GUÍA PARA EL EXAMEN EXTRAORDINARIO DE MATEMÁTICAS IV

CCH ORIENTE

PANTALEÓN GÓMEZ CARRANZA
HÉCTOR GONZÁLEZ PÉREZ
JOSÉ ADOLFO RENDÓN ORTÍZ
FERNANDO TOVAR CHÁVEZ
JANETT KAROL MARTÍNEZ ZAPOTITLA
ALDO NICOLÁS ARENAS GARCÍA

COORDINACIÓN
Pantaleón Gómez Carranza

CICLO 2021 - 2022

Es el documento impreso o en línea elaborado para apoyar la preparación de un examen extraordinario, con base en el Programa de Estudio de la asignatura. Será elaborado colegiadamente y deberá incluir: a) introducción; b) instrucciones; c) presentación de cada unidad, indicando los conceptos clave; d) sugerencias de actividades de aprendizaje teórico-prácticas; e) autoevaluación del aprendizaje con base en problemas y preguntas representativas de los aprendizajes y f) fuentes consultadas que deberán presentarse en formato APA. Debe estar aprobada por una instancia de Dirección correspondiente y ser utilizada, por lo menos, en un periodo de exámenes.

Introducción

El presente documento tiene el propósito de guiar al estudiante (en particular a los estudiantes del plantel Oriente) en la preparación del examen extraordinario de la asignatura de Matemáticas IV, que se imparte en el Colegio de Ciencias y Humanidades. Ha sido elaborada por el interés y esfuerzo de un grupo de profesores del Área de Matemáticas del plantel Oriente del CCH. Se basa en el programa indicativo y vigente de la asignatura antes señalada y contiene las características que definen a una Guía para Examen Extraordinario en el Glosario de Términos del Protocolo de equivalencias.

Cada unidad se subdivide en tres secciones, la primera sección inicia presentando los conceptos claves de toda la unidad, parte de los aprendizajes y temática, así como el desarrollo disciplinario y didáctico, de estos dos últimos aspectos. Utilizamos explicaciones teóricas, figuras y una gran cantidad y diversidad de ejemplos prácticos totalmente resueltos permite al alumno apropiarse de los conocimientos correspondientes. También proponemos un grupo de ejercicio para que el alumno practique lo aprendido. La estructura de la segunda sección solamente difiere de la primera en que no incluye los conceptos clave. En la tercera sección se observan las soluciones de todos los ejercicios propuestos en las secciones 1 y 2; también anexamos un el examen (con las soluciones) de auto evaluación con el fin de que el interesado mida los conocimientos y las habilidades que adquirió. En la parte final presentamos las referencias, en que el estudiante puede consultar los temas en los que desee profundizar; a los docentes les servirá para enriquecer o incrementar la complejidad de los ejercicios y contenidos abarcados en esta guía.

LOS AUTORES

La Guía para el Examen Extraordinario de Matemáticas IV ha sido escrita para que la utilices como apoyo y/o complemento en tu preparación para presentar el examen extraordinario de la asignatura del mismo nombre; para que repases, y/o conozcas los conceptos básicos y practiques a fondo los algoritmos de mayor representatividad en el estudio de las funciones a nivel bachillerato.

Debes leer la sección (o la parte de tu interés) *antes* de intentar resolver los problemas y/o actividades que te proponemos. Ten en cuenta que leer sobre matemáticas dista bastante de leer otro tipo de documentos, tales como una novela, un periódico o hasta libros de otras ramas del conocimiento. Regularmente las partes de textos de matemáticas (de interés para el lector), se leen y se releen varias veces para poder comprenderlas. Debes poner especial atención a los ejemplos resueltos y reconstruir su resolución; utiliza lápiz y papel a medida que los leas y, a continuación, intenta resolver los ejercicios propuesto en la sección. Siguiendo estos consejos seguramente podrás hacer tu tarea optimizando el tiempo e incrementando la comprensión de conceptos y habilidad en el uso de los algoritmos.

En un primer acercamiento a una unidad memoriza las definiciones y trata de comprender los conceptos, sin embargo, no debes cometer el error de tratar como reglas a los ejercicios resueltos que observes. Las matemáticas no son simples memorizaciones, sino que son el *arte de modelar y posteriormente resolver problemas,* ¡no se trata de memorizar problemas resueltos! Para comprender significativamente una unidad o un tema, debes modelar y resolver problemas, muchos problemas; haz todos los que puedas, intenta escribir sus soluciones en una forma lógica y detalladamente, paso a paso. Por lo general, para resolver un problema en matemáticas se realizan varios intentos, no te rindas ante un problema si no puedes resolverlo en los primeros intentos. Los primeros intentos en la resolución de problemas se relacionan con su comprensión y para esto se tienen que leer varias veces y relacionar con lo que ya aprendiste en tu curso y de los ejemplos resueltos de la guía Lucha con cada problemas hasta que lo resuelvas; una vez que hayas hecho esto unas cuantas veces, comprenderás el papel de las matemáticas en los procesos mentales del aprendizaje.

Las respuestas de todos los ejercicios y a todas las preguntas de los exámenes propuestos de todas las secciones y todas las unidades se encuentran en las secciones de fracción .3. En caso de que tu respuesta a cierto ejercicio difiera de la que te proponemos, no concluyas de inmediato que estás en error, tu respuesta y la propuesta pueden ser equivalentes y estar enlazadas por medio de ciertas consideraciones y ambas sean correctas.

ÍNDICE

1. FUNCIONES POLINOMIALES	1
1.1 Funciones y elementos	3
1.2 Funciones polinomiales	15
1.3 Soluciones y evaluación	43
2. FUNCIONES RACIONALES Y FUNCIONES CON RADICALES	51
2.1 Funciones racionales	54
2.3 Funciones con radicales	69
2.3 Soluciones y evaluación	81
3. FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS	91
3.1 Funciones exponenciales	94
3.2 Funciones logarítmicas	106
3.3 Evaluación	123
4. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS	133
4.1 Antecedentes de las funciones trigonométricas	136
4.2 Funciones trigonométricas y aplicaciones	144
4.3 Soluciones y evaluación	161
Bibliografía	169

1

FUNCIONES POLINOMIALES

PROPÓSITOS

Al finalizar la unidad:
El alumno habrá avanzado en el estudio de las funciones al introducir la notación funcional y la noción de dominio y rango. Relacionando la expresión algebraica de una función polinomial con su gráfica y analizará su comportamiento.
Con base en la resolución de problemas y en contexto, usará las gráficas, tablas, expresión matemática para explicar los procesos involucrados.

CONTENIDO

SECCIÓN 1.1 Funciones y elementos

SECCIÓN 1.2 Funciones polinomiales

SECCIÓN 1.3 Soluciones y evaluación

CONCEPTOS CLAVE

Conjunto. Grupo de objetos (números) que cumplen con una condición específica.

Elemento. Cada uno de los objetos (números) de un conjunto.

Relación (1). Forma en que se asigna a un elemento (número) de un conjunto uno o más elementos (números) de otro conjunto.

Relación (2). Un conjunto de puntos del plano cartesiano.

Partes de una relación (matemática). Un primer conjunto llamado dominio, un segundo conjunto llamado contradominio y una regla de asociación.

Dominio de una relación. Conjunto de objetos (números) para los que la relación tiene sentido (está bien definida).

Contradominio de una relación. Conjunto de objetos (números) en el que se encuentran los objetos (números) que han de ser asignados.

Regla de correspondencia de una relación. Forma en que se asigna a un objeto (número) del dominio un objeto del contradominio.

Rango (recorrido o conjunto imagen). Conjunto formado por todos los objetos (números) del contradominio que han sido asignados por la regla de correspondencia.

Modelo. La regla de correspondencia de una relación en una situación específica.

Variable independiente. Aquella a la que le son asignados los valores.

Variable dependiente. Su valor depende de la asignación hecha a la variable dependiente.

Intervalo. Parte (conjunto) de los números reales que puede representarse por al menos un segmento rectilíneo de la recta numérica (recta real).

Gráfico (o gráfica). Conjunto de pares ordenados (puntos) del plano cartesiano.

Curva asociada a una función. Figura en el plano cartesiano constituida por todos los puntos en los que la primera coordenada son los números del dominio y la segunda coordenada son los números del recorrido (rango o conjunto imagen).

SECCIÓN 1.1 FUNCIONES y ELEMENTOS

APRENDIZAJES

1. Explora diferentes relaciones, reconociendo las condiciones necesarias para determinar si una relación es función, la simboliza y distingue el dominio y el rango.

TEMÁTICA

1. Relación.

2. Noción generalizada de función.

En los cursos de básicos de geometría analítica se tratan relaciones entre dos variables ("ecuaciones") cuya representación en el plano cartesiano es una curva específica (una línea recta, una parábola, una circunferencia, entre otras), sin embargo, la inclusión de condiciones en las relaciones entre variables da origen a otro tipo de "objetos matemáticos" conocidos como funciones. Retomemos el concepto de relación entre variables. Se utiliza el término "relación" para establecer el vínculo entre objetos (personas, animales o cosas) con otros objetos o características de ellos mismos, los vínculos suelen representarse utilizando figuras con flechas que reciben el nombre de "diagramas sagitales".

EJEMPLO 1 RELACIÓN

Sean los conjuntos A nombre de la persona, B edad de la persona, tales que:

$$A = \{ Pedro,\ Juan,\ María,\ Elena \} \text{ y } B = \{11,\ 16,\ 14,\ 19\}.$$

a. Una relación R, "*de los nombres a las edades*", la representa el diagrama sagital.

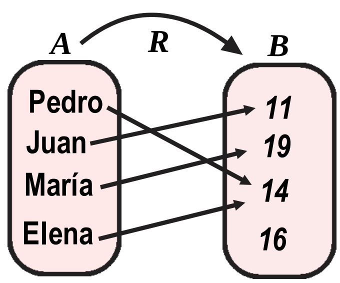


FIGURA 1

b. Una relación "*de las edades a los nombres*" la representa el diagrama sagital.

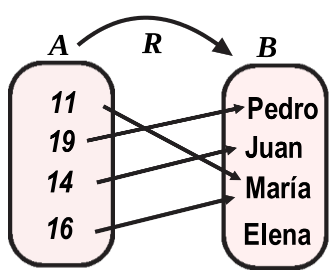


FIGURA 2

Otra forma de describir y presentar relaciones entre dos conjuntos es utilizando tablas.

EJEMPLO 2 DESCRIPCIÓN DE UNA RELACIÓN

Sean los conjuntos A nombre de la persona, B edad de la persona, tales que:

$$A = \{ Pedro,\ Juan,\ María,\ Elena \} \text{ y } B = \{11,\ 16,\ 14,\ 19\}.$$

a. Una relación "*de los nombres a las edades*", la representa la tabla:

Nombre de la persona	Edad
Pedro	19
Juan	11
María	11

b. Una relación "*de las edades a los nombres*" la representa la tabla.

Edad	Nombre de la persona
14	Elena
16	Juan
11	Pedro

Un concepto "más avanzado" de "relación incluye "dos variables" vinculadas por "una ecuación" que cumple ciertas características (que posteriormente proporcionaremos).

EJEMPLO 3 FUNCIONES

a. En el lugar geométrico conocido como línea recta, las variables x e y se encuentran relacionadas por la "ecuación"

$$Ax + By + C = 0 .$$

b. En el lugar geométrico conocido como parábola (con eje focal horizontal, las variables x e y están vinculadas por la "ecuación"

$$(y - k)^2 = 4p(x - h).$$

c. La longitud l de lado de un cuadrado y el área A que encierra se relacionan con la "fórmula"

$$A(l) = l^2 .$$

d. El volumen de una caja con forma de prisma rectangular con ancho de longitud x, largo un metro mayor que el ancho y altura dos metros mayor que el largo se calcula con la relación

$$V(x) = (x)(x + 1)(x + 2).$$

En esta obra sólo son de nuestro interés pares de variables relacionadas de la forma: si a una de ellas le asignamos los valores (conocida como variable independiente) al utilizar la forma en que se encuentran vinculadas (regla de correspondencia o regla de asociación) obtenemos el valor de la otra (llamada variable dependiente o función).

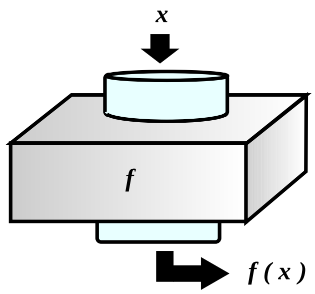


FIGURA 3

Formalmente:

DEFINICIÓN 1 FUNCIÓN Y SUS PARTES

Sean x e y dos variables (numéricas) y f la forma en que se encuentran relacionadas, entonces:

a. Una función f es una relación entre dos variables, tal que a toda asignación a la variable independiente le asocia exactamente un único valor de la variable dependiente.

b. f recibe el nombre de regla de correspondencia.

c. El conjunto de valores que es posible asignar a la variable x (variable independiente), que representamos por A se llama dominio de la función, simbólicamente

$$A = dom(f).$$

d. El conjunto B de todos los valores obtenidos al aplicar la regla de correspondencia f a los valores del conjunto A se llama recorrido (rango o conjunto imagen) y lo representaremos por

$B = rec(f)$ (también por $B = rango(f)$ o $B = imagen(f)$).

e. Cuando x pertenece al conjunto $A = dom(f)$ y $f(x) = y$, x recibe el nombre de preimagen de $y = f(x)$.

f. El número (o valor) $y = f(x)$ es la imagen de x bajo f.

La *figura 4* presenta un esquema de los elementos antes definidos.

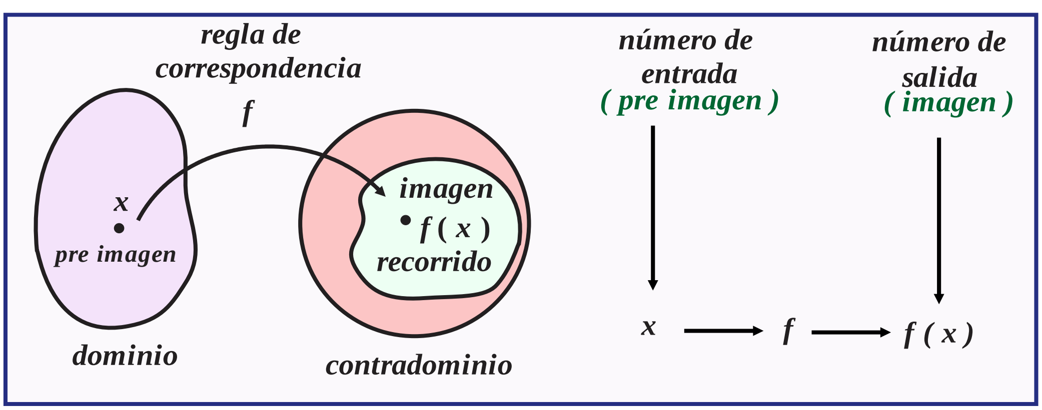


FIGURA 4

NOTA

i. f representa la regla de correspondencia.

ii. $y = f(x)$ es un número o valor del recorrido (rango o conjunto imagen).

iii. x es un número o valor del dominio y tiene asociada una imagen.

iv. En ocasiones se utiliza el concepto de *CONTRADOMINIO* (o codominio) para indicar las características del campo (conjunto al que deben pertenecer las imágenes) y sólo en ocasiones coincide con el recorrido (rango o conjunto imagen). Generalmente, el recorrido de la función no es equivalente al contradominio.

v. El término $f(x)$ se lee "efe de equis" y no debe interpretarse como un producto.

DEFINICIÓN 2 IGUALDAD DE FUNCIONES

Dos funciones f y g son iguales si y sólo si $f = g$ y $dom(f) = dom(g)$.

NOTA

No basta con que dos funciones tengan la misma regla de correspondencia para ser iguales, ¡también se requiere que tengan el mismo dominio!

EJEMPLO 4 IGUALDAD DE FUNCIONES

a. Pudiere pensarse que las funciones de reglas de correspondencia

$$f(x) = \frac{x}{x} \text{ y } g(x) = 1$$

son iguales, sin embargo,

$$f(0) = \frac{0}{0} \text{ no está definido y } g(0) = 1.$$

Esto significa que el número $x = 0$ pertenece al conjunto $dom(g)$ pero no pertenece al conjunto $dom(f)$, entonces $f \neq g$.

b. Sean las funciones con regla de correspondencia $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ y $g(x) = x + 1$. Observa que

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x + 1,$$

sin embargo, $f \neq g$ puesto que

$$f(1) = \frac{1^2 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0} \text{ (no existe) y } g(1) = 1 + 1 = 2.$$

c. Sean $f(x) = \frac{3x^2}{3x}$ y $g(x) = x$, "algebraicamente son equivalentes",

$$f(x) = \frac{3x^2}{3x} = x = g(x) \text{ sin embargo, } g(0) = 0 \text{ y } f(0) = \frac{0}{0},$$

Como consecuencia $f \neq g$.

Con el propósito de dar formalidad a nuestro estudio de las funciones ahora desarrollaremos la notación (simbología) para escribir sus elementos adecuadamente.
Las representaciones

$$f : A \rightarrow IR \qquad\qquad A \xrightarrow{f} IR$$

FIGURA 5

se interpretan: la función f con dominio en el conjunto A y contradominio en el conjunto de los números reales.

Frecuentemente utilizaremos a la línea recta real (o a parte de ella) para representar el dominio de una función real de variable real, ahora estableceremos la notación y el lenguaje que utilizaremos.

i. El conjunto de los números reales lo representamos con el símbolo IR o en forma de intervalo por $(-\infty, +\infty)$ con representación:

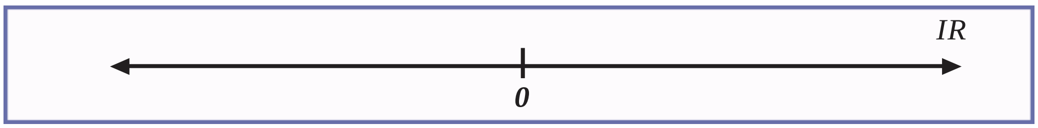


FIGURA 6

ii. El símbolo " $>$ " se llama relación de orden total, con él indicaremos que un número (o un conjunto de números) es mayor (son mayores) que otro número. En el contexto de los números reales, la expresión " $x > a$ ", se lee y hace referencia a "los números reales mayores al número a ", esto también se escribe como intervalo en la forma $(a\ ,\ +\infty)$ y se representa en la línea recta real en las formas:

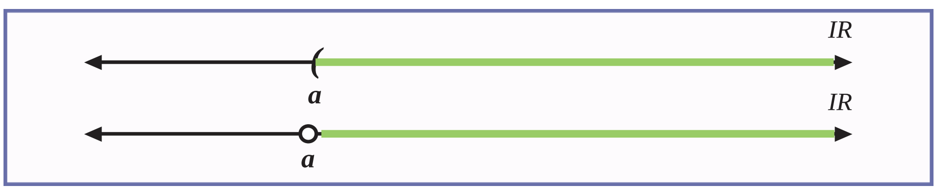


FIGURA 7

El símbolo " $<$ " indica: un número (o que un conjunto de números) es menor que otro. La expresión " $x < a$ ", indica: "los números reales x que son menores al número y es equivalente al intervalo $(-\infty\ ,\ a)$, se representa en las formas:

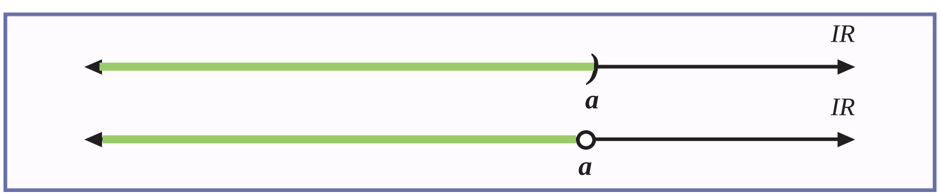


FIGURA 8

iii. El símbolo " $\geq$ " se llama relación de orden parcial, indica que un número (o que un conjunto de números) es mayor o igual que el número a , equivale al intervalo $[\,a\,,\,+\infty\,)$, se representa por:

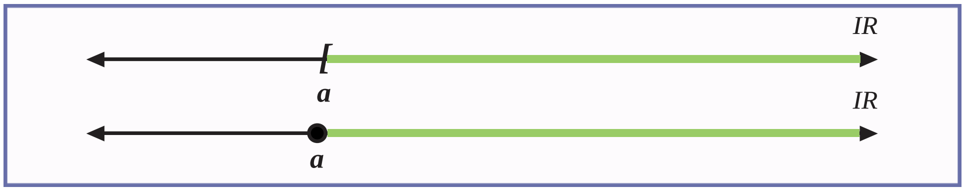


FIGURA 9

iv. El símbolo " $\leq$ " indica que un número (o que un conjunto de números) es menor o igual que cierto número específico. La expresión " $x \leq a$ ", se refiere a "los números reales menores o iguales al número a ", en la forma de intervalo se escribe como $(\,-\infty\,,\,a\,]$, se representa en las formas:

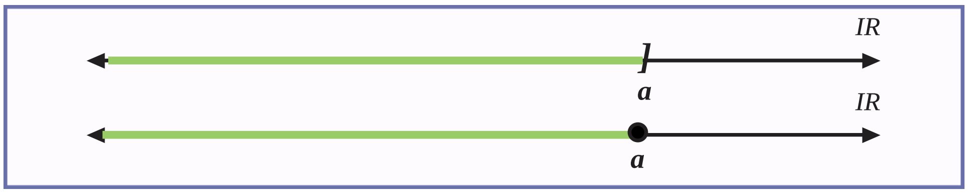


FIGURA 10

En el estudio de las funciones también se utilizan expresiones que resultan de la combinación de las relaciones de orden antes señaladas, destacan:

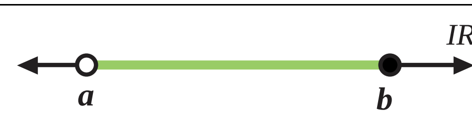
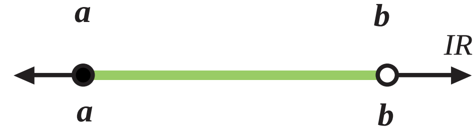
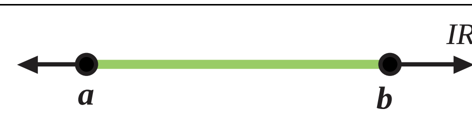
REPRESENTACIÓN			
NOMBRE	**INTERVALO**	**COMO CONJUNTO**	**EN LA LÍNEA RECTA REAL**
ABIERTO (no contiene los extremos)	$(\,a\,,b\,)$	$\{x \in IR \mid a < x < b\}$	
SEMIABIERTO (no incluye uno de los extremos)	$(\,a\,,b\,]$	$\{x \in IR \mid a < x \leq b\}$	
	$[\,a\,,b\,)$	$\{x \in IR \mid a \leq x < b\}$	
CERRADO (contiene los extremos)	$[\,a\,,b\,]$	$\{x \in IR \mid a \leq x \leq b\}$	

TABLA 1

EJEMPLO 5 DOMINIO E IMAGEN DE UNA FUNCIÓN

a. La función con regla de correspondencia $f(x)=x^2+5$ tiene como dominio

$$dom(f)=IR=(-\infty,+\infty)$$

(cualquier número real puede ser elevado al cuadrado y posteriormente se puede sumarle cinco), su imagen (o rango o recorrido) son los números reales mayores o iguales que 5, ¿por qué?, la frase los números reales mayores o iguales que 5 se representa por

$$rec(f)=\{x \mid x\geq 5\}=[5,+\infty).$$

b. El área de un círculo depende de la longitud r de su radio, la relación entre ambas variables es $A(r)=\pi r^2$ y el dominio está constituido por los números reales no negativos,

$$dom(A)=\{r \mid r\geq 0\}=[0,+\infty).$$

La imagen (recorrido o rango) es el conjunto de los números reales no negativos

$$rec(A)=\{A \mid A\geq 0\}=[0,+\infty).$$

Observación: En un contexto general en que r carece de significado el dominio son todos los números reales, es decir,

$$dom(A)=IR=(-\infty,+\infty).$$

c. En un cubo cuyos lados miden x unidades, la relación $V(x)=x^3$ representa su volumen, puesto que las longitudes de los lados del cubo son positivas, tiene dominio

$$dom(V)=\{x \mid x\geq 0\},$$

la imagen (rango o recorrido) lo constituyen todos los números no negativos, simbólicamente

$$rec(V)=\{V \mid V\geq 0\}=[0,+\infty).$$

Observación: Si x es sólo una variable y no representa una longitud, entonces

$$dom(V)=IR \text{ y } rec(V)=\{V \mid V\in IR\}=(-\infty,+\infty).$$

Las funciones (en particular las funciones reales de variable real) tienen asociada una representación en el plano cartesiano, que pone de manifiesto su comportamiento y algunas de sus propiedades.

DEFINICIÓN 3 GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

a. La gráfica de la función f, es el conjunto $G_f=\{(x,y):\ x\in dom(f)\ \text{ y }\ y=f(x)\}$.

b. La representación del conjunto $G_f=\{(x,y):\ x\in dom(f)\ \text{ y }\ y=f(x)\}$ en el plano cartesiano es “la representación gráfica de la función f.

La *definición 3* asocia a la función f una representación en el plano cartesiano, que está compuesta por un conjunto de sus puntos y que en las funciones que trataremos se manifestarán como una línea que llamaremos curva.

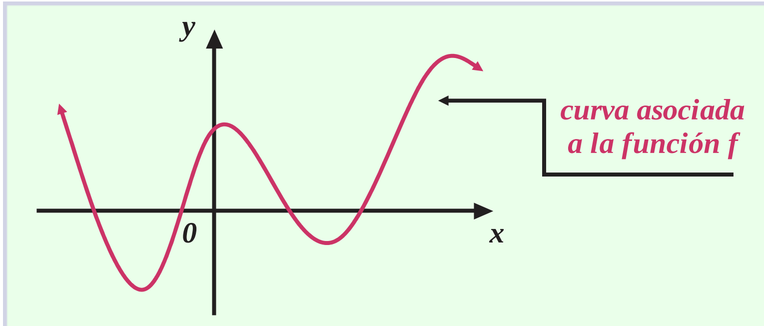


FIGURA 11

NOTA
En la literatura es común llamar gráfica de la función a una figura y no al conjunto de puntos que la definen.

Analizando la representación gráfica de una relación entre dos variables (una independiente y una dependiente) es posible conocer si ésta pertenece a una función o en su caso a una relación. Para responder la pregunta ¿cuándo una curva en el plano corresponde a una función? se utiliza el siguiente criterio o regla de **LA LÍNEA RECTA VERTICAL.**

"Una curva, en el plano cartesiano corresponde a una función f, si y sólo si, cualquier línea recta de ecuación de la forma $x = x_0$ (para x_0, en el dominio de la función) interseca a la curva asociada a f en sólo un punto".

EJEMPLO 6 DETERMINANDO LA CURVA ASOCIADA A UNA FUNCIÓN
En la figura sólo la curva de la izquierda pertenece a una función, al desplazar la línea recta vertical de ecuación $x = x_0$ de izquierda a derecha sólo interseca en un solo punto a la curva, esto significa que a todo número del dominio de la función le corresponde un único número del contradominio de la función.

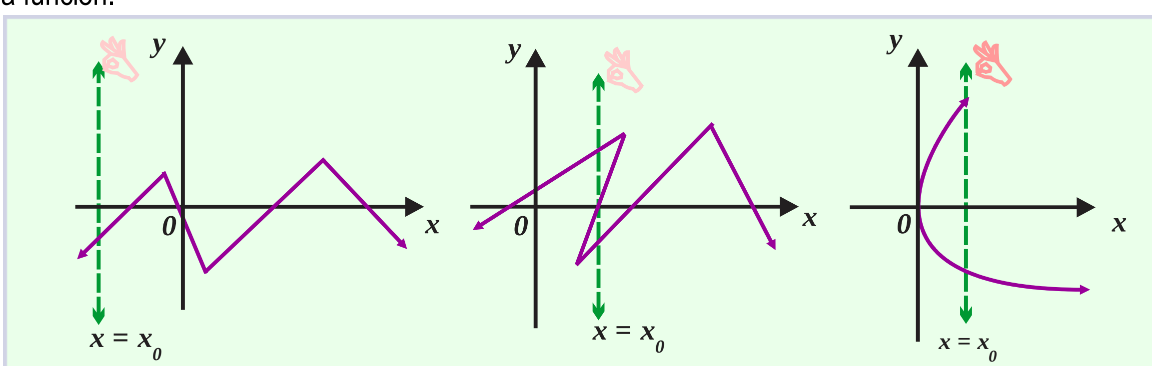


FIGURA 12

De la representación gráfica de una función f también es posible determinar su dominio y el recorrido de una función.

EJEMPLO 7 DOMINIO Y RECORRIDO A PARTIR DE LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA

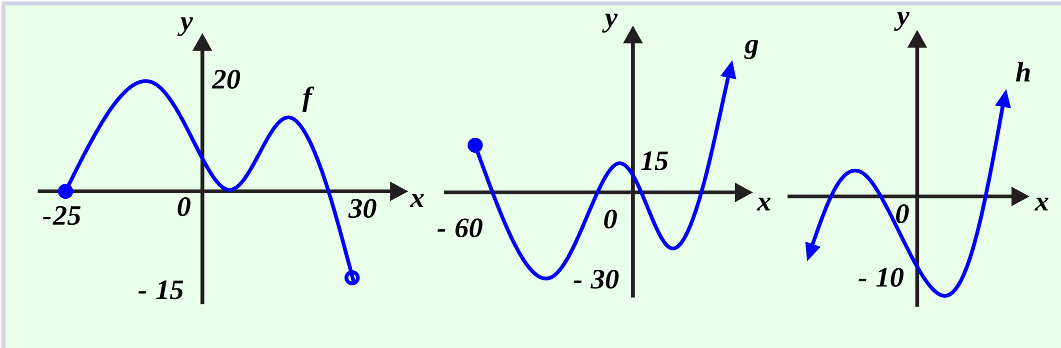


FIGURA 13

a. Si en la figura de la izquierda proyectamos la curva asociada a la función f sobre:

i. El eje horizontal (de las equis) obtenemos: $dom\ (f) = [-25, 30]$.

ii. El eje vertical (de las yes) obtenemos: $rec\ (f) = [-15, 20]$.

b. Si en la figura del central proyectamos la curva asociada a la función g sobre:

i. El eje horizontal (de las equis) obtenemos: $dom\ (g) = [-60, +\infty)$.

ii. El eje vertical (de las yes) obtenemos: $rec\ (g) = [-30, +\infty)$.

c. Si en la figura de la derecha proyectamos la curva asociada a la función h sobre:

i. El eje horizontal (de las equis) obtenemos: $dom\ (h) = IR = (-\infty, +\infty)$, las puntas de las flechas en la curva así lo indican.

ii. El eje vertical (de las yes) obtenemos: $irec\ (h) = IR = (-\infty, +\infty)$, las puntas de las flechas en la curva así lo indican.

SECCIÓN 1.1
EJERCICIOS 1

1. Clasifica como función con una F en el paréntesis o como no función con NF en el paréntesis.

a. ( ) A cada persona se le asocia su estatura.

b. ( ) En toda una ciudad, a un mismo objeto se le asocia su precio.

c. ( ) A todo número real positivo se le asocias su raíz cuadrada.

d. ( ) A cada persona un nombre.

e. ( ) A todo “predio” su área.

f. ( ) A un cuadrado, la longitud de su lado.

g. ( ) A un rectángulo de área fija la longitud de su base.

h. ( ) A toda esfera su volumen.

i. ( ) A cada ordenada de punto de una línea recta (en el plano cartesiano) su abscisa.

j. (   ) A cada abscisa de punto de una línea recta (en el plano cartesiano) su ordenada.

2. Responde, verdadero (V) o falso (F) según corresponde.

a. (   ) El dominio de una función también se llama recorrido.

b. (   ) El rango de una función también se llama contradominio.

c. (   ) La preimagen es un número (o valor) asignado a la variable independiente de una función.

d. (   ) Una función es una regla de correspondencia.

e. (   )Una función consta de tres partes.

f. (   ) El dominio de una función puede no tener elementos.

g. (   )El rango (recorrido o conjunto imagen puede no tener elementos.

h. (   ) Existen funciones que no tiene regla de correspondencia.

i. (   ) Un intervalo cerrado incluye a sus extremos.

j. (   ) Existen intervalos de números reales que no son abiertos y no son cerrados.

k. (   )Todas las funciones tienen como dominio a un intervalo de números reales.

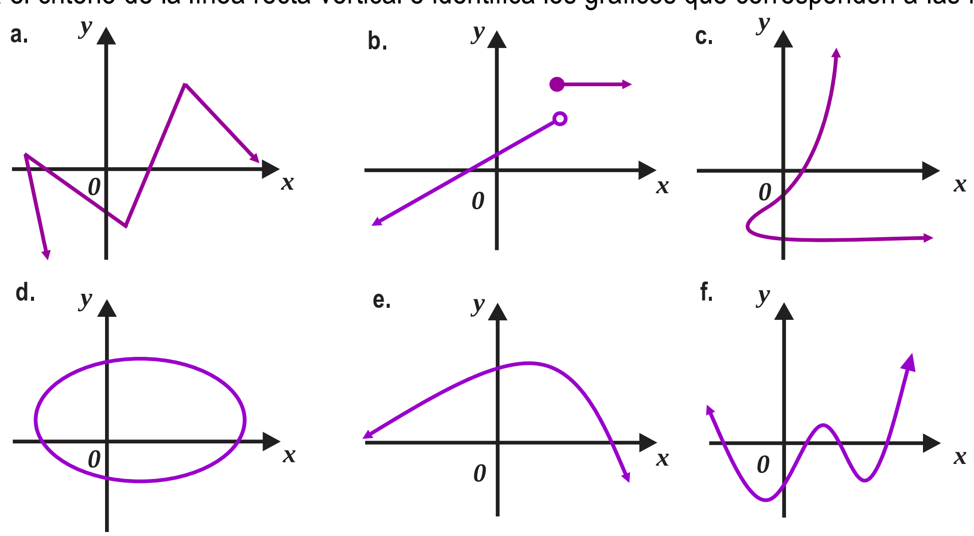
l. (   ) Todos los intervalos cerrados tienen dos elementos.

m. (   )El conjunto de los números reales se representan en forma de intervalo por $(-\infty, +\infty)$.

n. (   ) Existen funciones que no tienen contradominio.

o. (   ) Dos funciones iguales pueden tener distintos dominios.

3. Utiliza el criterio de la línea recta vertical e identifica los gráficos que corresponden a las funciones.



4. ¿En qué condición, los pares de “reglas de correspondencia” representan la misma función?

a. $f(x)=5$ y $g(x)=\dfrac{5x}{x}$.

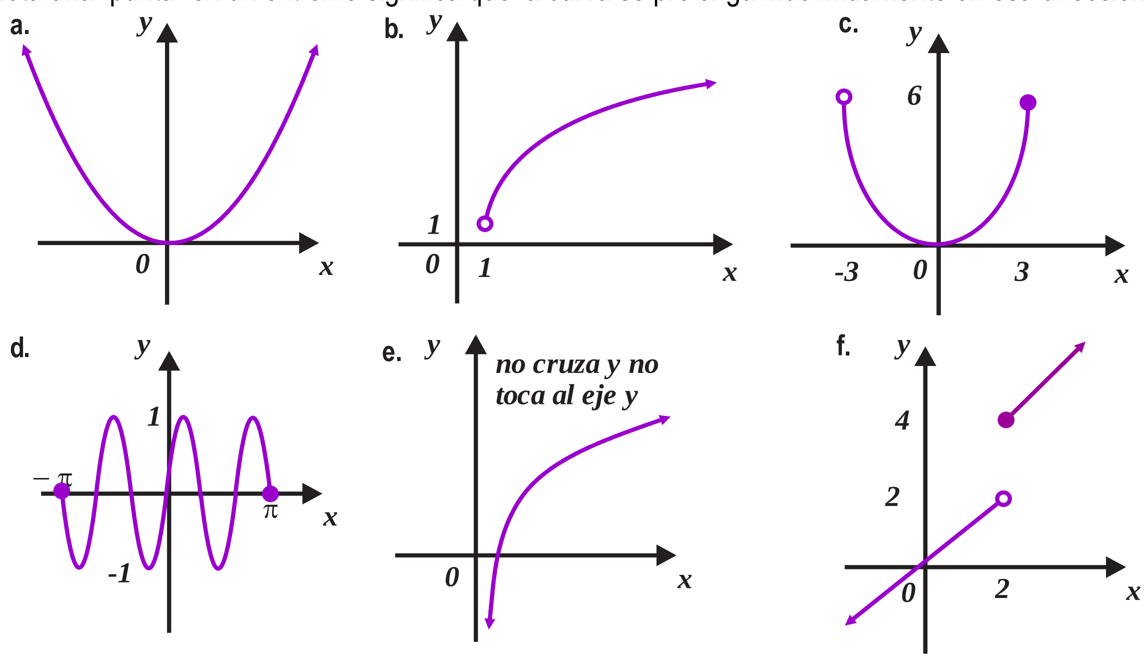
b. $f(x)=5$ y $g(x)=\dfrac{x-5}{2x-10}$.

c. $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$ y $g(x)=\dfrac{1}{x+1}$.

d. $f(x)=\dfrac{x^3+x}{x^2+1}$ y $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.

5. Utiliza la notación de intervalos para representar: **i.** El dominio. **ii.** El recorrido (rango o conjunto imagen) de las funciones asociadas a las representaciones gráficas.

Nota una “punta” en un extremo significa que la curva se prolonga indefinidamente en esa dirección.



6. Responde las preguntas o completa la frase.

a. La variable a la que le son asignados los números se denomina ____________________________

b. Los elementos que constituyen a una función real de variable real son ______________________

____

c. El dominio de una función f son aquellas asignaciones a la variable independiente de manera que: _____________________________________.

d. Un intervalo es _____________________________________ de números reales.

e. Los intervalos de números reales se clasifican en las tres siguientes categorías:

____

f. La ____________________________es una asignación a la variable independiente de una función.

g. El conjunto imagen de una función también se denomina: ____________________________.

h. Si la curva asociada a una función se proyecta sobre el eje de las abscisas, esta proyección coincide con ____________________________de la función.

i. ¿Por qué dos funciones con la misma regla de correspondencia pueden ser diferentes?

____

j. El rango (recorrido o conjunto imagen) de una función f es un subconjunto de su ______________________________

SECCIÓN 1.2 FUNCIONES POLINOMIALES

APRENDIZAJES

2. Comprenderá el significado de la notación funcional y la utilizará para representar y evaluar funciones polinomiales.
Usará la notación de intervalos para representar dominio y rango de una función.

3. Aplicará división sintética, el teorema del residuo, el teorema del factor y su recíproco para determinar los ceros de $f(x)$ y su gráfica.

4. Construirá una función polinomial a partir de las raíces de su ecuación y a partir de una función polinomial calculará los ceros y realizará su gráfica.

5. Reconoce a las funciones como modelos de variación de fenómenos naturales, económicos y sociales.

TEMÁTICA

2. Notación funcional

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$$

Intervalos.

3. División sintética, teorema del residuo, teorema del factor y su recíproco. Ceros de la función y raíces reales y complejas de la ecuación. Raíces de multiplicidad impar o par para observar el comportamiento gráfico. Graficación de funciones.

4. Cálculo de ceros y graficación de funciones.

5. Problemas de aplicación.

Las funciones polinomiales se utilizan frecuentemente en la modelación y análisis de situaciones relacionas con estructuras para almacenar productos (cajas, tanques, recipientes, etcétera), problemas de resistencia de materiales, para aproximar funciones más complejas y definir otro tipo de funciones.

DEFINICIÓN 1 POLINOMIO

La expresión $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$
se llama polinomio en el indeterminado (o indefinido) x.
a. n es un número entero positivo, es la mayor de las potencias de la variable x, y también es el grado del polinomio.
b. $a_n,\ a_{n-1},\ \ldots,\ a_3,\ a_2,\ a_1,\ a_0$, donde $a_n \neq 0$ son números reales y se llaman coeficientes.
c. $a_n x^n,\ a_{n-1}x^{n-1}, \cdots,\ a_3 x^3,\ a_2 x^2,\ a_1 x$ y a_0 son los términos del polinomio.
d. $a_n x^n$ es el término dominante (o término líder), a_0 es el término independiente.

Con los polinomios en el indeterminado (o indefinido) x se puede construir otro tipo de "entes matemáticos", tal como lo muestra la figura 1.

