta de cero al ser evaluada en un número crítico.

ESTRATEGIA 4 IDENTIFICACIÓN DE CONCAVIDADADES Y DE PUNTOS DE INFLEXIÓN

I. Obtén el dominio de la función f.
ii. Obtén las tres primeras derivadas de la función f.
iii. Forma la ecuación $f^{(2)} = 0$ y resuélvela.
iv. Las soluciones obtenidas en el inciso anterior generan en el dominio de la función un número especifico de intervalos en los que los extremos la función alcanza un punto de inflexión.
v. En cada intervalo toma un número x_p de prueba y determine el signo de $f^{(2)}$.
vi. A partir de los resultados obtenidos en el inciso anterior decide el tipo de concavidad de la función en cada uno de los intervalos y verifica, si hay cambio en el signo de $f^{(2)}$ en intervalos contiguos.
vii. En su caso, verifica que, si x_0 es la abscisa de un punto de inflexión, se cumple $f^{(3)} = 0$.

EJEMPLO 4 CONCAVIDADES Y PUNTOS DE INFLEXIÓN

Determina:
i. El dominio de la función.
ii. Las dos primeras funciones derivada.
iii. Los números que anulan la segunda derivada y los intervalos en que seccionan al dominio de la función.
iv. Los tipos de concavidades y los posibles números en los que existen puntos de inflexión.
v. Los puntos de inflexión.

a. Si $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 6x^2$.

i. Dado que $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 6x^2$ es una función polinomial, su dominio es el conjunto de todos los números reales.

ii. $f'(x) = x^3 - 12x$ y $f^{(2)}(x) = 3x^2 - 12$.

iii. $f^{(2)}(x) = 3x^2 - 12 = 0$, implica $x^2 - 4 = 0$, o bien $(x-2)(x+2) = 0$. Los ceros de esta última función son $x = -2$ y $x = 2$, mismos que dividen al eje x en los intervalos: $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$ y $(2, +\infty)$.

Intervalo	Número de prueba	$f^{(2)}(x_p)$	Signo de $f^{(2)}(x)$	Concavidad
$I_1(-\infty, -2)$	$x_{p1} = -3$	15	$+$	Hacia arriba.
$I_2(-2, 2)$	$x_{p2} = 0$	-12	$-$	Hacia abajo.
$I_3(2, +\infty)$	$x_{p3} = 3$	15	$+$	Hacia arriba.

La curva asociada a f es cóncava hacia arriba si x pertenece al intervalo

$$I = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

y es cóncava hacia abajo sobre el intervalo $I_2(-2, 2)$.

iv. Considerando: que alrededor de los números: $x = -2$ y $x = 2$ la función $f^{(2)}(x) = 3x^2 - 12$ cambia de signo, que $f(-2) = \frac{1}{4}(-2)^4 - 6(-2)^2 = -23$, $f(2) = \frac{1}{4}(2)^4 - 6(2)^2 = 23$, concluimos que $p_1(-2\ ,\ -23)$ y $p_2(-2\ ,\ 23)$ son puntos de inflexión.

b. $f(x)=\dfrac{20x}{x^2+3}$.

i. El denominador de $f(x)=\dfrac{20x}{x^2+3}$ no se anula, por tanto, el dominio es el conjunto de todos los números reales.

ii. $f'(x)=\dfrac{20(-x^2+3)}{(x^2+3)^2}$ y $f^{(2)}(x)=-\dfrac{40x(-x^2+9)}{(x^2+3)^3}$.

iii. $f^{(2)}(x)=-\dfrac{40x(-x^2+9)}{(x^2+3)^3}=0$, implica $40x(-x^2+9)=0$ o bien $40x(3+x)(3-x)=0$, por tanto, $x=-3$, $x=0$ y $x=3$.

Los números en eje x generan los intervalos: $(-\infty\ ,\ -3)$, $(-3\ ,\ 3)$ y $(3\ ,\ +\infty)$.

Intervalo	Número de prueba	$f^{(2)}(x_p)$	Signo de $f^{(2)}(x)$	Concavidad
$I_1(-\infty\ ,\ -3)$	$x_{p1}=-4$	$\dfrac{(160)(-7)}{19^3}$	$-$	Hacia abajo.
$I_2(-3\ ,\ 0)$	$x_{p2}=-1$	$\dfrac{(40)(8)}{4^3}$	$+$	Hacia arriba.
$I_3(0\ ,\ 3)$	$x_{p3}=1$	$\dfrac{(-40)(8)}{4^3}$	$-$	Hacia abajo.
$I_4(3\ ,\ +\infty)$	$x_{p4}=4$	$\dfrac{(160)(7)}{19^3}$	$+$	Hacia arriba.

La curva asociada a la función f es cóncava hacia abajo si x pertenece al intervalo

$$(-\infty\ ,\ -3)\cup(0\ ,\ 3)$$

y es cóncava hacia arriba sobre el intervalo $(-3\ ,\ 0)\cup(3\ ,\ +\infty)$.

iv. Considerando que alrededor de los números $x=-3$, $x=0$ y $x=2$ la función $f^{(2)}(x)=2x-4$ cambia de signo y

$$f(-3)=\frac{20(-3)}{(-3)^2+3}=-5,\ f(0)=\frac{20(0)}{(0)^2+3}=0 \text{ y } f(3)=\frac{20(3)}{(3)^2+3}=5,$$

concluimos: $p_1(-3\ ,5)$, $p_2(0\ ,0)$ y $p_3(3\ ,5)$ son puntos de inflexión.

c. $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$.

i. El denominador de $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$ se anula cuando $x=0$, por tanto, el dominio es el conjunto

$$(-\infty\ ,\ 0)\cup(0\ ,\ +\infty).$$

ii. $f'(x)=2x-2x^{-2}=2x-\dfrac{2}{x^2}$ y $f^{(2)}(x)=2+4x^{-3}=2+\dfrac{2}{x^3}$.

iii. $f^{(2)}(x)=2+\dfrac{2}{x^3}=0$, implica $2x^3+2=0$, o bien $2\left(x^3+1\right)=0$, por tanto, $x=-1$.

Los números anteriores generan en eje x los intervalos: $(-\infty\ ,\ -1)$, $(-1\ ,\ 0)$ y $(0\ ,\ +\infty)$.

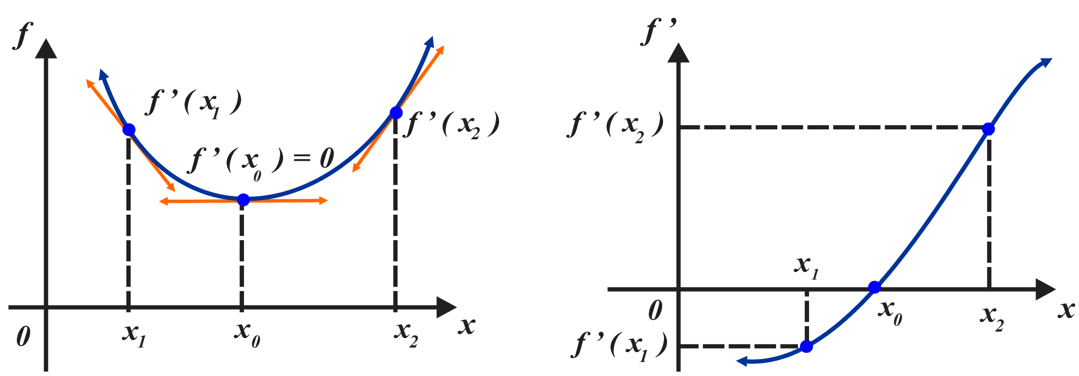
Intervalo	Número de prueba	$f^{(2)}(x_p)$	Signo de $f^{(2)}(x)$	Concavidad
$I_1(-\infty\ ,\ -1)$	$x_{p1}=-2$	$\frac{3}{4}$	$+$	Hacia arriba.
$I_2(-1\ ,\ 0)$	$x_{p2}=-\frac{1}{2}$	-2	$-$	Hacia abajo.
$I_3(0\ ,\ +\infty)$	$x_{p3}=1$	4	$+$	Hacia arriba.

La curva asociada a f es cóncava hacia abajo si x pertenece al intervalo $I_2(-1\ ,\ 0)$ y es cóncava hacia arriba sobre el intervalo $(-\infty\ ,\ -1)\cup(0\ ,\ +\infty)$.

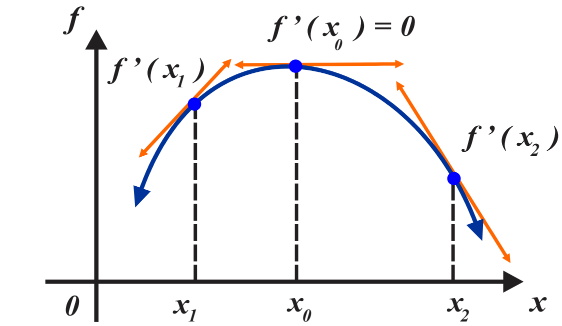
iv. Considerando que alrededor del número $x=-1$ la función $f^{(2)}(x)=2+\dfrac{2}{x^3}$ cambia de signo y $f(-1)=(-1)^2+\dfrac{1}{-1}=0$, concluimos: $p(-1\ ,0)$, es un punto de inflexión.

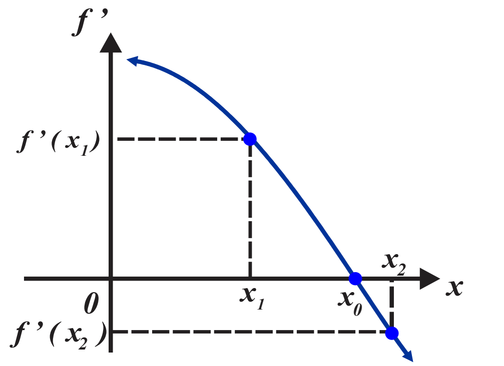
CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA

La segunda derivada de una función proporciona información sobre el carácter de sus valores extremos. La siguiente figura presenta las curvas asociadas a las funciones definidas sobre el intervalo $I=(x_1\ ,\ x_2)$. La curva de la izquierda (corresponde a f) es cóncava hacia arriba y alcanza un valor mínimo sobre $x=x_0$, éste es $f(x_0)$. La curva de la derecha es creciente (corresponde a f') y muestra: $f'(x_0)=0$ y que alrededor del número x_0 se cumple $f^{(2)}(x_0)>0$.



Similarmente, la curva de la izquierda (corresponde a f) es cóncava hacia abajo y alcanza un valor máximo si $x=x_0$, éste es $f(x_0)$. La curva de la derecha es decreciente (corresponde a f') y muestra: $f'(x_0)=0$ y que alrededor de x_0 se cumple $f^{(2)}(x_0)<0$.





PROPIEDAD 4.4

CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA

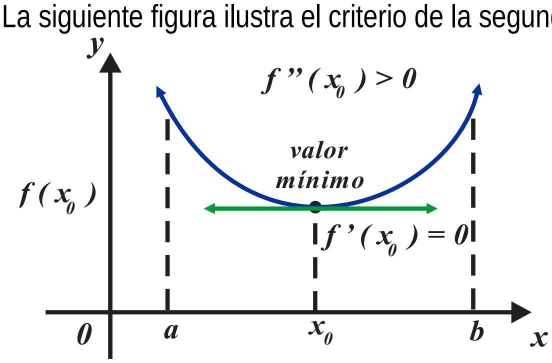
Sea f una función tal que $f'(x_0)=0$ y $f^{(2)}$ existe alrededor de x_0.

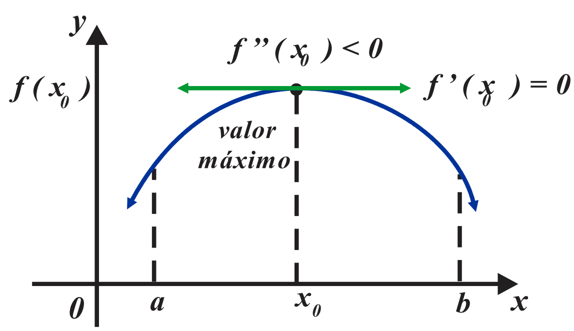
a. Si $f^{(2)}(x_0)>0$, entonces $f(x_0)$ es un valor mínimo relativo.

b. Si $f^{(2)}(x_0)<0$, entonces $f(x_0)$ es un valor máximo relativo.

c. Si $f^{(2)}(x_0)=0$, entonces el criterio no proporciona información sobre $f(x_0)$.

La siguiente figura ilustra el criterio de la segunda derivada.





EJEMPLO 5 CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA

Determina:

i. El dominio de la función.

ii. Las dos primeras funciones derivada.

iii. Los números críticos y los máximos y mínimos.

iv. Aplica el criterio de la segunda derivada y determina el carácter de los valores extremos.

a. Si $f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-6x+2$.

i. Al ser $f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-6x+2$ una función polinomial su dominio son todos los números reales.

ii. $f'(x)=3x^2+3x-6$ y $f^{(2)}(x)=6x+3$.

iii. Si $f'(x)=3x^2+3x-6=0$, entonces $3(x^2+x-2)=0$, o también

$3(x+2)(x-1)=0$.

Los números críticos son $x=-2$ y $x=1$, con valores extremos

$f(-2)=(-2)^3+\frac{3}{2}(-2)^2-6(-2)+2=12$ y $f(1)=(1)^3+\frac{3}{2}(1)^2-6(1)+2=-\frac{3}{2}$,

respectivamente.

Puesto que $f^{(2)}(-2)=6(-2)+3=-9$, el punto $(-2\ ,\ 12)$ es máximo.

Considerando que $f^{(2)}(1)=6(1)+3=9$, el punto $\left(1\ ,\ -\frac{3}{2}\right)$ es mínimo.

b. Si $f(x)=\frac{1}{3}(x-4)^3$.

i. La función $f(x)=\frac{1}{3}(x-4)^3$ es polinomial, por tanto, su dominio son todos los números reales.

ii. $f'(x)=(x-4)^2$ y $f^{(2)}(x)=2(x-4)$.

iii. Si $f'(x)=(x-4)^2$, entonces $(x-4)^2=0$, de donde $x=4$.