POLINOMIO CON INDETERMINADO x

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0$$

ECUACIONES POLINOMIALES

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0 = 0$$

x es la incógnita

FUNCIONES POLINOMIALES

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0$$

x es la variable independiente

FIGURA 1

DEFINICIÓN 2 FUNCIÓN POLINOMIAL

Si en el polinomio $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$ se interpreta:
a. a x como la variable independiente.
b. n es un número entero positivo.
c. $a_n,\ a_{n-1},\ \ldots,\ a_3,\ a_2,\ a_1,\ a_0$, donde $a_n \neq 0$ son números reales.
d. $dom(p) = (-\infty, +\infty)$.
Entonces recibe el nombre de función polinomial.

Otras características de la función polinomial $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$ son:

c. $a_n x^n, \cdots, a_2 x^2, a_1 x$ y a_0 son los términos de la función polinomial.

d. $a_n x^n$ es el término dominante (o término líder) y a_0 es el término independiente.

Aunque: los polinomios, las ecuaciones y las funciones polinomiales poseen estructuras muy parecidas son entes (objetos matemáticos) muy distintos y no deben confundirse, la tabla destaca algunas de sus diferencias.

	INCÓGNITA	**VARIABLE**	**CEROS**	**SOLUCIONES**	**DOMINIO**	**IMAGEN**
Función polinomial	NO	SI	SI	NO	SI	SI
Ecuación polinomial	SI	NO	NO	SI	NO	NO

RAÍCES

Números que al sustituirse en la ecuación polinomial

$a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 = 0$ generan la identidad $0 = 0$.

CEROS

Números x_0 asignados a la variable x en $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$, tales que

$$p(x_0) = 0.$$

EJEMPLO 1 CARACTERÍSTICAS DE FUNCIONES POLINOMIALES

FUNCIÓN	VARIABLE	GRADO	TÉRMINO LÍDER	TERMINO INDEPENDIENTE.
$p(x) = 7x^2 - 8x$	x	2	$7x^2$	0
$p(t) = -5t^3 - 34t^2 - 43t + 10$	t	3	$-5t^3$	10
$p(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 4x + 2$	x	3	x^3	2
$p(s) = s^4 - 6s^3 + 8s^2 + 8s - 9$	s	4	s^4	-9

El dominio (natural) de la función polinomial con regla de correspondencia

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$$

es el intervalo

$$dom(p) = (-\infty, +\infty)$$

salvo cuando en un contexto específico se indica otra cosa.

El comportamiento (gráfico) de una función polinomial se facilita cuando su regla de correspondencia está factorizada, es decir, si presenta la forma

$$p\left(x\right)=a_n\left(x-x_{0n}\right)\left(x-c_{0n-1}\right)\cdots\left(x-x_{02}\right)\left(x-c_{01}\right)$$

en donde

$$c_{01},\ c_{02},\cdots,\ c_{0n-1},\ c_{0n}$$

son los ceros de la función polinomial y los binomios $\left(x-c_{0i}\right)$ son los factores, por tanto, es necesario establecer los ***elementos algebraicos*** básicos para escribir

$$p\left(x\right)=a_nx^n+\cdots+a_2x^2+a_1x^1+a_0$$

en la forma

$$p\left(x\right)=a_n\left(x-x_{0n}\right)\left(x-c_{0n-1}\right)\cdots\left(x-x_{02}\right)\left(x-c_{01}\right).$$

El primero de estos "***elementos algebraicos***" es la propiedad conocida como **TEOREMA DE LOS CEROS RACIONALES,** propiedad que a continuación presentamos**.**

TEOREMA 1., DE LOS CEROS (RAÍCES) RACIONALES

Sea $p\left(x\right)$ un polinomio con: indeterminado x, coeficientes enteros, coeficiente dominante $a_n\neq 0$, y coeficiente independiente $a_0\neq 0$. Si la fracción irreducible $\frac{u}{v}$ es una de sus raíces, entonces el número u es divisor del coeficiente a_0 y el número v es divisor del coeficiente a_n.

En el teorema de los ceros racionales la frase: "entonces el número u es divisor del coeficiente a_0" significa determinar los números enteros que dividen al número a_0 de manera que el cociente es un número entero. El siguiente proceso indica la forma en que se aplica el teorema de las raíces racionales.

ALGORITMO PARA DETERMINAR LAS POSIBLES RAÍCES RACIONALES

Sea

$$p\left(x\right)=a_nx^n+\cdots+a_2x^2+a_1x^1+a_0.$$

1. Identifica el coeficiente independiente $a_0\neq 0$ y construye la lista de todos sus factores.

2. Identifica el coeficiente dominante $a_n\neq 0$ y enlista todos sus factores.

3. Forme todas las divisiones:

$$\frac{factores\ \ del\ \ coeficiente\ \ independiente}{factores\ \ del\ \ coeficiente\ \ dominante}.$$

EJEMPLO 2 DETERMINACIÓN DE POSIBLES CEROS EN FUNCIONES POLINOMIALES

a. $p\left(x\right)=2x^3+7x^2+7x+2$.

$a = 2$	**divisores** -2, -1, 1, 2

$a_n = 2$
divisores - 2, - 1, 1, 2

	-2	-1	1	2
-2	$\frac{-2}{-2}$	$\frac{-1}{-2}$	$\frac{1}{-2}$	$\frac{2}{-2}$
-1	$\frac{-2}{-1}$	$\frac{-1}{-1}$	$\frac{1}{-1}$	$\frac{2}{-1}$
1	$\frac{-2}{1}$	$\frac{-1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$
2	$\frac{-2}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$

los posibles ceros racionales son:

$-2 \quad -1 \quad \frac{-1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad 2$

b. $p(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9$

$a = 9$	**divisores** -9, -3, 1, 1, 3, 9

$a_n = 1$
divisores - 1, 1

	-9	-3	-1	1	3	9
-1	$\frac{-9}{-1}$	$\frac{-3}{-1}$	$\frac{-1}{-1}$	$\frac{1}{-1}$	$\frac{3}{-1}$	$\frac{9}{-1}$
1	$\frac{-9}{1}$	$\frac{-3}{1}$	$\frac{-1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{9}{1}$

los posibles ceros racionales son:

-9 -3 -1
1 3 9

Identificados los posibles ceros raciones se deben seleccionar aquellos que, si lo son, esto puede realizarse por sustitución directa en el polinomio o aplicando las propiedades algebraicas que a continuación desarrollamos.

DEFINICIÓN 3 ALGORITMO DE LA DIVISIÓN

La expresión $g(x)\overline{\left)\, p(x) \right.}$ o en forma equivalente $\dfrac{p(x)}{g(x)}$ significa: existen polinomios únicos $q(x)$ y $r(x)$ tales que $\dfrac{p(x)}{g(x)} = q(x) + \dfrac{r(x)}{g(x)}$ o bien $p(x) = g(x)\cdot q(x) + r(x)$.

$p(x)$ es el polinomio dividendo.

$g(x)$ es el polinomio divisor.

$q(x)$ es el polinomio cociente.

$r(x)$ es el polinomio RESIDUO o polinomio RESTO.

En esta guía sólo son de nuestro interés divisiones de la forma

$$x-c\;\overline{\big)\; a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0}$$

en que n es un número natural (entero y positivo); y considerando que la división de polinomios se estudia en curso previos al de Matemáticas IV, solamente trataremos el "método de la división sintética (o regla de Ruffini) en la ejecución de la operación antes señalada.

REGLA DE RUFFINI (DIVISIÓN SINTÉTICA)

Para efectuar la división

$$x-x_0\;\overline{\big|\; a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0}$$

1. Ordena los términos del polinomio dividendo $p(x)$ en forma descendente y en una primera fila coloca los coeficientes, sustituye con un cero el coeficiente de los términos faltantes.

$$a_n \quad a_{n-1} \quad a_{n-2} \quad a_{n-3} \quad \ldots \quad a_1 \quad a_0$$

2. Escribe el número x_0 (nota el cambio de signo), "el divisor sintético", en la primera fila y a la izquierda de los coeficientes, deja una línea en blanco y traza segmentos rectilíneos como lo muestra la figura.

$$\begin{array}{c|ccccccc}
x_0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \ldots & a_1 & a_0 \\
 & & & & & & & \\
\hline
 & & & & & & &
\end{array}$$

3. Coloca el coeficiente a_n al inicio de la tercera fila (justo debajo del segmento rectilíneo horizontal (nota el cambio de signo).

$$\begin{array}{c|ccccccc}
x_0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \ldots & a_1 & a_0 \\
 & & & & & & & \\
\hline
 & a_n & & & & & &
\end{array}$$

4. Multiplica a_n por x_0; escribe el producto $x_0 \cdot a_n$ en la segunda fila, exactamente debajo del número a_{n-1}, súmalo con a_{n-1} y escribe la suma $a_n\, x_0 + a_{n-1}$ en la tercera fila debajo de a_{n-1}.

$$\begin{array}{c|ccccccc}
x_0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \ldots & a_1 & a_0 \\
 & & x_0 \cdot a_n & & & & & \\
\hline
 & a_n & x_0 \cdot a_n + a_{n-1} & & & & &
\end{array}$$

5. Repite el proceso del paso anterior hasta que haya sumado un producto al término constante del polinomio a_0.

Los primeros n números de la tercera fila son los coeficientes del polinomio cociente, que es un polinomio de grado $n-1$, y el último número r de la tercera fila es el resto o residuo.

EJEMPLO 3 APLICANDO DE LA REGLA DE RUFFINI

a. Resolvamos por división sintética

$$x-4\;\overline{\big)\;5x^3-8x^2+2x-6}$$

1. Los términos de los polinomios ya están ordenados en forma decreciente.

2. Listamos los coeficientes.

$$\begin{array}{c|cccc} 4 & 5 & -8 & 2 & -6 \\ & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

3. Colocamos el primer coeficiente en la fila tres.

$$\begin{array}{c|cccc} 4 & 5 & -8 & 2 & -6 \\ & & & & \\ \hline & 5 & & & \end{array}$$

4. Multiplicamos el primer coeficiente de la fila tres por 4 y colocamos el resultado abajo del siguiente coeficiente, efectuamos la suma.

$$\begin{array}{c|cccc} 4 & 5 & -8 & 2 & -6 \\ & & 20 & & \\ \hline & 5 & 12 & & \end{array}$$

5. Repetimos el paso anterior utilizando todos los coeficientes.

$$\begin{array}{c|cccc} 4 & 5 & -8 & 2 & -6 \\ & & 20 & 48 & 200 \\ \hline & 5 & 12 & 50 & 194 \end{array} \quad \textit{residuo}$$

6. Los primeros tres números de la tercera fila son los coeficientes del cociente

$$q(x),$$

el último término es el residuo, entonces

$$q(x)=5x^2+12x+50 \text{ y } r=194,$$

por tanto,

$$\frac{5x^3-8x^2+2x-6}{x-4}=5x^2+12x+50+\frac{194}{x-4}.$$

b. Resolvamos por división sintética

$$x+2\;\overline{\big)\;2x^4-x^3+11x^2+4x+14}$$

1. Los términos de los polinomios ya están ordenados de forma decreciente.

2. Escribimos los coeficientes.

$$\begin{array}{c|ccccc} -2 & 2 & -1 & -11 & 4 & 14 \\ & & & & & \\ \hline & & & & & \end{array}$$

3. Colocamos el primer coeficiente en la fila tres.

$$\begin{array}{c|ccccc} -2 & 2 & -1 & -11 & 4 & 14 \\ & & & & & \\ \hline & 2 & & & & \end{array}$$

4. Multiplicamos el primer coeficiente de la fila tres por -2 y colocamos el resultado abajo del siguiente coeficiente, efectuamos la suma.

$$\begin{array}{c|ccccc} -2 & 2 & -1 & -11 & 4 & 14 \\ & & -4 & 10 & 2 & -12 \\ \hline & 2 & -5 & -1 & 6 & 2 \end{array} \quad \textit{residuo}$$

5. Repetimos el paso anterior utilizando todos los coeficientes.

$$\begin{array}{c|ccccc} -2 & 2 & -1 & -11 & 4 & 14 \\ & & -4 & 10 & 2 & -12 \\ \hline & 2 & -5 & -1 & 6 & 2 \end{array} \quad \textit{residuo}$$

6. Los primeros cuatro números de la tercera fila son los coeficientes del cociente

$$q(x),$$

el último término es el residuo, entonces

$$q(x)=2x^3-5x^2-x+6 \text{ y } r=2,$$

por tanto,

$$\frac{2x^4-x^3-11x^2+4x+14}{x+2}=2x^3-5x^2$$

$$=-x+6+\frac{2}{x+2}$$

Obtenidos los posibles ceros racionales (o raíces en el caso de ecuaciones) es necesario verificar cuáles de ellos lo son, la propiedad algebraica que lo facilita es el teorema del residuo (o resto)

TEOREMA 2. DEL RESIDUO

Sea $p(x)$ un polinomio con indeterminado x. Si dividimos $p(x)$ entre $x - x_0$, entonces el residuo es

$$p(x_0) = r.$$

NOTA

$p(x_0) = r$ indica:

i. Se puede evaluar una función polinomial en el número x_0 por medio con la división

$$x - x_0 \overline{\big)\, p(x)}.$$

ii. El residuo de $x - x_0 \overline{\big)\, p(x)}$ es $r = p(x_0)$.

EJEMPLO 4 EL TEOREMA DEL RESIDUO EN LA EVALUACIÓN DE FUNCIONES POLINOMIALES

Calcula el residuo $p(x_0) = r$, primero evaluando directamente en la función polinomial y luego utilizando el teorema del residuo.

a. Sea $p(x) = 2x^4 - x^2 + 4x - 2$.

i. Directamente,

$$p(3) = 2(3)^4 - (3)^2 + 4(3) - 2 = 162 - 9 + 12 - 2 = 163.$$

ii. Por medio del teorema del residuo requerimos realizar la división $x - 3 \overline{\big)\, 2x^4 + 0x^3 - x^2 + 4x - 2}$ resolviendo por división sintética:

3	2	0	-1	4	-2	
		6	18	51	165	residuo
	2	6	17	55	$\boxed{163}$	

b. Sea $p(x) = -3 + 5x - 4x^3$.

i. Directamente, $p(-1) = -3 + 5(-1) - 4(-1)^3 = -4$.

ii. Por medio del teorema del residuo es necesario realizar la división $x + 1 \overline{\big)\, -4x^3 + 0x^2 + 5x - 3}$ resolviendo por división sintética:

-1	-4	0	5	-3	
		4	-4	-1	residuo
	-4	4	1	$\boxed{-4}$	

EJEMPLO 5 CÁLCULO DEL RESIDUO

Calcula el residuo efectuando la división sintética correspondiente y luego aplicando el teorema del residuo.

a. Sea $x-2\overline{\big)\,7x^3-4x+5}$.

i. Por el teorema del residuo:

2	7	0	-4	5	
		14	28	48	residuo
	7	14	24	$\boxed{53}$	

ii. Directamente, sean $p(x)=7x^3-4x+5$ y $x_0=2$, entonces

$$p(2)=7(2)^3-4(2)+5=56-8+5=53, \text{ luego } r=53.$$

b. $x+1\overline{\big)\,x^4-x^3+2x^2-x+4}$.

i. Por el teorema del residuo:

-1	1	-1	2	-1	4	
		-1	2	-4	5	residuo
	1	-2	4	-5	$\boxed{9}$	

ii. Directamente, sean $p(x)=x^4-x^3+2x^2-x+4$ y $x_0=-1$, entonces

$$p(-1)=(-1)^4-(-1)^3+2(-1)^2-(-1)+4=1+1+2+1+4=9, \text{ luego } r=9.$$

A primera vista el uso de una división (para evaluar una función polinomial en el número x_0 o para obtener el residuo de la división de polinomios $x-x_0\overline{\big)\,p(x)}$) complica los cálculos, sin embargo, parte de su importancia consiste en que suele facilitar una primera factorización del polinomio dividendo. Consecuencia del teorema del residuo es la propiedad llamada TEOREMA DEL FACTOR.

TEOREMA 3. DEL FACTOR

El polinomio $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ tiene como factor $x-x_0$, si y sólo si $p(x_0)=0$.

EJEMPLO 6 FACTORES

Decide si el binomio $x+1$ es factor de la función polinomial $p(x)=x^4-x^3+2x^2-x-5$ de las siguientes formas, **i.** Por evaluación en la función polinomial, **ii.** Realizando una división. **iii.** Si es el caso factoriza.

i. Evaluando: sean

$$p(x)=x^4-x^3+2x^2-x-5 \text{ y } x_0=1,$$

entonces

$$p(-1)=(1)^4-(-1)^3+2(-1)^2-(-1)-5=0$$

Dado que $r = p(-1) = 0$ concluimos que $x+1$ es un factor de $p(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - x - 5$.

ii. Efectuando la división

$$x + 1 \;\overline{\big)\; x^4 - x^3 + 2x^2 - x - 5}$$

Por división sintética

$$\begin{array}{r|rrrrr}
-1 & 1 & -1 & 2 & -1 & -5 \\
 & & -1 & 2 & -4 & 5 \\
\hline
 & 1 & -2 & 4 & -5 & \boxed{0}
\end{array} \quad \textit{residuo}$$

El polinomio cociente es

$$q(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 5.$$

iii. Puesto que $r = 0$, entonces el binomio $x+1$ es factor de $p(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - x - 5$ y utilizando

$$q(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 5$$

obtenemos,

$$p(x) = (x+1)(x^3 - 2x^2 + 4x - 5).$$

Los polinomios (en el contexto de funciones y ecuaciones polinomiales) tiene la característica de cumplir la propiedad conocida como Teorema Fundamental del Álgebra.

TEOREMA 4. FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA

El polinomio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ tiene al menos una raíz (o cero).

El *teorema fundamental del álgebra* es una propiedad de existencia, garantiza la existencia de raíces (o en su caso de ceros) en todas las ecuaciones (o funciones) polinomiales, sin embargo, no dice cuantas raíces tiene un polinomio y no proporciona un método para calcularlas (calcularlos). Consecuencia del *Teorema Fundamental del Álgebra* es el siguiente corolario (consecuencia inmediata de un teorema ya justificado) que limita el número de raíces (o ceros) de un polinomio de grado n.

COROLARIO DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA

El polinomio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ (con término líder de grado n) tiene a lo más n raíces reales.

Con base en la propiedad anterior en la búsqueda (o factorización) del polinomio

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

no encontraremos más de n ceros (o factores).

EJEMPLO 7 NÚMERO DE CEROS DE UNA FUNCIÓN POLINOMIAL

Con base en el Teorema Fundamental del Algebra y sus consecuencias:

$p(x)=2x^3+3x^2-18x+8$.

a. La función $p(x)=2x^3+3x^2-18x+8$ tiene como máximo tres ceros.

b. La función $p(x)=-4x^5+5x^3+3x^2-6x-4$ tiene un máximo de cinco ceros.

c. La función $r(x)=-x^2-4$ tiene a lo más dos ceros.

d. La función $r(t)=r^6-5r^4-4$ tiene como máximo seis ceros.

Debemos tener en cuenta que una raíz (o cero) de una ecuación (función polinomial) puede repetirse, el número de veces que se repite recibe el nombre de multiplicidad. Puede ocurrir que alguno de los ceros de una función polinomial (o en su caso de una ecuación polinomial) se repitan o no sean números racionales, de la propiedad conocida como TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA (que a continuación enunciamos).

DEFINICIÓN 4 MULTIPLICIDAD DE UN CERO RAÍZ (O DE UNA RAÍZ)

Si $x=x_0$ es una raíz (o cero) del polinomio p (función) y $(x-x_0)^k$ uno de sus factores, entonces $x=x_0$ tiene multiplicidad k.

EJEMPLO 8 MULTIPLICIDAD DE CEROS (O RAÍCES)

a. En la función polinomial $p(x)=x^3-3x-2=(x+1)^2(x-2)$:

el cero $x=-1$ tiene multiplicidad 2.

el cero $x=2$ tiene multiplicidad 2.

b. En la función polinomial $p(s)=s^4+3s^3-7s^2-15s+18=(s+3)^2(s-2)(s-1)$:

el cero $s=-3$ tiene multiplicidad 2.

el cero $s=2$ tiene multiplicidad 1.

el cero $s=1$ tiene multiplicidad 1.

c. En la función polinomial $p(t)=t^5-t^4-14t^3+24s^2=t^2(t-3)(t-2)(t+4)$:

el cero $t=0$ tiene multiplicidad 2.

el cero $t=3$ tiene multiplicidad 1.

el cero $t=2$ tiene multiplicidad 1.

el cero $t-4$ tiene multiplicidad 1.

En los siguientes ejemplos utilizaremos las propiedades (definiciones, teoremas y corolarios) en la factorización de funciones polinomiales (lo que facilitará nuestro propósito que es “graficarlas”); para tal efecto puede ser de gran utilidad el siguiente proceso.

FACTORIZACIÓN DE LA FUNCIÓN POLINOMIAL $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$.

1. Determina los posibles ceros racionales.
2. Forma los factores que corresponden a los posibles ceros racionales.
3. Aplica división sintética para un factor que genera residuo cero. Si con cierto factor obtienes residuo $r=0$ rescribe la función polinomial según lo establece el algoritmo de la división como

$$p(x)=(x-x_0)q_1(x)$$

4. Repite el proceso anterior con $q_1(x)$ (analiza si puedes factorizar $q_1(x)$ aplicando un proceso más sencillo, si es el caso hazlo).

EJEMPLO 9 FACTORIZACIÓN DE UNA FUNCIÓN POLINOMIAL

Factorización de $p(x)=x^3-7x^2-x+7$.

Dado que $a_3=1$ los posibles ceros racionales son los factores de $a_0=7$, es decir, los números

$$x=-7,\ -1,\ 1,\ 7.$$

De $x=-7$ obtenemos que un posible factor es $x+7$, luego

$$\begin{array}{r|rrrr}
-7 & 1 & -7 & -1 & 7 \\
 & & -7 & 98 & -679 \\
\hline
 & 1 & -14 & 97 & \boxed{-672}
\end{array}\quad \textit{residuo}$$

Por ser $r=-672$ descartamos a $x+7$ como factor.
Otro posible factor es $x+1$, luego

$$\begin{array}{r|rrrr}
-1 & 1 & -7 & -1 & 7 \\
 & & -1 & 8 & -7 \\
\hline
 & 1 & -8 & 7 & \boxed{0}
\end{array}\quad \textit{residuo}$$

Dado que $r=0$, entonces $x+1$ es factor de $p(x)=x^3-7x^2-x+7$, además $q_1(x)=x^2-8x+7$ y finalmente $p(x)=(x+1)(x^2-8x+7)$.
El segundo factor puede ser factorizada fácilmente (es el producto de dos binomios con un término común y uno no común).

$$p(x)=(x+1)(x-1)(x-7).$$

EJEMPLO 10 FACTORIZACIÓN DE UNA FUNCIÓN POLINOMIAL

Factorización de $p(x)=x^4+4x^3-2x^2-12x+9$.

Aquí $a_4=1$, entonces los posibles ceros racionales son los factores de $a_0=9$, es decir, los números $x=-9,\ -3,\ -1,\ 1,\ 3,\ 9$. De $x=-9$ obtenemos un posible factor, $x+9$, luego

$$\begin{array}{r|rrrrr}
-9 & 1 & 4 & -2 & -12 & 9 \\
 & & -9 & 45 & -387 & 3591 \\
\hline
 & 1 & -5 & 43 & -399 & \boxed{3600}
\end{array}\quad \textit{residuo}$$

Si $r=3600$, entonces $x+9$ se descarta como factor. Otro posible factor es $x+3$,

$$\begin{array}{r|rrrrr} -3 & 1 & 4 & -2 & -12 & 9 \\ & & -3 & -3 & 15 & -9 \\ \hline & 1 & 1 & -5 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

residuo

Si $r=0$, entonces $x+3$ es factor de $p(x)=x^4+4x^3-2x^2-12x+9$, además

$$q_1(x)=x^3+x^2-5x+3$$

de donde

$$p(x)=(x+3)(x^3+x^2-5x+3).$$

Repetimos el proceso anterior con $q_1(x)=x^3+x^2-5x+3$.

Dado que $b_3=1$, entonces los posibles ceros racionales son los factores de $b_0=3$, es decir, los números $-3,\ -1,\ 1,\ 3$. De -3 obtenemos que un posible factor es $x+3$, luego

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 1 & 1 & -5 & 3 \\ & & -3 & 6 & -3 \\ \hline & 1 & -2 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

residuo

Si $r=0$, entonces $x+3$ es factor de $q_1(x)=x^3+x^2-5x+3$ y también $Q_2(x)=x^2-2x+1$, por tanto, $q_1(x)=x^3+x^2-5x+3=(x+3)(x^2-2x+1)$, o bien

$$q_1(x)=x^3+x^2-5x+3=(x+3)(x-1)^2.$$

De la primera y de la última factorización obtenemos:

$$p(x)=(x+3)(x^3+x^2-5x+3)=(x+3)(x+3)(x-1)^2=(x+3)^2(x-1)^2.$$

EJEMPLO 11 FACTORIZACIÓN DE UNA FUNCIÓN POLINOMIAL

Factorización de $p(x)=-4x^3+7x-3$.

En este caso $a_4=-4$ (divisores $-4,\ -2,\ -1,\ 1,\ 2,\ 4$) y $a_0=-3$ (divisores $-3,\ -1,\ 1,\ 3$).

Los posibles ceros racionales son los números:

$$x=-3,\ -\frac{3}{2},\ -1,\ -\frac{3}{4},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 3.$$

De -3 obtenemos que un posible factor es $x+3$, luego

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & -4 & 0 & 7 & -3 \\ & & 12 & -36 & 87 \\ \hline & -4 & 12 & -29 & \boxed{84} \end{array}$$

residuo

Puesto que $r=84$, entonces $x+3$ no es un factor. De -1 obtenemos que un posible factor es $x+1$.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & -4 & 0 & 7 & -3 \\ & & 4 & -4 & -3 \\ \hline & -4 & 4 & 3 & \boxed{-6} \end{array}$$

residuo

Puesto que $r=-6$, entonces $x+1$ no es un factor. De $-\frac{3}{2}$ obtenemos el posible factor es $x+\frac{3}{2}$.

$$\begin{array}{r|rrrr}
-3/2 & -4 & 0 & 7 & -3 \\
 & & 6 & -9 & 3 \\
\hline
 & -4 & 6 & -2 & \boxed{0}
\end{array} \quad \text{residuo}$$

Puesto que $r=0$, entonces $x+\frac{3}{2}$ es un factor y $q_1(x)=-4x^2+6x-2$,

$$p(x)=-4x^3+7x-3=\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(-4x^2+6x-2\right).$$

Repetimos el proceso anterior con la función polinomial $q_1(x)=-4x^2+6x-2$.

Si $b_2=-4$ y $b_0=2$, los posibles ceros racionales son los números $x=-2,\ -1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1,\ 2$.

Así, $x+2$ no es un factor puesto que

$$\begin{array}{r|rrr}
-2 & -4 & 6 & -2 \\
 & & 8 & -28 \\
\hline
 & -4 & 14 & \boxed{-30}
\end{array} \quad \text{residuo}$$

Para $x+1$ obtenemos

$$\begin{array}{r|rrr}
-1 & -4 & 6 & -2 \\
 & & 4 & -10 \\
\hline
 & -4 & 10 & \boxed{-12}
\end{array} \quad \text{residuo}$$

por lo que se descarta como factor. Si $x+\frac{1}{2}$, entonces

$$\begin{array}{r|rrr}
-1/2 & -4 & 6 & -2 \\
 & & 2 & -4 \\
\hline
 & -4 & 8 & \boxed{-6}
\end{array} \quad \text{residuo}$$

y se descarta.

Para $x-\frac{1}{2}$ obtenemos

$$\begin{array}{r|rrr}
1/2 & -4 & 6 & -2 \\
 & & -2 & 2 \\
\hline
 & -4 & 4 & \boxed{0}
\end{array} \quad \text{residuo}$$

por tanto, es otro de los factores, el último factor es $-4x+4$.

$$p(x)=-4x^3+7x-3=\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(-4x+4\right) \text{ o bien } p(x)=-(2x+3)(2x-1)(x-1).$$

SECCIÓN 1.2
EJERCICIOS 1

1. Determina los posibles ceros racionales.

a. $p(x)=2x^3-5x^2-4x+3$.

b. $p(x)=3x^3-x^2+6x-2$.

c. $p(x)=4x^3+6x^2-6x-4$.

d. $p(x)=8x^4-28x^3+30x^2-13x+2$.

e. $p(x)=2x^4-16x^3+36x^2-32x+10$.

2. Factoriza la regla de correspondencia de la función polinomial.

a. $p(x)=x^4-8x^3+18x^2-16x+5$.

b. $p(x)=-x^3-x^2+x+1$.

c. $p(x)=-2x^3-9x^2-7x+6$.

d. $p(x)=3x^4-x^3-9x^2-3x+2$.

e. $p(x)=6x^4-13x^3+7x^2+x-1$.

3. Factoriza la regla de correspondencia y determina la multiplicidad da cada cero.

a. $p(x)=x^3-x^2-8x+12$.

b. $p(x)=6x^4+11x^3+3x^2-3x-1$.

c. $p(x)=x^4-10x^3+36x^2-54x-27$.

d. $p(x)=x^4-2x^3-3x^2+4x+4$.

e. $p(x)=6x^4+x^3-40x^2+31x-6$.

4. Calcula la ordenada al origen y desarrolla la regla de correspondencia.

a. $p(x)=(x-1)^3(x+3)$.

b. $p(x)=(2x-4)(x+3)^2$.

c. $p(x)=7\left(x-\frac{1}{7}\right)(x+2)^3$.

d. $p(x)=(x+1)^3(x+2)$.

e. $p(x)=(x+1)(x+2)(x-1)(x+3)$.

GRAFICACIÓN DE FUNCIONES POLINOMIALES

Factorizada la regla de correspondencia de la función polinomial el bosquejo de la curva que tiene asociada (intersecciones con los ejes coordenados, comportamiento alrededor de sus ceros y comportamiento para valores extremos asignados a la variable independiente) suele realizarse utilizando los siguientes aspectos:

i. Los ceros, números en que la curva asociada a $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ interseca al eje de las abscisas, se obtienen a partir de sus factores.

ii. Calcula el número $p(0)$ llamado ordenada al origen, número (o punto) en que la curva asociada a $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ interseca al eje de las ordenadas.

iii. Analiza el comportamiento alrededor de los ceros, para ello, sustituye el menor de los ceros x_{01} en todos los factores excepto en el que se anula, obtienes la función $g_1(x)=ka_n(x-x_{01})^n$, que determina el comportamiento de

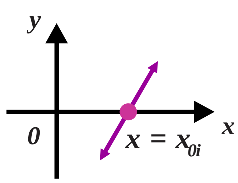
$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$$

a su alrededor.

<table>
<tr><th>CERO DE MULTIPLICIDAD UNO</th><th>CERO DE MULTIPLICIDAD DOS</th><th>CERO DE MULTIPLICIDAD TRES</th></tr>
<tr>
<td>

$g_i(x)=ka_n(x-x_{0i})$

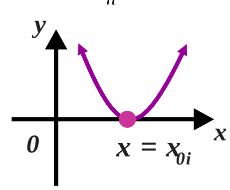
$ka_n>0$



</td>
<td>

$g_i(x)=ka_n(x-x_{0i})^2$

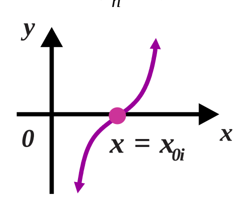
$ka_n>0$



</td>
<td>

$g_i(x)=ka_n(x-x_{0i})^3$

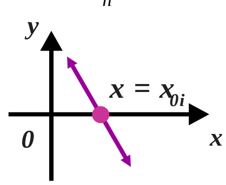
$ka_n>0$



</td>
</tr>
<tr>
<td>

$g_i(x)=ka_n(x-x_{0i})$

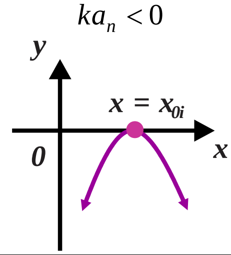
$ka_n<0$



</td>
<td>

$g_i(x)=ka_n(x-x_{0i})^2$

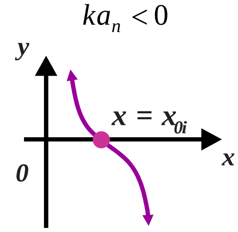
$ka_n<0$



</td>
<td>

$g_i(x)=ka_n(x-x_{0i})^3$

$ka_n<0$



</td>
</tr>
</table>

Repite el proceso anterior con todos los ceros.

iv. Analiza el comportamiento extremo. Lo define el comportamiento alrededor de los ceros (en caso de que existan).

Si x_{01} es el menor de los ceros y a su izquierda el comportamiento de la función

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0:$$

Es negativo, entonces $f(x)\to-\infty$; en este caso escribimos:

si $x\to-\infty$, entonces $f(x)\to-\infty$.

Es positivo, entonces $f(x)\to+\infty$; en este caso escribimos:

sí $x\to-\infty$, entonces $f(x)\to+\infty$.

Si x_{0n} es el mayor de los ceros y a su derecha el comportamiento de la función

$$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0:$$

Es positivo, entonces $f(x)\to+\infty$; en este caso escribimos:

sí $x\to+\infty$, entonces $f(x)\to\infty$.

Es negativo, entonces $f(x)\to+\infty$; en este caso escribimos:

sí $x\to+\infty$, entonces $f(x)\to+\infty$.

v. Traza sobre los “comportamientos una curva suave y continua.

EJEMPLO 12 BOSQUEJO DE LA CURVA ASOCIADA A $p(x)=x^3-7x^2-x+7$.

La factorización de $p(x)=x^3-7x^2-x+7$ es

$$p(x)=(x+1)(x-1)(x-7).$$

Ceros: $x_{01}=-1$, $x_{02}=1$ y $x_{03}=7$ (todos de multiplicidad 1).

Ordenada al origen: $p(0)=(0+1)(0-1)(0-7)=7$.

Comportamiento alrededor de los ceros:

$x_{01}=-1$,

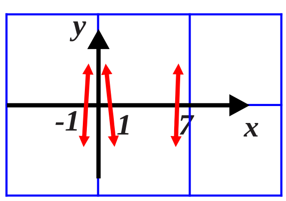
$g_{01}(x)=(x+1)(-1-1)(-1-7)=16(x+1)$.

$x_{02}=1$,

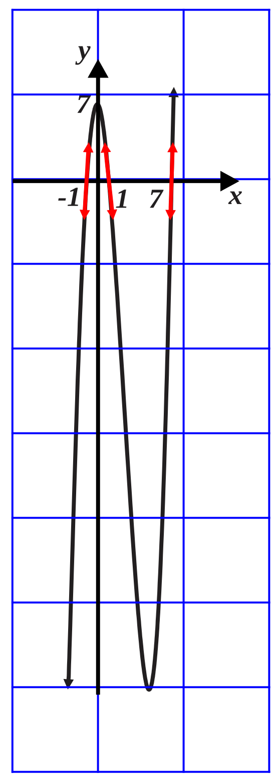
$g_{02}(x)=(1+1)(x-1)(1-7)=-12(x-1)$.

$x_{03}=7$,

$g_{03}(x)=(7+1)(7-1)(x-7)=48(x-7)$.



FIGURAS 2



Comportamiento extremo:

$x\to-\infty$, entonces $p(x)\to-\infty$

$x\to+\infty$, entonces $p(x)\to+\infty$

EJEMPLO 13 BOSQUEJO DE LA CURVA ASOCIADA A $s(t)=-3t^4-8t^3+3t^2+12t-4$.

La factorización de

$$s(t)=-3t^4-8t^3+3t^2+12t-4 \text{ es } s(t)=-3(t+2)^2(t-1)\left(t-\frac{1}{3}\right).$$

Por tanto:

Ceros: $t_{01} = -2$ con multiplicidad dos.

$t_{02} = 1$ y $t_{03} = \frac{1}{3}$ ambos con multiplicidad 1.

Ordenada al origen:

$$s(0) = -4.$$

Comportamiento alrededor de los ceros:

De $t_{01} = -2$,

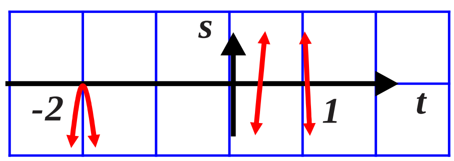
$$g_{01}(t) = -3(t+2)^2(-2-1)\left(-2-\frac{1}{3}\right) = -21(t+2)^2.$$

De $t_{02} = \frac{1}{3}$:

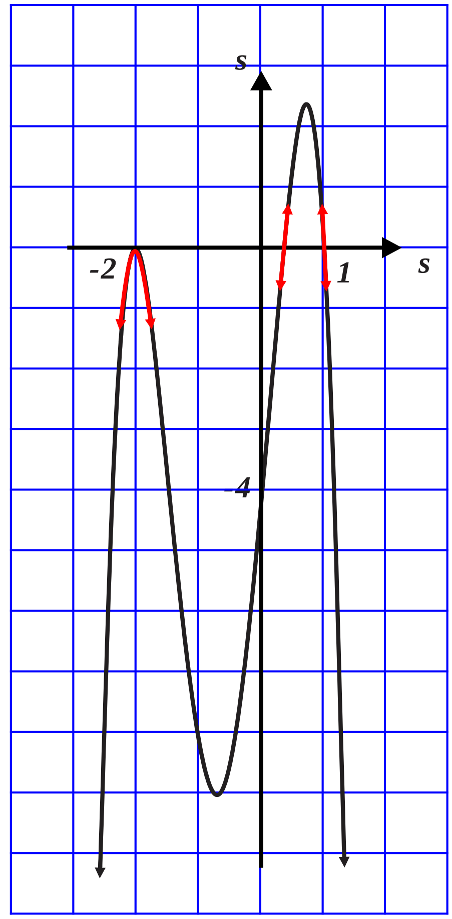
$$g_{02}(t) = -3\left(\frac{1}{3}+2\right)^2\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(t-\frac{1}{3}\right) = \frac{14}{3}\left(t-\frac{1}{3}\right).$$

De $t_{03} = 1$:

$$g_{03}(t) = -3(1+2)^2(t-1)\left(1-\frac{1}{3}\right) = -18(t+1)$$



FIGURAS 3



Comportamiento extremo:

Si $t \to -\infty$, entonces $s(t) \to -\infty$.

Si $t \to +\infty$, entonces $s(t) \to -\infty$.

EJEMPLO 14 BOSQUEJO DE LA CURVA ASOCIADA A $p(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2$.

La factorización de la función polinomial

$$p(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2$$

es

$$p(x) = (x+1)^3(x-2).$$

Por tanto,

Ceros:

$x_{01} = -1$ con multiplicidad tres,

$x_{01} = 2$ con multiplicidad uno.

Ordenada al origen:

$$p(0) = -2$$

Comportamiento extremo:

$x \to -\infty$, entonces $p(x) \to +\infty$

$x \to +\infty$, entonces $p(x) \to +\infty$

Comportamiento alrededor de los ceros:

De

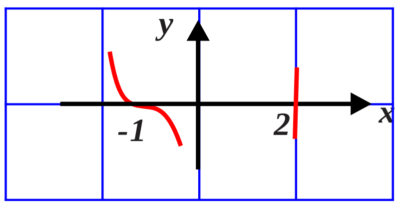
$$x_{01} = -1,$$

$$g_{01}(x) = (x+1)^3(-1-2) = -3(x+1)^3.$$

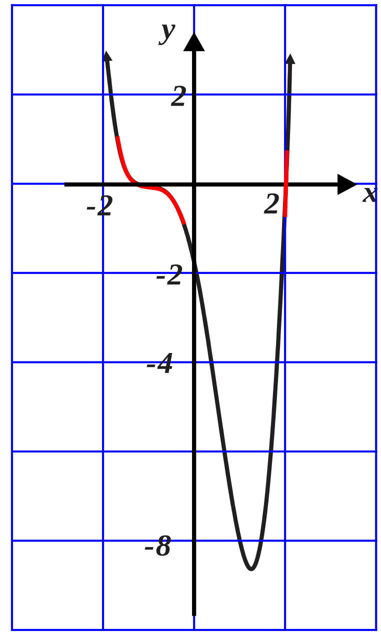
De

$$x_{02} = 2,$$

$$g_{02}(x) = (2+1)^3(x-2) = 27(x-2).$$



FIGURAS 4



EJEMPLO 15 BOSQUEJO DE LA CURVA ASOCIADA A $p(x) = -x^3 + 3x + 2$.