El único número crítico es $x=4$ con valore extremo $f(4)=\frac{1}{3}(x-4)=0$.

iv. Puesto que $f^{(2)}(4)=\frac{1}{3}(4-4)=0$, el criterio de la segunda derivada no proporciona información sobre el carácter de punto $p(4\ ,\ 0)$.

c. $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$.

i. Sí $x=1$, la función $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$ no está definida.

ii. $f'(x)=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$ y $f^{(2)}(x)=\frac{2}{(x-1)^3}$.

iii. Si $f'(x)=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, entonces $\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}=0$, o bien $x(x-2)=0$, de donde $x=0$ y $x=2$. Los números críticos son $x=0$ y $x=2$, con valores extremos

$$f(0)=\frac{0^2}{0-1}=0 \text{ y } f(2)=\frac{(2)^2}{2-1}=4 \text{ respectivamente.}$$

iv. Dado que $f^{(2)}(0)=\frac{2}{(0-1)^3}=-2$, el punto $(0\ ,\ 0)$ es máximo.

Dado que $f^{(2)}(2)=\frac{2}{(2-1)^3}=2$, el punto $(2\ ,\ 4)$ es mínimo.

EJEMPLO 5 BOSQUEJO DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Bosqueja la gráfica de la función calculando:

i. Dominio.
ii. Monotonía, máximos y mínimos.
iii. Concavidades y puntos de inflexión.

a. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x-4$.

i. Su dominio son todos los números reales.

ii. $f'(x)=x^2-6x+8=(x-4)(x-2)$.

Por tanto, los números críticos con su respectivo valor extremo son:

$$x=2,\ \ f(2)=\frac{1}{3}(2)^3-3(2)^2+8(2)-4=\frac{8}{3},$$
$$x=4,\ \ f(4)=\frac{1}{3}(4)^3-3(4)^2+8(4)-4=\frac{4}{3}.$$

El carácter de su monotonía es:

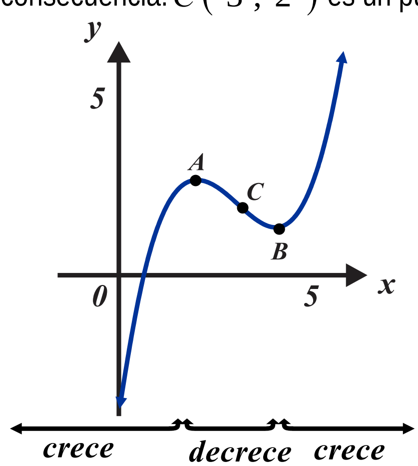
Intervalo	$(x_p\ ,\ f'(x_p))$	Signo de $f'(x)$	Monotonía
$I_1(-\infty\ ,\ 2)$	$(0\ ,\ 8)$	positivo	creciente
$I_1(-\infty\ ,\ 2)$	$(3\ ,\ -1)$	negativo	decreciente
$I_3(4\ ,\ +\infty)$	$(5\ ,\ 3)$	positivo	creciente

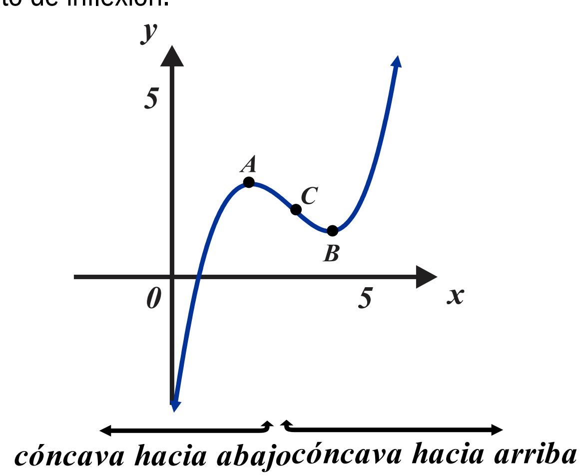
Como consecuencia: $A\left(2\ ,\ \frac{8}{3}\right)$ es un máximo y $B\left(4\ ,\ \frac{4}{3}\right)$ es un mínimo.

iii. $f^{(2)}(x_p)=2x-6$, por tanto, $x=3$ y $f(3)=\frac{1}{3}(3)^3-3(3)^2+8(3)-4=2$

Intervalo	$(x_p\ ,\ f^{(2)}(x_p))$	Signo de $f^{(2)}(x_p)$	Concavidad
$I_1(-\infty,\ 3)$	$(0\ ,\ -6)$	negativo	Hacia abajo
$I_2(3,\ +\infty)$	$(4\ ,\ 2)$	Positivo	Hacia arriba

Como consecuencia: $C(3\ ,\ 2)$ es un punto de inflexión.





b. $f(x)=\frac{1}{8}x^2-\frac{2}{x}$.

i. Su dominio son todos los números reales excepto el cero.

ii. $f'(x)=\frac{x}{4}+\frac{2}{x^2}$, entonces $x^3+8=0$, lo que implica $x=-2$.

Por tanto, un número crítico y su respectivo valor extremo es

$$x=-2,\ f(-2)=\frac{1}{8}(-2)^2-\frac{2}{(-2)}=\frac{3}{2}.$$

El carácter de su monotonía es:

Intervalo	$\left(x_p\ ,\ f'(x_p)\right)$	Signo de $f'(x)$	Monotonía
$I_1(-\infty\ ,\ -2)$	$\left(-4\ ,\ -\frac{7}{8}\right)$	negativo	decreciente
$I_2(-2\ ,\ 0)$	$\left(-1\ ,\ \frac{7}{4}\right)$	positivo	creciente
$I_3(0\ ,\ +\infty)$	$\left(1\ ,\ \frac{9}{4}\right)$	positivo	creciente

Como consecuencia:

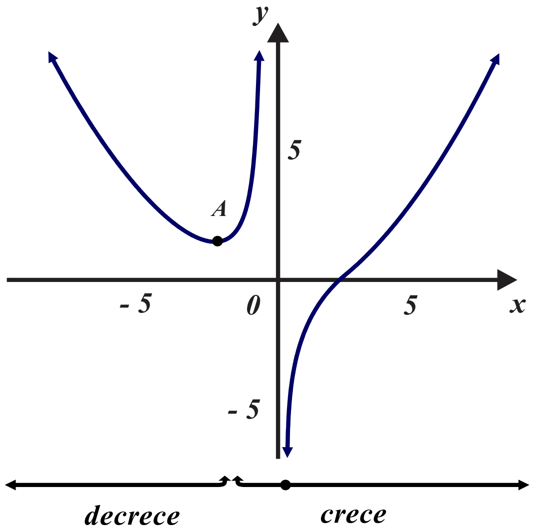
El punto $A\left(2\ ,\ \frac{3}{2}\right)$ es un mínimo.