Al factorizar $p(x) = -x^3 + 3x + 2$ obtenemos

$$p(x) = -(x+1)^2(x-2),$$

por tanto:

Ceros:

$x_{01} = -1$ con multiplicidad dos,

$x_{01} = 2$ con multiplicidad uno.

Ordenada al origen: $p(0) = 2$

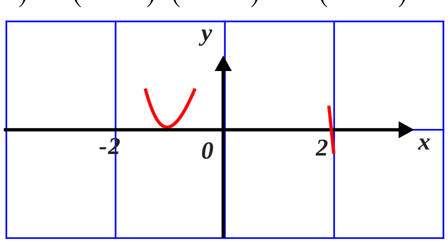
Comportamiento alrededor de los ceros:

De $x_{01} = -1$,

$$g_{01}(x) = -(x+1)^2(-1-2) = 3(x+1)^2$$

De $x_{02} = 2$,

$$g_{02}(x) = -(2+1)^2(x-2) = -9(x-2).$$

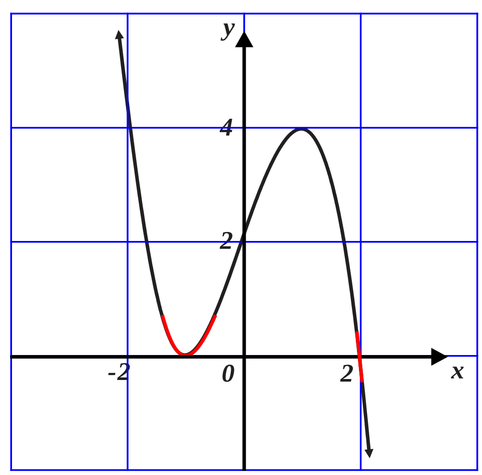


FIGURAS 5

Comportamiento extremo:

$x \to -\infty$, entonces $p(x) \to +\infty$

$x \to +\infty$, entonces $p(x) \to -\infty$



SECCIÓN 1.2
EJERCICIOS 2

1. Factoriza la regla de correspondencia y haz un bosquejo de la gráfica de la función polinomial.

a. $p(x) = -2x^3 + 7x^2 - 4x - 4$.

b. $p(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4$.

c. $p(x) = -8x^4 + 24x^3 - 24x^2 + 8x$.

d. $p(x) = x^4 + x^3 - 5x - 2$.

e. $p(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9$.

CONSTRUCCIÓN DE FUNCIONES POLINOMIALES

Si se conocen los ceros y su multiplicidad y una de las siguientes dos características de las funciones polinomiales:

i. Coeficiente del término dominante (coeficiente del término líder).

ii. Término independiente (equivalentemente, punto de intersección con el eje de las ordenadas).

Es posible determinar su regla de correspondencia y así como su representación gráfica.

EJEMPLO 16 DETERMINACIÓN DE LA REGLA DE CORRESPONDENCIA DE UNA FUNCIÓN POLINOMIAL

Una función polinomial tiene:

i. Cero en $x = 1$ de multiplicidad dos, cero en $x = -1$ de multiplicidad uno.

ii. Coeficiente de término dominante (líder) 2.

Como consecuencia de lo anterior sus factores son $(x-1)^2$ y $(x+1)$ y su grado es $n = 3$ (obtiene sumando las multiplicidades de los ceros). Así $a_3 = 2$.

$$p(x) = 2(x-1)^2(x+1) = 2x^3 - 2x^2 - 2x + 2.$$

EJEMPLO 17 DETERMINACIÓN DE LA REGLA DE CORRESPONDENCIA DE UNA FUNCIÓN POLINOMIAL

Una función polinomial tiene:

i. Cero en $x = \frac{1}{2}$ de multiplicidad dos, cero en $x = 3$ de multiplicidad dos.

ii. Interseca al eje de las ordenadas en el punto $(0\ ,\ 18)$

Por la condición **i.** tenemos que sus factores son $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 (x-3)^2$, pero

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 (x-3)^2 = x^4 - 7x^3 + \frac{61}{4}x^2 - \frac{21}{2}x + \frac{9}{4}$$

Por la condición **ii.** el término independiente debe ser 18 y lo obtenemos al multiplicar la expresión anterior por 8, entonces

$$8\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2(x-3)^2\right]=8\left[x^4-7x^3+\frac{61}{4}x^2-\frac{21}{2}x+\frac{9}{4}\right]$$

y obtenemos

$$p(x)=8x^4-56x^3+122x^2-84x+18.$$

EJEMPLO 18 DETERMINACIÓN DE LA REGLA DE CORRESPONDENCIA DE UNA FUNCIÓN POLINOMIAL

Una función polinomial satisface:

i. Cero en $x=2$ de multiplicidad tres, cero en $x=0$ de multiplicidad dos.

ii. Término dominante $4x^5$.

Por la condición **i.**, sus factores son $(x-2)^3(x-0)^2$, pero

$$(x-2)^3(x-0)^2=x^5-6x^4+12x^3-8x^2.$$

Por la condición **ii.** el coeficiente del término dominante es 4 y lo obtenemos al multiplicar la expresión anterior por 8, entonces $4\left[x^5-6x^4+12x^3-8x^2\right]=4x^5-24x^4+48x^3-32x^2$

y obtenemos

$$p(x)=4x^5-24x^4+48x^3+-32x^2.$$

EJEMPLO 19 DETERMINACIÓN DE LA REGLA DE CORRESPONDENCIA DE UNA FUNCIÓN POLINOMIAL

Una función polinomial cumple con:

i. Cero en $x=1$ de multiplicidad dos, cero en $x=2$ de multiplicidad dos.

ii. Término independiente $a_0=-8$.

Por la condición **i.** sus factores son $(x-1)^2(x-2)^2$, pero

$$(x-1)^2(x-2)^2=x^4-6x^3+13x^2-12x+4$$

Por la condición **ii.** el término independiente debe ser -8 y lo obtenemos al multiplicar la expresión anterior por -2, entonces $-2\left[(x-1)^2(x-2)^2\right]=-2\left[x^4-6x^3+13x^2-12x+4\right]$ y obtenemos

$$p(x)=-2x^4+12^3-26x^2+24x-8$$

ANÁLISIS DE GRÁFICOS DE FUNCIONES POLINOMIALES

Con base en la suposición: la representación gráfica pertenece a una función polinomial, y con características perfectamente señaladas es posible determinar la regla de correspondencia.

EJEMPLO 20 LA REGLA DE CORRESPONDENCIA DE UNA FUNCIÓN POLINOMIAL A PARTIR DE SU REPRESENTACIÓN GRÁFICA

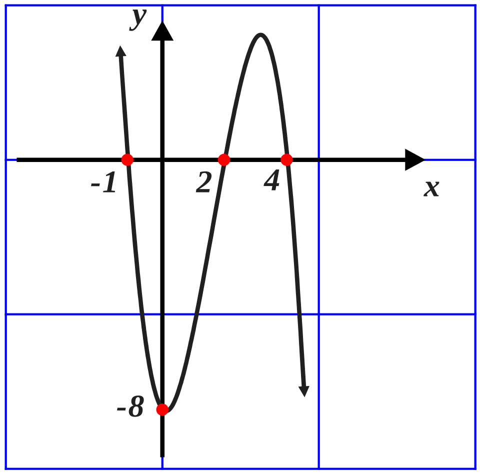


FIGURA 6

Si suponemos que la figura de la izquierda corresponde a una función polinomial $p(x)$, entonces:

i. Sus ceros son:

$x=-1$ con multiplicidad 1.

$x=2$ con multiplicidad 1.

$x=4$ con multiplicidad 1.

ii. Ordenada al origen:

$$p(0)=-8.$$

iii. Si $x\to-\infty$, entonces $p(x)\to+\infty$.

Si $x\to+\infty$, entonces $p(x)\to-\infty$.

De la condición **i.** obtenemos

$$(x+1)(x-2)(x-4)=x^3-5x^2+2x+8.$$

De la condición **ii.** obtenemos

$$-(x+1)(x-2)(x-4)=-x^3+5x^2-2x-8.$$

Por tanto, su regla de correspondencia es

$$p(x)=-(x+1)(x-2)(x-4)=-x^3+5x^2-2x-8.$$

EJEMPLO 21 REGLA DE CORRESPONDENCIA DE UNA FUNCIÓN POLINOMIAL A PARTIR DE SU REPRESENTACIÓN GRÁFICA

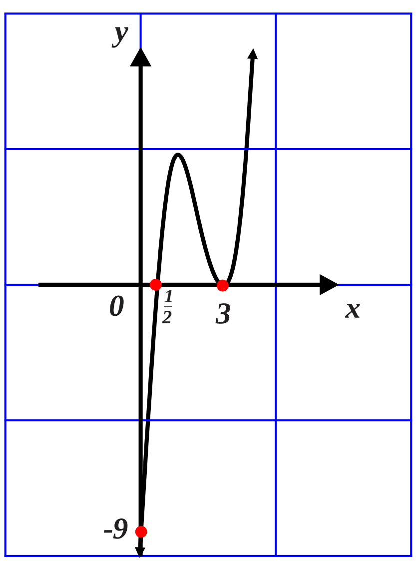


FIGURA 7

Si suponemos que la figura de la izquierda corresponde a una función polinomial $p(x)$, entonces:

i. Sus ceros son:

$x=\frac{1}{2}$, con multiplicidad 1.

$x=3$, con multiplicidad 2.

ii. Ordenada al origen:

$$p(0)=-9.$$

iii. Si $x\to-\infty$, entonces $p(x)\to-\infty$.

Si $x\to+\infty$, entonces $p(x)\to+\infty$.

De la condición **i.** obtenemos

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-3)^2 = x^3 - \frac{13}{2}x^2 + 12x - \frac{9}{2}.$$

Para que se cumpla la condición **ii.** debemos multiplicar por 2, obtenemos

$$2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-3)^2 = 2\left[x^3 - \frac{13}{2}x^2 + 2x - \frac{9}{2}\right] = 2x^3 - 13x^2 + 24x - 9$$

Por tanto, su regla de correspondencia es

$$p(x) = 2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-3)^2 = 2x^3 - 13x^2 + 24x - 9.$$

EJEMPLO 22 REGLA DE CORRESPONDENCIA DE UNA FUNCIÓN POLINOMIAL A PARTIR DE SU REPRESENTACIÓN GRÁFICA

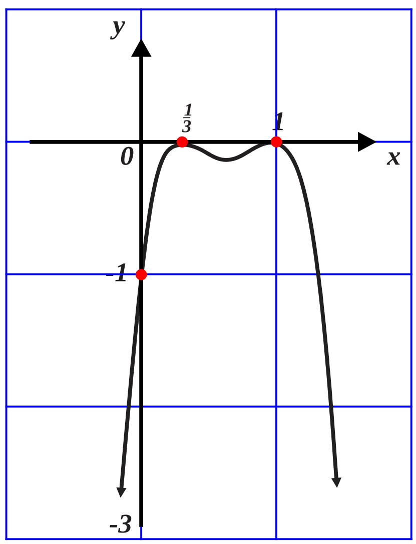


FIGURA 8

Si el gráfico de la izquierda corresponde a una función polinomial $p(x)$, entonces:

i. Sus ceros son:

$x = \frac{1}{3}$, con multiplicidad 2.

$x = 1$, con multiplicidad 2.

ii. Ordenada al origen:

$$p(0) = -1.$$

iii.

Si $x \to -\infty$, entonces $p(x) \to -\infty$.

Si $x \to +\infty$, entonces $p(x) \to -\infty$.

De la condición **i.** obtenemos

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2(x-1)^2 = x^4 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{22}{9}x^2 - \frac{8}{9}x + \frac{1}{9}.$$

Para que se cumpla la condición **ii.** debemos multiplicar por -9, obtenemos

$$-9\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-1)^2 = -9\left[x^4 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{22}{9}x^2 - \frac{8}{9}x + \frac{1}{9}\right] = -9x^4 + 24x^3 - 22x^2 + 8x - 1.$$

Por tanto, su regla de correspondencia es

$$p(x) = -(x-1)^2(3x-1)^2 = -9x^4 + 24x^3 - 22x^2 + 8x - 1.$$

EJEMPLO 23 REGLA DE CORRESPONDENCIA DE UNA FUNCIÓN POLINOMIAL A PARTIR DE SU REPRESENTACIÓN GRÁFICA

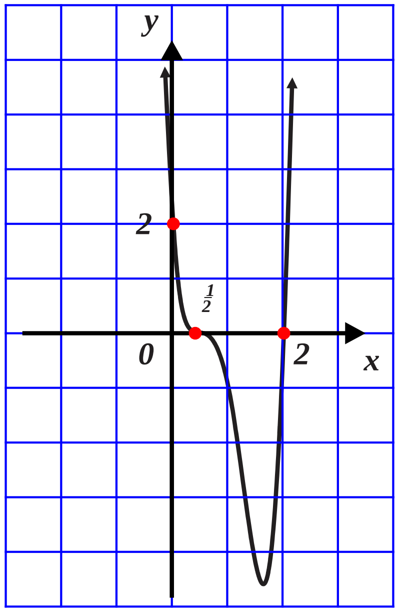


FIGURA 9

En el gráfico de la izquierda observamos:

i.

Sus ceros son:

$$x = \frac{1}{2},$$

con multiplicidad 3.

$$x = 2,$$

con multiplicidad 1.

ii. Ordenada al origen:

$$p(0) = 2.$$

iii.

Si $x \to -\infty$, entonces $p(x) \to +\infty$.

Si $x \to +\infty$, entonces $p(x) \to +\infty$.

De la condición **i.** obtenemos $\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 (x-2) = x^4 - \frac{7}{2}x^3 + \frac{15}{4}x^2 - \frac{13}{8}x + \frac{1}{4}$.

Para que se cumpla la condición **ii.** debemos multiplicar por 8, esto da

$$8\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 (x-2)^2 = 8\left[x^4 - \frac{7}{2}x^3 + \frac{15}{4}x^2 - \frac{13}{8}x + \frac{1}{4}\right] = 8x^4 - 28x^3 + 30x^2 - 13x + 2.$$

Por tanto, su regla de correspondencia es

$$p(x) = 8\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 (x-2) = 8x^4 - 28x^3 + 30x^2 - 13x + 2.$$

SECCIÓN 1.2
EJERCICIOS 3

1. Construye la regla de correspondencia de la función polinomial con las siguientes características.

a. Ceros y multiplicidad: $m(x=-1)=1$, $m(x=2)=1$, $m(x=3)=1$ y $a_3 = -2$.

b. Ceros y multiplicidad: $m(x=-4)=2$, $m(x=0)=1$, $m(x=4)=1$ y $a_4 = 2$.

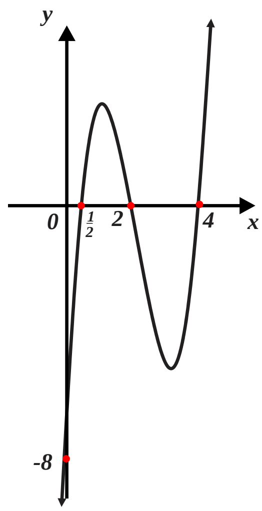
c. Ceros y multiplicidad: $m(x=-2)=1$, $m(x=1)=1$, $m(x=3)=1$ y $a_0 = -12$.

d. Ceros y multiplicidad: $m\left(x=\frac{1}{3}\right)=2$, $m(x=1)=1$, $m(x=-3)=1$ y $a_0 = 6$.

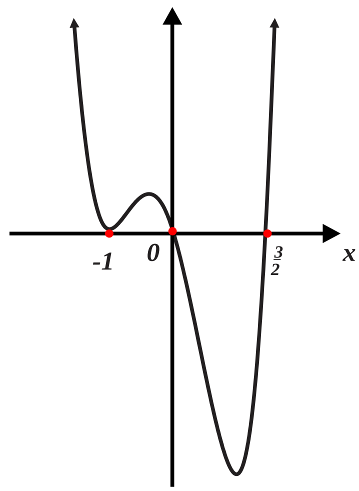
e. Ceros y multiplicidad: $m(x=-2)=2$, $m\left(x=\frac{1}{2}\right)=1$, $m\left(x=-\frac{2}{3}\right)=1$ y $a_0 = 8$.

2. Cada figura es la representación gráfica de una función polinomial, determina: los ceros y su multiplicidad, la ordenada al origen, la regla de correspondencia y comportamiento extremo.

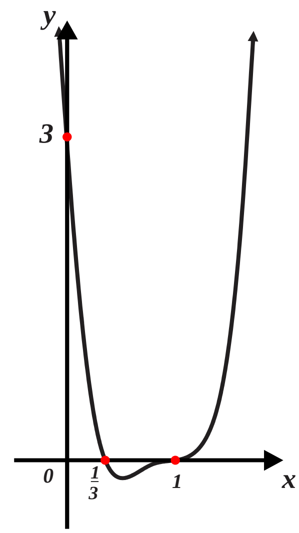
a.



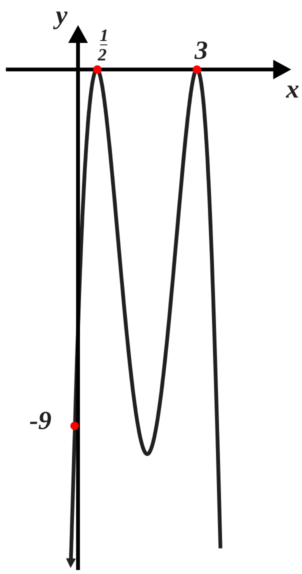
b.



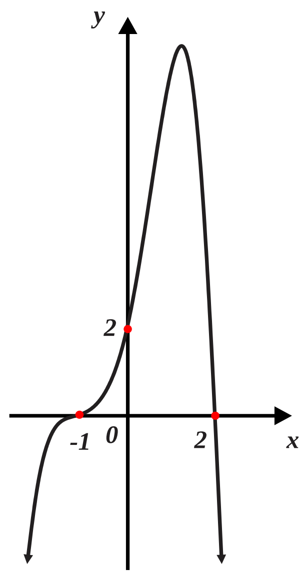
c.



d.



e.



FUNCIONES POLINOMIALES COMO MODELOS

EJEMPLO 23 MODELOS

a. Construiremos el modelo (función) que describe el volumen de una caja con forma de prisma cuadrangular, en donde el largo mide un metro más que el doble del ancho y la altura mide un metro más que el largo. La figura muestra la caja.

SOLUCIÓN

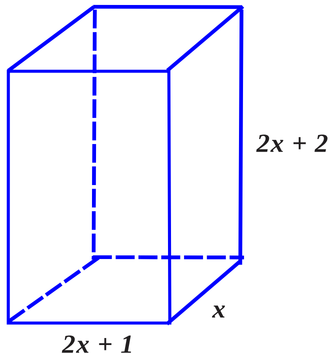


FIGURA 10

Por tanto,
$V(x)=x(2x+1)(2x+2)=4x^3+6x^2+2x$,
$x\geq 0$.

b. Construye el modelo (función) que describe el volumen de un envase cilíndrico (cilindro circular recto), si el radio mide dos unidades más que el doble de la altura (en función del radio).

SOLUCIÓN

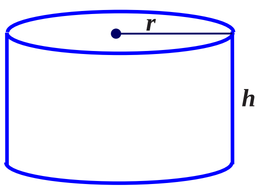


FIGURA 11

En este caso, si h es la longitud de la altura del cilindro, entonces $r=2+2h$ y

$$h=\frac{r-2}{2} \text{ o bien } h=\frac{r}{2}-1.$$

El volumen del cilindro es $V=\pi r^2 h$. Si sustituimos $h=\frac{r}{2}-1$ en $V=\pi r^2 h$ e indicamos que el volumen depende del radio obtenemos,

$$V(r)=\pi r^2\left(\frac{r}{2}-1\right)=\frac{1}{2}\pi r^3-\pi r^2 \text{, si } r>2.$$

---

c. Se va a construir un tanque para almacenar combustible, debe tener forma de cilindro circular recto con extremos semiesféricos. Si el largo de la parte cilíndrica debe ser dos unidades mayor que el triple del radio construye un modelo que proporcione el volumen del tanque en función del largo del cilindro.

SOLUCIÓN

Si x es la longitud del largo del cilindro, entonces la condición que liga al radio con la altura es

$$x=2+3r \text{ o bien } r=\frac{x-2}{3}=\frac{x}{3}-\frac{2}{3}.$$

El tanque está constituido por un cilindro y dos semi esferas su volumen es $V=\pi r^2 x+\frac{4}{3}\pi r^3$.

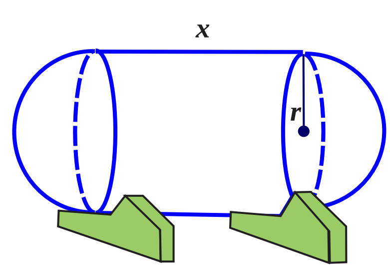


FIGURA 12

Si sustituimos $r=\frac{x-2}{3}=\frac{x}{3}-\frac{2}{3}$ en $V=\pi r^2 x+\frac{4}{3}\pi r^3$ e indicamos que el volumen depende del largo del cilindro obtenemos $V(l)=\pi\left(\frac{x}{3}-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{3}\pi\left(\frac{x}{3}-\frac{2}{3}\right)^3$, $x\geq 2$.

d. Con una hoja rectangular de cierto material se va a construir un envase (con forma de prisma recto) sin tapadera. Se cortarán 4 cuadrados de lado de longitud x en las esquinas de la hoja, se eliminarán estas esquinas, y luego se doblarán verticalmente los bordes. Si el largo de la hoja mide 6 unidades y el ancho mide 4 unidades, construye un modelo (función) que describa el comportamiento del volumen como función de la altura de la caja.

SOLUCIÓN

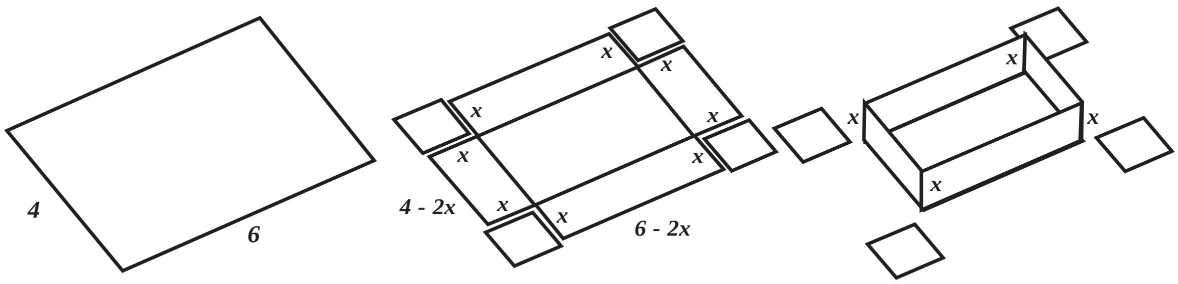


FIGURA 13

Si x representa la longitud de los lados de los cuadrados de las esquinas, entonces también representa la altura de la caja. Los lados de la caja miden $6-2x$ y $4-2x$ unidades.

El volumen de la caja en función de la altura es

$$V(x)=(6-2x)(4-2x)(x),$$

o bien

$$V(x)=4x^3-20x^2+24x,\ 0<x<2.$$

e. Se desea construir una estructura arquitectónica con forma cilindro circular recto, con coronado con una semiesfera. Si altura de la parte cilíndrica debe ser una unidad menor que el triple del radio de la semi esfera construye un modelo (función) que describa el comportamiento del volumen de la estructura arquitectónica en función del radio de la semi esfera.

SOLUCIÓN

Si x es la longitud de la altura del cilindro, entonces la condición que liga al radio con la altura es $x=3r-1$.

$$V=\pi r^2x+\frac{2}{3}\pi r^3.$$

Si sustituimos $x=3r-1$ en $V=\pi r^2x+\frac{2}{3}\pi r^3$ e indicamos que el volumen depende del radio de la semi esfera obtenemos

$$V(r)=\pi r^2(3r-1)+\frac{2}{3}\pi r^3\text{, o bien } V(r)=\frac{11}{3}\pi r^3-\pi r^2$$

siempre que $r>\frac{1}{3}$.

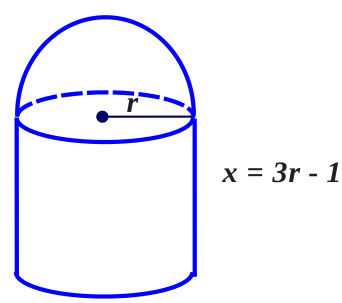


FIGURA 14

f. Se desea construir una estructura arquitectónica con forma de: prisma recto, con base cuadrada y coronado por una pirámide cuadrangular (de base idéntica a la del prisma). Si la altura de la parte prismática es una unidad mayor que el doble de la longitud de la base y la altura de la parte piramidal es dos unidades mayor que la longitud del lado de la base construye la función que describe el volumen de la estructura como función de la longitud de lado de la base.

SOLUCIÓN

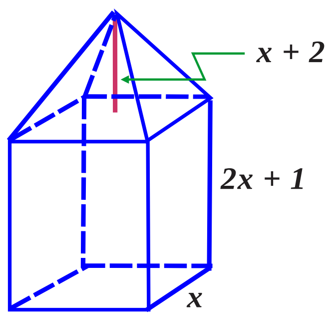


FIGURA 15

El volumen de la estructura es $V = x^2 h_{prisma} + \frac{1}{3} x^2 h_{piramide}$.

Si x representa la longitud de lado de la base, entonces las condiciones que ligan la base de la estructura con las alturas son:

$$h_{prisma} = 2x + 1 \quad \text{y} \quad h_{pirámide} = x + 2 .$$

Sustituyendo $h_{prisma} = 2x + 1$ y $h_{pirámide} = x + 2$

en

$$V = x^2 h_{prisma} + \frac{1}{3} x^2 h_{piramide}$$

obtenemos

$$V(x) = \frac{7}{3} x^3 + \frac{5}{3} x^2 .$$

SECCIÓN 1.2
EJERCICIOS 4

1. Construye el modelo (función) que describe el volumen de un envase con base cuadrada y forma de prisma cuadrangular, en donde la altura mide una unidad menos que la longitud de lado de la base.

2. Construye un modelo, en función de la altura, que describe el volumen de un envase cilíndrico (cilindro circular recto) en donde el radio mide dos unidades más que el doble de la altura.

3. Se desea construir un tanque para almacenar combustible, tendrá forma de cilindro circular recto con extremos semiesféricos. Si el largo de la parte cilíndrica debe ser una unidad mayor que el triple de su radio, construye un modelo que proporcione el volumen del tanque en función del radio del cilindro.

4. Con una hoja rectangular de cierto material se va a construir una caja sin tapadera. Se cortarán 4 cuadrados de lado de longitud x (se eliminarán los cuadrados cortados) y luego se doblarán verticalmente los bordes. Si el largo de la placa mide 12 unidades y el ancho mide 8 unidades, construye un modelo (función) que describa el comportamiento del volumen como función de la altura de la caja.

1.3 SOLUCIONES Y EVALUACIÓN

SOLUCIÓN A EJERCICIOS PROPUESTOS

EXAMEN DE LA UNIDAD

SOLUCIÓN AL EXAMEN

SECCIÓN 1.1 SOLUCIONES EJERCICIOS 1

1. a. (F). **b.** (F). **c.** (NF). **d.** (NF). **e.** (F). **f.** (F). **g.** (F). **h.** (F). **i.** (NF). **j.** (NF).

2. a. (F). **b.** (F). **c.** (V). **d.** (F). **e.** (V). **f.** (F). **g.** (F). **h.** (F). **i.** (V). **j.** (V). **k.** (F). **l.** (F). **m.** (V). **n.** (F). **o.** (F).

3. Poner **F** sobre las curvas de los incisos: **b., e.** y **f.**

4. a. $x \neq 0$. **b.** $x \neq 5$. **c.** $x \neq -1$. **d.** Siempre que se les asigne el mismo dominio.

5. a. $dom\,(f) = (-\infty, +\infty)$ y $rec\,(f) = (-\infty, +\infty)$.
b. $dom\,(f) = (1, +\infty)$ y $rec\,(f) = (1, +\infty)$.
c. $dom\,(f) = (-3\,,\,3]$ y $rec\,(f) = [0\,,\,6]$.
d. $dom\,(f) = [-\pi\,,\,\pi]$ y $rec\,(f) = [-1\,,\,1]$.
e. $dom\,(f) = (0, +\infty)$ y $rec\,(f) = (-\infty, +\infty)$.
f. $dom\,(f) = (-\infty, +\infty)$ y $rec\,(f) = (-\infty, 2) \cup [4, +\infty)$.

6. a. Independiente. **b.** Dominio, recorrido y regla de correspondencia. **c.** $f(x)$ existe. **d.** Un conjunto de números reales. **e.** Abiertos, cerrados y semi abiertos o semi cerrados. **f.** Preimagen. **g.** Rango o recorrido. **h.** El dominio. **i.** Pueden tener dominios distintos. **j.** Contradominio.

SECCIÓN 1.2 SOLUCIONES A EJERCICIOS 1

1. a. $x = -3,\ -1,\ -\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{3}{2},\ 1,\ 3$. **b.** $x = -2,\ -1,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ 1,\ 2$.
c. $x = -4,\ -2,\ -1,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ 1,\ 2,\ 4$. **d.** $x = -2,\ -1,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ 1,\ 2$.
e. $x = -10,\ -5,\ -\frac{5}{2},\ -2,\ -1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1,\ 2,\ \frac{5}{2},\ 5,\ 10$.

2. a. $p(x) = (x-1)^3(x-5)$. **b.** $p(x) = -(x-1)(x+1)^2$.
c. $p(x) = -2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+2)(x+3)$. **d.** $p(x) = 3(x+1)^2\left(x - \frac{1}{3}\right)(x-2)$.
e. $p(x) = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)^2\left(x + \frac{1}{3}\right)(x-1)^2$.

3. a. $p(x)=(x-2)^2(x+3)$. $m(x=2)=2$ y $m(x=-3)=1$.

b. $p(x)=6\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\left(x+\frac{1}{3}\right)(x+1)^2$. $m\left(x=\frac{1}{2}\right)=2$, $m\left(x=-\frac{1}{3}\right)=1$ y $m(x=-1)=1$.

c. $p(x)=6(x-3)^3(x-1)$. $m(x=3)=3$ y $m(x=1)=1$.

d. $p(x)=(x-2)^2(x+1)^2$. $m(x=2)=2$ y $m(x=-1)=2$.

e. $p(x)=6\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)(x+3)\left(x-\frac{1}{3}\right)$. $m\left(x=\frac{1}{2}\right)=1$, $m(x=2)=1$, $m(x=-3)=1$ y $m\left(x=\frac{1}{3}\right)=1$.

4. a. $p(x)=x^4-6x^2+8x-3$. $p(0)=-3$. **b.** $p(x)=2x^3+8x^2-6x-36$. $p(0)=-36$.

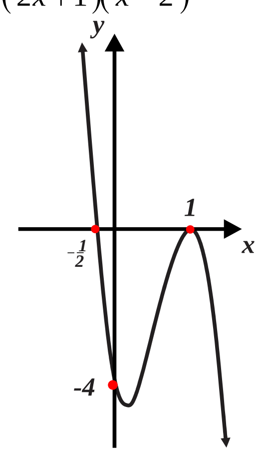
c. $p(x)=7x^4+41x^3+78x^2+44x-8$. $p(0)=-8$.

d. $p(x)=x^4+5x^3+9x^2+7x+2$. $p(0)=2$. **e.** $p(x)=x^4+5x^3+5x^2-5x-6$. $p(0)=-6$.

SECCIÓN 1.2 SOLUCIONES A EJERCICIOS 2

1.

a. $p(x)=-(2x+1)(x-2)^2$



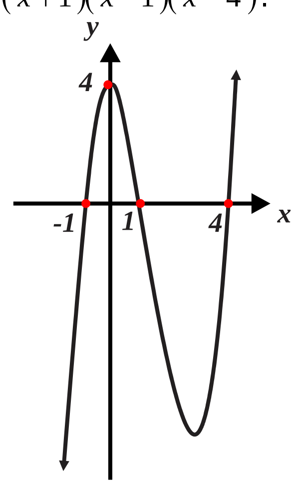
Ceros $x=-\frac{1}{2}$, 2.

Ordenada al origen $p(0)=-5$

Si $x\to+\infty$, entonces $p(x)\to-\infty$.

Si $x\to-\infty$, entonces $p(x)\to+\infty$.

b. $p(x)=(x+1)(x-1)(x-4)$.



Ceros $x=-1,\ 1,\ 4$.

Ordenada al origen $p(0)=4$

Si $x\to+\infty$, entonces $p(x)\to+\infty$.

Si $x\to-\infty$, entonces $p(x)\to-\infty$.

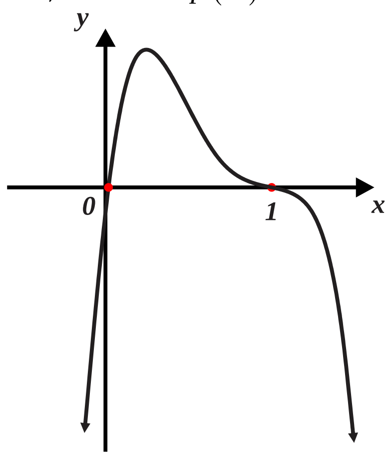
c. $p(x) = -8x(x-1)^3$.

Ceros $x = 0,\ 1$.

Ordenada al origen $p(0) = 0$.

Si $x \to +\infty$, entonces $p(x) \to -\infty$.

Si $x \to -\infty$, entonces $p(x) \to -\infty$.



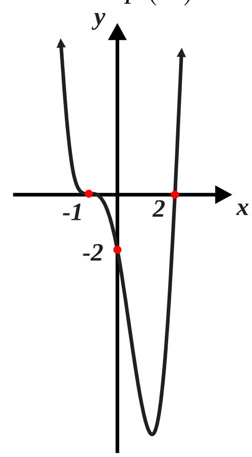
d. $p(x) = (x+1)^3(x-2) = x^4 + x^3 - 5x - 2$

Ceros $x = -1,\ 2$.

Ordenada al origen $p(0) = -2$.

Si $x \to +\infty$, entonces $p(x) \to +\infty$.

Si $x \to -\infty$, entonces $p(x) \to +\infty$.



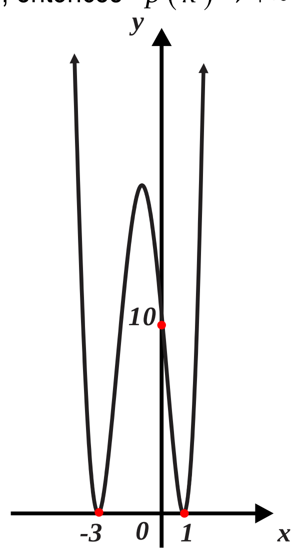
e. $p(x) = (x-1)^2(x+3)^2$.

Ceros $x = -3,\ 1$.

Ordenada al origen $p(0) = 10$.

Si $x \to +\infty$, entonces $p(x) \to +\infty$.

Si $x \to -\infty$, entonces $p(x) \to +\infty$.



SECCIÓN 1.2 SOLUCIONES A EJERCICIOS 3

1. a. $p(x) = -2(x+1)(x-2)(x-3) = -2x^3 + 8x^2 - 2x - 12$.

b. $p(x)=2x(x+4)^2(x-4)=2x^4+8x^3-32x^2-128x$.

c. $p(x)=-2(x+2)(x-1)(x-3)=-2x^3+4x^2+10x-12$.

d. $p(x)=18\left(x-\frac{1}{3}\right)^2(x-1)(x+3)=18x^4+24x^3-76x^2+40x-6$.

e. $p(x)=-6(x+2)^2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)=-6x^4-25x^3-26x^2+4x+8$.

2. a. Ceros y multiplicidades: $m\left(x=\frac{1}{2}\right)=2$, $m(x=2)=1$ y $m(x=4)=1$. Ordenada al origen: $p(0)=-8$. Regla de correspondencia $p(x)=(2x-1)^2(x-2)(x-4)=2x^3-13x^2+22x-8$. Comportamiento extremo, si $x\to-\infty$, entonces $p(x)\to-\infty$. Si $x\to+\infty$, entonces $p(x)\to+\infty$.

b. Ceros y multiplicidades: $m\left(x=\frac{3}{2}\right)=1$, $m(x=0)=1$ y $m(x=-1)=1$. Ordenada al origen: $p(0)=0$. Regla de correspondencia $p(x)=(2x-3)(x+1)^2x=2x^4+x^3-4x^2-3x$. Comportamiento extremo, si $x\to-\infty$, entonces $p(x)\to+\infty$. Si $x\to+\infty$, entonces $p(x)\to+\infty$.

c. Ceros y multiplicidades: $m\left(x=\frac{1}{3}\right)=1$, $m(x=1)=3$. Ordenada al origen: $p(0)=3$. Regla de correspondencia $p(x)=3(3x-1)(x-1)^3=9x^4-30x^3+36x^2-18x+3$. Comportamiento extremo, si $x\to-\infty$, entonces $p(x)\to+\infty$. Si $x\to+\infty$, entonces $p(x)\to+\infty$.

d. Ceros y multiplicidades: $m(x=3)=2$, $m\left(x=\frac{1}{2}\right)=9$. Ordenada al origen: $p(0)=-9$. Regla de correspondencia $p(x)-4(x-3)^2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=-4x^4+28x^3-61x^2+42x-9$.
Comportamiento extremo, si $x\to-\infty$, entonces $p(x)\to-\infty$. Si $x\to+\infty$, entonces $p(x)\to-\infty$.

e. Ceros y multiplicidades: $m(x=-1)=3$, $m(x=2)=1$. Ordenada al origen: $p(0)=2$. Regla de correspondencia $p(x)-4(x+1)^3(x-2)=-x^4-x^3+3x^2+5x+2$. Comportamiento extremo, si $x\to-\infty$, entonces $p(x)\to-\infty$. Si $x\to+\infty$, entonces $p(x)\to-\infty$.

SECCIÓN 1.2 SOLUCIONES A EJERCICIOS 4

1. $V(x)=x^2(2x-1)=2x^3-x^2$, $x\geq 0$.

2. $V(h)=\pi(2h+2)^2h=4\pi h^3+8\pi h^2+4\pi$.

3. $V(r)=\frac{13}{3}\pi r^3+\pi r^2 \quad r>0$.

4. $V(x)=4x^3-40x^2+96x$, $0<x<4$.

UNIDAD 1 EXAMEN

CONCEPTOS

COMPLETA LA FRASE

1. El grado de una función polinomial es la ____________________ del término líder (dominante).

2. En una función polinomial el término independiente se caracteriza por ____________________ .

3. Los ceros de una función polinomial coinciden con las ____________________ de los puntos en que la curva correspondiente interseca al eje horizontal.

4. El coeficiente independiente de una función polinomial coincide con ____________________ del punto en que la curva asociada corta al eje de las ordenadas.

5. La propiedad: si $d(x)$ y $p(x) \neq 0$ son polinomios, entonces existen los polinomios únicos $c(x)$ y $r(x)$ tales que $p(x) = c(x)d(x) + r(x)$, $r(x) = 0$, o bien, $r(x)$ tiene un grado menor que $p(x)$, recibe el nombre de ____________________________________.

6. La ______________________________ tiene un factor $x - x_0$ si y sólo si $p(x_0) = 0$.

7. Si $p(x_0) = 0$, entonces ___________________________ es un factor de $p(x)$.

8. Si $p(x_0) = m$, entonces m es el ______________________________ de $x - m\overline{)\,p(x)}$.

9. Si el cero de la función polinomial se repite n veces se dice que su _________________es n.

10. Si $p(x)$ es una función polinomial ______________________________, entonces $p(x)$ tiene al menos un cero.

11. Sea f una función polinomial con coeficientes enteros, coeficiente dominante $a_n \neq 0$, coeficiente independiente $a_0 \neq 0$; si la fracción irreducible $\frac{p}{q}$ es uno de los sus ceros, entonces el número p ______________________________ a_0.

12. El comportamiento extremo de una función polinomial lo establece el término _________________.

ALGORITMOS Y OBSERVACIONES

1. Calcula el residuo de la división $x - \frac{1}{2}\overline{)\,x^3 - 1}$.

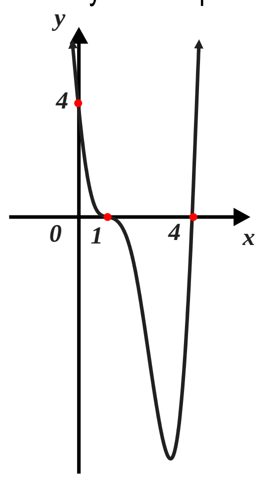
2. Identifica los posibles ceros racionales de la función polinomial con regla de correspondencia $p(x) = 3x^3 - 3x^2 + 5x - 4$.

3. Identifica los posibles factores de la función $p(x) = 4x^4 + 12x^3 + x^2 - 12x + 4$

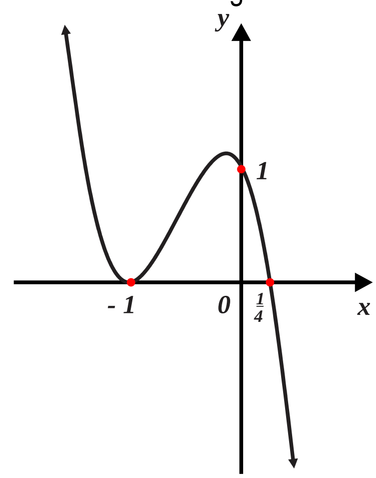
4. Obtén la regla de correspondencia de la función polinomial con las siguientes características: Ceros y multiplicidad: $m\left(x = \frac{1}{2}\right) = 2$, $m(x = -2) = 1$, $m(x = -4) = 1$, término líder $a_4 = 4$.

5. Obtén la regla de correspondencia de la función polinomial con las siguientes características: Ceros y multiplicidad: $m(x=-1)=3$, $m(x=-5)=1$ y cruce al eje de las ordenadas en $y=-10$.

6. La representación gráfica de una función polinomial es como se muestra en la figura. Determina los ceros y su multiplicidad.

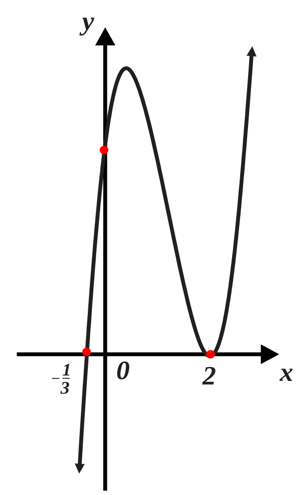


7. Determina la regla de correspondencia de la función polinomial cuya representación gráfica es como se muestra en la figura.



8. Determina el comportamiento extremo de la función polinomial con regla de correspondencia $p(x)=3x^4+6x^3-36x^2+42x-15$.

9. Determina los ceros y el coeficiente del término dominante de la función polinomial cuyo gráfico es



10. Realiza un bosquejo de la gráfica asociada a la función polinomial con regla de correspondencia $p(x)=4x^3-7x^2+2x+1$.

CONSTRUCCIONES

1. Construye el modelo (función) que describe el volumen de un cono elíptico, si el semeje menor mide una unidad menos que la mitad del semieje mayor y la altura mide una unidad más que el semieje mayor.

UNIDAD 1 SOLUCIÓN AL EXAMEN

CONCEPTOS

COMPLETA LA FRASE

1. POTENCIA. **2.** SER DE POTENCIA CERO. **3.** ABSCISAS. **4.** LA ORDENADA. **5.** ALGORITMO DE LA DIVISIÓN. **6.** FUNCIÓN POLINOMIAL. **7.** $x-x_0$. **8.** RESIDUO $x-m\overline{)\,p(x)}$. **9.** MULTIPLICIDAD. **10.** DE GRADO n. **11.** ES UN DIVISOR DE. **12.** LÍDER O TÉRMINO DOMINANTE.

ALGORITMOS Y OBSERVACIONES

1. $r=-\frac{7}{8}$.

2. $x=-4,\ -2,\ -\frac{4}{3},\ -1,\ -\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ 1,\ \frac{4}{3},\ 2,\ 4$.

3. $x-\frac{1}{4}$, $x+\frac{1}{4}$, $x-\frac{1}{2}$, $x+\frac{1}{2}$, $x-1$, $x+1$, $x-2$, $x+2$, $x-4$, $x+4$.

4. $p(x)=4x^4+20x^3+9x^2-26x+8$.

5. $p(x)=-2x^4-16x^3-36x^2-32x-10$.

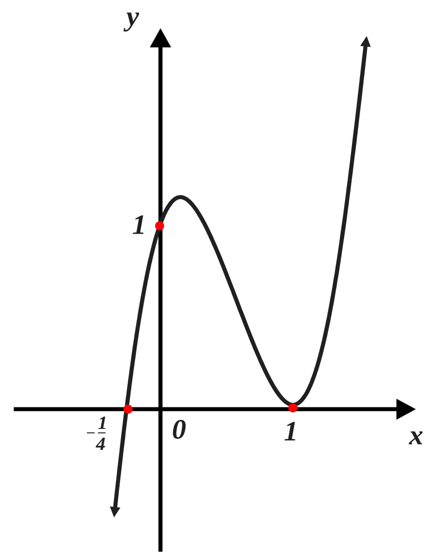
6. $p(x)=x^4-7x^3+15x^2-13x+4$.

7. $p(x)=-4x^3-7x^2-2x+1$.

8. Si $x\to-\infty$, entonces $p(x)\to+\infty$. Si $x\to+\infty$, entonces $p(x)\to+\infty$.

9. $a_3=3$ y $a_0=4$ $m(x=2)=2$ $m\left(x=-\frac{1}{3}\right)=1$.

10.



CONSTRUCCIONES

1. $V(x)=\frac{\pi}{6}x^3-\frac{\pi}{6}x^2-\frac{1}{3}x$ si $x>1$.

2

FUNCIONES RACIONALES Y FUNCIONES CON RADICALES

PROPÓSITOS

Al finalizar la unidad:
El alumno modelará algunas situaciones que dan lugar a funciones racionales y con radicales, analizará una gráfica para identificar su dominio, rango, asíntotas y relacionar estas características con la situación de la problemática planteada

CONTENIDO

SECCIÓN 2.1 Funciones racionales

SECCIÓN 2.2 Funciones con radicales

SECCIÓN 2.3 Soluciones y evaluación

CONCEPTOS CLAVE

Numero racional (fracción o quebrado). Tiene de la forma $\frac{p}{q}$ en dónde p y $q \neq 0$ son números enteros.

Fracción propia. Cuando el numerador es menor que el denominador (en valor absoluto).

Fracción impropia. Cuando el numerador es mayor que el denominador (en valor absoluto).

Fracción racional reducible. Si el numerador y el denominador tienen factores (distintos de uno) comunes.

Funciones iguales. Tienen regla de correspondencia algebraicamente equivalente y el mismo dominio.

Función racional irreducible. El numerador y el denominador no tienen factores (distintos de uno) comunes.

Polinomio numerador. En una función racional, es el polinomio numerador (dividendo).

Polinomio denominador. En una función racional, es el polinomio denominador (divisor).

Cero. Número (valor) asociado a la variable independiente se anula la función.

Ordenada al origen. La imagen de $x = 0$ bajo f, es decir, el número $f(x_0)$.

Multiplicidad. Número de veces que se repite un cero de una función polinomial.

Indeterminación. Cuando la regla de correspondencia no está definida en un número específico, expresiones de las formas $\frac{0}{0}$ y $\frac{x}{0}$.

Línea recta vertical. Línea recta en el plano cartesiano con ecuación $x = a$.

Línea recta horizontal. Línea recta en el plano cartesiano con ecuación $y = b$.

Asíntota horizontal. Línea recta de ecuación $y = y_0$ a la que se "aproxima" la curva asociada a una función cuando se asignan a la variable independiente "números muy grandes" ya sean positivos o negativos

Asíntota vertical. Línea recta de ecuación $x = x_0$ a la que se "aproxima" la curva asociada a una función cuando se asignan a la variable independiente x "números muy próximos" al número x_0 que no pertenece dominio de la función.

Hueco o discontinuidad removible. Cuando una función no está definida en un número x_0 (o está definida de forma especia) de su dominio, y alrededor de x_0, $f(x)$ se aproxima al número L.

Radical. Potencia fraccionaria que afecta a una expresión algebraica.

Radicando. Base de una potencia fraccionaria.

Parábola. Curva asociada a una función cuadrática.

Semi parábola. Sección de una parábola que contiene al vértice y se "abre" alrededor del eje de la parábola.

Semi elipse. Curva asociada a una función cuadrática que cumple condiciones específicas.

Semi hipérbola. Curva asociada a una función cuadrática que cumple condiciones específicas.

Rama de una hipérbola. Una de las dos partes que componen a la hipérbola.

Valor máximo $f(x_0)$**.** Cuando $f(x_0) > f(x)$ para todo número x alrededor de x_0.

Valor mínimo $f(x_0)$**.** Cuando $f(x_0) < f(x)$ para todo número x alrededor de x_0.

SECCIÓN 2.1 FUNCIONES RACIONALES

APRENDIZAJES

1. Explora situaciones que se modelan con funciones racionales.

2. Identifica los elementos de una función racional: ceros, asíntotas verticales y huecos, dominio y rango para graficarla.

3. Realiza gráficas de funciones que tengan asíntota horizontal deferente al eje de las equis, asíntotas verticales, ceros, huecos, dominio y rango.

4. Resuelve problemas de aplicación.

TEMÁTICA

1. Funciones de la forma:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad q(x) \neq 0$$

Con $p(x)$ y $q(x)$, polinomios de coeficientes reales de grado menor o igual a dos.

2. Elementos de las funciones: dominio, rango, asíntotas verticales, puntos de discontinuidad, ceros de la función.

3. Gráfica de funciones racionales con asíntotas verticales y horizontales.

4. Problemas de aplicación.

Parte de la importancia del estudio de las funciones racionales radica en que, la modelación y estudio de diversas situaciones de nuestro entorno conducen a su construcción. Las funciones racionales se definen en términos de dos polinomios; una función racional puede interpretarse como la división de dos polinomios en la misma variable (mismo indefinido).

DEFINICIÓN 1 FUNCION RACIONAL

La función

$$r(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0}{b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0},$$

donde $a_0, \cdots, a_{n-1}, a_n, \; b_0, \cdots, b_{m-1}$ y b_m, son números reales y

$$b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1 x+b_0\neq 0,$$

se denomina función racional en la variable x.

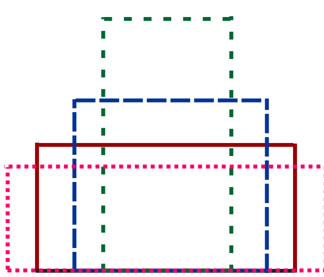
a. Si $n<m$ (el grado del polinomio numerador es menor o igual que el grado del polinomio del denominador) se denomina propia.

b. Si $n\geq m$ (el grado del polinomio numerador es menor que el grado del polinomio denominador) se denomina impropia.

EJEMPLO 1 FUNCIONES RACIONALES

a. Dos variables x y f cambian en relación inversa significa que conforme una de ellas aumenta la otra disminuye y viceversa, el modelo que representa tal situación es $f(x)=\frac{k}{x}$ siempre que $k\neq 0$ y $x\neq 0$.

b. Una placa rectangular (de dimensiones variables tiene área $A=10$ metros cuadrados, su base y su altura miden x y f metros respectivamente, por tanto $10=x\,f$. Si suponemos que la altura depende de la base, entonces $f(x)=\frac{10}{x}$ siempre que $x>0$. Vea la *figura 1.*



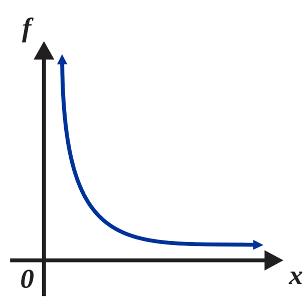


FIGURA 1

c. Se desea construir una cisterna con forma de prisma rectangular y encierre un volumen de 20 unidades cúbicas, su base debe ser cuadrada y cada lado tener longitud x ($x>0$) unidades, su altura será variable (se representa por h). Entonces $V=20=x^2\cdot h$, la altura en función de la longitud de lado de la base es $h(x)=\dfrac{20}{x^2}$. La figura 2 muestra el comportamiento gráfico de la función anterior.

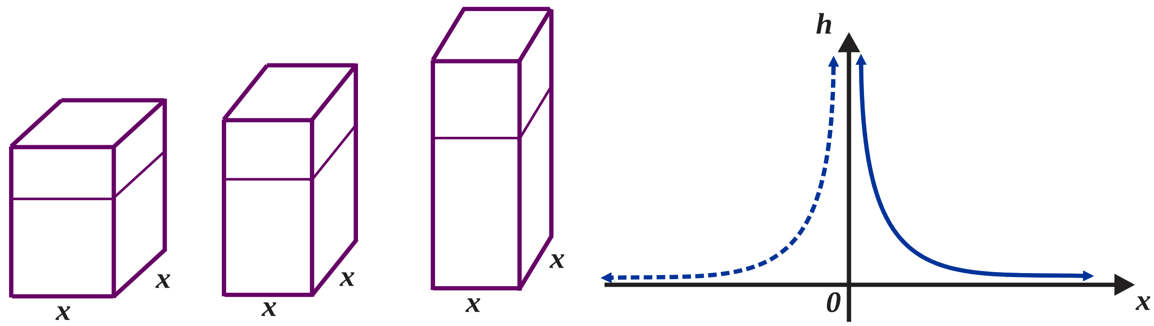


FIGURA 2

d. En un contenedor cilíndrico (circular recto) de volumen fijo, el radio y la altura se relacionan por $V=\pi r^2 h$. Si el cilindro contiene un volumen de 30 unidades cúbicas, entonces la altura del cilindro en función del radio es

$$h(r)=\frac{30}{\pi r^2}\text{, siempre que } r>0.$$

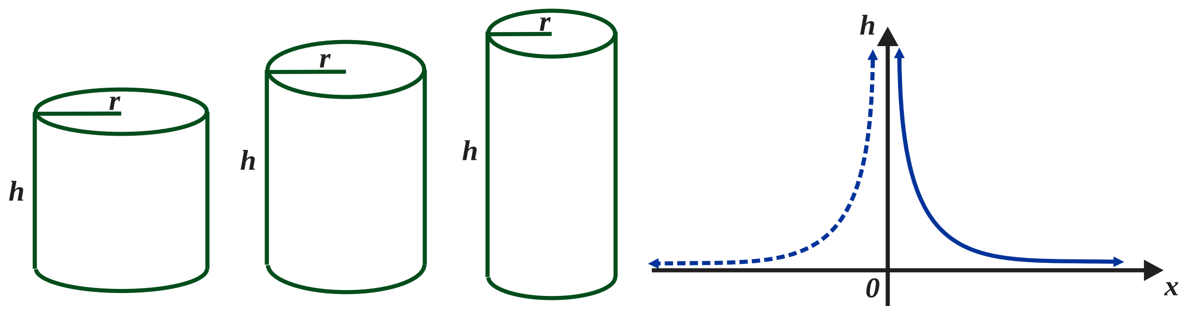


FIGURA 3

El estudio de las funciones racionales se facilita cuando los polinomios que la componen se encuentran factorizados, es decir, si está escrita en la forma

$$r(x)=\frac{(x-a_{01})\cdots(x-a_{0m})}{(x-b_{01})\cdots(x-b_{0n})},$$

donde $a_{01},\cdots,a_{0m}$, son los ceros del polinomio numerador y $b_{01},\cdots,b_{0m}$ son los ceros del polinomio denominador.

EJEMPLO 2 FUNCIONES RACIONALES

i. La función $r(x)=\dfrac{x-2}{x+1}$ es impropia y se encuentra factorizada.

ii. La función $r(x)=\dfrac{x-2}{x^3-4x^2+x-4}=\dfrac{x-2}{(x^2+1)(x-4)}$ es propia y se encuentra factorizada.

iii. La función $r(x)=\dfrac{(x-1)(x-3)}{(2x+1)(x+5)(x+1)}$ es propia y se encuentra factorizada.

Un segundo paso en la caracterización de una función racional es la determinación de su dominio, se construye separando de los números reales los ceros del polinomio denominador.

EJEMPLO 3 DOMINIO DE UNA FUNCIÓN RACIONAL

i. En $r(x)=\dfrac{x-2}{x+1}$, el único cero del polinomio denominador es $x=-1$, luego

$$dom\ (r)=(-\infty\ ,\ -1)\cup(-1\ ,\ +\infty).$$

ii. En $r(x)=\dfrac{x-2}{(x^2+1)(x-4)}$, el único cero del polinomio denominador es $x=4$, entonces

$$dom\ (r)=(-\infty\ ,\ 4)\cup(4\ ,\ +\infty)$$

iii. En $r(x)=\dfrac{8}{x^2+8x+15}=\dfrac{8}{(x+3)(x+5)}$, los ceros del polinomio denominador son $x=-3$ y $x=-5$, entonces

$$dom\ (r)=(-\infty\ ,\ -5)\cup(-5\ ,\ -3)\cup(-3\ ,\ +\infty).$$

iv. En $r(x)=\dfrac{3x}{x^2+6}$, el polinomio denominador no tiene ceros, por tanto

$$dom\ (r)=(-\infty\ ,\ +\infty).$$

ELEMENTOS EN UNA FUNCIÓN RACIONAL $r(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ PROPIA

Los siguientes elementos están asociados con las funciones racionales.

i. Ceros: aquellos números x_0 del dominio tales que $r(x_0)=0$.

ii. Ordenada al origen: la imagen de $x_0=0$ bajo $r(x)$, es decir, el número $r(0)$.

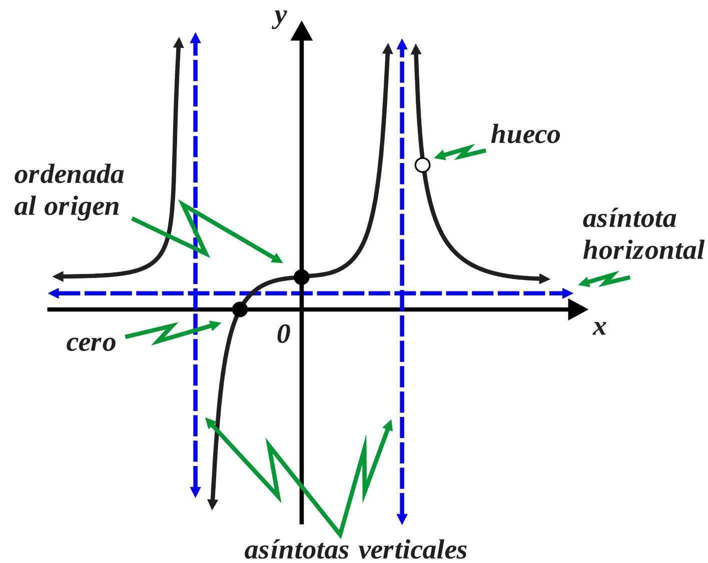
iii. Asíntota vertical: si alrededor del número x_0 (que no pertenece al dominio de $r(x)$):

Si $x\to x_0$, se cumple una de las condiciones

$$r(x)\to+\infty,\ r(x)\to-\infty \text{ o } r(x)\to\pm\infty.$$

iv. Asíntota horizontal: Si $x\to+\infty$ o $x\to-\infty$, entonces $r(x)\to y_0$.

La siguiente figura muestra los comportamientos antes descritos.



GRÁFICA DE LA FUNCIÓN RACIONAL $r(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ PROPIA

Para Trazar la curva que tiene asociada la función $r(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$:

1. Factoriza los polinomios que la componen.
2. Calcula los ceros de la función. Son los ceros de $p(x)$ no comunes con los ceros de $q(x)$.
3. Determina las asíntotas verticales (discontinuidades esenciales):
i. Cero de $q(x)$ que no es común a los ceros de $p(x)$.
ii. Cero común en $p(x)$ y $q(x)$, en donde la multiplicidad del cero de $q(x)$ es mayor la multiplicidad del cero de $p(x)$.

4. Identifica los huecos (discontinuidades esenciales) de la función racional $r(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$.

i. Ceros comunes en $p(x)$ y $q(x)$, la multiplicidad del cero de $p(x)$ es mayor o igual que la multiplicidad del cero de $q(x)$.
5. Obtén la asíntota horizontal.

Los términos dominantes (líder) de los polinomios de la función racional $r(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ indican la existencia (no existencia) de una asíntota horizontal bajo el siguiente criterio.

Si en los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ de $r(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$,

los términos dominantes (líder):
i. $grado(p)=grado(q)$, entonces la asíntota horizontal es la línea recta de ecuación “cociente de los términos dominantes”.

ii. $grado\left(p\right) < grado\left(q\right)$, la asíntota horizontal es el eje de las abscisas, es decir, $y = 0$.

iii. $grado\left(p\right) > grado\left(q\right)$, la asíntota puede ser una curva una línea recta oblicua u otro tipo de curva.

EJEMPLO 4 BOSQUEJO DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN RACIONAL

a. $r\left(x\right) = \dfrac{8\left(x-4\right)^2}{\left(x-4\right)^2\left(x-2\right)}$.

Ceros: No existen (el número 4 no pertenece al dominio de la función).

Dominio: Si omitimos los ceros del polinomio denominador $x_{0D} = 2,\ 4$ del conjunto de los números reales obtenemos

$$dom\left(r\right) = \left(-\infty\ ,\ 2\right) \cup \left(2\ ,\ 4\right) \cup \left(4\ ,\ +\infty\right).$$

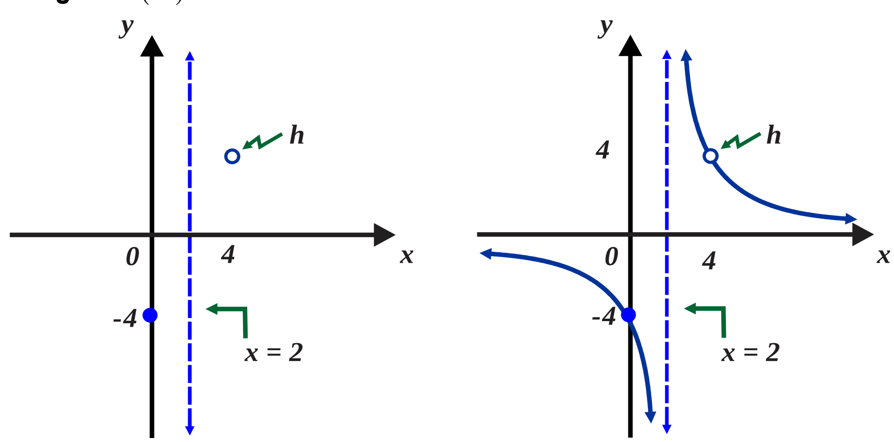
Asíntota vertical: Cero no común del polinomio denominador $x = 2$, por tanto, la única asíntota vertical tiene ecuación $x = 2$.

Huecos: Cero común y de la misma multiplicidad $x_0 = 4$ en ambos polinomios, se observa un hueco en el punto

$$h\left(4\ ,\ 4\right)$$

Asíntota horizontal: Es de mayor grado el término dominante del polinomio denominador que el término dominante del polinomio numerador, por tanto, $y = 0$.

Ordenada al origen: $r\left(0\right) = -4$.



b. $r\left(x\right) = \dfrac{x+3}{x^2 - x - 6} = \dfrac{x+3}{\left(x+3\right)\left(x-2\right)}$.

Ceros: No existen (el número -3 no pertenece al dominio de la función).

Dominio: Eliminando los ceros del polinomio denominador $x_{0D} = -3,\ 2$ del conjunto de los números reales obtenemos

$$dom\left(r\right) = \left(-\infty\ ,\ -3\right) \cup \left(-3\ ,\ 2\right) \cup \left(2\ ,\ +\infty\right).$$

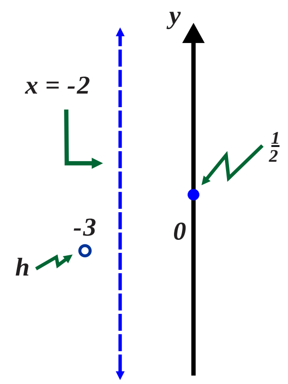
Asíntota vertical: Cero no común del polinomio denominador $x = -2$, por tanto, la única asíntota vertical tiene ecuación $x = -2$.

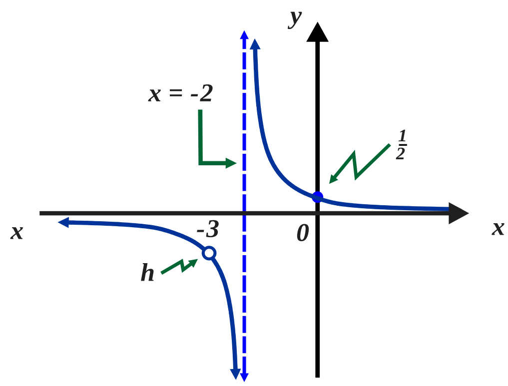
Huecos: Cero común y de la misma multiplicidad $x_0 = -3$ en ambos polinomios, se observa un hueco en el punto

$$h\left(-3\ ,\ -\frac{1}{5}\right)$$

Asíntota horizontal: Es de mayor grado el término dominante del polinomio denominador que el término dominante del polinomio numerador, por tanto, $y=0$.

Ordenada al origen: $r(0)=\dfrac{1}{2}$.





c. $r(x)=\dfrac{x^2+2x-8}{x^3-16x}=\dfrac{(x-2)(x+4)}{x(x-4)(x+4)}$.

Ceros: Únicamente $x_0 = 2$.

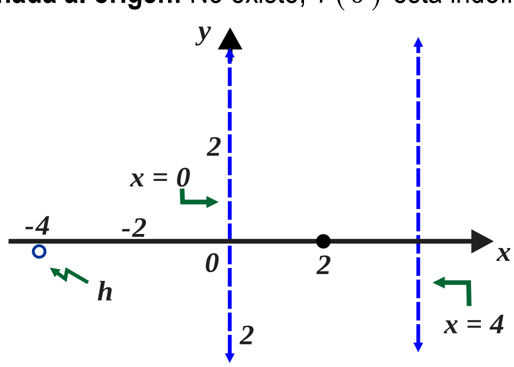
Dominio: Eliminando los ceros del polinomio denominador $x_{0D} = -4,\ 0,\ 4$ del conjunto de los números reales obtenemos $dom\ (r)=(-\infty\ ,\ -4)\cup(-4\ ,\ 0)\cup(0\ ,\ 4)\cup(4\ ,\ +\infty)$.

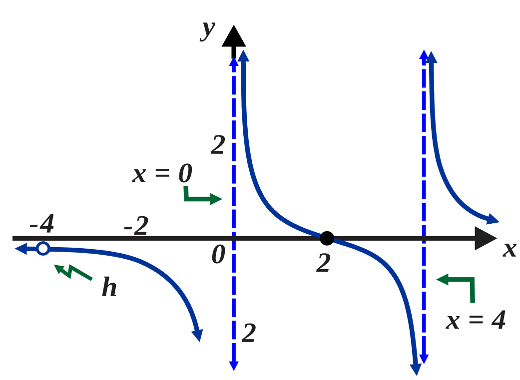
Asíntota vertical: Los ceros no comunes del polinomio denominador $x=0$ y $x=4$, como consecuencia las asíntotas verticales tienen ecuaciones $x=0$ y $x=4$.

Huecos: Ceros comunes y de la misma multiplicidad $x_0 = -4$. El único hueco es $h\left(-4\ ,\ -\dfrac{3}{16}\right)$.

Asíntota horizontal: Tiene mayor grado el término dominante del polinomio denominador que el término dominante del polinomio numerador, por tanto, la asíntota horizontal tiene ecuación $y=0$.

Ordenada al origen: No existe, $r(0)$ está indefinido.





d. $r(x)=\dfrac{15x-15}{x^3+2x^2-7x+4}=\dfrac{15(x-1)}{(x-1)^2(x+4)}$.

Ceros: No existen (el único cero del polinomio numerador tiene menor multiplicidad que el cero que le es común en el polinomio denominador).

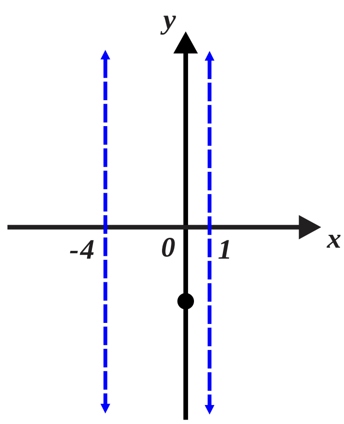
Dominio: Eliminando los ceros del polinomio denominador $x_{0D}=-4,\ 1$ del conjunto de los números reales obtenemos $dom\ (r)=(-\infty\ ,\ -4)\cup(-4\ ,\ 1)\cup(\ 1\ ,\ +\infty\ )$.

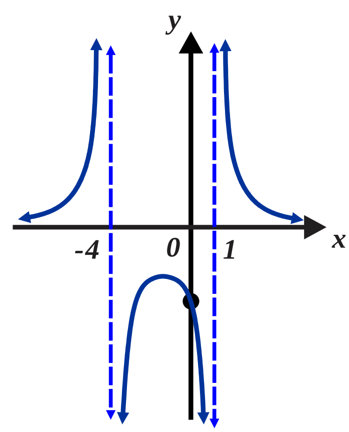
Asíntotas verticales: Los ceros no comunes del polinomio denominador $x=-4$ y $x=1$, como consecuencia las asíntotas verticales tienen ecuaciones $x=-4$ y $x=1$.

Huecos: Cero común $x_0=1$, pero tiene mayor multiplicidad en el polinomio denominador, por tanto, no está asociado con un hueco.

Asíntota horizontal: Tiene mayor grado el término dominante del polinomio denominador que el término dominante del polinomio numerador, por tanto, la asíntota horizontal tiene ecuación $y=0$.

Ordenada al origen: $r(0)=-\dfrac{15}{4}$.





e. $r(x)=\dfrac{2x-6}{x-2}$.

Ceros: De $3x-6=0$ obtenemos el cero es $x_0=3$.

Dominio: Eliminando los ceros del polinomio denominador $x_{0D}=2$ del conjunto de los números reales obtenemos $dom\ (r)=(-\infty\ ,\ 2)\cup(\ 2\ ,\ +\infty\ )$.

Asíntotas verticales: El cero del polinomio denominador $x_{0D}=2$ no es común al cero del polinomio numerador, entonces la única asíntota vertical tiene ecuación

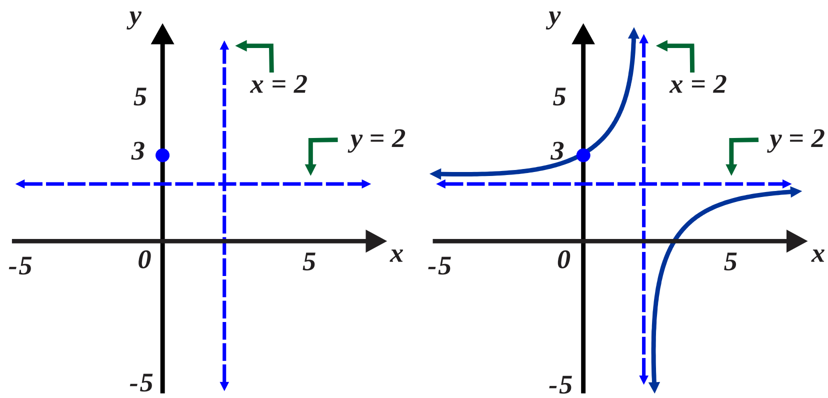
$$x=2\ .$$

Huecos: No existen ceros comunes (en los polinomios numerador y denominador), la curva asociada no tiene huecos.

Asíntota horizontal: Tiene como ecuación el resultado de

$$y=\frac{2x}{x}=2$$

Ordenada al origen: $r(0)=3$.



f. $r(x) = -\dfrac{x^2-5x+4}{2x^2-3x+1} = -\dfrac{(x-4)(x-1)}{(2x+1)(x-1)}$.

Ceros: De $x^2-5x+4=(x-4)(x-1)=0$ obtenemos $x=1$ y $x=4$. Sólo $x_0=4$ es un cero, la otra solución es común a un cero del polinomio denominador.

Dominio: Eliminando los ceros del polinomio denominador $x_{0D} = -\dfrac{1}{2}, 1$ del conjunto de los números reales obtenemos $dom\ (r) = \left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1}{2}, 1\right) \cup (1, +\infty)$.

Asíntotas verticales: El cero $x_{0D} = \dfrac{1}{2}$ del polinomio denominador no es común con algún cero del polinomio numerador, entonces la única asíntota vertical tiene ecuación $x = \dfrac{1}{2}$.

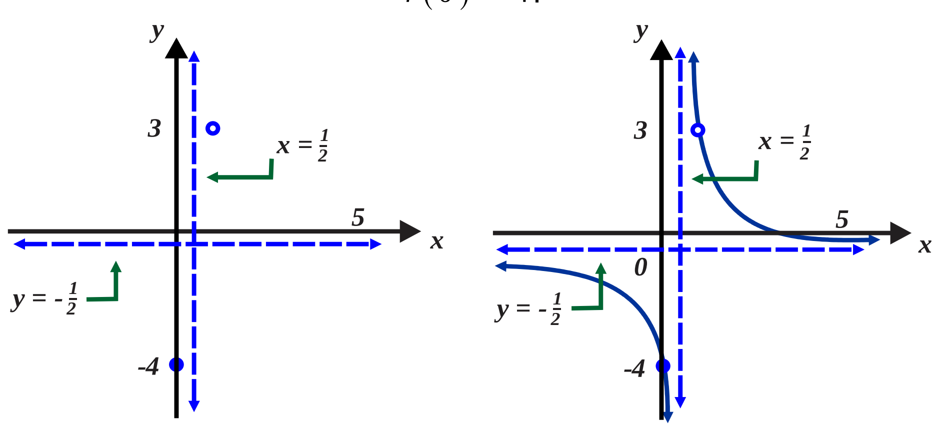
Huecos: El cero $x_0 = 1$ es común y tiene la misma multiplicidad en ambos polinomios, por tanto, su imagen no existe y se observa un hueco en el punto $h(1, 3)$.

Asíntota horizontal: Tiene como ecuación el resultado de

$$y = -\frac{x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Ordenada al origen:

$$r(0) = -4.$$



g. $r(x) = -\dfrac{8x^2+1}{x^2+4}$.

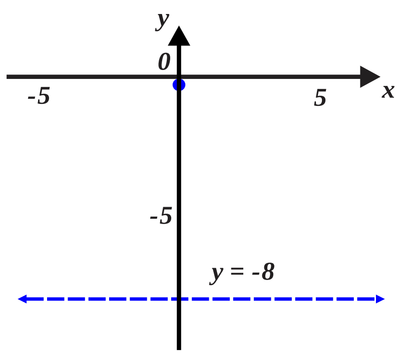
Ceros: Puesto que $8x^2+1 \neq 0$, la función no tiene ceros.
Dominio: El polinomio denominador no tiene ceros, por tanto,

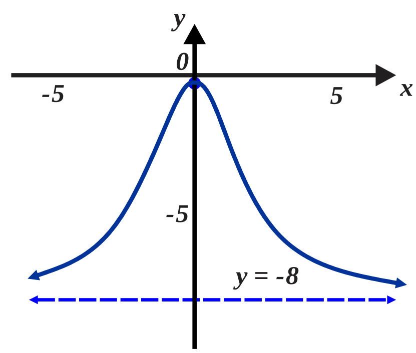
$$dom\ (r) = (-\infty\ ,\ +\infty).$$

Asíntotas verticales: No existen. El polinomio denominador no tiene ceros, no tiene asíntotas verticales.
Huecos: No existen.

Asíntota horizontal: Tiene como ecuación $y = -\dfrac{8x^2}{x^2} = -8$.

Ordenada al origen: $r(0) = -\dfrac{1}{4}$.





h. $r(x) = \dfrac{10x}{x^2+4}$.

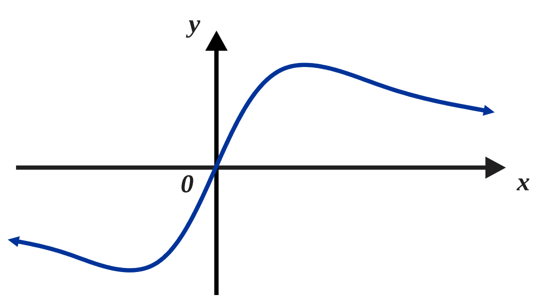
Ceros: De $10x = 0$, obtenemos que el único cero de la función es $x = 0$.
Dominio: El polinomio denominador no tiene ceros, por tanto,

$$dom\ (r) = (-\infty\ ,\ +\infty).$$

Asíntotas verticales: El polinomio denominador no tiene ceros, por tanto, no existen asíntotas verticales.
Huecos: No existen ceros con multiplicidades iguales, no presenta huecos.
Asíntota horizontal: Dadas las potencias de los términos dominantes (líderes), tiene ecuación

$$y = 0.$$

Ordenada al origen: $r(0) = 0$.



EJEMPLO 4 CONSTRUCCIÓN DE FUNCIONES RACIONALES

Construye la función racional con las características indicadas.

a. Asíntota vertical $x=-2$. Asíntota horizontal $y=0$. Hueco en el punto $h(1,1)$. Ordenada al origen $r(0)=2$.

La asíntota vertical garantiza la existencia del factor $x+2$ en el denominador.

El hueco $h(1,1)$ indica que debe incluirse la indeterminación $\frac{x-1}{x-1}$ como factor.

Las dos condiciones anteriores garantizan

$$r_{previa}(x)=\frac{(x-1)}{(x-1)(x+2)}.$$

Puesto que $r_{previa}(0)=\frac{(0-1)}{(0-1)(0+2)}=\frac{1}{2}$, se cumpla la condición $r(0)=4$ cuando

$$r(x)=\frac{8(x-1)}{(x-1)(x+2)}=\frac{8x-8}{x^2+x-2}.$$

b. Ceros en $x=-2$ y $x=2$. Asíntotas verticales $x=-1$ y $x=1$. $r(0)=4$.

La condición ceros en $x=-2$ y $x=2$, garantiza la existencia de los factores $x+2$ y $x-2$ en el polinomio numerador.

La condición asíntotas verticales $x=-1$ y $x=1$, asegura la existencia de los factores $x+1$ y $x-1$ en el polinomio denominador.

De lo anterior obtenemos $r_{previa}(x)=\frac{(x+2)(x-2)}{(x+1)(x-1)}$

De $r_{previa}(0)=\frac{(0+2)(0-2)}{(0+1)(0-1)}=4$ y $r(0)=4$ $r_{previa}(x)=\frac{(x+2)(x-2)}{(x+1)(x-1)}$ concluimos

$$r(x)=\frac{(x+2)(x-2)}{(x+1)(x-1)}=\frac{x^2-4}{x^2-1}.$$

3. Inicialmente, un recipiente contiene 20 litros de agua y se le mezcla un kilogramo de sal. Posteriormente se le agrega agua a un ritmo de 2 litros por minuto y simultáneamente se le agrega sal a un ritmo de 0.2 kilogramo por minuto.

Solución

Para construir la función que describe la concentración de sal en el recipiente consideremos:

Cantidad de sal: aumenta en la forma $S(t)=1+0.2t$ kilogramos.

Volumen del agua: aumenta en la forma $A(t)=20+2t$ litros.

La concentración $C(t)$ de sal es la proporción de kilogramos de sal a litros de agua, entonces

$$C(t)=\frac{1+0.2t}{20+2t}.$$

4. Dos obreros trabajando juntos necesitan T días para terminar cierta obra. Trabajando por separado, uno de ellos requiere 5 días más que el otro para terminar la misma obra. Construye la función que describe el número de días necesarios para terminar la obra en términos del tiempo del trabajador que tarda menos.

Solución

Sea t el número de días que utiliza el trabajador que tarda menos en realizar la obra., entonces en un día habrá realizado $\frac{1}{t}$ de la obra.

Si el otro trabajador tarda 5 días más que el otro, entonces en un día habrá realizado $\frac{1}{t+5}$ de la obra.