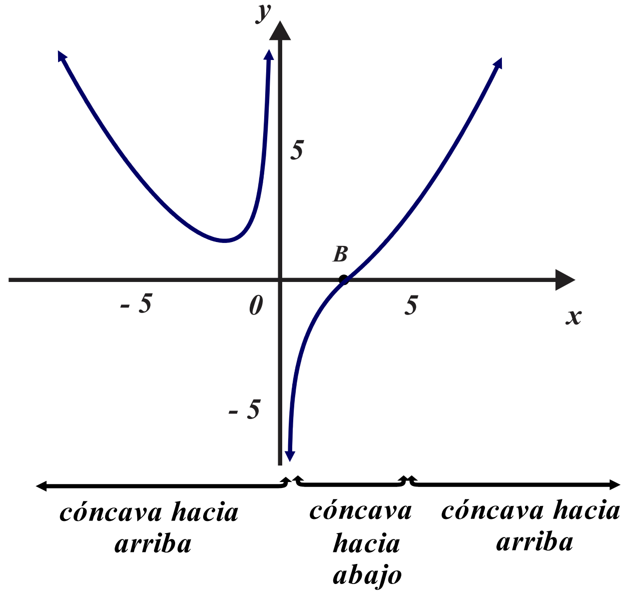
iii. $f^{(2)}(x_p)=\frac{1}{4}-\frac{4}{x^3}$.

Si $f^{(2)}(x_p)=\frac{1}{4}-\frac{4}{x^3}=0$, entonces $x^3-16=0$, esto implica $x=2\sqrt[3]{2}$.

Intervalo	$\left(x_p\ ,\ f^{(2)}(x_p)\right)$	Signo de $f^{(2)}(x_p)$	Concavidad
$I_1(-\infty,\ 0)$	$\left(-1\ ,\ \frac{17}{16}\right)$	Positivo	Hacia arriba
$I_2\left(0,\ 2\sqrt[3]{2}\right)$	$\left(1\ ,\ -\frac{15}{16}\right)$	Negativo	Hacia abajo
$I_3\left(2\sqrt[3]{2},\ +\infty\right)$	$\left(4\ ,\ \frac{3}{16}\right)$	Positivo	Hacia arriba

Como consecuencia, $B\left(2\sqrt[3]{2}\ ,\ 0\right)$ es un punto de inflexión.





c. $f(x) = -\dfrac{6x}{x^2+1}$.

i. Su dominio son todos los números reales.

ii. $f'(x) = -\dfrac{6(-x^2+1)}{(x^2+1)^2}$, entonces

$6(-x^2+1) = 0$, lo que implica $x=-1$ y $x=1$.

Por tanto, los números críticos y sus respectivos valores extremos son

$$x=-1,\ f(-1) = -\frac{6(-1)}{(-1)^2+1} = 3 \text{ y } x=1,\ f(1) = -\frac{6(1)}{(1)^2+1} = 3.$$

El carácter de su monotonía es:

Intervalo	$(x_p\ ,\ f'(x_p))$	Signo de $f'(x)$	Monotonía
$I_1(-\infty\ ,\ -1)$	$\left(-2\ ,\ \frac{18}{25}\right)$	positivo	creciente
$I_2(-1\ ,\ 1)$	$(0\ ,\ -6)$	negativo	decreciente
$I_3(1\ ,\ +\infty)$	$\left(2\ ,\ \frac{18}{25}\right)$	positivo	creciente

Como consecuencia, el punto $A(-1\ ,\ 3)$ es un máximo y el punto $B(1\ ,\ -3)$ es un mínimo.

iii. $f^{(2)}(x_p) = \dfrac{12x(-x^2+3)}{(x^2+1)^3}$.

Si $f^{(2)}(x_p) = \dfrac{12x(-x^2+3)}{(x^2+1)^3} = 0$, entonces $12x(-x^2+3) = 0$, esto implica:

$$x=-\sqrt{3}\,,\; f\left(-\sqrt{3}\right)=-\frac{6\left(-\sqrt{3}\right)}{\left(-\sqrt{3}\right)^{2}+1}=-\frac{3}{2}\sqrt{3}$$

$$x=0\,,\; f\left(0\right)=-\frac{6\left(0\right)}{\left(0\right)^{2}+1}=0$$

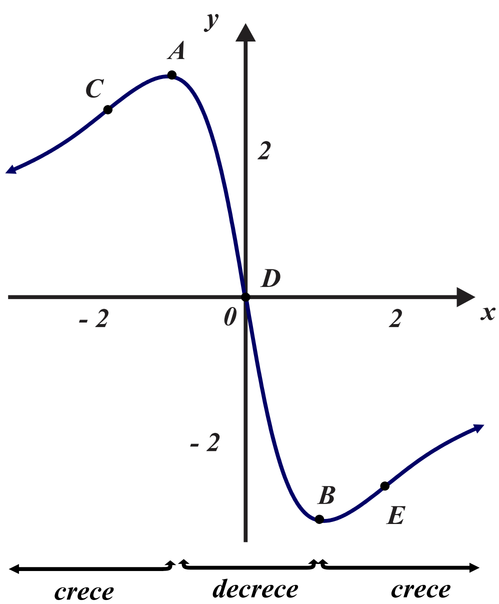
$$x=\sqrt{3}\,,\; f\left(\sqrt{3}\right)=-\frac{6\left(\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^{2}+1}=\frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

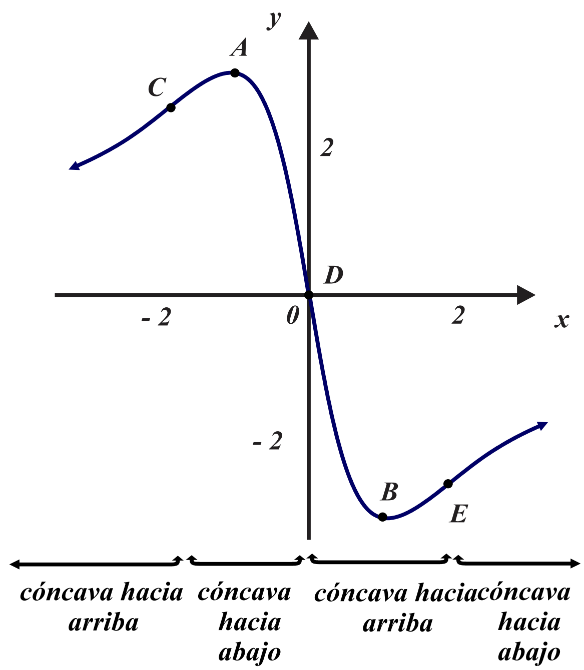
Intervalo	$\left(x_p\,,\,f^{(2)}\left(x_p\right)\right)$	Signo de $f^{(2)}\left(x_p\right)$	Concavidad
$I_1\left(-\infty\,,\,-\sqrt{3}\right)$	$\left(-2\,,\,\frac{8}{125}\right)$	Positivo	Hacia arriba
$I_2\left(-\sqrt{3}\,,\,0\right)$	$\left(-1\,,\,-3\right)$	Negativo	Hacia abajo
$I_3\left(0\,,\,\sqrt{3}\right)$	$\left(1\,,\,3\right)$	Positivo	Hacia arriba
$I_4\left(\sqrt{3}\,,\,+\infty\right)$	$\left(2\,,\,-\frac{8}{125}\right)$	Negativo	Hacia abajo

Como consecuencia,

$$C\left(-\sqrt{3}\,,\,\frac{3}{2}\sqrt{3}\right),\; D\left(0\,,\,0\right) \text{ y } E\left(\sqrt{3}\,,\,-\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$$

son puntos de inflexión.





SECCIÓN 4.1
EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Sea $f(x) = -x^2 - 2x + 8$, determina:
i. El dominio de la función.
ii. La función derivada y los números en que se anula o que no existe.
iii. Construye una tabla que incluya la información: intervalos generados por los números críticos, el signo de la función derivada en cada intervalo y el carácter monótono de la función en cada intervalo.
2. Sea $f(x) = x^3 - 12x - 2$, determina:
i. El dominio de la función.
ii. La función derivada y los números en que se anula o que no existe.
iii. Construye una tabla que incluya la información: intervalos generados por los números críticos, el signo de la función derivada en cada intervalo y el carácter monótono de la función en cada intervalo.
3. Sea $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$, determina:
i. El dominio de la función.
ii. La función derivada y los números en que se anula o que no existe.
iii. Construye una tabla que incluya la información: intervalos generados por los números críticos, el signo de la función derivada en cada intervalo y el carácter monótono de la función en cada intervalo.
4. Sea $f(x) = 2x^2 - 8x + 9$, determina:
i. El dominio.
ii. Los números críticos.
iii. Los valores extremos.
5. Sea $f(x) = x^3 - 2x + 4$, determina:
i. El dominio.
ii. Los números críticos.
iii. Los valores extremos.
6. Sea $f(x) = \sqrt{x^2 - 7}$, determina:
i. El dominio.
ii. Los números críticos.
iii. Los valores extremos.
7. Sea $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + 1$, determina:
i. El dominio de la función.
ii. Los números críticos y los valores extremos.
iii. Los intervalos de monotonía y clasifica los valores extremos.
8. Sea $f(x) = x^4 - 8x^2 + 4$, determina:
i. El dominio de la función.
ii. Los números críticos y los valores extremos.
iii. Los intervalos de monotonía y clasifica los valores extremos.
9. Sea $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$, determina:
Determina:

i. El dominio de la función.
ii. Las dos primeras funciones derivada.
iii. Los números que anulan la segunda derivada y los intervalos en que seccionan al dominio de la función, los tipos de concavidades y los posibles números en los que existen puntos de inflexión.
iv. Los puntos de inflexión.

10. Sea $f(x) = -2x^3 + 6x^2 - 4$, determina:
Determina:
i. El dominio de la función.
ii. Las dos primeras funciones derivada.
iii. Los números que anulan la segunda derivada y los intervalos en que seccionan al dominio de la función, los tipos de concavidades y los posibles números en los que existen puntos de inflexión.
iv. Los puntos de inflexión.

11. Sea $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x$, determina:
i. El dominio de la función.
ii. Las dos primeras funciones derivada.
iii. Los números críticos.
iv. Aplica el criterio de la segunda derivada y determina el carácter de los valores extremos.

12. Sea $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^2 + 2$, determina:
i. El dominio de la función.
ii. Las dos primeras funciones derivada.
iii. Los números críticos.
iv. Aplica el criterio de la segunda derivada y determina el carácter de los valores extremos.

13. Traza la gráfica de la función que cumple con las condiciones:
$f(0) = 6$, $f(3) = 0$, $f(6) = 2$.
$f'(x)$ negativa sobre $I_1(0, 3)$; $f'(x)$ positiva sobre $I_2(3, 6)$.
$f^{(2)}(x)$ positiva sobre $I_3(0, 5)$ y $f^{(2)}(x)$ negativa sobre $I_4(5, 6)$.

14. Traza la gráfica de la función que cumple con las condiciones:
$f(0) = 5$, $f(2) = 2$, $f(6) = 0$.
$f'(x)$ negativa sobre $(0, 2) \cup (2, 6)$ y $f'(2) = 0$.
$f^{(2)}(x)$ negativa sobre $I_1(0, 1) \cup (2, 6)$ y $f^{(2)}(x)$ positiva en $I_2(1, 2)$.

15. Bosqueja la gráfica de la función $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 2$.

16. Bosqueja la gráfica de la función $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$.

SECCIÓN 4.2 PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

APRENDIZAJES

8. Resuelve problemas que involucran máximos o mínimos de una función de acuerdo con su dominio restringido.

TEMÁTICA

1. Problemas de optimización.

Los métodos del cálculo diferencial constituyen una herramienta útil y poderosa en la resolución de problemas que requieren optimizar algunas de sus características. Con base en los elementos tratados en la sección anterior, es útil la siguiente estrategia de resolución de problemas prácticos de optimización de funciones. No lo sigas ciegamente; con frecuencia, tus habilidades o el mismo tipo de problema pueden indicarle utilizar un enfoque alterno o la omisión de algunos pasos o la inclusión de otros.

i. Lee repetidamente el enunciado del problema, ilústralo y asigna variables adecuadas a las cantidades importantes.

ii. Identifica la variable o función objetivo que debe ser optimizada (maximizar o minimizar), en términos de las variables del paso i.

iii. Utiliza las condiciones de ligadura que señala el problema para reducir el número de variables, y por consiguiente expresa variable a optimizar como una función de una sola variable.

iv. Aplica las estrategias desarrolladas en la sección anterior para determinar: los números críticos, valores extremos asociados y haz un análisis de ellos.

v. Sustituye los valores críticos en la función objetivo y observe que sus soluciones son viables en el contexto del problema.

vi. Usa siempre tu intuición para obtener alguna idea sobre cuál debe ser la solución del problema.

EJEMPLO 1 OPTIMIZACIÓN

a. PRODUCTO MÁXIMO

Determina dos números enteros positivos cuya suma sea 500 y su producto sea máximo.

i. Sean x, y los números desconocidos

ii. Se desea optimizar la función que describe el producto de los números.

$$p = xy.$$

iii. Los números por determinar se encuentran ligados con la condición $x + y = 500$, si combinamos el producto $p = xy$ tal condición obtenemos la función

$$p(x) = x(500 - x) = 500x - x^2 \text{ con dominio en } 0 \le x \le 500.$$

Dado que

$$p'(x) = 500 - 2x \text{ y } f^{(2)}(x) = -2.$$

iv. Por la condición de número crítico, obtenemos

$$p'(x) = 500 - 2x = 0 \text{, luego } x = 250.$$

Además,

$$f^{(2)}(250) = -2,$$

por tanto, de acuerdo con el criterio de la segunda derivada, cuando $x = 250$ el producto es máximo. De la condición de ligadura y del resultado anterior obtenemos

$$y = 250.$$

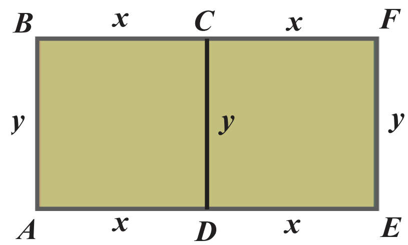
Conclusión, los números solicitados son

$$x = 250 \text{ y } y = 250.$$

b. TERRENOS DE ÁREA MÁXIMA

Se cuenta con 600 metros lineales de valla. Se desea rodear un terreno rectangular de área fija y después dividirlo en dos terrenos rectangulares congruentes con una cerca paralela a dos de los lados. Determina las dimensiones de los lados de los terrenos rectangulares para que el área que encierra (cada uno de ellos) sea máxima.

i. Sean: x, y las dimensiones de uno de los rectángulos en que se divide el rectángulo mayor.