Por otra parte, si los dos trabajadores tardan T horas en realizar la obra en un día habrán hecho $\frac{1}{T}$ de la obra. Por tanto,

$$\frac{1}{t}+\frac{1}{t+5}=\frac{1}{T},$$

o bien

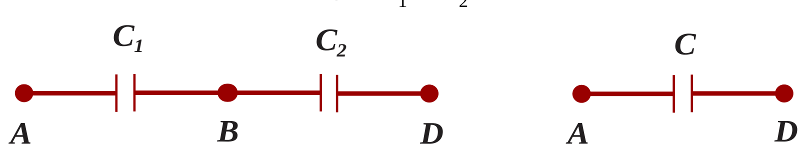
$$\frac{t+5+t}{t(t+5)}=\frac{2t}{t(t+5)}=\frac{1}{T}$$

Rescribiendo como función

$$T(t)=\frac{t^2+5t}{2t+5}.$$

5. Dos o condensadores de capacidades x_1 y x_2 se encuentran en serie cuando cada uno de ellos se coloca con el anterior a lo largo del hilo conductor de un circuito. Dos condensadores en serie pueden ser sustituidos por un único condensador en el que el inverso de su capacidad $\frac{1}{C}$ es la suma de los inversos de sus capacidades, es decir,

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}.$$



Supón que uno de los condensadores tiene capacidad variable (capacidad variable x) y el otro tiene capacidad de 2 unidades. Construye la función que describe la capacidad C (capacitor equivalente) como función de la capacidad del capacitor variable.

Solución

El condensador que los sustituye tendrá capacidad variable $c(x)$ dada por

$$\frac{1}{C(x)}=\frac{1}{x}+\frac{1}{2}.$$

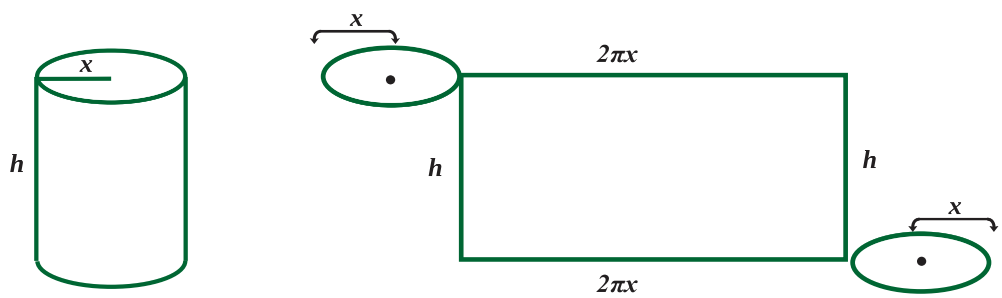
Consecuentemente

$$\frac{1}{C(x)}=\frac{1}{x}+\frac{1}{2}=\frac{x+2}{2x} \text{ o bien } C(x)=\frac{2x}{x+2}.$$

6. Se desea construir un envase cilíndrico que encierre un volumen de un litro (mil centímetros cúbicos). Construye una función que describa el área de su superficie (cantidad de material requerido) en función del radio x del cilindro.

Solución

Revisemos la descomposición del cilindro en superficies.



Cada base tiene área πx^2. La superficie lateral del cilindro es un rectángulo con dimensiones $2\pi x$ por h. La suma de las áreas de las partes es

$$A=2\pi x^2+2\pi x h.$$

El área depende de las variables x y h, sin embargo, se encuentran ligadas por el volumen

$$V=\pi x^2 h=1000$$

en la forma

$$h=\frac{1000}{\pi x^2}.$$

El área en términos del radio x se obtiene sustituyendo

$$h=\frac{1000}{\pi x^2} \text{ en } A=2\pi x^2+2\pi x h=2\pi\left(x^2+xh\right).$$

Esto da

$$A=2\pi x^2+2\pi x\frac{1000}{\pi x^2}=\frac{2\pi x^3+2000}{x}.$$

Para indicar que el área depende de x escribimos

$$A(x)=\frac{2\pi x^3+2000}{x}, \text{ siempre que } x>0.$$

SECCIÓN 2.1
EJERCICIOS 1

1. BOSQUEJO DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN RACIONAL

Determina las características y bosqueja la gráfica de la función.

a. $r(x)=\dfrac{8(x+3)^2}{(x+3)^2(x-2)}$.

b. $r(x)=\dfrac{x+5}{x^2+4x-5}=\dfrac{x+5}{(x+5)(x-1)}$.

c. $r(x)=\dfrac{x-4}{2x^2+4x}=\dfrac{x-4}{2x(x+2)}$.

d. $r(x)=\dfrac{10x}{(x-2)(x+4)}$.

e. $r(x)=\dfrac{2x^2-6x+4}{x^2-5x+4}=\dfrac{(2x-4)(x-1)}{(x-4)(x-1)}$.

f. $r(x)=-\dfrac{x^2-2x-3}{2x^2+3x+1}=-\dfrac{(x-3)(x+1)}{(2x-1)(x+1)}$.

g. $r(x)=\dfrac{6x^2+4}{x^2+4}$.

h. $r(x)=\dfrac{12x}{x^2+9}$.

2. CONSTRUCCIÓN DE FUNCIONES RACIONALES

Construye la función racional con las características indicadas.

a. Cero en $x=2$. Asíntotas verticales $x=-1$ y $x=1$. Asíntota horizontal $y=0$. Ordenada al origen

$$r(0)=2.$$

b. Sin ceros. Asíntotas verticales $x=3$ y $x=0$ Asíntota horizontal $y=0$. Además $r(1)=6$.

c. Sin ceros. Hueco en el punto $h(0,0)$. Asíntota vertical $x=3$ Asíntota horizontal $y=4$.

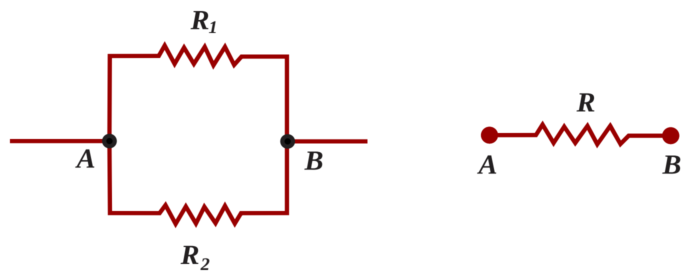
d. Ceros en $x=2$ y $x=4$. Asíntotas verticales $x=0$ y $x=1$ Asíntota horizontal $y=1$.

3. APLICACIÓN

Dos resistores

$$R_1 \text{ y } R_2$$

se encuentran en paralelo si sus extremos están unidos a una fuente de voltaje común.



Dos resistores en paralelo pueden ser sustituidas por un único resistor en la que el inverso de su resistencia $\frac{1}{R}$ es la suma es la suma de los inversos de sus resistencias, es decir,

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Determina la función que describa la resistencia total del resistor equivalente como función de la resistencia x del resistor R_1 cuando

$$R_2 = 4.$$

SECCIÓN 2.2 FUNCIONES CON RADICALES

APRENDIZAJES

5. Explora problemas sencillos que se modelan con funciones con radicales.

6. Identifica los elementos de la función: dominio, rango, ceros y traza su gráfica.

7. Resuelve problemas de aplicación.

TEMÁTICA

5. Funciones de la forma:

$$f(x) = \sqrt{ax \pm c}$$

$$f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$$

con a, b **y** c **números reales**

Elementos de las funciones: dominio, rango, ceros de la función.

6. Gráfica de funciones con radicales.

7. Problemas de aplicación.

FUNCIONES CON RADICALES COMO MODELOS

En el estudio de situaciones relacionadas con la variación de las dimensiones de ciertos cuerpos geométricos (estructuras arquitectónicas, instrumentos mecánicos, etcétera) suelen ser necesarios modelos que incluyen funciones con regla de correspondencia de la forma $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$. El *ejemplo 1* incluye algunas de estas situaciones.

EJEMPLO 1 FIGURAS GEOMÉTRICAS

a. Los pasteles de forma cilíndrica (concretamente de cilindro truncado), tienen bases circulares y el área de cada una de ellas es $A=\pi r^2$, bajo la condición $r>0$. Para expresar el radio r de una de las bases en función del área A despejamos r y obtenemos

$r=+\sqrt{\dfrac{A}{\pi}}$, o con la notación de función $r(A)=\sqrt{\dfrac{A}{\pi}}$, siempre que $A>0$, vea la *figura 1.a.*

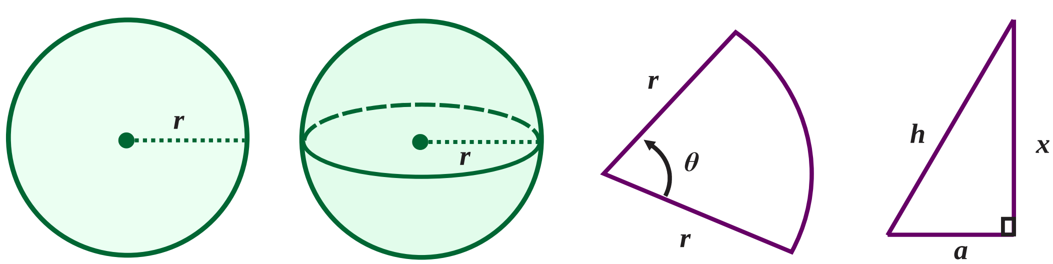
b. Las canicas tienen forma esférica. Puesto que el área de una esfera se calcula con la "fórmula" $A=4\pi r^2$ con $r>0$, entonces $r=\sqrt{\dfrac{A}{4\pi}}$, así el radio de una canica en función de su área está dado por la función

$$r(A)=\sqrt{\frac{A}{4\pi}}\text{, siempre que } A>0\text{, vea la } \textit{figura 1.b.}$$

c. El radio r de un sector circular (con el que se pueden modelar fracciones de alimentos circulares, fracciones de materiales circulares, etc.) en función del área A del sector se obtiene a partir de $A=\dfrac{1}{2}r^2\theta$ (el ángulo θ está medido en radianes), entonces $r=\sqrt{\dfrac{2A}{\theta}}$, es decir,

$$r(A)=\sqrt{\frac{2A}{\theta}}\text{, sí } \theta>0\text{, vea la } \textit{figura 1.c.}$$

d. El teorema de Pitágoras afirma: En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos y viceversa, si la suma de cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa, entonces el triángulo es rectángulo. En el triángulo rectángulo de la *figura 1.d.* el cateto a tiene longitud constante, entonces $h(x)=\sqrt{a^2+x^2}$, siempre que $x>0$.



a. Base circular **b.** Esfera **c.** Sector circular **d.** Triángulo rectángulo

FIGURA 1

ELEMENTOS Y TRAZO DE GRÁFICAS DE FUNCIONES CON RADICALES

A continuación, presentamos un estudio integral de la función con regla de correspondencia $f\ (x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$ (con $a\neq 0$ y/o $b\neq 0$) con base en el número de ceros del polinomio cuadrático $p\ (x)=ax^2+bx+c$.

RADICANDO EN $f\ (x)=\sqrt{bx+c}$ LINEAL

Si para simplificar el estudio de la función con regla de correspondencia $f\ (x)=\sqrt{bx+c}$ la rescribimos como $y=\sqrt{bx+c}$ teniendo en cuenta $y=f\ (x)$.

Entonces $y^2=bx+c$, o bien $(\ y-0\ )^2=b\left(\ x+\frac{c}{b}\right)$, por tanto, la curva asociada a esta función es una semi parábola con vértice en el punto $V\left(\ -\frac{c}{b}\ ,\ 0\ \right)$ y su apertura (horizontal) depende del signo del número b.

EJEMPLO 2 BOSQUEJO DE LA CURVA ASOCIADA A $f\ (x)=\sqrt{bx+c}$

a. En $f\ (x)=\sqrt{-3x+9}$ los ceros son las soluciones de la ecuación, $-3x+9=0$, es decir $x_0=3$. El cero $x_0=3$ genera en la línea recta real los intervalos:
$x_{02}=2$. Los ceros "generan" los intervalos (coinciden en el cero):

$$(-\infty\ ,\ 3\ ]\text{ y }[\ 3\ ,\ +\infty\ ).$$

De cada uno de los intervalos anteriores seleccionamos un número de prueba (x_p) y calculamos su imagen bajo la función.

En $(-\infty\ ,\ 3\ ]$, sea $x_p=0$, entonces $f\ (0)=\sqrt{-3(0)^2+9}=3$.

En $[\ 3\ ,\ +\infty\ )$, sea $x_p=4$, entonces $f\ (0)=\sqrt{-3(4)^2+9}=\sqrt{-39}$ (no existe), esto garantiza que sobre el intervalo $[\ 3\ ,\ +\infty\ )$ la regla de correspondencia $f\ (x)=\sqrt{-3x+9}$ no está definida. La tabla sistematiza la información anterior.

INTERVALO	NÚMEROS DE PRUEBA	IMAGEN $f\ (x_p)$	SE CONSIDERA
$(-\infty\ ,\ 3\ ]$	$x_p=0$	$f\ (0)=3$	Sí.
$[\ 3\ ,\ +\infty\ )$	$x_p=\frac{3}{2}$	$f\ (4)=\sqrt{-39}$	No.

La función tiene dominio $dom\ (\ f\ )=(-\infty\ ,\ 3\ ]$.

La ordenada al origen es $f(0)=3$.

Su representación en el plano (gráfica) es la semi parábola de la figura:

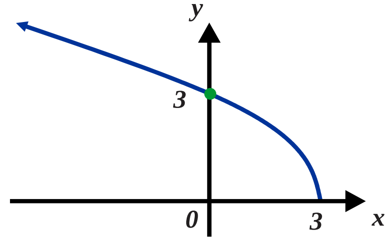


FIGURA 2

Nota que su recorrido (rango o conjunto imagen) es el conjunto $rec(f)=[0\ ,\ +\infty)$.

b. En $f(x)=\sqrt{4x+2}$ los ceros son las soluciones de la ecuación, $4x+2=0$, es decir $x_0=-\frac{1}{2}$.

INTERVALO	NÚMEROS DE PRUEBA	IMAGEN $f(x_p)$	SE CONSIDERA
$\left(-\infty\ ,\ -\frac{1}{2}\right]$	$x_p=-1$	$f(1)=\sqrt{-2}$	No.
$\left[-\frac{1}{2}\ ,\ +\infty\right)$	$x_p=0$	$f(0)=\sqrt{2}$	Si.

i. La función tiene dominio

$$dom(f)=\left[-\frac{1}{2}\ ,\ +\infty\right).$$

ii. La ordenada al origen es $f(0)=\sqrt{2}$.

iii. Su representación en el plano cartesiano (gráfica) es la semi parábola de la figura:

iv. En donde podemos observar que su recorrido (rango o conjunto imagen) es el conjunto $rec(f)=[0\ ,\ +\infty)$.

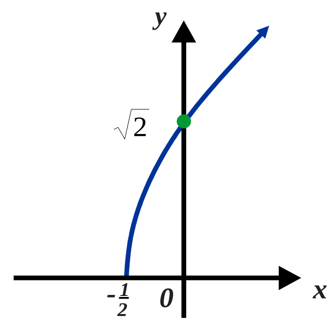


FIGURA 3

b. El cero de $f(x)=\sqrt{-2x-6}$ es la solución de $-2x-6=0$, es decir $x_0=-3$.

INTERVALO	NÚMEROS DE PRUEBA	IMAGEN $f(x_p)$	SE CONSIDERA
$(-\infty\ ,\ -3]$	$x_p=-4$	$f(1)=\sqrt{2}$	Si.
$[-3\ ,\ +\infty)$	$x_p=0$	$f(0)=\sqrt{-6}$	No.

i. La función tiene dominio $dom(f)=(-\infty\ ,\ -3]$.

ii. Dado que $f(0)=\sqrt{-6}$ no existe, la ordenada al origen no existe.

iii. Su representación en el plano cartesiano (gráfica) es la semi parábola de la figura:

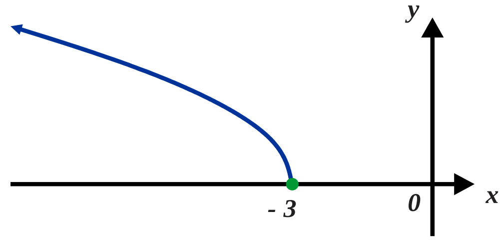


FIGURA 4

iv. Su recorrido (rango o conjunto imagen) es el conjunto $rec\,(f) = [\,0\,,\,+\infty\,)$.

RADICANDO CUADRÁTICO EN $f\,(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$

En el estudio de funciones con reglas de correspondencia equivalentes (algebraicamente a $f\,(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ con $a \neq 0$) son cuádricas, es decir, curvas de las formas mostradas en las figuras.

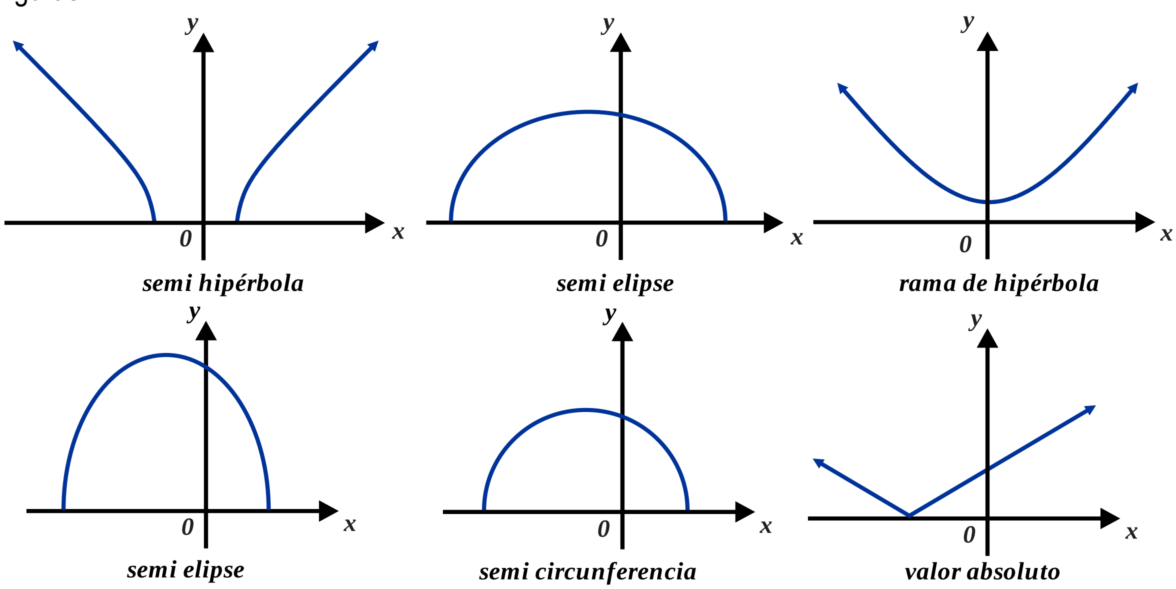


FIGURA 5

El análisis gráfico de la función $f\,(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ se facilita si se toma en cuenta el número de ceros del polinomio radicando, el polinomio $p\,(x) = ax^2 + bx + c$.

PRIMER CASO (DOS CEROS DISTINTOS)

Si $f\,(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ puede rescribirse en la forma $f\,(x) = \sqrt{a(x - x_{01})(x - x_{02})}$, entonces los ceros son los números x_{01} y x_{02}, que dividen a la línea recta real tres en subintervalos;

supongamos que son $(-\infty\ ,\ x_{01}\ ]$, $[\ x_{01}\ ,\ x_{02}\ ]$ y $[\ x_{02}\ ,\ +\infty\ )$. Seleccionando un número x_p de prueba de cada uno los intervalos y evaluando en la regla de correspondencia podremos concluir si el intervalo (al que pertenece el número x_p) forma (o no forma parte del dominio de la función y como consecuencia si la curva asociada tiene la forma de: semi hipérbola, semi elipse o semi circunferencia.

EJEMPLO 3 BOSQUEJO DE LA CURVA ASOCIADA A $f\ (x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$ CON DOS CEROS

a. $f\ (x)=\sqrt{x^2-3x+2}$ puede rescribirse como $f\ (x)=\sqrt{(x-2)(x-1)}$, sus ceros son los números $x_{01}=1$ y $x_{02}=2$ y "generan" los intervalos:

$$(-\infty\ ,\ 1\ ],\ [\ 1\ ,\ 2\ ]\ \text{y}\ [\ 2\ ,\ +\infty\ ).$$

De cada uno de los intervalos anteriores seleccionamos un número de prueba (x_p) y calculamos su imagen bajo la función.

En $(-\infty\ ,\ 1\ ]$, sea $x_p=0$, entonces $f\ (0)=\sqrt{(0)^2-3(0)+2}=\sqrt{2}$.

En $[\ 1\ ,\ 2\ ]$, sea $x_p=\frac{3}{2}$, entonces $f\left(\frac{3}{2}\right)=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2-3\left(\frac{3}{2}\right)+2}=\sqrt{-\frac{1}{4}}$.

En $[\ 2\ ,\ +\infty\ )$, sea $x_p=4$, entonces $f\ (4)=\sqrt{(4)^2-3(4)+2}=\sqrt{6}$.

Observa que en el intervalo $[\ 1\ ,\ 2\ ]$ las imágenes de los números (que no son extremos) no existen, por tal razón no pertenece al dominio de la función. La tabla sistematiza la información anterior.

INTERVALO	NÚMEROS DE PRUEBA	IMAGEN $f\ (x_p)$	SE CONSIDERA
$(-\infty\ ,\ 1\ ]$	$x_p=0$	$f\ (0)=\sqrt{2}$	Sí.
$[\ 1\ ,\ 2\ ]$	$x_p=\frac{3}{2}$	$f\left(\frac{3}{2}\right)=\sqrt{-\frac{1}{4}}$	No.
$[\ 2\ ,\ +\infty\ )$	$x_p=4$	$f\ (4)=\sqrt{6}$	Sí

i. La función tiene dominio

$$dom\ (\ f\ )=(-\infty\ ,\ 1\ ]\cup[\ 2\ ,\ +\infty\ ).$$

ii. Tiene ordenada al origen

$$f\ (0)=\sqrt{(0)^2-3(0)+2}=\sqrt{2}.$$

iii. Su representación en el plano (gráfica) es la semi hipérbola de la figura:

iv. El recorrido (rango o conjunto imagen) es el conjunto $rec\ (\ f\ )=[\ 0\ ,\ +\infty\ )$.

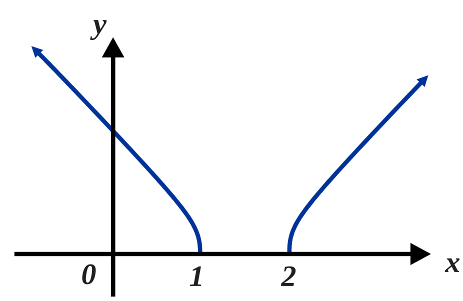


FIGURA 6

b. $f(x)=\sqrt{-2x^2+4x+16}$ puede rescribirse como $f(x)=\sqrt{-2(x+2)(x-4)}$, por tanto, sus ceros son los números $x_{01}=-2$ y $x_{02}=4$. Los ceros "generan" los intervalos:

INTERVALO	NÚMEROS DE PRUEBA	IMAGEN $f(x_p)$	SE CONSIDERA
$(-\infty, -2]$	$x_p=-4$	$f(-4)=\sqrt{-32}$	No.
$[-2, 4]$	$x_p=0$	$f(0)=4$	Si.
$[4, +\infty)$	$x_p=5$	$f(5)=\sqrt{-14}$	No.

i. La función tiene dominio $dom(f)=[-2, 4]$.

ii. La ordenada al origen es $f(0)=4$.

iii. Su representación en el plano (gráfica) es la semi elipse:

iv. Un estudio meticuloso justifica que su recorrido (rango o conjunto imagen) es el conjunto (intervalo)

$$rec(f)=\left[0, 3\sqrt{2}\right].$$

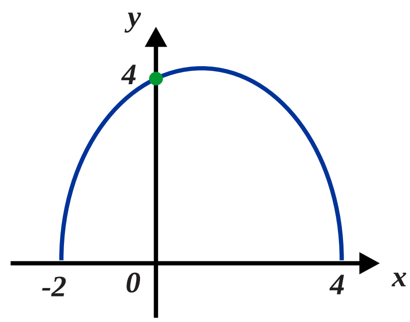


FIGURA 7

c. $f(x)=\sqrt{-x^2+4x+5}$ puede rescribirse como $f(x)=\sqrt{-(x+1)(x-5)}$, sus ceros son los números $x_{01}=-1$ y $x_{02}=5$. Los ceros "generan" los intervalos:

INTERVALO	NÚMEROS DE PRUEBA	IMAGEN $f(x_p)$	SE CONSIDERA
$(-\infty, -1]$	$x_p=-2$	$f(-2)=\sqrt{-7}$	No.
$[-1, 5]$	$x_p=0$	$f(0)=\sqrt{5}$	Si.
$[5, +\infty)$	$x_p=6$	$f(6)=\sqrt{-7}$	No.

i. La función tiene dominio $dom(f)=[-1, 5]$.

ii. La ordenada al origen es $f(0)=\sqrt{5}$.

iii. Su representación en el plano (gráfica) es la semi circunferencia:

vi. Su recorrido (rango o conjunto imagen) es el conjunto (intervalo) $rec(f)=[0, 3]$.

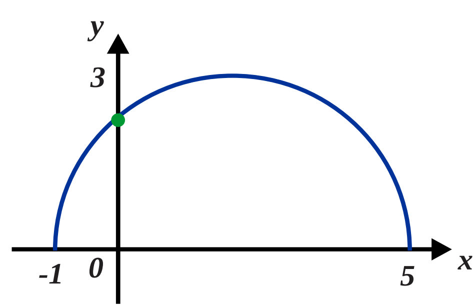


FIGURA 8

SEGUNDO CASO (UN CERO DE MULTIPLICIDAD DOS)

$f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$ puede rescribirse en la forma $f(x)=\sqrt{a(x-x_0)^2}$.

Si $a<0$, entonces

$$f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-x_0)^2}$$

sólo tiene como dominio al número $x=x_0$ y su imagen es $f(x_0)=\sqrt{a(x_0-x_0)^2}=0$.

Si $a>0$, entonces

$$f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-x_0)^2}=\sqrt{a}\,|x-x_0|,$$

y su gráfico es un par de líneas semi rectas que coinciden en el punto inicial.

EJEMPLO 4 BOSQUEJO DE LA CURVA ASOCIADA A $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$ CON UN CERO

a. $f(x)=\sqrt{4x^2-8x+4}$ puede rescribirse como $f(x)=\sqrt{4(x-1)^2}=\pm 2(x-1)$, por tanto, tiene como único cero al número $x_0=1$ (de multiplicidad 1). Además:

i. La función tiene por dominio al intervalo $dom(f)=IR$.

ii. La ordenada al origen es $f(0)=2$.

iii. Su representación en el plano (gráfica) consiste en un par de líneas semi rectas con extremo común en el número en $x_0=1$. Su gráfico se presenta a continuación:

iv. Nota que su recorrido (rango o conjunto imagen) es el conjunto (intervalo)

$$rec(f)=[0,+\infty).$$

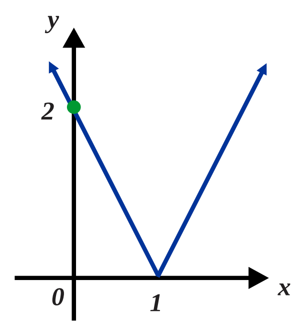


FIGURA 9

b. $f(x)=\sqrt{-3x^2-6x-3}$ equivale a $f(x)=\sqrt{-3(x+1)^2}$, por tanto, tiene como único cero al número $x_0=-1$ (de multiplicidad 1). Además:

i. La función tiene por dominio al conjunto $dom(f)=\{-1\}$.

ii. No tiene ordenada al origen, el número $f(0)=\sqrt{-3}$ no existe.

iii. Su representación en el plano (gráfica) consiste en un único punto, éste es $p(-1,0)$.

c. $f(x)=\sqrt{4x^2-4x+1}$ puede rescribirse como $f(x)=\sqrt{4\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)}=\sqrt{4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}$ o bien $f(x)=\pm 2\left(x-\frac{1}{2}\right)$, por tanto, tiene como único cero al número $x_0=\frac{1}{2}$ (de multiplicidad 1).

Además:

i. La función tiene por dominio al intervalo $dom(f)=IR$.

ii. La ordenada al origen es $f(0)=1$.

iii. Su representación en el plano cartesiano (gráfica) consiste en un par de líneas semi rectas con extremo común en el número en $x_0 = 1$. Su gráfico se presenta a continuación

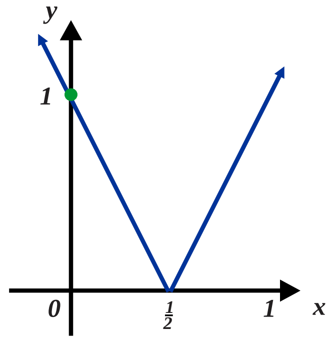


FIGURA 10

iv. Nota que su recorrido (rango o conjunto imagen) es el conjunto (intervalo) $rec\ (f) = [0\ ,\ +\infty)$.

TERCER CASO (NO TIENE CEROS)

En este caso, $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ tiene como gráfica la rama de una hipérbola o no es función.

EJEMPLO 5 BOSQUEJO DE LA CURVA ASOCIADA A $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ SIN CEROS

a. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$ puede rescribirse como

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5} = \sqrt{x^2 + 4x + 4 + 1} = \sqrt{(x+2)^2 + 1},$$

(completando un trinomio cuadrado en el polinomio radicando), la función alcanza su valor mínimo en $x_0 = -2$, éste es $f(-2) = \sqrt{(-2)^2 + 4(-2) + 5} = 1$.

i. La función tiene por dominio al intervalo

$$dom\ (f) = IR.$$

ii. La ordenada al origen es $f(0) = \sqrt{5}$.

iii. Su representación en el plano cartesiano (gráfica) es la rama positiva de hipérbola,

iv. EL recorrido (rango o conjunto imagen) es el conjunto (intervalo) $rec\ (f) = [1\ ,\ +\infty)$.

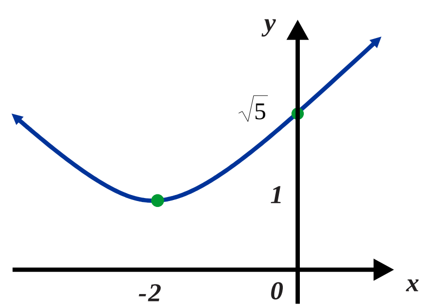


FIGURA 11

b. $f(x) = \sqrt{2x^2 - 12x + 22}$ puede rescribirse como

$$f(x) = \sqrt{2x^2 - 12x + 22} = \sqrt{2(x^2 - 6x + 9) + 4} = \sqrt{2(x-3)^2 + 4},$$

(completando un trinomio cuadrado en el polinomio radicando), la función alcanza su valor mínimo en $x_0 = 3$, éste es $f(3) = \sqrt{2(3)^2 - 12(3) + 22} = 2$.

i. La función tiene por dominio al intervalo $dom\ (f\ ) = IR$. La ordenada al origen es $f\ (0) = \sqrt{22}$.
ii. Su representación en el plano cartesiano (gráfica) consiste en la rama de una hipérbola **iii.** Su gráfico se presenta a a la derecha.
iv. El recorrido (rango o conjunto imagen) es el conjunto (intervalo) $rec\ (f\ ) = [\,2\ ,\ +\infty\,)$.

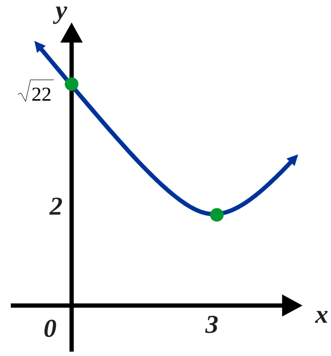


FIGURA 12

c. $f\ (x) = \sqrt{-x^2 - 3}$ puede rescribirse como $f\ (x) = \sqrt{-x^2 - 3} = \sqrt{-\left(x^2 + 3\right)}$,
en donde se observa que el radicando tiene signo negativo para toda asignación a la variable x, por tanto, tal "regla de correspondencia" no corresponde a una función.

EJEMPLO 6 CONSTRUCCIÓN DE FUNCIONES DE LA FORMA $f\ (x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$

Construye una función de la forma $f\ (x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ con las características señaladas.

a. Ceros $x_{01} = -2$ y $x_{02} = 3$, ordenada al origen $f\ (0) = 6$.

Los ceros $x_{01} = -2$ y $x_{02} = 3$ generan los factores $(x + 2)$ y $(x - 3)$, por tanto, la regla de correspondencia es de la forma $f\ (x) = \sqrt{A(x+2)(x-3)}$.

La condición $f\ (0) = 6$ implica $6 = \sqrt{A(0+2)(0-3)} = \sqrt{-6A}$, de donde $36 = -6A$ o $A = -6$.

Por tanto, $f\ (x) = \sqrt{-6(x+2)(x-3)}$ o bien $f\ (x) = \sqrt{-6x^2 + 6x + 36}$, el dominio es

$$dom\ (f\ ) = [\,-2\ ,\ 3\,].$$

b. Ceros $x_0 = 2$ de multiplicidad dos y ordenada al origen $f\ (0) = 4$.

Ya que el cero $x_0 = 2$ tiene multiplicidad dos, la regla de correspondencia presenta la forma

$$f\ (x) = \sqrt{A(x-2)^2}\ .$$

De $f\ (0) = 4$ y $f\ (x) = \sqrt{A(x-2)^2}$ obtenemos $4 = \sqrt{A(4-2)^2}$ o bien $16 = 4A$. $A = 4$.

Sustituyendo $A = 4$ en $f\ (x) = \sqrt{A(x-2)^2}$ da $f\ (x) = \sqrt{4(x-2)^2}$ o bien

$$f\ (x) = \sqrt{4x^2 - 16x + 16}\text{, su dominio son todos los números reales.}$$

c. $dom\ (f\ ) = (-\infty\ ,\ 2\,] \cup [\,4\ ,\ +\infty\,)$ y $f\ (0) = 8$. El dominio indica que los ceros son los números $x_{01} = 2$ y $x_{02} = 4$.

Los ceros $x_{01} = 2$ y $x_{02} = 4$ generan a $(x - 2)$ y $(x - 4)$, entonces $f\ (x) = \sqrt{A(x-2)(x-4)}$.

La condición $f\ (0) = 8$ implica $8 = \sqrt{A(0-2)(0-4)} = \sqrt{8A}$, de donde $64 = 8A$ o $A = 8$.

Sustituyendo $A = 8$ en $f\ (x) = \sqrt{A(x-2)(x-4)}$ y desarrollando $f\ (x) = \sqrt{8x^2 - 8x - 48}$.

EJEMPLO 7 APLICACIÓN

Sean los puntos $p_1(x, 6)$ y $p_2(4, 2)$ en el plano cartesiano. Construye la función que describe la distancia entre ambos puntos en función de la coordenada x.

Solución

La distancia entre dos puntos del plano cartesiano se calcula con la ecuación

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\ .$$

Sustituyendo obtenemos

$$d = \sqrt{(x-4)^2 + (6-2)^2}\ .$$

Desarrollando y utilizando la notación de funciones

$$d(x) = \sqrt{x^2 - 8x} \text{ tal que } dom(d) = (-\infty, 0] \cup [8, +\infty).$$

EJEMPLO 8 APLICACIÓN

En un triángulo rectángulo la longitud de un cateto es dos unidades mayor que la longitud del otro cateto. Construye la función que describe la longitud de la hipotenusa l en función de la longitud del cateto menor.

Solución

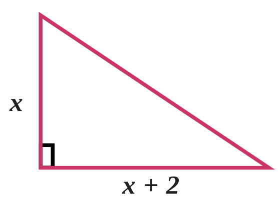


FIGURA 13

Por el teorema de Pitágoras

$$l(x) = \sqrt{x^2 + (x+2)^2} = \sqrt{2x^2 + 4x + 4} \text{ tal que } dom(l) = (-\infty, +\infty).$$

EJEMPLO 9 APLICACIÓN

Un triángulo rectángulo está inscrito en una semi circunferencia de diámetro de longitud 4 unidades. Construye la función que describe la longitud de la altura h del triángulo en función de la longitud de la fracción x de la base del triángulo.

Solución

La siguiente figura describe la situación.

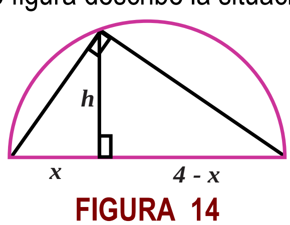


FIGURA 14

La altura es media proporcional de las longitudes de los segmentos rectilíneos en que queda dividida la base del triángulo inscrito (equivalentemente el diámetro de la semi circunferencia), tenemos

$$h^2 = x(4-x), \text{ o bien } h(x) = \sqrt{x(4-x)} = \sqrt{-x^2 + 4x}, \text{ con } dom(h) = [0, 4].$$

SECCIÓN 2.2
EJERCICIOS 1

1. Obtén los elementos (ceros, dominio, ordenada al origen, recorrido) y bosqueja la gráfica de la función.

a. $f(x)=\sqrt{-4-2x}$.

b. $f(x)=\sqrt{4x-1}$.

c. $f(x)=\sqrt{\frac{1}{2}x+3}$.

d. $f(x)=\sqrt{x^2-9}$.

e. $f(x)=\sqrt{x^2-7x-8}$.

f. $f(x)=\sqrt{-2x^2-6x-4}$.

g. $f(x)=\sqrt{-x^2+16}$.

h. $f(x)=\sqrt{-2x^2+8x-6}$.

i. $f(x)=\sqrt{x^2-6x+9}$.

j. $f(x)=\sqrt{-x^2-8x-16}$.

k. $f(x)=\sqrt{x^2+4}$.

l. $f(x)=\sqrt{-x^2-9}$.

m. $f(x)=\sqrt{4x^2+2}$.

n. $f(x)=\sqrt{x^2-x+\frac{1}{4}}$.

ñ. $f(x)=\sqrt{-x^2-6x-9}$.

2. Obtén la regla de correspondencia de la función de la forma $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$ con las siguientes características.

a. Cero $x_0=1$ de multiplicidad dos y ordenada al origen dos.

b. Ceros $x_{01}=-4$ y $x_{02}=2$. Máximo en el punto $M(-1\ ,\ 3)$.

3. En un rectángulo la longitud de la base es 4 unidades mayor que la altura. Construye la función que describe la longitud de una diagonal l en función de la longitud de la altura.

4. Sean los puntos $p_1(2\ ,\ y)$ y $p_2(3\ ,\ 6)$ en el plano cartesiano. Construye la función que describe la distancia entre ambos puntos en función de la coordenada y.

5. Un triángulo rectángulo está inscrito en una semi circunferencia de diámetro de longitud 4 unidades. Construye la función que describe su área en función de la longitud altura x en que queda dividida su base.

2.3 SOLUCIONES Y EVALUACIÓN

SOLUCIÓN A EJERCICIOS PROPUESTOS

EXAMEN DE LA UNIDAD

SOLUCIÓN AL EXAMEN

SECCIÓN 2.1 SOLUCIONES A EJERCICIOS 1

1.

a. Ceros: No.

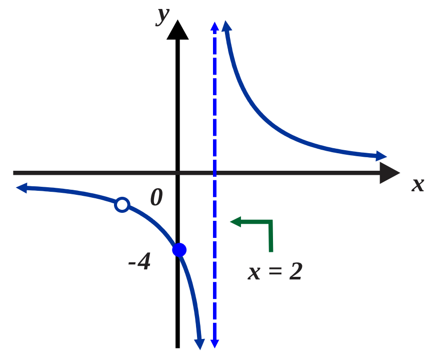
$dom\ (r) = (-\infty, -3) \cup (-3, 2) \cup (2, +\infty)$.

Asíntota vertical: $x = 2$.

Huecos: $h\left(-3, -\frac{8}{5}\right)$

Asíntota horizontal: $y = 0$.

Ordenada al origen: $r(0) = -4$.



b. Ceros: No tiene.

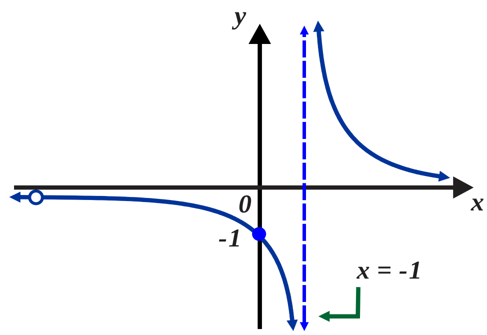
$dom\ (r) = (-\infty, -5) \cup (-5, 1) \cup (1, +\infty)$.

Asíntota vertical: $x = 1$.

Huecos: $h\left(-5, -\frac{1}{6}\right)$.

Asíntota horizontal: $y = 0$.

Ordenada al origen: $r(0) = -1$.



c. Ceros: $x_0 = 4$.