Se debe optimizar la función que describe el área de uno de los rectángulos menores, digamos el $ABCD$ rectángulo, es decir

$$A = xy.$$

ii. Las variables x, y están ligadas por la relación $4x + 3y = 600$ (perímetro de las regiones), por tanto,

$$y = \frac{600 - 4x}{3}.$$

iii. Combinando las expresiones del área y de la longitud de la altura obtenemos la función

$$A(x) = x\left(\frac{600 - 4x}{3}\right) = 200x - \frac{4}{3}x^2, \text{ con } 0 \le x \le 150.$$

iv.

$$A'(x) = 200 - \frac{8}{3}x \text{ y } A^{(2)}(x) = -\frac{8}{3}.$$

Los números críticos son las soluciones de la ecuación $200 - \frac{8}{3}x = 0$, entonces $x = 75$.

En efecto, dado que $A^{(2)}(75) = -\frac{8}{3}$ (criterio de la segunda derivada), la función área alcanza un valor máximo si

$$x = 75.$$

De $x = 75$ y la condición de ligadura

$$y = \frac{600 - 4x}{3} \text{ obtenemos } y = 100.$$

Conclusión, las dimensiones de los rectángulos menores son

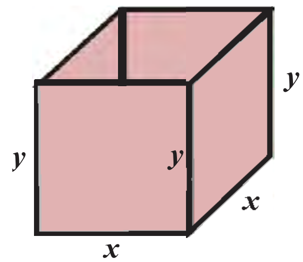
$$x = 75 \text{ y } y = 100,$$

las dimensiones del rectángulo mayor son

$$2x = 150 \text{ y } y = 100 \text{ metros.}$$

c. CONTENEDOR PRISMÁTICO

Se desea construir un contenedor de base cuenta y sin tapadera con capacidad de 500 litros ($\frac{1}{2}$ metro cúbico) uniendo placas de plástico, unas rectangulares y otras cuadradas. ¿Qué dimensiones debe tener el contenedor si se desea que utilizar la mínima cantidad de aditivo en la unión de las caras?



i. Sean: x la longitud de lado de la base e y la altura del contenedor.
La longitud de las partes a unirse es

$$L = 4x + 4y \,.$$

ii. Las variables x e y se encuentra ligadas por la condición

$$V = x^2 y = 0.5 \,.$$

Si de la condición de ligadura $x^2 y = \frac{1}{2}$ despejamos y obtenemos $y = \frac{1}{2x^2}$.

iii. La composición de

$$L = 4x + 4y \text{ con } y = \frac{1}{2x^2}$$

genera la función

$$L(x) = 4x + \frac{2}{x^2} \,.$$

iv. De donde obtenemos

$$L'(x) = 4 - \frac{4}{x^3} \text{ y también } L^{(2)}(x) = \frac{12}{x^4} \,.$$

Si $L'(x) = 0$, entonces

$$4 - \frac{4}{x^3} = 0$$

y como consecuencia $4x^3 - 4 = 0$ o bien $x = 1$, también

$$L^{(2)}(1) = \frac{12}{1^4} = 12 \,.$$

Con base en el criterio de la segunda derivada:
cuando $x = 1$ la función

$$L(x) = 4x + \frac{2}{x^2}$$

alcanza un valor mínimo, éste es, $L(1) = 6$.
Con $x = 1$ y la condición de ligadura

$$x^2 y = \frac{1}{2}$$

obtenemos

$$y = \frac{1}{2} \,.$$

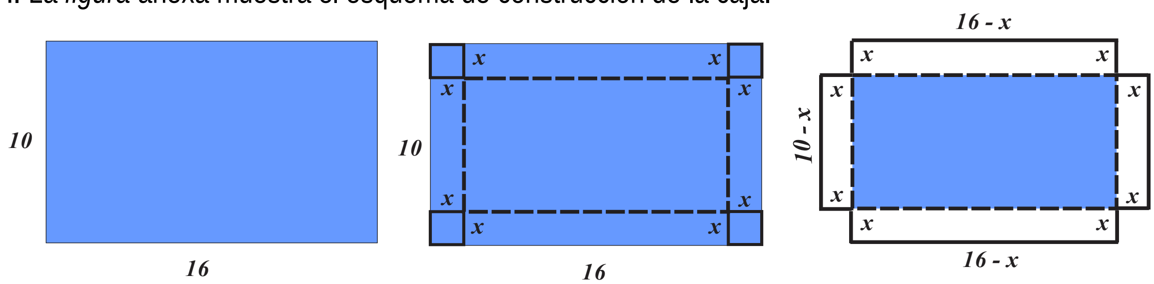
Dimensiones adecuadas

$$x=1 \text{ y } y=\frac{1}{2} \text{ unidades de longitud.}$$

d. CAJA CON BASE RECTANGULAR

Se desea construir una caja rectangular sin tapa de la siguiente manera: a una lámina de cartón de 10×16 centímetros se le hará un corte cuadrado en cada esquina y luego se doblarán los bordes verticalmente. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de los cuadrados recortados para que la caja contenga el mayor volumen posible?

i. La *figura* anexa muestra el esquema de construcción de la caja.



ii. Sea x la longitud del lado de uno de los cuadrados recortados, por tanto

$16-2x$ es la longitud de la base de la caja,

$10-2x$ es el ancho de la base de la caja,

x es la altura de la caja.

iii. El volumen $V(x)$ de la caja es

$$V(x)=(16-2x)(10-2x)(x)=4\left(40x-13x^2+x^3\right), \text{ siempre que } 0\le x\le 5.$$

iv. Por tanto,

$$V'(x)=4\left(40-26x+3x^2\right) \text{ y } V^{(2)}(x)=-104+24x .$$

Si $V'(x)=0$, entonces $3x^2-26x+40=0$ y como consecuencia

$$x=2 \text{ y } x=\frac{20}{3},$$

note que la solución $x=\frac{20}{3}$ no cumple la condición $0\le x\le 5$ por lo que se descarta.

También

$$V^{(2)}(2)=-104+24(2)=-56,$$

por tanto, si $x=2$ unidades de longitud, el volumen es máximo.

SECCIÓN 4.2
EJERCICIOS PROPUESTOS

1. La suma de un número positivo x con el cuádruple de otro número positivo y es 100. Cuáles deben ser los números si su producto debe ser máximo.