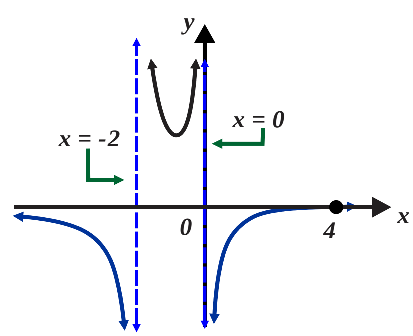
$dom\ (r) = (-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, +\infty)$.

Asíntota vertical: $x = 0$ y $x = -2$.

Hueco: No.

Asíntota horizontal: $y = 0$.

Ordenada al origen: No existe.



d. Ceros: $x = 0$.

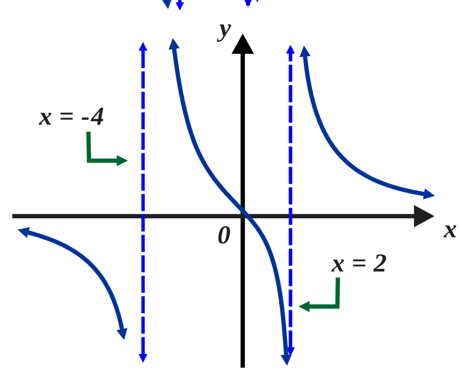
$dom\ (r) = (-\infty, -4) \cup (-4, 2) \cup (2, +\infty)$.

Asíntotas verticales: $x = -4$ y $x = 2$.

Huecos: No.

Asíntota horizontal: $y = 0$.

Ordenada al origen: $r(0) = 0$.



e. Ceros: $x_0 = 2$.

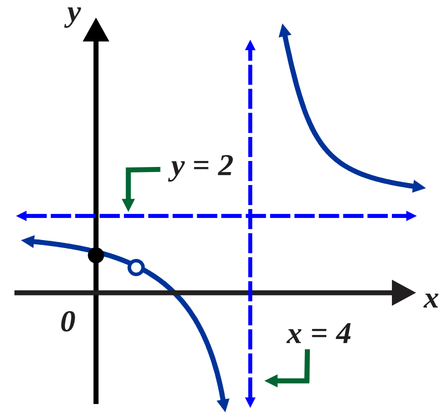
$dom\ (r) = (-\infty, 1) \cup (1, 4) \cup (4, +\infty)$.

Asíntota vertical: $x = 4$.

Huecos: $h\left(1, \frac{2}{3}\right)$.

Asíntota horizontal: $y = 2$.

Ordenada al origen: $r(0) = 1$.



f. Ceros: $x_0 = 3$.

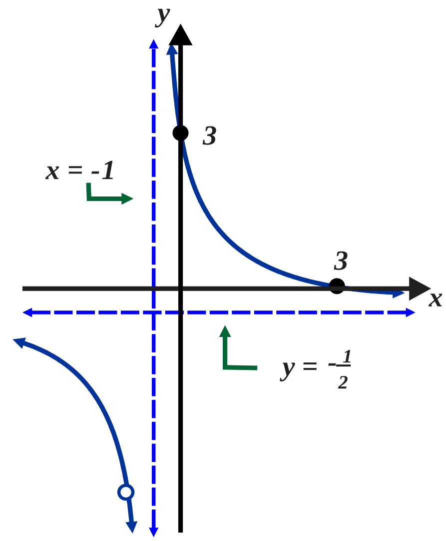
$dom\ (r) = (-\infty, -1) \cup \left(-1, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

Asíntotas verticales: $x = -\frac{1}{2}$.

Huecos: $h(-1, -4)$.

Asíntota horizontal: $y = -\frac{1}{2}$.

Ordenada al origen: $r(0) = 3$.



g. Ceros: Ninguno.

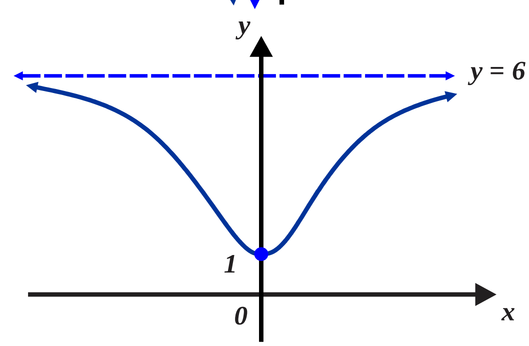
$dom\ (r) = (-\infty, +\infty)$.

Asíntotas verticales: No.

Huecos: No.

Asíntota horizontal: $y = 6$.

Ordenada al origen: $r(0) = 1$.



h. Ceros: $x = 0$.

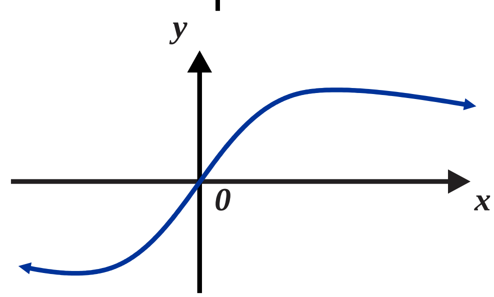
$dom\ (r) = (-\infty, +\infty)$.

Asíntotas verticales: no existen.

Huecos: No existen.

Asíntota horizontal: $y = 0$.

Ordenada al origen: $r(0) = 0$.



2. a. $r(x) = \frac{x-2}{x^2-1}$. **b.** $r(x) = -\frac{6}{x(x-3)}$. **c.** $r(x) = -\frac{4x^2}{x(x-3)}$.

d. $r(x)=\dfrac{(x-2)(x-4)}{x(x-1)}=\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-x}$. **3.** $R(x)=\dfrac{2x}{x+4}$.

SECCIÓN 2.2 SOLUCIONES A EJERCICIOS 1

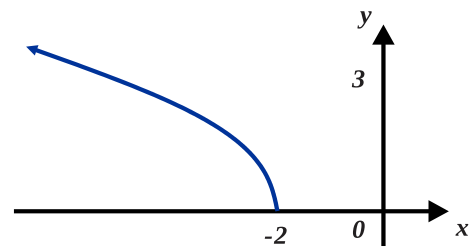
1. a.

Ceros: $x=-2$.

Ordenada al origen $f(0)$, no existe.

$dom(f)=(-\infty, -2]$.

$rec(f)=[0, +\infty)$.

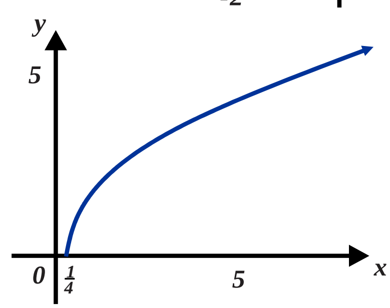


b. Ceros: $x=\frac{1}{4}$.

Ordenada al origen $f(0)$, no existe.

$dom(f)=\left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$.

$rec(f)=[0, +\infty)$.

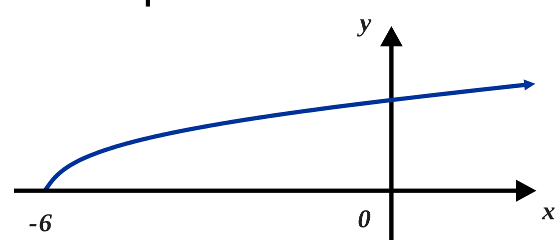


c. Ceros: $x=-6$.

Ordenada al origen $f(0)=\sqrt{3}$.

$dom(f)=[-6, +\infty)$.

$rec(f)=[0, +\infty)$.

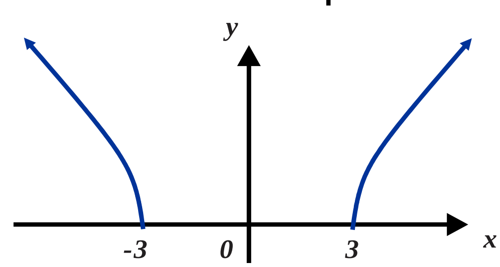


d. Ceros: $x=-3, 3$.

Ordenada al origen $f(0)$, no existe.

$dom(f)=(-\infty, -3]\cup[3, +\infty)$.

$rec(f)=[0, +\infty)$.

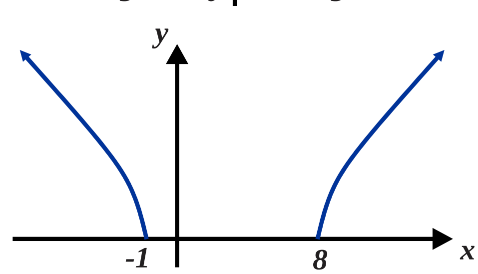


e. Ceros: $x=-1, 8$.

Ordenada al origen $f(0)$, no existe.

$dom(f)=(-\infty, -1]\cup[8, +\infty)$.

$rec(f)=[0, +\infty)$.



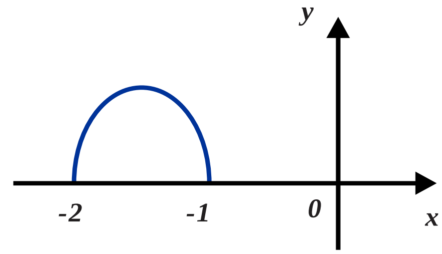
f. Ceros: $x=-2,\ -1$.

Ordenada al origen $f\,(0)$, no existe.

$dom\,(\,f\,)=[-2\ ,\ -1\,]$.

$rec\,(\,f\,)=\left[\,0\ ,\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,\right]$.

Máximo en $\left(-\dfrac{3}{2}\ ,\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.



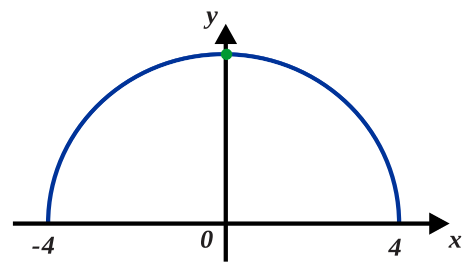
g. Ceros: $x=-4,\ 4$.

Ordenada al origen $f\,(0)=4$.

$dom\,(\,f\,)=[-4\ ,\ 4\,]$.

$rec\,(\,f\,)=[\,0\ ,\ 4\,]$.

Máximo en $(0\ ,\ 4)$.



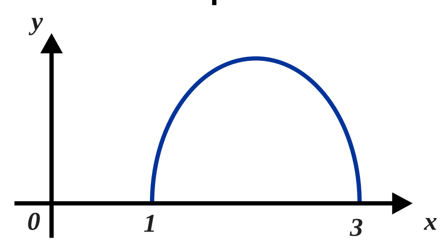
h. Ceros: $x=1,\ 1$.

Ordenada al origen $f\,(0)$ no existe.

$dom\,(\,f\,)=[\,1\ ,\ 3\,]$.

$rec\,(\,f\,)=[\,0\ ,\ \sqrt{2}\,]$.

Máximo en $(2\ ,\ \sqrt{2})$.



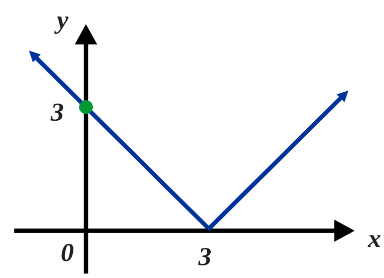
i.

Ceros: $x=3$.

Ordenada al origen $f\,(0)=3$.

$dom\,(\,f\,)=IR$.

$rec\,(\,f\,)=[\,0\ ,\ +\infty\,)$.



j. No es una función.

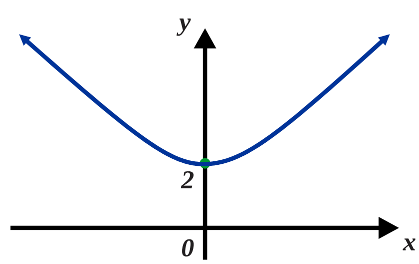
k. Ceros: No tiene.

Ordenada al origen $f\,(0)=2$.

$dom\,(\,f\,)=IR$.

$rec\,(\,f\,)=[\,2\ ,\ +\infty\,)$.

Mínimo en $(0\ ,\ 2)$.



l. No es una función.

m. $f(x)=\sqrt{4x^2+2}$.

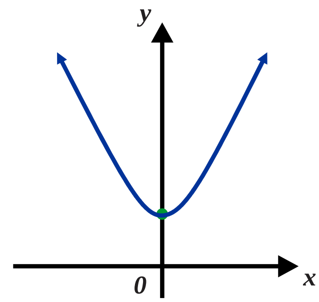
Ceros: No tiene.

Ordenada al origen $f(0)=\sqrt{2}$.

$dom(f)=IR$.

$rec(f)=[\sqrt{2}, +\infty)$.

Máximo en $(0, \sqrt{2})$.

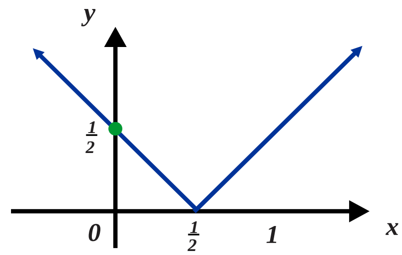


n. Ceros: $x=\frac{1}{2}$.

Ordenada al origen $f(0)=\frac{1}{2}$.

$dom(f)=IR$.

$rec(f)=[0, +\infty)$.



ñ. Es equivalente al punto $(-3, 0)$.

2. a. $f(x)=\sqrt{4x^2-8x+4}$. **b.** $f(x)=\sqrt{-x^2-2x+8}$. **3.** $l(x)=\sqrt{2x^2+8x+16}$ tal que $dom(l)=(-\infty, +\infty)$. **4.** $d(x)=\sqrt{x^2-12x+37}$ tal que $dom(d)=(-\infty, +\infty)$.

5. $A(x)=2\sqrt{-x^2+4x}$, con $dom(h)=[0, 4]$.

UNIDAD 2 EXAMEN

CONCEPTOS

COMPLETA LA FRASE

1. En una función racional impropia el grado del ____es menor que el grado del polinomio numerador.

2. Un hueco en la curva asociada a una función racional se caracteriza porque los polinomios numerador y denominador tienen un cero común, pero _____________________________________ del cero del polinomio numerador es mayor que la multiplicidad del polinomio denominador.

3. Si una función racional crece (decrece o crece y decrece) indefinidamente alrededor del número $x = x_0$ que no pertenece a su domino decimos que su comportamiento es _______________________ alrededor de ese número.

4. En una función racional cociente de los términos dominantes determina si la función tiene una _________________________________ .

5. El dominio de una función racional no incluye a aquellos números que _______________________ al polinomio denominador.

6. Si en una función racional existe un cero $x = x_0$ común en los polinomios que la componen, pero en el polinomio denominador tiene mayor multiplicidad, entonces la curva asociada a la función racional presenta un _________________________________ alrededor de $x = x_0$.

7. La forma de la curva asociada a la función $f(x) = \sqrt{ax+b}$ es de una _________________________________ con eje focal vertical,

8. Si la función $f(x) = \sqrt{ax^2+bx+c}$ tiene dos ceros distintos y $a > 0$, entonces su curva asociada es una _________________________________.

9. Si la función $f(x) = \sqrt{ax^2+bx+c}$ _________________________________ y está bien definida, entonces su curva asociada es la rama de una HIPÉRBOLA.

10. Si la función $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$ ______________________________ y $a>0$, entonces su curva asociada está constituida por un par de líneas semi rectas con el punto inicial común.

ALGORITMOS Y OBSERVACIONES

1. Obtén las características y traza la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{2(x-4)(x-2)}{(x-2)^2}$.

2. Obtén las características y traza la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{4x^2-4x}{x(x+1)(x-3)}$.

3. Obtén las características y traza la gráfica de la función $f(x)=\sqrt{4x^2+4x+8}$.

4. Obtén las características y traza la gráfica de la función $f(x)=\sqrt{-2x^2+4x+30}$.

CONSTRUCCIONES

1. Construye una función de la forma $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ con las características señaladas.

Cero $x_0=-\dfrac{3}{2}$. Asíntota vertical $x_0=-2$. Asíntota horizontal $y=2$.

2. Construye una función de la forma $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx^3+dx^2+ex+f}$ con las características señaladas.

Hueco $\left(2\ ,\ -\dfrac{1}{4}\right)$. Asíntotas verticales $x=0$ y $x=4$. Asíntota horizontal $y=0$.

3. Un envase tiene forma de prisma recto con base cuadrada y su capacidad es una unidad. Construye una función que describa la altura h del prisma en función de la longitud de lado de la base.

4. Construye una función de la forma $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$ con las características señaladas.
Ceros $x_{01}=1$ y $x_{02}=3$ y máximo $M(1\ ,\ 2)$.

5. Una caja tiene forma de prisma rectangular. La altura es fija y mide 4 unidades. El largo de la caja es dos unidades mayor que el ancho.
Construye la función que describe la longitud de la diagonal d en función de la longitud del ancho x.

UNIDAD 2 SOLUCIÓN AL EXAMEN

CONCEPTOS

COMPLETA LA FRASE

1. POLINOMIO DENOMINADOR. **2.** LA MULTIPLICIDAD. **3.** ASÍNTOTICO. **4.** ASÍNTOTA VERTICAL. **5.** ANULAN. **6.** COMPORTAMIENTO DE ASÍNTOTA VERTICAL. **7.** SEMI PARÁBOLA. **8.** SEMI HIPÉRBOLA. **9.** HIPÉRBOLA. **10.** SÓLO TIENE UN CERO.

ALGORITMOS Y OBSERVACIONES

1.

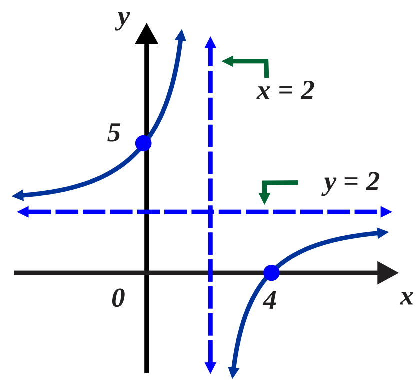
Ceros: $x=4$.

Ordenada al origen $f(0)=4$.

$dom(r)=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$.

Asíntota horizontal $y=2$.

Asíntotas verticales $x=2$.



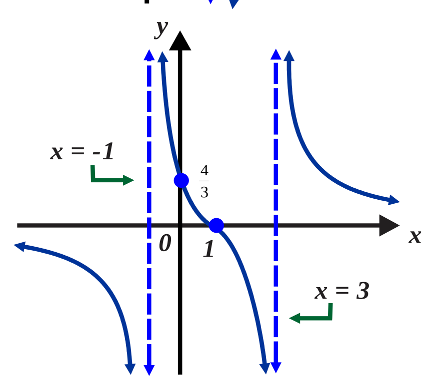
2. Ceros: $x=1$.

Ordenada al origen $f(0)=\frac{4}{3}$.

$dom(r)=(-\infty,-1)\cup(-1,3)\cup(3,+\infty)$.

Asíntota horizontal $y=0$.

Asíntotas verticales $x=-1$ y $x=3$.

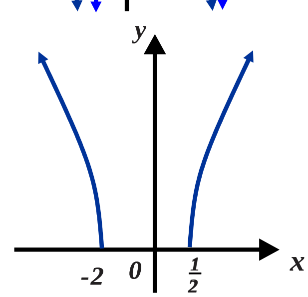


3. Ceros: $x=-2,\ \frac{1}{2}$.

Ordenada al origen $f(0)$, no existe.

$dom(f)=(-\infty,-2]\cup\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

$rec(f)=[0,+\infty)$.

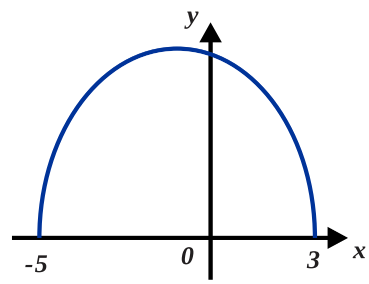


4. Ceros: $x = -5,\ 3$.

Ordenada al origen $f\left(0\right) = \sqrt{30}$.

$dom\left(f\right) = \left[-5\ ,\ 3\right]$.

$rec\left(f\right) = \left[0\ ,\ \sqrt{32}\right]$.



CONSTRUCCIONES

1. $f\left(x\right) = \dfrac{2x+3}{x+2}$

2. $f\left(x\right) = \dfrac{x-2}{x\left(x-2\right)\left(x-4\right)} = \dfrac{x-2}{x^3-6x^2+8x}$

3. $h\left(x\right) = \dfrac{1-2x^2}{4x}$.

4. $f\left(x\right) = \sqrt{-x^2+4x+3}$.

5. $d\left(x\right) = \sqrt{2x^2+2x+17}$, siempre que $0 < x < 2$.

3

FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTICAS

PROPÓSITOS

Al finalizar la unidad:
El alumno utilizará las funciones exponencial y logarítmica para representar formas de variación de fenómenos de la naturaleza, que éstas permitan modelar: Retomará los conceptos de dominio y rango, así como el análisis de las relaciones enter los parámetros de estas funciones y su gráfica.
.

CONTENIDO

SECCIÓN 3.1 Funciones y elementos
SECCIÓN 3.2 Funciones polinomiales
SECCIÓN 3.3 Soluciones y evaluación

CONCEPTOS CLAVE

Potencia. En la expresión b^n el superíndice n indica el número de veces que ha de multiplicarse por sí mismo b.

Base. En la expresión b^n, b representa la expresión o número que debe multiplicarse por sí mismo n veces.

Base natural o número de Euler. Se representa por e, es la base de la función: exponencial natural y de la función logaritmo natural. e es un número irracional y es uno de los números trascendentes en matemáticas. Tiene un valor próximo a $e = 2{,}71828$.

Función creciente. Cuando a medida que crece el valor de la variable independiente crece el valor de la función (variable dependiente). Formalmente, $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$, para todo par de números x_1 y x_2.

Función decreciente. Si al aumentar el valor de la variable independiente disminuye el valor de la **función** (variable dependiente). Formalmente, $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) > f(x_2)$, para todo par de números x_1 y x_2.

Función invertible.

Si la función f transforma valores x en valores y según la regla $y = f(x)$, su función inversa f^{-1} realiza el camino inverso, "transformando o reconvirtiendo" los valores y en valores x.

Funciones inversas relativas. Si para función f existe la función f^{-1} tal que

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x = f^{-1}\left(f(x)\right).$$

Potencia. Caso particular de un exponente. Superíndice que indica el número de veces que ha de multiplicarse por sí mismo la base.

Ordenada al origen. Es la ordenada del punto en el que una curva interseca al eje de las ordenadas.

Tanto por ciento (porcentaje). Forma de expresar un número como una fracción de 100 (que significa "de cada 100").

Translación horizontal. El hecho de sumar, algebraicamente, un número real a una función se manifiesta en un desplazamiento de horizontal de la curva que tiene asociada.

número de Euler.

Número irracional. Un número irracional tiene la característica de poder ser escrito como una división de números enteros. Es cualquier número real que no es racional, y su expresión decimal no es exacta ni periódica.

Condición inicial.

Si una situación está descrita por la función $f(t)$, el número $f(x_0) = y_0$.

SECCIÓN 3.1 FUNCIONES EXPONENCIALES

APRENDIZAJES

1. Explora situaciones o fenómenos que corresponden a crecimiento o decaimiento exponencial, las relaciones o condiciones existentes y analiza las formas de variación.

2. Identifica patrones de cambio involucrados en el crecimiento o decrecimiento de una función exponencial y bosqueja su gráfica.

3. Identifica el dominio y el rango de la función exponencial y traza su gráfica.

4. Analiza la relación entre las gráficas de funciones exponenciales con diferentes bases incluyendo el número e.

5. Resuelve problemas en diferentes contextos, que se modelen con funciones exponenciales.

TEMÁTICA

1. Situaciones que involucran crecimiento o decrecimiento exponencial.

2. Estudio analítico y gráfico del comportamiento de funciones exponenciales del tipo:
$f(x) = ab^x$ con $b > 1$ ó $0 < b < 1$ y $a \neq 0$

3. Relación entre los parámetros de $f(x) = ab^x$ con su gráfica.

4. Importancia de la función $f(x) = ab^x$ y sus aplicaciones.

5. Problemas de aplicación.

Las funciones exponenciales son de gran utilidad en la modelación de procesos que involucran crecimiento (o decrecimiento) con el transcurso del tiempo, por ejemplo, en:
crecimiento de poblaciones, el cambio de la temperatura de objetos, decrecimiento (o decaimiento) de materiales radiactivos, crecimiento de capitales, devaluación del precio de un objeto, entre muchas otras situaciones.

EJEMPLO 1 CONSTRUCCIÓN DE MODELOS

a. Un objeto tiene precio inicial de $400{,}000$ pesos y se devalúa un 20% anualmente, entonces:
Inicialmente, $p(0)=4000{,}000$.
Al término del primer año su precio es

$$p(1)=(1-0.2)4000{,}000=(0.8)4000{,}000.$$

Al término del segundo año su precio es

$$p(2)=(1-0.2)[(0.8)4000{,}000]=(0.8)^2\,4000{,}000.$$

Al término del tercer año su precio es

$$p(3)=(1-0.2)\left[(0.8)^2\,4000{,}000\right]=(0.8)^3\,4000{,}000,$$

Al término del cuarto año su precio es $p(4)=(1-0.2)\left[(0.8)^3\,4000{,}000\right]=(0.8)^4\,4000{,}000$.
Al término del año x su precio es $p(x)=(0.8)^x\,4000{,}000$, siempre que $x>0$.

b. Una población tiene inicialmente p_0 individuos y aumenta el 8% anual, entonces:
Inicialmente, $p(0)=p_0$.
Al término del primer año el número de individuos es $p(1)=(1.08)p_0$
Al término del segundo el número de individuos es $p(2)=(1.08)[(1.08)p_0]=(1.08)^2 p_0$.
Al término del tercer año el número de individuos es $p(3)=(1.08)\left[(1.08)^2 p_0\right]=(1.08)^3 p_0$.
Al término del cuarto año el número de individuos es $p(4)=(1.08)\left[(1.08)^2 p_0\right]=(1.08)^4 p_0$.
Al término del año x el número de individuos es

$$p(x)=(1.08)\left[(1.08)^{x-1} p_0\right]=(1.08)^x p_0,\ \text{para } x>0.$$

c. Un bloque de hielo con volumen de 2 metros cúbicos se derrite el 15% por hora.
Si representamos el volumen del bloque por medio de la variable $V(t)$ en donde t representa el tiempo transcurrido (en días).
Inicialmente $V(0)=2$.
Al término de la primera hora el volumen del bloque es $V(1)=(1-0.15)(2)=(0.85)(2)$.
Al término de la segura hora $V(2)=(1-0.15)(0.85)(2)=(0.85)^2(2)$.
Al término de la tercera hora $V(3)=(1-0.15)(0.85)^2(2)=(0.85)^3(2)$.
Por consiguiente, al término de la hora t el volumen del bloque es

$$V(t)=(0.85)^t(2),\ \text{si } t>0.$$

Los modelos $p(x)=(0.8)^x 4000{,}000$, siempre que $x>0$, $p(x)=(0.8)^x 4000{,}000$, para $x>0$ y $V(1)=(1-0.15)(2)=(0.85)(2)$ son casos particulares de funciones exponenciales.

DEFINICIÓN 1 FUNCION EXPONENCIAL

La función con regla de correspondencia

$$f(x)=b^x \text{ con } b>0,\ b\neq 1,$$

recibe el nombre de función exponencial con base b en la variable x.

a. Si $0<b<1$, entonces la función $f(x)=b^x$ se llama exponencial decreciente.

b. Si $b>1$, entonces la función $f(x)=b^x$ se llama exponencial creciente.

La función exponencial con regla de correspondencia $f(x)=b^x$, tal que $b>0$, $b\neq 1$, tiene como dominio al conjunto

$$dom(f)=(-\infty,+\infty).$$

Puede verificarse que las "potencias que afectan variables" (por ejemplo, en $f(x)=x^n$) son casos especiales de las funciones exponenciales, es decir, los exponentes resultan ser una generalización de las potencias y como consecuencia, las propiedades de las potencias pueden justificarse plenamente a partir de las propiedades de las funciones exponenciales.

PROPIEDAD 1 PROPIDADES DE LAS POTENCIAS (VÁLIDAS PARA LOS EXPONENTES

Sean a, b, m y n números reales positivos,

a. $b^0=1$.

b. $b^n=\dfrac{1}{b^{-n}}$, o bien $b^{-n}=\dfrac{1}{b^n}$.

c. $b^m b^n=b^{m+n}$.

d. Si $(ab)^n=a^n b^n$.

EJEMPLO 2 FUNCIONES EXPONENCIALES CRECIENTES O DECRECIENTES

Revisemos las "funciones" y clasifiquémoslas como crecientes o decrecientes, determinemos su dominio y su ordenada al origen.

a. Si $g(x)=2^x$, entonces la $b>1$, por tanto, $g(x)=2^x$ es creciente. También

$$g(0)=2^0=1 \text{ y } dom(g)=(-\infty,+\infty).$$

b. Si $f(x)=(1.01)^x$, entonces $b>1$, luego $f(x)=(1.01)^x$ es creciente. También

$$f(0)=1.01^0=1 \text{ y } dom(f)=(-\infty,+\infty).$$

c. Si $f(x)=\left(\frac{1}{10}\right)^{x}$, entonces la base $0<b<1$, por tanto, es decreciente, además

$$f(x)=\left(\frac{1}{10}\right)^{0}=1 \text{ y } dom(f)=(-\infty,+\infty).$$

d. En $m(x)=(0.25)^{x}$, $0<b<1$, por tanto, es decreciente. También

$$m(0)=(0.25)^{0}=1 \text{ y } dom(m)=(-\infty,+\infty).$$

e. En $m(x)=\left(-\frac{2}{9}\right)^{x}$, $b<0$, por tanto, $m(x)=\left(-\frac{2}{9}\right)^{x}$ ¡no es una función exponencial!

En ocasiones el análisis de una función exponencial se facilita considerando:
“toda función exponencial puede ser rescrita de manera que la variable independiente no esté precedida por un signo negativo, y toda función exponencial con base fraccionaria puede ser rescrita de forma que su base sea un número entero positivo, $f(x)=b^{-x} \Leftrightarrow f(x)=\left(\frac{1}{b}\right)^{x}$.

EJEMPLO 3 EQUIVALENCIA $f(x)=b^{-x} \Leftrightarrow f(x)=\left(\frac{1}{b}\right)^{x}$

a. $f(x)=\left(\frac{1}{10}\right)^{x}$ es equivalente a $f(x)=10^{-x}$.

b. Si $f(x)=\left(\frac{1}{7}\right)^{x}$, entonces, $f(x)=7^{-x}$.

c. $f(x)=3^{-x}$ equivale a $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$.

d. Si equivale a $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^{x}$.

El factor a en la función $f(x)=a\cdot b^{x}$ con $b>0$, $b\neq 1$, indica el “desplazamiento horizontal” de la curva asociada a $f_0(x)=b^{x}$, es decir, puede justificarse (se requieren conocimientos a otro nivel) la equivalencia

$$f(x)=a\cdot b^{x} \Leftrightarrow f(x)=b^{x+C},$$

en donde C representa un número real (no siempre es fácil determinar).

EJEMPLO 4 EQUIVALENCIA $f(x)=a\cdot b^{x} \Leftrightarrow f(x)=b^{x+C}$

a. Si $f(x)=\frac{1}{27}3^{x}$, entonces $f(x)=\frac{1}{3^{3}}3^{x}=3^{-3}3^{x}=3^{x-3}$.

b. Si $f(x)=16\cdot 4^x$, entonces $f(x)=4^2\cdot 4^x=4^{x+2}$.

c. Si $f(x)=\frac{1}{16}2^x$, entonces $f(x)=\frac{1}{2^4}2^x=2^{-4}2^x=2^{x-4}$.

d. Si $f(x)=125\cdot 5^{x-4}$, entonces $f(x)=5^3\cdot 5^{x-4}=5^{x-4+3}=5^{x+1}$.

El proceso inverso al anterior también es de utilidad, $f(x)=a\cdot b^x \Leftrightarrow f(x)=b^{x+C}$.

EJEMPLO 5 EQUIVALENCIA $f(x)=b^{x+C} \Leftrightarrow f(x)=a\cdot b^x$.

a. De $f(x)=3^{x-2}$, tenemos $f(x)=3^{-2}3^x=\frac{1}{3^2}3^x=\frac{1}{9}3^x$.

b. Si $f(x)=2^{x+4}$, entonces $f(x)=2^4 2^{x+4}=2^4 2^x=16\cdot 2^x$.

c. $f(x)=5^{x-1}$, puede rescribirse $f(x)=5^{-1}5^x=\frac{1}{5}5^x$.

d. Si $f(x)=3^{x+1}$, entonces $f(x)=3\cdot 3^x$.

La función exponencial de mayor utilidad en situaciones próximas a la realidad tiene como base el número de Euler e, su valor puede aproximarse utilizando distintos métodos, por ejemplo, con la función

$$f(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^x$$

y asignando a la variable independiente x números cada vez mayores, es decir,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right)^x=e,$$

sin embargo, no es nuestro propósito dar más detalles sobre este número y sólo diremos que

$e\approx 2.71828\ldots$ (verifícalo).

es un número irracional y que ha habido quienes han calculado miles de sus cifras.

SECCIÓN 3.1
EJERCICIOS 1

EJERCICIOS MODELACIÓN Y PROPIEDADES

1. Determina un modelo exponencial que describa la situación en función del tiempo.

a. La masa de un tumor maligno es inicialmente 40 gramos, suponga que aumenta el 20% mensualmente.

b. La temperatura de una persona recién asesinada era 35 grados centígrados y disminuye a una razón de 5% cada hora.

c. El costo de un combustible es 22 pesos por litro, y sufre un incremento de 2% mensual.

d. Inicialmente hay p personas infectadas con cierto virus. El número de infectados se triplica semanalmente.

e. Cierta persona ha consumido 10 miligramos de droga. Elimina, por medio de la orina, el 25% de ella.

f. Una persona olvida el 10% del contenido de un curso mensualmente.

g. Una población de conejos se duplica mensualmente. Inicialmente hay M_0 conejos.

h. La memoria M_0 de un ciudadano se incrementa el medio por ciento mensualmente.

2. Rescribe en la forma $f(x) = a \cdot b^{x+C}$.

a. $f(x) = 32\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

b. $f(x) = \frac{1}{24}(2)^x$.

c. $f(x) = \frac{1}{81}(3)^x$.

d. $f(x) = 27\left(\frac{1}{3}\right)^x$.

e. $f(x) = 16\left(\frac{1}{4}\right)^x$.

f. $f(x) = 12\left(\frac{1}{6}\right)^x$.

3. Rescriba en la forma $f(x) = a \cdot b^x$.

a. $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$.

b. $f(x) = (4)^{x-2}$.

c. $f(x) = (2)^{x+3}$.

d. $f(x) = \frac{1}{27}\left(\frac{1}{3}\right)^{x-4}$.

e. $f(x) = \frac{1}{25}(5)^{x+3}$.

PROPIEDADES GRÁFICAS DE LA FUNCIÓN $f(x) = a \cdot b^x$ con $b > 0$, $b \neq 1$.

En el estudio de las funciones exponenciales nos corresponde revisar las propiedades gráficas.

1. Ordenada al origen o valor inicial. Si $x = 0$ en $f(x) = a \cdot b^x$, obtenemos

$$f(0) = a \cdot b^0 = a.$$

2. Asíntota horizontal. Si

$$x \to +\infty \text{ o } x \to -\infty$$

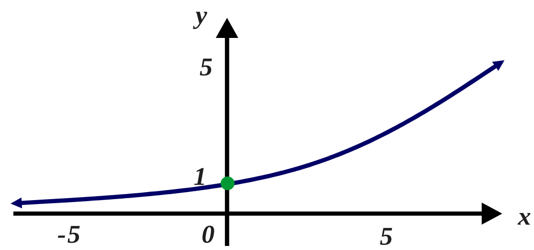
las imágenes de $f(x) = a \cdot b^x$ suelen ser muy grandes o próximas a la línea recta horizontal de ecuación $y = 0$ (eje de las abscisas).

EJEMPLO 6 GRÁFICAS DE $f(x) = b^x$ CON EXPONENCIALES CON $b > 1$.

En el trazo de las funciones exponenciales tomamos como apoyo las tablas anexas, y el hecho de que las funciones exponenciales son suaves y continuas.

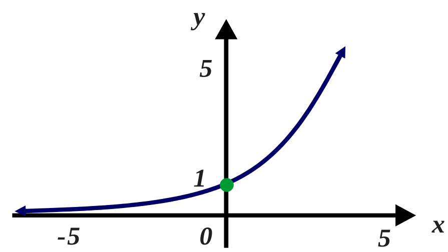
a. $f(x) = 1.2^x$.

x	$f(x) = 1.2^x$
-2	0.694444
-1	0.833333
0	1
1	1.2
2	1.44



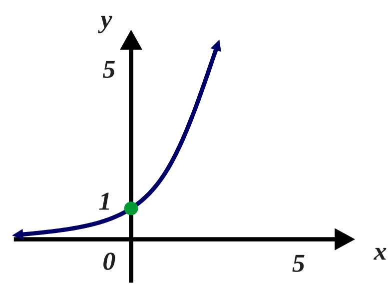
b. $f(x) = 1.5^x$.

x	$f(x) = 1.5^x$
-2	0.44444
-1	0.666667
0	1
1	1.5
2	2.25



c. $f(x) = 2^x$.

x	$f(x) = 2^x$
-2	0.25
-1	0.5
0	1
1	2
2	4



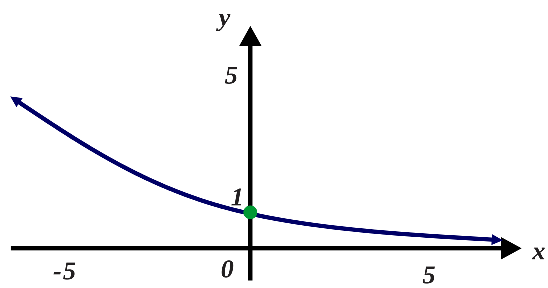
El patrón de comportamiento de las curvas asociadas a las funciones anteriores es:

1. $dom(f) = (-\infty, +\infty)$ y $rec(f) = (0, +\infty)$.
2. Ordenada al origen $f(0) = 1$.
3. Asíntota horizontal, la línea recta de ecuación $y = 0$.
4. Curvas asociadas crecientes, suaves y continuas.
5. Una curva crece con mayor rapidez cuando la base es mayor.
Comportamiento válido para todas las funciones exponenciales $f(x) = b^x$, siempre que $b > 1$.

EJEMPLO 7 GRÁFICAS DE $f(x) = b^x$ CON EXPONENCIALES CON $0 < b < 1$.

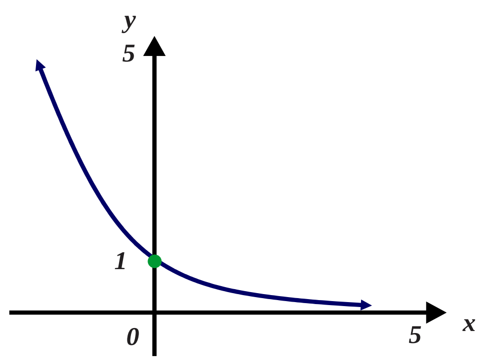
a. $f(x) = 0.8^x$.

x	$f(x) = 0.8^x$
-2	1.5625
-1	1.25
0	1
1	0.8
2	0.64



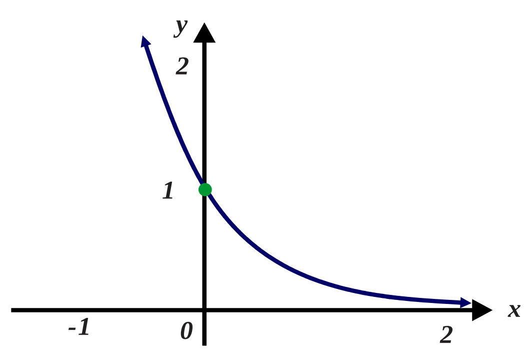
b. $f(x) = 0.5^x$.

x	$f(x) = 0.5^x$
-2	4
-1	2
0	1
1	0.5
2	0.25



c. $f(x) = 0.2^x$.

x	$f(x) = 0.2^x$
-2	25
-1	5
0	1
1	0.2
2	0.04



El patrón de comportamiento de las curvas asociadas a las funciones $f(x)=0.8^x$, $f(x)=0.5^x$ y $f(x)=0.2^x$, es:

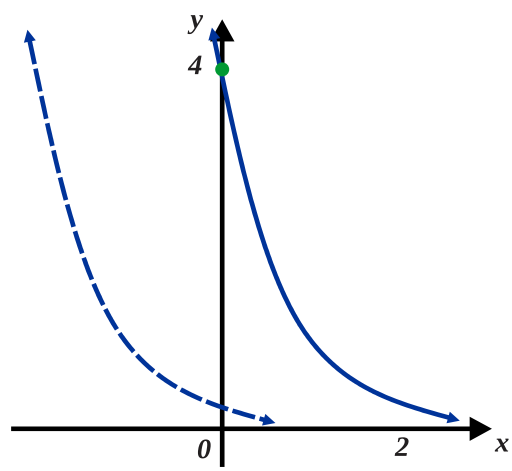
1. $dom(f)=(-\infty,+\infty)$ y $rec(f)=(0,+\infty)$.
2. Ordenada al origen $f(0)=1$.
3. Asíntota horizontal, la línea recta de ecuación $y=0$.
4. Curvas asociadas decrecientes, suaves y continuas.
5. Una curva exponencial decrece con mayor rapidez cuando su base es menor a la de otra.
Comportamiento válido para todas las funciones exponenciales $f(x)=b^x$ con $0<b<1$.

EJEMPLO 8 GRÁFICAS DE FUNCIONES EXPONENCIALES DE LA FORMA $f(x)=a\cdot b^x$.

Sin tabular, grafica en un mismo plano cartesiano, explica las transformaciones realizadas y determina sus propiedades.

a. $f(x)=4\left(\frac{1}{4}\right)^x$.

$f(x)=4\left(\frac{1}{4}\right)^x=\frac{4}{4^x}=\frac{1}{4^{x-1}}=\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}$, su curva se obtiene al desplazar la curva de $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ horizontalmente una unidad a la derecha.



i. $dom(f)=IR$ y $rec(f)=(0,+\infty)$.

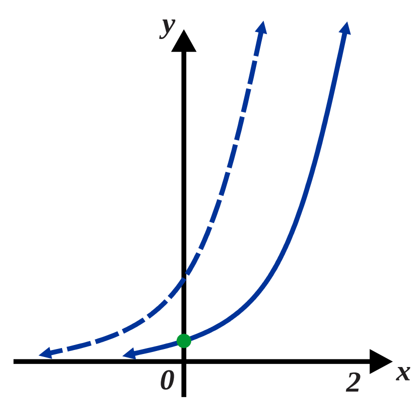
ii. Ordenada al origen $f(0)=14\left(\frac{1}{4}\right)^0=4$.

iii. Asíntota horizontal, la línea recta $y=0$.

iv. Curva decreciente.

b. $f(x)=\frac{1}{5}(5)^x$.

$f(x)=\frac{1}{5}(5)^x=\frac{1}{25}(5)^x=\frac{5^x}{5}=5^{x-1}$, su curva se obtiene al desplazar horizontalmente la curva de $f(x)=5^x$ 2 unidades a la derecha.



i. $dom(f)=(-\infty,+\infty)$ y $rec(f)=(0,+\infty)$.

ii. Ordenada al origen $f(0)=\frac{1}{5}(5)^0=\frac{1}{5}$.

iii. Asíntota horizontal, la línea recta $y=0$.

iv. Curva decreciente.

c. $f\left(x\right)=\frac{1}{3}\left(3\right)^{x}$.

La curva de $f\left(x\right)=\frac{1}{3}\left(3\right)^{x}=3^{x-1}$, se construye desplazando la curva de $f\left(x\right)=3^{x}$ horizontalmente una unidad a la derecha.

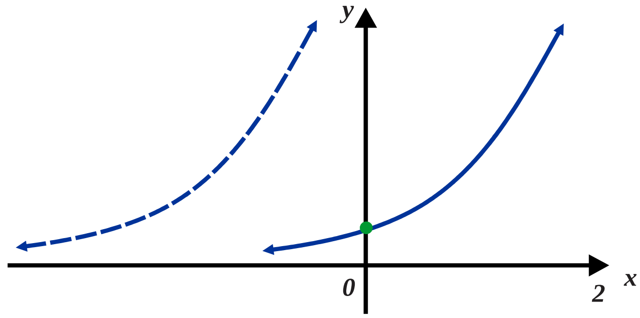
i. $dom\left(f\right)=\left(-\infty,+\infty\right)$ y $rec\left(f\right)=\left(0,+\infty\right)$.

ii. Ordenada al origen

$$f\left(0\right)=\frac{1}{3}\left(3\right)^{0}=\frac{1}{3}.$$

iii. Asíntota horizontal, la línea recta de ecuación $y=0$.

iv. Curva asociada decreciente, suave y continua.



d. $f\left(x\right)=\frac{4}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{x}$.

$$f\left(x\right)=\frac{4}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{x}$$
$$=\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+2},$$

su curva se obtiene desplazando horizontalmente a la izquierda la curva de $f\left(x\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^{x}$.

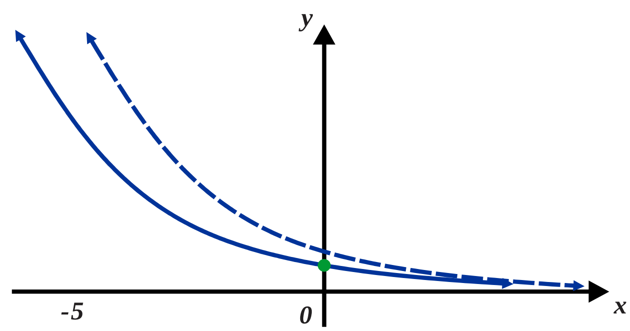
i. $dom\left(f\right)=\left(-\infty,+\infty\right)$ y $rec\left(f\right)=\left(0,+\infty\right)$.

ii. Ordenada al origen

$$f\left(0\right)=\frac{4}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{0}=\frac{4}{9}.$$

iii. Asíntota horizontal, la línea recta de ecuación $y=0$.

iv. Curva decreciente.



SECCIÓN 3.1
EJERCICIOS 2

1. Grafica en un mismo plano cartesiano.

a. $f_0\left(x\right)=1.5^{x}$, $f_1\left(x\right)=2.25\left(1.5^{x}\right)$ y $f_2\left(x\right)=-2.25\left(1.5^{x}\right)$.

b. $f_0\left(x\right)=1.8^{x}$, $f_1\left(x\right)=\frac{1}{3.24}\left(1.8^{x}\right)$ y $f_2\left(x\right)=\left(3.24\right)\left(1.8^{x}\right)$.

c. $f_0(x)=0.1^x$, $f_1(x)=10\left(0.1^x\right)$ y $f_2(x)=\frac{1}{10}\left(0.1^x\right)$.

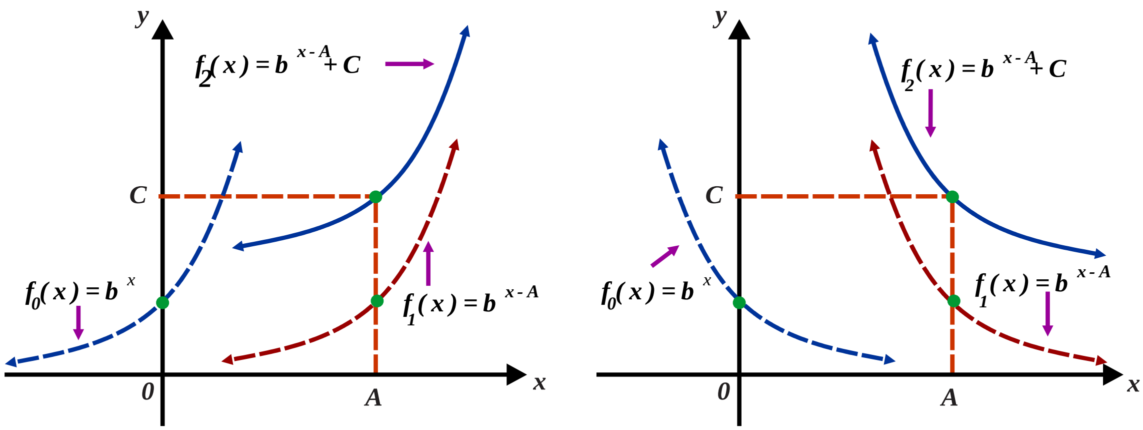
El siguiente esquema indica el efecto sobre la curva asociada a la función exponencial al incluir en $f_0(x)=b^x$ los parámetros B y C para obtener $f(x)=b^{(x-B)}+C$.

se relaciona con el desplazamiento horizontal

$$f(x)=b^{x-A}+C$$

se relaciona con el desplazamiento vertical

indica crecimiento o dececrecimiento



EJEMPLO 9 TRANSFORMACIONES EN GRÁFICAS DE FUNCIONES LOGARÍTMICAS

1. En un mismo plano trazaremos las gráficas:

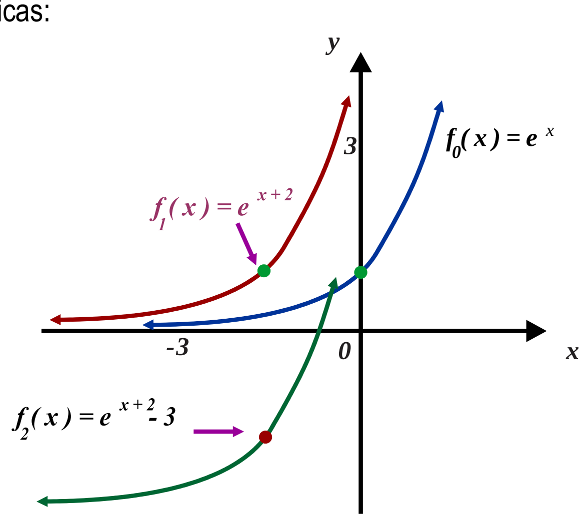
a.

$f_0(x)=e^x$,

$f_1(x)=e^{x+2}$

y

$f_3(x)=e^{x+2}-3$.



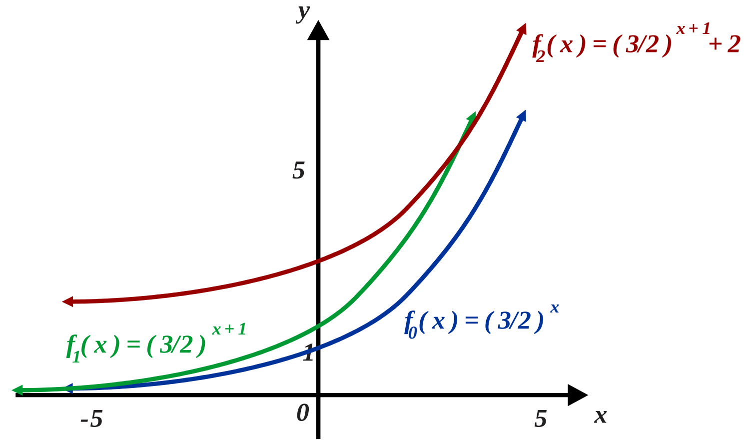
b.

$f_0(x)=\left(\frac{3}{2}\right)^x$,

$f_1(x)=\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1}$

y

$f_2(x)=\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1}+2$.



c.

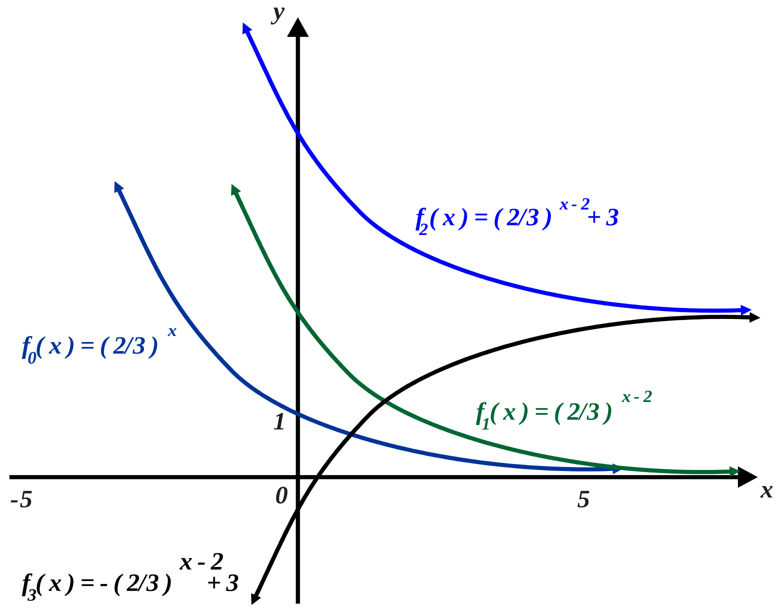
$f_0(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x$,

$f_1(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2}$,

$f_2(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2}$

y

$f_3(x)=-\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2}+3$.



SECCIÓN 3.1
EJERCICIOS 3

1. Traza el gráfico y determina: asíntota horizontal, el cero (en caso de existir), el recorrido y la ecuación de la asíntota horizontal.

a. $f(x)=1.5^{x+2}-2$.

b. $f(x)=1.8^{x-2}-4$.

c. $f(x)=0.1^x+2$.

d. $f(x)=-(0.8)^{x-3}-1$.

SECCIÓN 3.2 FUNCIONES LOGARÍTMICAS

APRENDIZAJES

1. Comprende el concepto de logarítmo de un número base b y las relaciones:

$$b^y = x \Leftrightarrow y = \log_b x$$

2. Opera con logaritmos de distintas bases y aplicará sus propiedades.

3. Grafica funciones logarítmicas e identifica su dominio y su rango.

4. Verifica mediante gráficas o tablas que la función logarítmica es la función inversa de la función exponencial.

5. Resuelve problemas en diferentes contextos, que se modelen con funciones logarítmicas y exponenciales.

6. Resuelve problemas de aplicación empleando los conocimientos adquiridos anteriormente.

TEMÁTICA

1. Logarítmo base *b* de un número y su relación con la potencia base *b*.

2. Propiedades de los logarítmos, cambio de base.

3. Definición, gráfica, dominio y rango.

4. La función logarítmo como inversa de la función exponencial.

5. Situaciones que involucran variación de tipo logarítmica. Ecuaciones logarítmicas y exponenciales.

6. Resolución de problemas.

La solución de la ecuación

$$b^x = y\ ,$$

con x como incógnita ($b > 0$ y $b \neq 1$), en donde y es un número real, se interpreta:
"el exponente x al que debe elevarse el número b para obtener el número y", también se escribe como

$$x = log_b y \text{ o bien } log_b y = x\ ;$$

la expresión $x = log_b y$ se lee "x es igual al logaritmo con base b de y".
Por tanto, las ecuaciones

$$b^x = y \text{ y } x = log_b y$$

son equivalentes (tienen la misma solución), es decir,

$$y = b^x \iff x = log_b y\ .$$

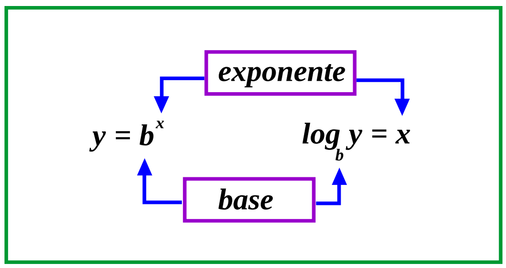


FIGURA 1

EJEMPLO 1 CAMBIO DE REPRESENTACIÓN

a. La solución de la ecuación $3^y = 1$ es $y = 0$; $y = 0$ es el número al que se debe elevarse el número 3 para obtener 1, luego

$$log_3 1 = 0\ .$$

b. La ecuación $5^y = 125$, tiene por solución $y = 3$, entonces $log_5 125 = 3$, y se cumple la equivalencia

$$5^y = 125 \iff log_5 125 = 3\ .$$

c. Si $2^y = 32$, entonces $y = 5$, es decir, por tanto, $log_2 32 = 5$, además $2^y = 32 \iff log_2 32 = 5$.

d. Si $3^y = \frac{1}{9}$, entonces $y = -2$, luego $log_3 \frac{1}{9} = -2$.

Así $3^y = \frac{1}{9} \iff log_3 \frac{1}{9} = -2$.

e. Para $log_4 \frac{1}{64} = -3$, tenemos $y = -3$ y puesto que $4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$,

entonces

$$log_4 \frac{1}{64} = -3 \iff 4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}\ .$$

Las observaciones anteriores se extienden a funciones, se asocia con la función exponencial $f(x)=b^{x}$ la función $f^{-1}(x)=log_b x$ que actúa de manera inversa. La función con regla de correspondencia $f^{-1}(x)=log_b x$ se denomina "logaritmo con base b.

DEFINICIÓN 1 FUNCIÓN LOGARITMO DE BASE "b"

Sea n $b>0$ y $b\neq 1$, y $x>0$.
Si $f(x)=b^{x}$, entonces $f^{-1}(x)=log_b x$.

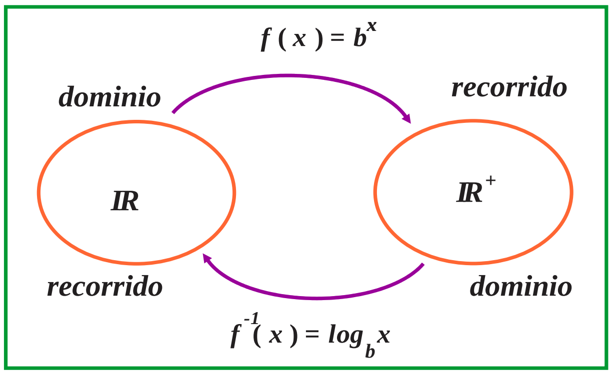


FIGURA 2

Por el carácter de "funciones inversas relativas" de $f(x)=b^{x}$ y $f^{-1}(x)=log_b x$ se cumple:

1. $log_b x:(0,+\infty)\rightarrow(-\infty,+\infty)$, es decir, $dom\left(b^{x}\right)=rec\left(log_b x\right)$ y $rec\left(b^{x}\right)=dom\left(log_b x\right)$.

2. Si $f(x)=log_b x$, entonces $f\left(b^{x}\right)=log_b\left(b^{x}\right)=x$, si
$f(x)=b^{x}$, entonces $f(log_b x)=b^{(log_b x)}=x$

EJEMPLO 2 INVERSAS RELATIVAS

a. La función inversa de $f(x)=10^{x}$ es $f^{-1}(x)=log_{10}x$
y se cumple

$$10^{log_{10}x}=x=log_{10}10^{x}.$$

b. La función inversa de $f(x)=log_8 x$ es $f^{-1}(x)=8^{x}$, se cumple $8^{log_8 x}=x=log_8 8^{x}$.

En el caso de la base natural e, la función inversa relativa de $f(x)=e^{x}$ recibe el nombre de "función logaritmo natural" y se representa por $f(x)=ln\,x$, es decir,

$$f(x)=e^{ln\,x}=x=ln\,e^{x} \text{ y también } ln\,x:(0,+\infty)\rightarrow(-\infty,+\infty).$$

SECCIÓN 3.2
EJERCICIOS 1

1. Determina el (valor del exponente) logaritmo.

a. $2^x = \frac{1}{16}$.

b. $10^x = 10000$.

c. $3^x = 27^{-1}$.

d. $5^x = \frac{1}{625}$.

2. Determina la función inversa (regla de correspondencia).

a. $f(x) = 2^x$.

b. $f(x) = \left(\frac{3}{8}\right)^x$.

c. $f(x) = log_{\frac{2}{5}} x$.

d. $f(x) = 4^{-x}$.

PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN $f(x) = log_b x$

La relación de inversas relativas de las funciones $f(x) = log_b x$ y $f(x) = b^x$ es el fundamento que garantiza las propiedades de la función

$$f^{-1}(x) = log_b x.$$

PROPIEDAD 1 PROPIEDADES DE LOS LOGARÍTMOS

Si x, y son números positivos:

$f(x) = b^x$	$f(x) = log_b x$	NOMBRE
$b^0 = 1$	$log_b(1) = 0$	
$b^{x+y} = b^x b^y$	$log_b(x \cdot y) = log_b(x) + log_b(y)$	PRODUCTO
$b^{x-y} = \frac{b^x}{b^y}$	$log_b\left(\frac{x}{y}\right) = log_b(x) - log_b(y)$.	DIVISIÓN
$b^x = \frac{1}{b^{-x}}$ o $b^{-x} = \frac{1}{b^x}$	$log_b(x^{-1}) = -log_b(x)$	RECÍPROCO
$(b^x)^y = b^{x \cdot y}$	$log_b(x^n) = n \cdot log_b(x)$	EXPONENTE

Veamos los ejemplos 3 y 4.

EJEMPLO 3 EXPANSIÓN UTILIZANDO LOGARITMOS

a. Rescribamos $log_8\left(10x^3y^2\right)$ sin exponentes:

$log_8\left(10x^3y^2\right)=log_8(10)+log_8\left(x^3\right)+log_8\left(y^2\right)$ propiedad del producto.

$=log_8(10)+3\,log_8\,x+2\,log_8\,y$ propiedad del exponente.

b. Escribamos $log_3\left(\dfrac{(x-y)^2(x+2)^3}{\sqrt{x}}\right)$ sin exponentes:

$log_3\left(\dfrac{(x-y)^2(x+2)^3}{\sqrt{x}}\right)=log_3\left((x-y)^2(x+2)^3\right)-log_3\left(\sqrt{x}\right)$ propiedad de la división.

$=log_3(x-y)^2+log_3(x+2)^3-log_3\left(\sqrt{x}\right)$ propiedad del producto.

$=2\,log_3(x-y)+3\,log_3(x+2)-log_3(x)$ propiedad del exponente.

c. Escribamos $ln\left(\dfrac{\sqrt[3]{x^2-5x}}{x\sqrt{(2x-y)}}\right)$ sin exponentes:

$ln\left(\dfrac{\sqrt[3]{x^2-5x}}{x\sqrt{(2x-y)}}\right)=ln\left(\sqrt[3]{x^2-5x}\right)-ln\left(x\sqrt{(2x-y)}\right)$ propiedad de la división.

$=ln\left(\sqrt[3]{x^2-5x}\right)-ln(x)-ln\left(\sqrt{(2x-y)}\right)$ propiedad del producto.

$=\dfrac{1}{3}ln\left(x^2-5x\right)-ln(x)-\dfrac{1}{2}ln(2x-y)$ propiedad del exponente.

EJEMPLO 4 AGRUPANDO, UTILIZANDO LOGARITMOS

a. $\dfrac{1}{4}log_3(x)+5log_3(x-2)=log_3(x)^{\frac{1}{4}}+log_3(x-2)^5$ propiedad del exponente.

$=log_3\left[(x)^{\frac{1}{4}}(x-2)^5\right]$ propiedad del producto.

b. $8ln(x+4)-4ln(x+8)=ln(x+4)^8-ln(x+8)^4$ propiedad del exponente.

$=ln\dfrac{(x+4)^8}{(x+8)^4}$ propiedades: de la división.

c. $\dfrac{1}{5}\left[log_6(x+4)-log_6(x+2)\right]=\dfrac{1}{5}\left[log_6\dfrac{(x+4)}{(x+2)}\right]$ propiedades: de la división.

$=log_6\sqrt[5]{\dfrac{(x+4)}{(x+2)}}$ propiedad del exponente.

CAMBIO DE BASE EN LAS FUNCIONES $f(x)=b^x$ y $f(x)=\log_b x$

Combinando adecuadamente algunas propiedades de las funciones $f(x)=b^x$ y $f(x)=\log_b x$, es posible rescribirlas en términos de una "nueva base" (por ejemplo, la base natural e) que puede ser de mayor utilidad en el estudio de ciertas situaciones.

PROPIEDAD 2 CAMBIOS DE BASE

Si $a,\ b>0,\ a,\ b\neq 1$ y $x>0$, entonces

a. $f(x)=b^x=a^{[\log_a b]x}$ (cambio de base exponencial).

b. $f(x)=\log_b x=\dfrac{\log_a x}{\log_a b}$ (cambio de base logarítmico).

$$f(x)=\log_{\underset{\text{base original}}{b}} x=\frac{\log_a x \leftarrow \text{nueva base}}{\log_{\underset{\text{nueva base}}{a}} b \leftarrow \text{base original}}$$

$$f(x)=\underset{\text{base original}}{b}^{x}=\underset{\text{nueva base}}{a}^{(\log_{\underset{\text{nueva base}}{a}} \overset{\text{base original}}{b})\,x}$$

FIGURA 3

EJEMPLO 5 CAMBIO DE EN FUNCIONES LOGARÍTMICAS

a. Rescribamos $f(x)=\log_4 x$ con base 2. Aquí $b=2$ y $a=2$, de la propiedad de cambio de base logarítmico obtenemos

$$f(x)=\log_4 x=\frac{\log_2 x}{\log_2 4}=\frac{1}{2}\log_2 x.$$

b. Rescribamos $f(x)=\log_{81} x$, en la base 3. Sean $b=81$ y $a=3$, por consiguiente

$$f(x)=\log_{81} x=\frac{\log_3 x}{\log_3 81}=\frac{1}{4}\log_3 x.$$

c. Escribir $f(x)=\log_{10} x$ en la base natural e. Sean $a=e$ y $b=10$, por tanto

$$f(x)=\log_{10} x=\frac{\log_e x}{\log_e 10}.$$

d. Expresemos $f(x)=\log_2 8x$ con base 4.

$$f(x)=\log_2 8x=\log_2 x+3=\frac{\log_4 x}{\log_4 2}+3=\frac{1}{\sqrt{2}}\log_4 x+3,$$

o bien

$$f(x)=\log_2 8x=\frac{1}{\sqrt{2}}\log_4 x+3.$$

e. Expresemos $f(x) = log_4 4x$ con base natural e.

$$f(x) = log_4 4x = log_4 x + log_4 4 = log_4 x + 1 \text{ y } f(x) = log_4 4x = \frac{1}{ln\,4} ln\,x + 1.$$

EJEMPLO 6 CAMBIO DE EN FUNCIONES EXPONENCIALES

a. Para rescribir $f(x) = 4^x$ con base 2, entonces $b = 4$, $a = 2$

luego

$$f(x) = 4^x = 2^{(log_2 4)x} = 2^{(2)x}.$$

b. Expresemos $f(x) = 3^x$ con base natural e, entonces $b = 3$ y $a = e$, finalmente

$$f(x) = 3^x = e^{(log_e 3)x} = e^{(ln 3)x}.$$

c. Si queremos rescribir $f(x) = 5^x$ con base 7, entonces $b = 5$ y $a = 7$, por tanto,

$$f(x) = 5^x = 7^{(log_7 5)x}.$$

Las propiedades de las funciones $f(x) = b^x$ y $f(x) = log_b x$ son útiles en la resolución de ecuaciones que involucran logaritmos y/o exponentes como incógnitas.

EJEMPLO 7 RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

a. En la resolución de

$log_4(x-2)^3 = 3$, aplicamos la función $f(x) = 4^x$

a la ecuación anterior, obtenemos

$$(x-2)^3 = 4^3 \text{ o bien } (x-2)^3 = 64,$$

entonces

$$x = \sqrt[3]{64} + 2 = 6.$$

b. En la resolución de la ecuación

$$e^{x^2+5x} = e^{-6}$$

al aplicar $f(x) = ln\,x$ en ambos miembros da

$$x^2 + 5x = -6 \text{ o bien } x^2 + 5x + 6 = 0,$$

entonces

$$(x+2)(x+3) = 0,$$

de donde

$$x = -2 \text{ y } x = -3.$$

c. Si queremos resolver $2^{3x+1} = 32$, debemos aplicarle $f(x) = log_2 x$ en ambos miembros, al hacerlo obtenemos

$$3x + 1 = log_2(32) \text{ o bien } 3x + 1 = 5, \text{ luego } x = \frac{4}{3}.$$

d. La ecuación

$$log_4(3x+8)-log_4 12 = log_4(x-1)\text{, equivale a } log_4\frac{3x+8}{12} = log_4(x-1),$$

aplicándole la función $f(x)=4^x$ obtenemos

$$\frac{3x+8}{12} = x-1$$

o bien

$$3x+8 = 12x-12,$$

entonces

$$20 = 9x\text{, de donde } x = \frac{20}{9}.$$

e. Para resolver la ecuación

$$log_2 x + log_2(x-1) = log_2 6,$$

la rescribimos en la forma

$$log_2 x(x-1) = log_2 6.$$

Aplicamos $f(x)=2^x$ a toda la ecuación y obtenemos

$$x(x-1) = 6 \text{ o bien } x^2-x-6=0,$$

al factorizar

$$(x-3)(x+2)=0\text{, así } x_1=3 \text{ y } x_2=-2,$$

sin embargo, $x_2=-2$ no es solución de la ecuación inicial, ¿por qué?

SECCIÓN 3.2 EJERCICIOS 2

1. Expande y simplifica

a. $log_4 64x^6$.

b. $log_8 \frac{x^{10}}{64}$.

c. $ln\frac{x^3}{e^2}$.

d. $log_{18}\frac{x^{-4}}{y^{-2}}$.

e. $log_2\sqrt{\frac{x^3}{y^2}}$.

f. $log_4\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{y}}$.

2. Escribe en la forma $f(x)=log_a kx^n$.

a. $f(x)=4log_{10}x-2$.

b. $g(x)=6log_3 x+2$.

c. $h(x)=\frac{1}{5}log_6 x-log_6 36$.

d. $i(x)=-6ln\, x+ln\, 36$.

e. $j(x)=4ln\, x+ln\, e^4$.

f. $f(x)=ln\, x-ln\,\frac{1}{e}$.

g. $g(x)=3log_2 x-log_4 16$.

h. $h(x)=\frac{1}{2}ln\,\frac{1}{x^{-1}}+2ln\, x^2$.

3. Rescribe la función con la base indicada.

a. $f(x) = log_4 x$ con base 3.

b. $f(x) = log_2 x$ con base e.

c. $f(x) = log_2 x$ con base 7.

d. $f(x) = ln\,x$ con base 3.

e. $f(x) = ln\,x$ con base $\frac{1}{2}$.

4. Rescribe la función con la base indicada.

a. $f(x) = 4^x$ con base e.

b. $f(x) = 5^x$ con base 3.

c. $f(x) = e^x$ con base 7.

d. $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ con base e.

e. $f(x) = e^x$ con base $\frac{1}{2}$.

5. Resuelve las ecuaciones.

a. $log_3\left(\frac{1}{x}\right) + 3 = 0$.

b. $log_5(2x) - 1 = 0$.

c. $log_{10}(2) - log_{10}(x+5) = -log_{10}(x+3)$.

d. $3 \cdot log_2(x-1) + log_2 4 = 5$. $x = 3$.

e. $log_3(4x-3) - log_3(x+2) - log_3(x) = 0$.

f. $log_4(3x-1) - log_4(1-2x) = log_4(x-1)$.

g. $ln\left(\frac{z}{2}\right) - 1 = ln(21-z)$.

6. Resuelve las ecuaciones.

a. $2^{x+4} = 64$.

b. $9 \cdot 27^w - 27 = 0$.

c. $2^{y+1} + 5 \cdot 2^y - 28 = 0$.

d. $2^{2x} + 20 = 9 \cdot 2^x$.

e. $4^{2x-1} = 2^{x^2}$.

TRAZO DE LA GRÁFICA DE $f(x) = log_b x$

Para trazar el gráfico de la función $f(x) = log_b x$ se emplea la propiedad "de inversas relativas" (que resulta menos complicado) las funciones $f(x) = log_b x$ y $f(x) = b^x$ o se tabula.

2. Reflejando una curva.

i. Traza la línea recta asociada a la función $f(x) = b^x$.

ii. Traza la línea recta asociada a la función $f(x) = x$ e imagina que es la "cara plateada" de un gran espejo.

iii. Imagina que la curva asociada a $f(x) = b^x$ se refleja en el espejo, la reflexión de la curva es la gráfica de $f(x) = log_b x$.

1. Tabulando.

i. Construye una tabla para ciertas asignaciones x en $f(x)=b^x$.

ii. Intercambia las abscisas y ordenadas (ahora las ordenadas serán las abscisas y las abscisas serán las ordenadas).

iii. Traza una curva suave y continua que contenga los puntos generados en ii. La curva así obtenida pertenece a la función $f(x)=\log_b x$.

EJEMPLO 8 TRAZO DE GRÁFICAS DE FUNCIONES LOGARÍTMICAS REFLEJANDO

a. La función inversa de

$$f(x)=\log_{\frac{3}{2}} x \text{ es la función } f(x)=\left(\frac{3}{2}\right)^x$$

cuya representación gráfica es la figura de la izquierda. En la figura central se ha reflejado la curva de $f(x)=\left(\frac{3}{2}\right)^x$ respecto a la línea recta asociada a $f(x)=x$. La figura de la derecha es el gráfico de $f(x)=\log_{\frac{3}{2}} x$.

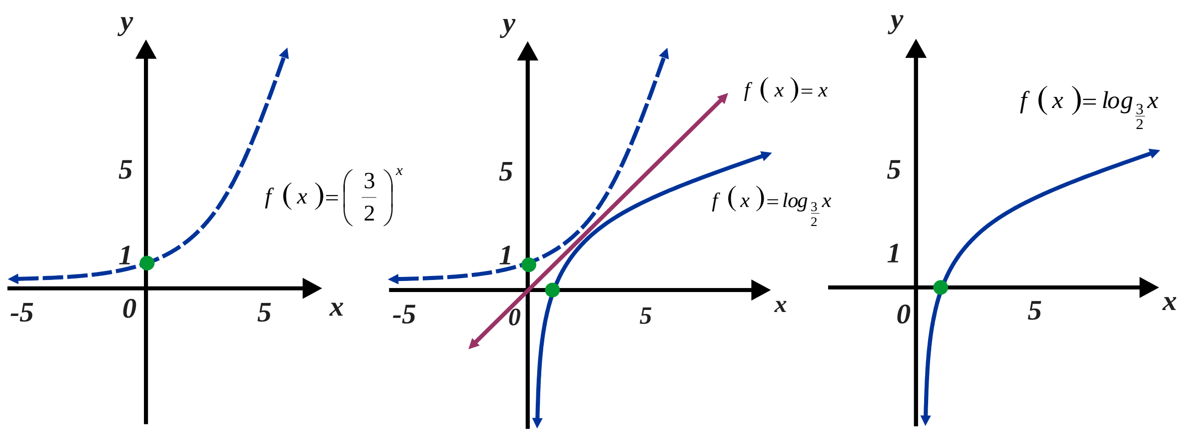


FIGURA 4

b. La función inversa de $f(x)=\log_{\frac{2}{3}} x$ es la función $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x$ cuyo gráfico es la figura de la izquierda. En la figura central se ha reflejado la curva de

$$f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x$$

respecto a la línea recta asociada a $f(x)=x$. La figura de la derecha es el gráfico de

$$f(x)=\log_{\frac{2}{3}} x.$$

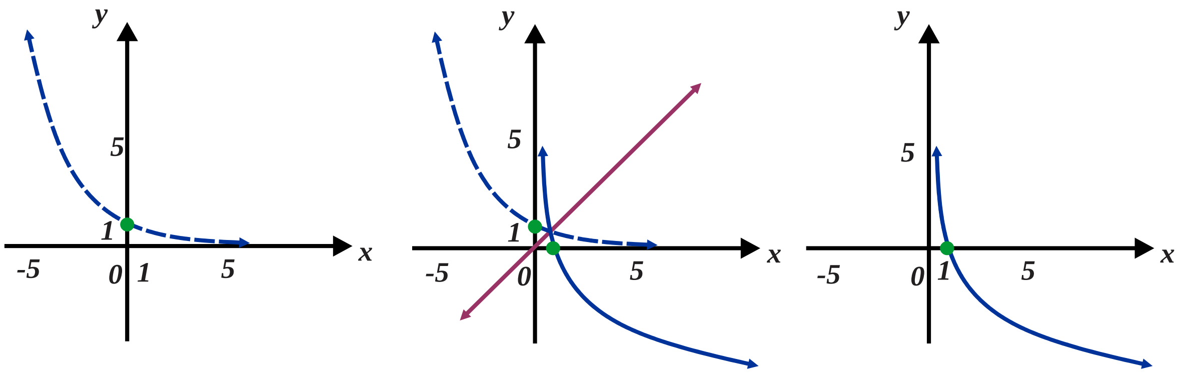


FIGURA 5

c. La función inversa de $f(x) = ln\,x$ es la función exponencial natural $f(x) = e^x$, su gráfica es la figura de la izquierda. En la figura central se ha reflejado la curva de $f(x) = e^x$ respecto a la línea recta asociadas $f(x) = x$. La figura de la derecha es el gráfico de $f(x) = ln\,x$.

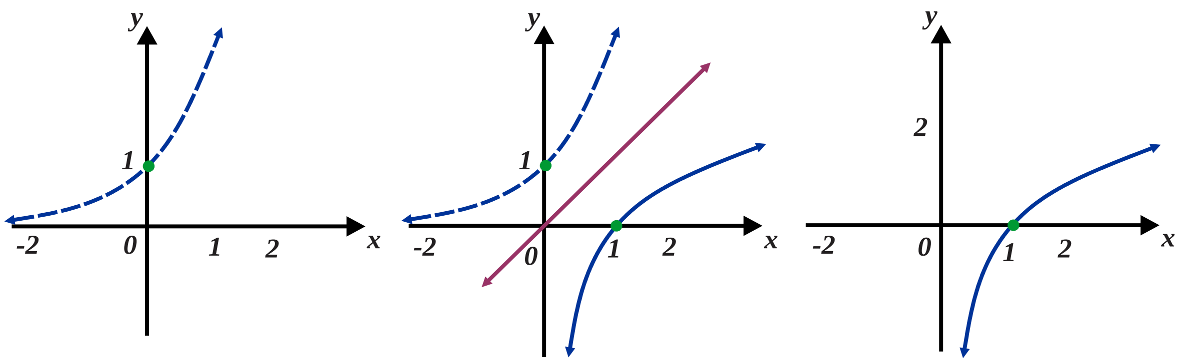


FIGURA 6

EJEMPLO 9 TRAZO DE GRÁFICAS DE FUNCIONES LOGARÍTMICAS TABULANDO

a. La inversa de $f(x) = log_{\frac{1}{2}} x$ es la función exponencial $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

x	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$
-2	4
-1	2
0	1
1	0.5
2	0.25

Intercambiando los valores de las columnas.

x	$log_{\frac{1}{2}} x$
4	-2
2	-1
1	0
0.5	1
0.25	2

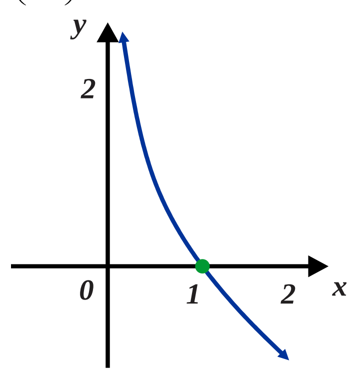


FIGURA 7

b. La inversa de $f(x) = \log_2 x$. es la función exponencial $f(x) = 2^x$.

x	2^x
-2	0.25
-1	0.5
0	1
1	2
2	4

Intercambiando valores en las columnas.

x	$\log_2 x$
0.25	-2
0.5	-1
1	0
2	1
4	2

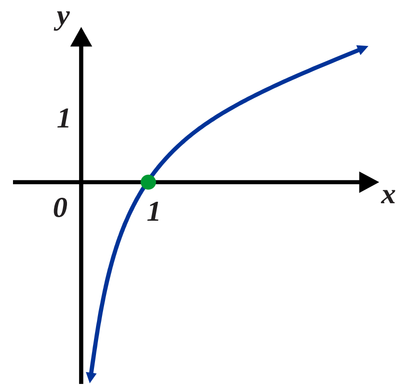


FIGURA 8

c. La inversa de $f(x) = \log_{\frac{4}{5}} x$ es la función exponencial $f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^x$.

x	$\left(\frac{1}{10}\right)^x$
-2	1.5625
-1	1.25
0	1
1	0.8
2	0.64

Intercambiando valores en las columnas.

x	$\log_{\frac{4}{5}} x$
1.5625	-2
1.25	-1
1	0
0.8	1
0.64	2

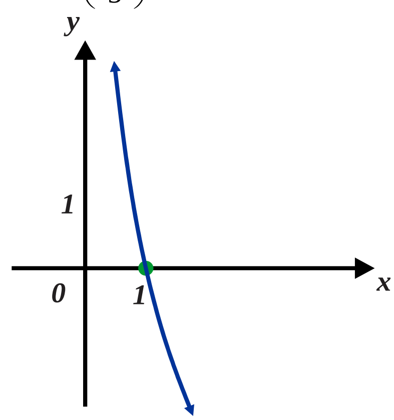


FIGURA 9

La figura indica el efecto sobre la curva asociada a la función logarítmica $f(x) = \log_b x$ al incluir en ésta última los parámetros B y C .

se relaciona con el desplazamiento horizontal

$$f(x) = \log_b (x - B) + C$$

se relaciona con el desplazamiento vertical

indica crecimiento o decrececimiento

FIGURA 10

EJEMPLO 10 TRANSFORMACIONES EN GRÁFICAS DE FUNCIONES LOGARÍTMICAS

a. La gráfica de $f(x) = log_2(2x-4)$ se traza con base a la gráfica de la función $f_0(x) = log_2 x$, vemos como.