2. Se desea limitar dos lotes rectangulares contiguos y congruentes, cada uno de ellos encierra área de 300 metros cuadrados.
¿Cuánto deben medir el largo y el ancho de manera que se utilice la menor cantidad de valla?

3. Con una placa metálica de 2 metros de ancho se va a construir un canal (sin base superior) de sección transversal rectangular (doblando perpendicularmente dos lados opuestos de la placa). ¿Qué dimensiones debe tener la sección transversal para que el flujo a través del canal sea máximo?

4. Se desea construir una caja (sin tapadera) con una lámina cuadrada de 24 centímetros de lado, cortando cuadritos iguales de cada esquina y doblando los lados hacia arriba. Calcula las dimensiones que debe tener la caja para que el volumen que contenga sea el máximo.

5. Un contenedor con base cuadrada y parte superior abierta debe tener un volumen de 1000 centímetros cúbicos. Determina las dimensiones del contenedor que minimizan la cantidad de material usado en su construcción.

6. Se tienen 1000 centímetros cuadrados de cierto material con el que se desea construir una caja con base cuadrada y la base superior abierta, determina el volumen máximo que puede contener la caja.

4.3 SOLUCIONES Y EVALUACIÓN

SOLUCIÓN A EJERCICIOS PROPUESTOS

EXAMEN DE LA UNIDAD

SOLUCIÓN AL EXAMEN

SOLUCIONES

UNIDAD 4
EJERCICIOS PROPUESTOS

SECCIÓN 4.1 SOLUCIONES A EJERCICIOS

1. i. Todos los números reales. ii. $f'(x) = -2x - 2$, se anula en $x = -2$. iii.

Intervalo	Signo de $f'(x_p)$	Carácter de f
$I_1(-\infty, -1)$	negativo	creciente
$I_2(-1, +\infty)$	positivo	decreciente

2. i. Todos los números reales. ii. $f'(x) = 3x^2 - 12$, se anula en $x = -2$ y $x = 2$. iii.

Intervalo	Signo de $f'(x_p)$	Carácter de f
$I_1(-\infty, -2)$	positivo	creciente
$I_2(-2, 2)$	negativo	decreciente
$I_3(2, +\infty)$	positivo	creciente

3. i. Todos los números reales. ii. $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$, se anula en $x = 1$ y $x = 2$ .iii.

Intervalo	Signo de $f'(x_p)$	Carácter de f
$I_1(-\infty, 1)$	positivo	creciente
$I_2(1, 3)$	negativo	decreciente
$I_3(3, +\infty)$	positivo	creciente

4. i. Todos los números reales. ii. $x = 2$. iii. $f(2) = 1$.

5. i. Todos los números reales. ii. $x_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}$ y $x_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

iii. $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = 4 - \frac{4\sqrt{6}}{9}$ y $f\left(.\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = 4 + \frac{4\sqrt{6}}{9}$.

6. i. Los números reales menores o igual que -7 y mayores o iguales que 7.
ii. $x_1 = -\sqrt{7}$ y $x_2 = -\sqrt{7}$. iii. $f(-\sqrt{7}) = 0$ y $f(\sqrt{7}) = 0$.

7. i. Todos los números reales. ii. $f(-1) = \frac{2}{3}$. iii.

Intervalo	Signo de $f'(x)$	Carácter de f
$I_1(-\infty, -1)$	positivo	creciente
$I_2(-1, +\infty)$	positivo	creciente

Para $p\left(-1, \frac{2}{3}\right)$ no decide el criterio.

8. i. Todos los números reales. ii. $f(-2)=-12$, $f(0)=4$ y $f(2)=12$. iii.

Intervalo	Signo de $f'(x)$	Carácter de f
$I_1(-\infty, -2)$	negativo	decreciente
$I_2(-2, 0)$	positivo	creciente
$I_3(0, 2)$	negativo	decreciente
$I_4(2, +\infty)$	positivo	creciente

Mínimo $p(-2,12)$. Máximo $p(0,4)$, mínimo $p(2,-12)$.

9. i. Todos los números reales. ii. $f'(x)=3x^2-12x+9$ y $f^{(2)}(x)=6x-12$. iii.

Intervalo	Signo de $f^{(2)}(x)$	Concavidad de f
$I_1(-\infty, 2)$	negativo	Hacia abajo
$I_2(2, +\infty)$	positivo	Hacia arriba

iv. Punto de inflexión $p(2,-3)$.

10. i. Todos los números reales. ii. $f'(x)=3x^2-12x+9$ y $f^{(2)}(x)=6x-12$. iii.

Intervalo	Signo de $f^{(2)}(x)$	Concavidad de f
$I_1(-\infty, 1)$	positivo	Hacia arriba
$I_2(1, +\infty)$	negativo	Hacia abajo

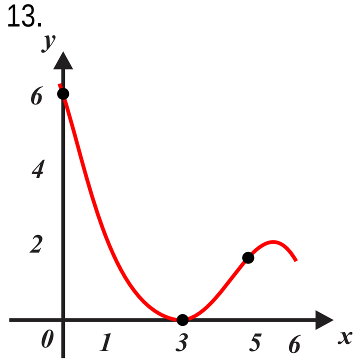
iv. Punto de inflexión $p(1,0)$.

11. i. Todos los números reales. ii. $f'(x)=-x^2+4$ y $f^{(2)}(x)=-2x$. iii. $x_1=-2$, $x_2=2$.

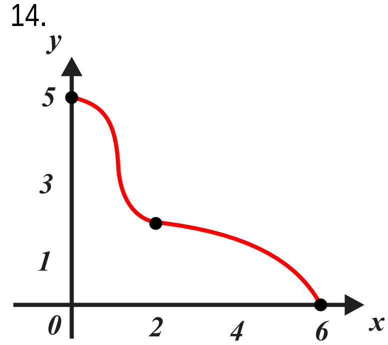
iv. Mínimo $\left(-2, -\frac{16}{3}\right)$, Máximo $\left(2, \frac{16}{3}\right)$.

12. i. Todos los números reales. ii. $f'(x)=2x^3-8x$ y $f^{(2)}(x)=6x^2-8$. iii. $x_1=-2$, $x_2=0$, $x_2=2$. iv. Mínimo $(-2, -6)$, Máximo $(0, 2)$, Mínimo $(2, -6)$.

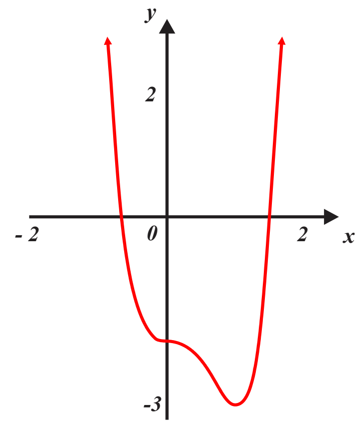
13.



14.

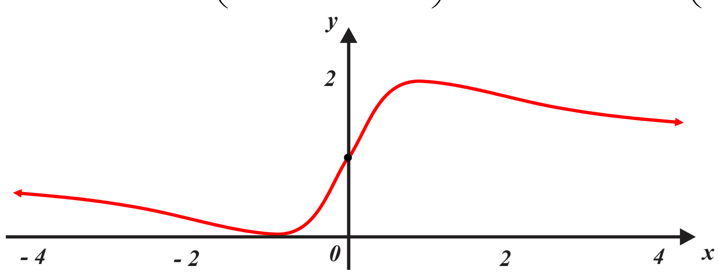


15. Decreciente $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$.
Creciente $(1, +\infty)$.
Cóncava hacia abajo $(-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{2}{3}\right)$.
Cóncava hacia arriba $(-\infty, 0)$.
Mínimo $m(1, -3)$. Inflexión $I(0, -2)$.



16. Creciente $(-1, 1)$. Decreciente $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Cóncava hacia abajo $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$. Cóncava hacia arriba $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$. Mínimo $m(-1, 0)$.

Máximo $M(1, 2)$. Inflexiones: $I_1\left(-\sqrt{3}, \frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)$, $I_2(0, 1)$ e $I_3\left(\sqrt{3}, \frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$.



SECCIÓN 4.2 SOLUCIONES A EJERCICIOS

1. $x = 60$ y $y = 10$.
2. $largo = 15$ metros, $ancho = 20$ metros.
3. $base = 1$ metro, $altura = \frac{1}{2}$ metro.
4. $altura = x = 4$ centímetros y base de lado $24 - 2x = 8$ centímetros.
5. base de lado $x = 80$ altura $y = 40$ centímetros.
6. base de lado $x = \frac{10}{\sqrt{6}}$, altura $y = \frac{10}{\sqrt{6}}$ y volumen $y = \frac{10}{\sqrt{6}}\left(\frac{10}{\sqrt{6}}\right)^2$ centímetros cúbicos.

UNIDAD 4 EXAMEN

1. Sea la función $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3+2$.

a. Determina su dominio.
b. Obtén sus números (puntos) críticos y sus valores extremos.
c. Los intervalos donde es decreciente y los intervalos donde es creciente.
d. Máximos y mínimos relativos.
e. Los intervalos donde es cóncava hacia arriba y los intervalos donde es cóncava hacia abajo.
f. Puntos de inflexión..
g. Bosquejo de la gráfica.

2. Determina las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede construirse con 100 metros de cordón.

3. Con 200 metros lineales de valla se va a limitar un terreno rectangular en el que uno de cuyos lados es un muro (lineal ya construido). ¿Qué dimensiones debe tener el terreno para que el área que encierre sea máxima? Calcular el área máxima que encierra.

UNIDAD 4 SOLUCIÓN AL EXAMEN

1.

a. Su dominio son todos los números reales.

b. $x=0$ y $x=3$; $f(0)=2$ y $f(3)=-\frac{19}{4}$.

c. Decreciente en $I_1(-\infty\ ,\ 0)$ y $I_2(0\ ,\ 3)$. Creciente en $I_3(3\ ,\ +\infty)$.

d.

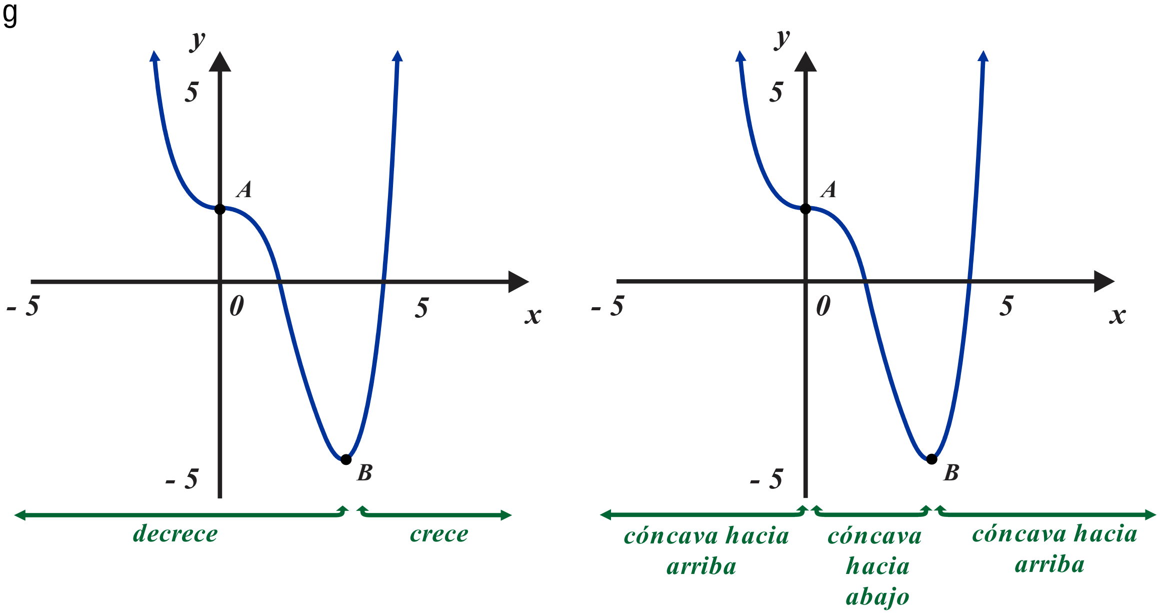
Mínimo relativo en $B\left(3\ ,\ -\frac{19}{4}\right)$. No tiene máximos relativos.

e

Cóncava hacia arriba $I_1(-\infty,\ 0)$ y $I_3(2,\ +\infty)$. Cóncava hacia abajo $I_2(0,\ 2)$.

f. $A(0\ ,\ 2)$

g



2. $x=50$ y $y=50$.

3. 50 y 100 metros.

BIBLIOGRAFÍA

Adams, R. (2009) *Cálculo Sexta edición*. México: Pearson - Addison Wesley.

Boyce, W. (1994). *Cálculo*. México: Cecsa.

Haeussler, F. (2015). *Matemáticas para administración y economía Treceava Edición*. México: Pearson.

Haeussler, F. (2011). *Precálculo Treceava Edición*. México: Pearson.

Larson, R. (2012). *Precálculo Octava Edición*. México: Cengage Learning.

Miller, Ch. (2013). *Matemática: razonamiento y aplicaciones*. México: Pearson - Addison Wesley.

Purcell, E. (2007). *Calculo diferencial e integral Novena edición*. México: Pearson - Addison Wesley.

Stewart, J. (2007). *Calculo de una variable. Trascendentes tempranas sexta edición*. México: Cengage Learning.

Stewart, J. (2012). *Precálculo Matemáticas para el cálculo Sexta Edición*. México: Cengage Learning.

Thomas, Jr. (2010). *Cálculo una variable Decimosegunda edición*. México: Pearson - Addison Wesley.

UNAM. (2016). *Programas de estudio área matemáticas, Cálculo diferencial e integral I – II*. Recuperado de: https://www.cch.unam.mx/programasestudio