Si factorizamos y aplicamos las propiedades de los logaritmos obtenemos:

$$f(x) = log_2(2x-4) = log_2(2(x-2)) = log_2 2 + log_2(x-2) = log_2(x-2)+1,$$

entonces $f(x) = log_2(x-2)+1$.

i. Desplazamos verticalmente 1 unidad hacia arriba la curva asociada a $f_0(x) = log_2 x$.

ii. Desplazamos horizontalmente 2 unidades a la derecha la curva antes obtenida.

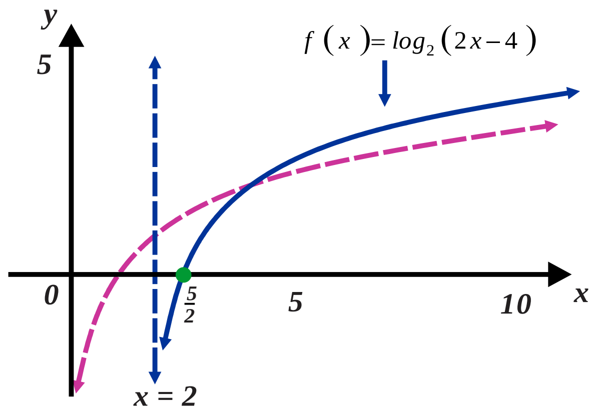


FIGURA 11

Otras características de $f(x) = log_2(2x-4)$ son:

iii. Cero: la solución de $2x-4=1$, es decir $x = \frac{5}{2}$.

iv. Asíntota vertical: tiene como ecuación la solución de $2x-4=0$, es decir $x=2$.

v. Dominio: el intervalo $dom(f) = (2, +\infty)$.

vi. Recorrido (rango o conjunto imagen): el intervalo $rec(f) = (-\infty, +\infty)$.

b. Para trazar **l**a gráfica de $f(x) = log_{\frac{3}{5}}(2x+6)$, primero la rescribimos.

$$f(x) = log_{\frac{3}{5}}(2x+6) = log_{\frac{3}{5}}(2(x+3)) = log_{\frac{3}{5}} 2 + log_{\frac{3}{5}}(x+3) = log_{\frac{3}{5}}(x+3) + log_{\frac{3}{5}} 2,$$

entonces $f(x) = log_{\frac{3}{5}}(x+3) + log_{\frac{3}{5}} 2$.

La curva a $f(x) = log_{\frac{3}{5}}(2x+6)$ se construye a partir de la curva asociada a $f(x) = log_{\frac{3}{5}} x$:

i. Desplazándola verticalmente

$$log_{\frac{3}{5}} 2 \approx -1.35691$$

unidades hacia abajo.

ii. Desplazándolo horizontalmente 3 unidades a la izquierda.

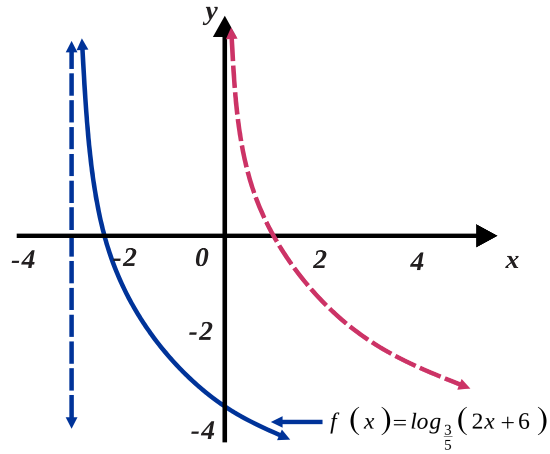


FIGURA 12

Otras características de $f(x)=log_{\frac{3}{5}}(2x+6)$ son:

iii. Cero: la solución de $2x+6=1$, es decir, $x=-\frac{5}{2}$.

iv. Asíntota vertical: tiene como ecuación la solución de $2x+6=0$, es decir $x=-3$.

v. Dominio: el intervalo $dom(f)=(-3, +\infty)$.

vi. Recorrido (rango o conjunto imagen): el intervalo $rec(f)=(-\infty, +\infty)$.

SECCIÓN 3.2
EJERCICIOS 3

1. Traza la gráfica de las funciones, determina: dominio recorrido, ceros y asíntota vertical.

a. $f(x)=log_2(4x)$.

b. $f(x)=log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{9}x\right)$.

c. $f(x)=log_2(8x-8)$.

d. $f(x)=log_{\frac{1}{2}}(2x+2)$.

APLICACIONES DE LAS FUNCIONES $f(x)=log_b x$ Y $f(x)=b^x$

EJEMPLO 11 CONSTRUCCIÓN DE MODELOS

a. Un “celular” tiene precio inicial de $40{,}000$ pesos, se devalúa el 25% anualmente.

i. Sea $p(t)$ el precio del celular en función del tiempo, inicialmente, $p(0)=40{,}000$.

Al término del primer año su precio es

$$p(1)=(1-0.25)40{,}000=(0.75)40{,}000 \text{ pesos}$$

Al término del segundo año su precio es

$$p(2)=(1-0.25)[(0.75)40{,}000]=(0.75)^2 40{,}000 \text{ pesos.}$$

Al término del tercer año su precio es

$$p(3)=(1-0.25)\left[(0.75)^2 40{,}000\right]=(0.75)^3 40{,}000 \text{ pesos.}$$

Siguiendo un proceso inductivo obtenemos que al año t su precio es

$$p(t)=(0.75)^t 40{,}000 \text{ pesos, siempre que } t>0.$$

ii. Para determinar su precio a los $t=5.5$ años, calculamos $p(t)=(0.75)^{5.5}40{,}000$ y obtenemos que su precio es aproximadamente

$$8220.47 \text{ pesos.}$$

iii. Podemos determinar el tiempo tM que ha de transcurrir para que su precio se $20{,}000$ pesos (la mitad de su precio inicial). En este caso

$$20{,}000=(0.75)^{tM}40{,}000 \text{, o bien } (0.75)^{tM}=\frac{20{,}000}{40{,}00}=\frac{1}{2}.$$

Para resolver la ecuación $(0.75)^{tM}=\frac{1}{2}$ le aplicamos logaritmos con una misma base (por ejemplo, con base natural), obtenemos

$$t_M ln(0.75)=ln\left(\frac{1}{2}\right) \text{ o bien } tM=\frac{ln\left(\frac{1}{2}\right)}{ln(0.75)}\approx 2.0494 \text{ años.}$$

iv. Construye el modelo $t(p)$ que describe el tiempo transcurrido como función del precio del celular. Del inciso **i.** tenemos $p(t)=(0.75)^t 40{,}000$, simplificando la notación

$$p=(0.75)^t 40{,}000 \Leftrightarrow \frac{p}{40{,}000}=(0.75)^t \Leftrightarrow t=log_{0.75}\left(\frac{p}{40{,}000}\right) \text{, con notación de función}$$

$$t(p)=log_{0.75}\left(\frac{p}{40{,}000}\right).$$

b. Una deuda inicial de $10{,}000$ se duplica al año.

i. Sea $M(t)$ la deuda, inicialmente, $M(0)=10{,}000$.

Terminando el primer año la deuda es

$$M(1)=(2)10{,}000.$$

Terminando el segundo año el monto de la deuda es

$$M(2)=2[(2)10{,}000]=(2)^2 10{,}000.$$

Al término del tercer año la deuda es

$$M(3)=2\left[(2)^2 10{,}000\right]=(2)^3 40{,}000.$$

Siguiendo un proceso inductivo encontramos que al término del año t el monto de la deuda es

$M(t)=(2)^t 10{,}000$, siempre que $t>0$.

ii. Para determinar el monto de la deuda a los $t=6$ años, calculamos $M(6)=(2)^6 10{,}000$ y obtenemos

$64{,}000$ pesos.

iii. Podemos determinar el tiempo t que ha de transcurrir para que el monto de la deuda se triplique, es decir, sea de 30000 pesos.

Si sustituimos $30{,}000$ en $M(t)=(2)^t 10{,}000$ obtenemos $30{,}000=(2)^t 10{,}000$, entonces

$$(2)^t=\frac{30{,}000}{10{,}00}=3$$

Aplicamos logaritmos con una misma base (por ejemplo, con base natural), obtenemos

$t\cdot ln(2)=ln(3)$ o bien $t=\dfrac{ln(3)}{ln(2)}\approx 4.75488$ años.

iv. Para construir el modelo $t(M)$ que describe el tiempo transcurrido como función del monto de la deuda, del inciso **i.** tenemos $M(t)=(2)^t 10{,}000$, o bien, simplificando la notación y despejando

$M=(2)^t 10{,}000 \Leftrightarrow \dfrac{M}{10{,}000}=(2)^t \Leftrightarrow t=log_2\left(\dfrac{M}{10{,}000}\right)$, con notación de función

$$t(M)=log_2\left(\frac{M}{10{,}000}\right).$$

c. Una persona (mediante la orina) elimina el 30% diario de una droga consumida; la persona ha consumido 4 gramos de esa droga.

i. Sea $D(t)$ la cantidad de droga presente en la persona en el tiempo t.

Inicialmente, $D(0)=4$ gramos.

Terminando el primer día la droga presente en el cuerpo de la persona es

$D(1)=(0.7)4$ gramos.

Terminando el segundo día, la droga presente en el cuerpo de la persona es

$D(2)=(0.7)(0.7)4=(0.7)^2 4$ gramos.

Siguiendo un proceso inductivo encontramos que al término del día t la cantidad de droga presente en la persona es

$D(t)=(0.7)^t 4$, gramos, siempre que $t>0$.

ii. Para determinar la cantidad de droga en la persona en el día $t=8$, calculamos

$D(8)=(0.7)^8 4$, obtenemos $D(8)=(0.7)^8 4\approx 0.23059$ gramos.

iii. Podemos determinar el tiempo t que ha de transcurrir para que la cantidad de droga se reduzca al uno por ciento en el cuerpo de la persona, es decir, sea 0.04 gramos.

Sustituimos 0.04 en $D(t)=(0.7)^t 4$ obtenemos $0.04=(0.7)^t 4$, entonces

$$(0.7)^t=\frac{0.04}{4}=0.01.$$

Aplicamos logaritmos con una misma base (por ejemplo, con base natural), obtenemos

$$t\cdot ln(0.7)=ln(0.01) \text{ o bien } t=\frac{ln(0.01)}{ln(0.7)}\approx 12.91139 \text{ días.}$$

iv. Para construir el modelo $t(D)$ que describe el tiempo transcurrido como función de la cantidad de droga en el cuerpo de la persona, del inciso **i.** tenemos $D(t)=(0.7)^t 4$, o bien, simplificando notación y despejando

$$D=(0.7)^t 4 \Leftrightarrow \frac{D}{4}=(0.7)^t \Leftrightarrow t=log_{0.7}\left(\frac{D}{4}\right), \text{ en notación de función}$$

$$t(D)=log_{0.7}\left(\frac{D}{4}\right).$$

SECCIÓN 3.2
EJERCICIOS 4

1. Después de ser elaborado, un medicamento pierde el 25% de su efectividad cada año.

i. Determina el modelo $E(t)$ que describe la efectividad del medicamento como función del tiempo.

ii. Determina la efectividad del medicamento al término de 18 meses.

iii. Al momento que la efectividad del medicamento es 60%, ¿Qué tiempo ha transcurrido desde su fabricación?

iv. Cuál es el modelo $t(E)$ que describe el tiempo como función de la efectividad del medicamento, utiliza la base natural en tu solución.

2. Un médico ha determinado que un tumor cancerígeno aumenta su masa 5% cada mes.

i. Construye el modelo exponencial $M(t)$ que describe la cantidad de masa en el tumor como función del número de meses transcurridos. Supón que inicialmente el tumor tiene una masa de 20 gramos.

ii. Calcula la masa del tumor a los 24 meses.

iii. Al momento que el tumor tiene una masa de 500 gramos, ¿qué tiempo ha transcurrido desde su detección?

iv. Construye el modelo $t(M)$ que describe el tiempo como función de la masa del tumor, utiliza la base natural en tu solución.

3. El precio de un combustible se dispara un 1% mensualmente por cada litro.

i. Construye el modelo exponencial $p(t)$ que describe el precio del litro de combustible como función del número de meses transcurridos. Supón que inicialmente el combustible tiene un costo de 10 pesos.

ii. Calcula el precio por litro de combustible a los 72 meses.

iii. Cuando precio del litro de combustible se ha duplicado, ¿qué tiempo ha transcurrido?

iv. Construye el modelo $t(p)$ que describe el tiempo como función del precio del combustible, utiliza la base natural en tu solución.

4. Una vez terminado el curso de matemáticas un estudiante lo olvida en un 60% cada trimestre transcurrido.

i. Construye el modelo exponencial $O(t)$ que describe el porcentaje de olvido del curso como función del número de trimestres transcurridos.

ii. Calcula porcentaje de olvido del curso por parte del estudiante a los cinco meses.

iii. Al momento que el estudiante sólo conserva el 10% de los conocimientos del curso, ¿qué tiempo ha transcurrido?

iv. Construye el modelo $t(O)$ que describe el tiempo como función del porcentaje de olvido del curso por el estudiante, utiliza la base natural en tu solución.

3.3 SOLUCIONES Y EVALUACIÓN

SOLUCIÓN A EJERCICIOS PROPUESTOS

EXAMEN DE LA UNIDAD

SOLUCIÓN AL EXAMEN

SECCIÓN 3.1 SOLUCIONES A EJERCICIOS 1

1. a. $f(x)=40(1.02)^x$. **b.** $f(x)=35(0.95)^x$. **c.** $f(x)=22(1.02)^x$. **d.** $f(x)=3^x p_0$.
e. $f(x)=10(0.75)^x$. **f.** $f(x)=(0.90)^x$. **g.** $f(x)=2^x M_0$. **h.** $f(x)=(1.005)^x M_0$.

2. a. $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-5}$. **b.** $f(x)=(2)^{x-5}$. **c.** $f(x)=\frac{1}{3}2^{x-3}$. **d.** $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-3}$.

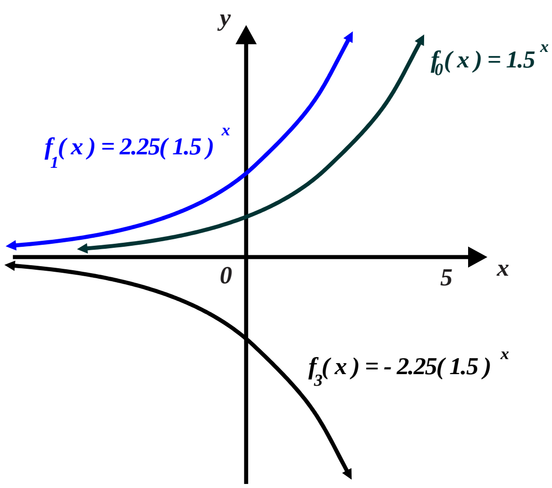
e. $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^{x-2}$. **f.** $f(x)=2\left(\frac{1}{6}\right)^{x-1}$.

3. a. $f(x)=\frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^x$. **b.** $f(x)=\frac{1}{16}4^x$. **c.** $f(x)=8\cdot 2^x$. **d.** $f(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^x$. **e.** $f(x)=5\cdot 5^x$.

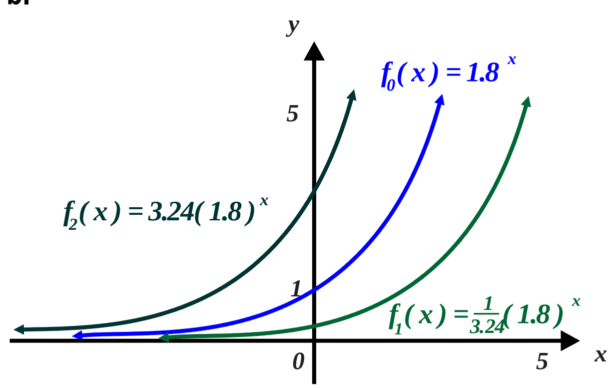
SECCIÓN 3.1 SOLUCIONES A EJERCICIOS 2

1.

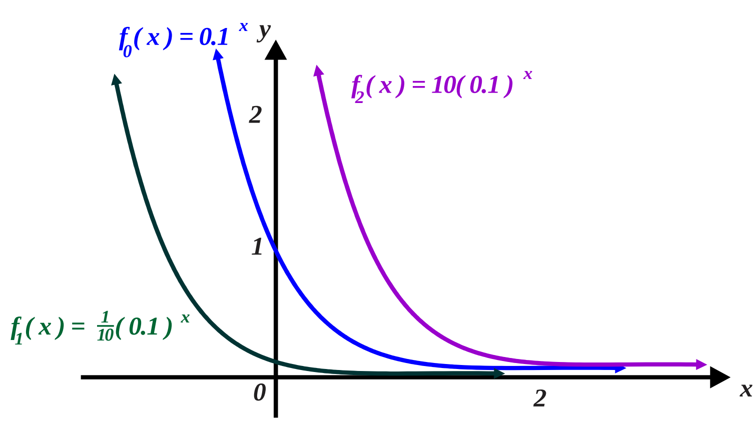
a.



b.



c.



SECCIÓN 3.1 SOLUCIONES A EJERCICIOS 3

1.

a.

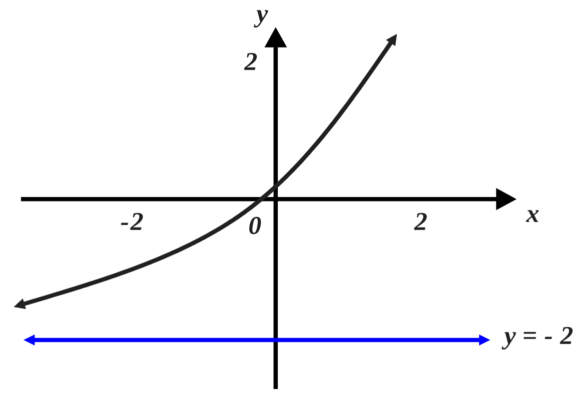
$dom(f) = (-\infty, +\infty)$,

cero $x = \dfrac{ln2}{ln\frac{3}{2}} - 2$,

$rec(f) = (-2, +\infty)$ y

asíntota horizontal

$y = -2$.



b.

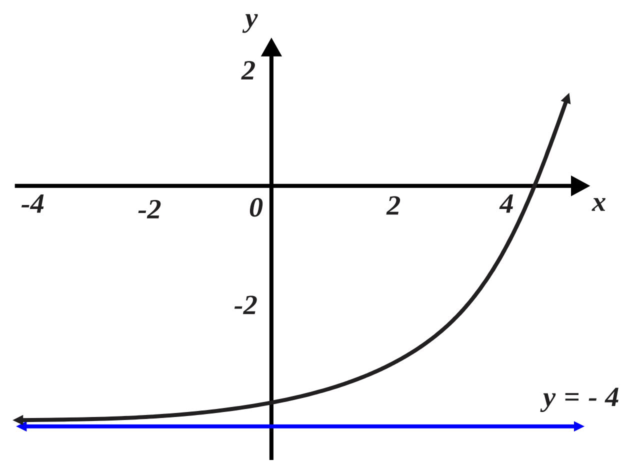
$dom(f) = (-\infty, +\infty)$,

cero $x = \dfrac{2ln2}{ln1.8} - 2$,

$rec(f) = (-4, +\infty)$ y

asíntota horizontal

$y = -4$.



c.

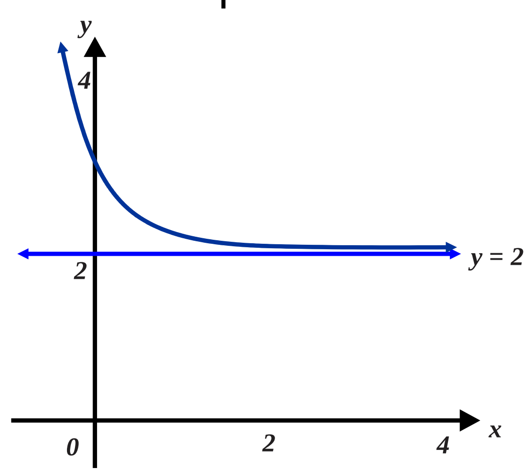
$dom(f) = (-\infty, +\infty)$,

cero, no tiene,

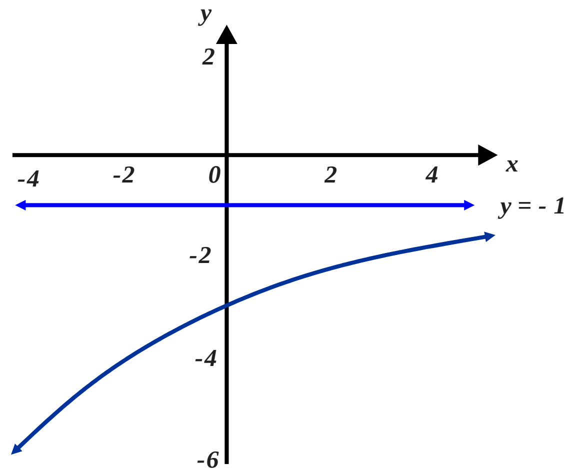
$rec(f) = (2, +\infty)$ y

asíntota horizontal

$y = 2$.



d.
$dom(f) = (-\infty, +\infty)$,
cero, no tiene,
$rec(f) = (-\infty, -1)$ y
asíntota horizontal
$y = -1$.



SECCIÓN 3.2 SOLUCIONES A EJERCICIOS 1

1. a. $x = 4$. **b.** $x = 4$. **c.** $x = -3$. **d.** $x = 4$.

2. a. $f^{-1}(x) = log_2 x$. **b.** $f^{-1}(x) = log_{\frac{3}{8}} x$. **c.** $f^{-1}(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x$. **d.** $f^{-1}(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

SECCIÓN 3.2 SOLUCIONES A EJERCICIOS 2

1. a. $6 log_4 x + 3$.**b.** $10 log_8 x - 2$. **c.** $3 ln x - 2$. **d.** $-4 log_{18} x + 2\, og_{18} y$. **e.** $\frac{3}{2} log_2 x - log_2 y$.

f.. $\frac{1}{3} log_4 x - \frac{1}{5} log_4 y$.

2. a. $f(x) = log_{10} \frac{x^4}{100}$. **b.** $g(x) = log_3 9x^6$. **c.** $h(x) = log_6 36x^{\frac{1}{5}}$. **d.** $i(x) = ln \frac{36}{x^6} = ln 36x^{-6}$.

e. $j(x) = ln\, e^4 x$. **f.** $f(x) = ln\, ex$. **g.** $g(x) = log_2 \frac{x^3}{4}$. **h.** $h(x) = ln\ x^{\frac{9}{2}}$.

3. a. $f(x) = \frac{log_3 x}{log_3 4}$. **b.** $f(x) = \frac{log_e x}{log_e 2}$. **c.** $f(x) = \frac{log_7 x}{log_7 2}$. **d.** $f(x) = \frac{log_3 x}{log_3 e}$.

e. $f(x) = \frac{log_{\frac{1}{2}} x}{log_{\frac{1}{2}} e}$.

4. a. $f(x) = e^{(ln 4)x}$. **b.** $f(x) = 3^{(log_3 5)x}$. **c.** $f(x) = 7^{(log_7 e)x}$. **d.** $f(x) = e^{\left(log_{\frac{2}{3}} e\right)x}$.

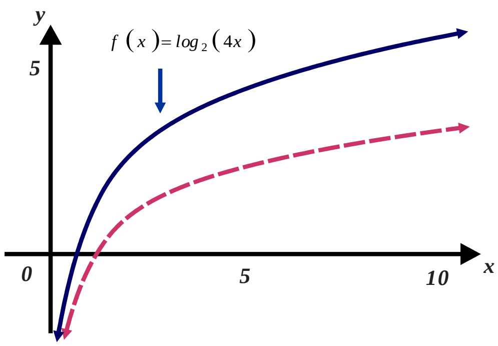
e. $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\log_{\frac{1}{2}} e\right)x}$.

5. a. $x=27$. **b.** $x=\frac{5}{2}$. **c.** $x=-1$. **d.** $x=3$. **e.** $x=3$. **f.** No tiene solución. **g.** $z=20$.

6. a. $x=2$. **b.** $w=\frac{1}{3}$. **c.** $y=2$. **d.** $x=log_2 5$. **e.** $x=2\pm\sqrt{2}$.

SECCIÓN 3.2 SOLUCIONES A EJERCICIOS 3

1. a.



Cero: $x=\frac{1}{4}$,

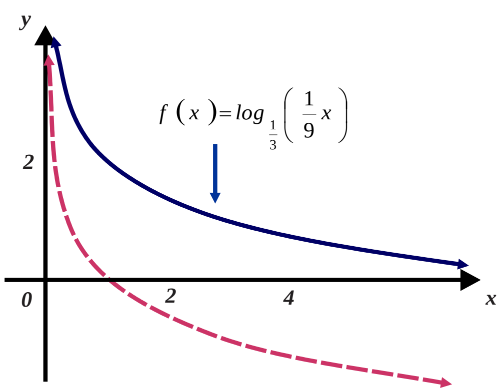
asíntota vertical $x=0$,

$dom(f)=(0,+\infty)$

y

$rec(f)=(-\infty,+\infty)$.

b.



Cero: $x=9$,

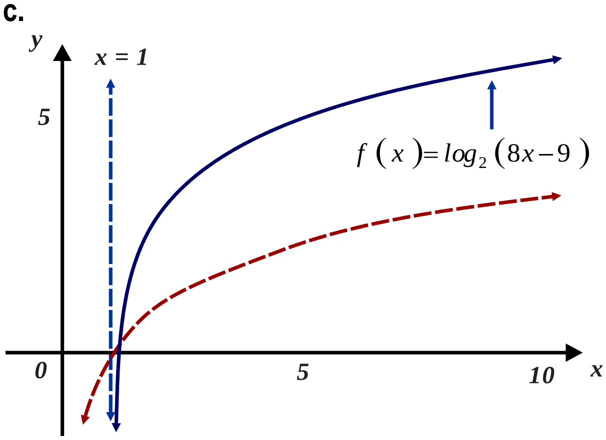
asíntota vertical $x=0$,

$dom(f)=(0,+\infty)$

y

$rec(f)=(-\infty,+\infty)$.

c.



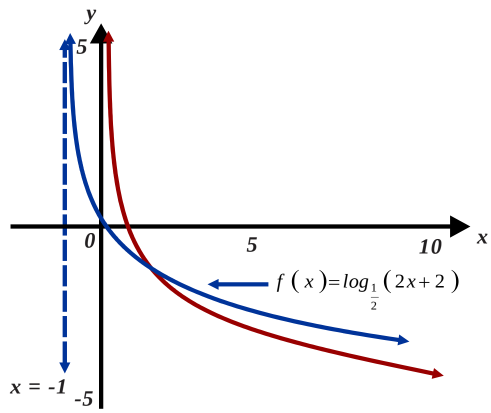
Cero: $x=\frac{9}{8}$, asíntota vertical $x=1$,

$dom(f)=(1,+\infty)$

y

$rec(f)=(-\infty,+\infty)$.

d.



Cero: $x=-\frac{1}{2}$, asíntota vertical $x=-1$, $dom(f)=(-1,+\infty)$ y $rec(f)=(-\infty,+\infty)$.

SECCIÓN 3.2 SOLUCIONES A EJERCICIOS 4

1. i. $E(t)=(0.75)^t$. **ii.** $E\approx 64.95\%$. **iii.** $t\approx 1.77566$ años. **iv.** $t(E)=\frac{lnE}{ln(0.75)}$.

2. i. $M(t)=20(1.05)^t$. **ii.** $M\approx 64.50199$ gramos. **iii.** $t\approx 65.97386$ meses. **iv.** $t(M)=\frac{1}{ln(1.05)}ln\left(\frac{M}{20}\right)$.

3. i. $p(t)=10(1.01)^t$. **ii.** $p\approx 20.47099$ pesos por litro. **iii.** $t\approx 69.66071$ meses. **iv.** $t(p)=\frac{1}{10\cdot ln(1.01)}ln\,p$.

4. i. $O(t)=(0.6)^t$. **ii.** Ha olvidado el $O\approx 42\%$ del curso. **iii.** $t\approx 4.50757$ trimestres. **iv.** $t(O)=\frac{1}{10\cdot ln(0.6)}ln\,O$.

UNIDAD 3 EXAMEN

CONCEPTOS

COMPLETA LA FRASE

1. El dominio de la función exponencial $f(x)=b^x$ es el conjunto de ________________________.

2. Si $0<b<1$, entonces la función exponencial $f(x)=b^x$ ______________________________ .

3. Si ____________________________ entonces $f(x)=b^x$ no representa una función exponencial.

4. Si $b>1$, entonces la función $f(x)=log_b x$ __________________________________ .

5. Si $f:(a,b)\rightarrow(c,d)$ y $g:(c,d)\rightarrow(a,b)$ y $f(g(x))=g(f(x))$, entonces las funciones f y g son _________________________________.

6. Si $x=log_b y$, entonces _________________________________.

7. La función $f(x)=log_b x$ tiene como asíntota vertical la línea recta de ecuación ___________ .

8. El _________________________________ al que debe elevarse b para obtener el número y recibe el nombre de logaritmo.

9. La curva asociada a la función _________________________________ es la imagen física de la curva asociada a la función $f(x)=b^x$ respecto a la línea recta de ecuación $i(x)=x$.

10. La función $f(x)=b^x$ escrita con base natural es _____________________________ .

ALGORITMOS Y OBSERVACIONES

1. Rescribe la función $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x-5$ con base natural.

2. Resuelve la ecuación $4^{x^2+2x}=4^{x^2+6}$.

3. Rescribe la función $f(x)=log_5 x+6$ con base natural

4. Determina el dominio y el recorrido de la función $f(x)=log_2(x-5)+1$.

5. Resuelve la ecuación $log_{10}\left(16-x^2\right)-2log_{10}(3x-4)=0$.

6. Traza la gráfica de $f(x)=2^{(x-4)}-2$ y determina sus características (asíntota horizontal dominio y cero).

7. Traza la gráfica de $f(x)=log_3(x+1)+3$ y determina sus características (asíntota horizontal dominio y cero).

CONSTRUCCIONES

1. Construye una función exponencial con las siguientes características.

Dominio $dom(f)=(-\infty,+\infty)$, recorrido $dom(f)=(-2,+\infty)$, asíntota horizontal $y=2$, cero $x=3$ y ordenada al origen $f(0)=-\frac{7}{4}$.

2. Construye una función logarítmica con las siguientes características:

Asíntota vertical 3, base 2 y que interseque al eje de las abscisas en el punto $\left(\frac{13}{4},0\right)$.

3. Una máquina transforma una cantidad específica M de materia prima de forma que ésta se reduce a la quinta parte cada hora, determine la función que describe la cantidad de materia prima disponible después de t horas. Supón que inicialmente se tienen 100 kilogramos de materia.

4. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que se duplique un capital de 5000 invertido al 18% de interés anual?

5. Una persona ha sido asesinada, inicialmente su temperatura era 36 grados centígrados. Si la temperatura de cuerpo disminuye en forma exponencial 12% grados por hora, ¿cuál será su temperatura 150 minutos después de asesinada?

6. Una placa metálica de área A se ha sumergido en cierto ácido. El ácido disuelve la mitad del área de la placa cada hora. Construye el modelo que describe el área de la placa como función del tiempo (en horas).

7. Un individuo ha consumido dos litros de alcohol hasta el término de una larga noche. Si cada hora elimina el 10% del alcohol consumido. Construye la función que describa el tiempo en función del contenido de alcohol en el cuerpo del individuo, utiliza logaritmos naturales.

UNIDAD 3 SOLUCIÓN AL EXAMEN

CONCEPTOS

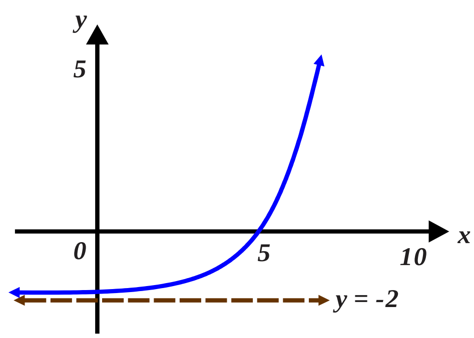
COMPLETA LA FRASE

1. TODOS LOS NÚMEROS REALES. **2.** ES DECRECIENTE. **3.** b ES NEGATIVA O IGUAL A UNO. **4.** ES CRECIENTE. **5.** INVERSAS RELATIVAS. **6.** $y=b^x$. **7.** $x=0$. **8.** EXPONENTE. **9.** $f(x)=log_b x$. **10.** $f(x)=e^{(lnb)x}$.

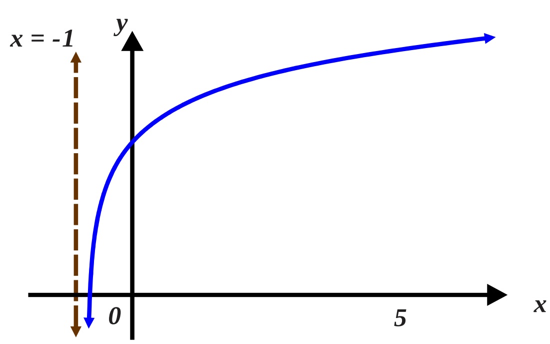
ALGORITMOS Y OBSERVACIONES

1. $f(x)=e^{\left(ln\frac{1}{4}\right)x}-5$. **2.** $x=3$. **3.** $f(x)=\frac{ln\,x}{ln5}$. **4.** $dom(f)=(5,+\infty)$ y $rec(f)=(-\infty,+\infty)$.

5. $x=\frac{12}{5}$. **6.** $y=-2$, $dom(f)=(-\infty,+\infty)$, $x=5$.



7. $x=-1$, $dom(f)=(-1,+\infty)$, $x=-\frac{26}{27}$.



CONSTRUCCIONES

1. $f(t)=\left(\frac{1}{4}\right)2^x-2$.

2. $f(x) = log_2 A(x-3) + 2$.

3. $M(t) = 100\left(\frac{1}{5}\right)^t$.

4. $t \approx 4{,}18783$ años.

5. $T \approx 26.15225$ grados centígrados.

6. $M(t) = A(0.5)^t$.

7. $t(A) = \frac{1}{ln(0.9)} ln\left(\frac{A}{2}\right)$.

4

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

PROPÓSITOS

Al finalizar la unidad:
El alumno comprenderá la extensión del concepto de razón trigonométrica a función trigonométrica. Estudiará las funciones seno y coseno en su forma característica de variación y el análisis de sus parámetros. Modelará situaciones de comportamiento periódico para resolver problemas.

CONTENIDO

SECCIÓN 4.1 Funciones y elementos

SECCIÓN 4.2 Funciones polinomiales

SECCIÓN 4..3 Soluciones y evaluación

CONCEPTOS CLAVE

Arco de circunferencia. Dados dos puntos de la circunferencia, la sección de dos puntos contenida entre ellos.

Ángulo central. El que tiene por vértice el centro de una circunferencia y lados dos radios de circunferencia.

Ángulo subtendido. Su vértice en el centro de una circunferencia y cada lado contiene un extremo de un arco de la circunferencia.

Unidad de medición. Referencia convencional que se usa para medir la magnitud física de un determinado objeto.

Proyección del punto $P(x, y)$ en los ejes coordenados.

a. En el eje x Puntos de la forma $P(x, 0)$

b. En el eje y Puntos de la forma $P(0, y)$

Razón. Comparación de dos cantidades por medio de una división.

Número pi. La razón del perímetro al radio en una semicircunferencia.

Circunferencia unitaria anclada en el origen. Circunferencia de radio de longitud uno y centro en el origen del plano cartesiano.

Función trigonométrica. Función definida con respecto a una circunferencia de radio de longitud uno, con centro en el origen del plano cartesiano. Se toma en cuenta un ángulo central con lado inicial en el eje de las abscisas de manera que existe un solo punto $P(x, y)$ sobre la circunferencia tal que la distancia, medida en sentido contrario de las manecillas del reloj alrededor del arco AP, es igual a t.

Función periódica. Existe $T > 0$ tal que $f(t+T) = f(t)$. Las funciones periódicas son funciones que se comportan en una manera cíclica (repetitiva) sobre un intervalo especificado (llamado un periodo).

Periodo. Número positivo T tal que $f(t+T)=f(t)$. Es la longitud del intervalo más pequeño que hace cumplir la condición de función periódica.

Ordenada al origen. Es la ordenada del punto en el que una curva interseca al eje de las ordenadas.

Levógiro. Que gira en el sentido contrario a las agujas del reloj.

Dextrógiro. Que gira en el sentido de las agujas del reloj.

Valor máximo. Alrededor x_0, $f(x_0)>f(x)$ para toda x.

Valor mínimo. Alrededor x_0, $f(x_0)<f(x)$ para toda x.

Senoidal o Cosenoidal. Nombre de las funciones trigonométricas con regla de correspondencia $f(t)=Asen(Bt-C)+D$ o $f(t)=Acos(Bt-C)+D$.

SECCIÓN 4.1 ANTECEDENTES

APRENDIZAJES

1. Explora situaciones o fenómenos de variación periódica.

2. Convierte medidas angulares de grados a radianes y viceversa.

3. Comprende la forma en que se extienden o generalizan las razones trigonométricas para ángulos arbitrarios.

TEMÁTICA

1. Situaciones o fenómenos de variación periódica.

2. Medidas angulares en grados y radianes. Conversiones.

3. Razones trigonométricas, seno y coseno y tangente para cualquier ángulo.

FENÓMENOS DE VARIACIÓN PERIÓDICA

¿Qué es la variación periódica? En la vida real existe una gran variedad de fenómenos (descritos por funciones) que se comportan de manera cíclica (repetitiva) en un mismo intervalo de tiempo (llamado periodo y de longitud T). La función f que describe este tipo de fenómenos tiene la propiedad $f(x)=f(x+T)$, donde $T>0$ es constante; en el plano cartesiano esto significa que la curva que describe el fenómeno puede trazarse utilizando "una copia" de una de sus partes.

EJEMPLO 1 MOVIMIENTOS OSCILATORIOS

a. Un oscilador armónico es un objeto que al moverlo fuera de su posición de equilibrio oscila en torno a ella. En un sistema masa-resorte como el mostrado en la figura.

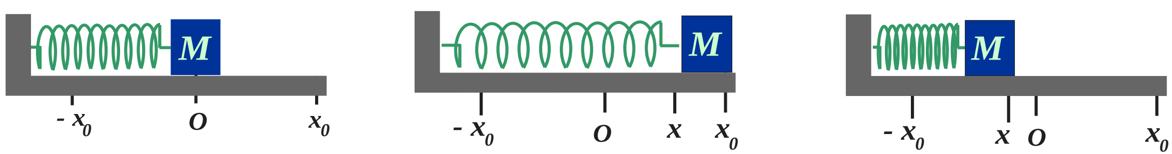


FIGURA 1

el resorte ha sido estirado respecto a su posición de equilibrio O y luego se ha dejado en libertad, como consecuencia la masa (bloque azul) oscila en torno a su posición de equilibrio O. El desplazamiento de la masa la describe la función $x(t)$ (y en condiciones ideales) que varía desde $-x_0$ y hasta x_0 en el tiempo $t=T$, esta variación es periódica y cumple la condición $x(t)=x(t+T)$ donde t representa el tiempo.

b. Un péndulo simple consiste en un objeto suspendido de un hilo de peso despreciable. Cuando un péndulo se desvía hacia un lado (por ejemplo, a la izquierda) de su posición de equilibrio, digamos un ángulo θ_0, y luego se abandona oscila (sobre un plano) alrededor de su posición de equilibrio O, desde $-\theta_0$ hasta θ_0 con un movimiento a la vez periódico y oscilatorio (suponiendo condiciones ideales). Si la función $\theta(t)$ describe el movimiento angular del péndulo se cumple $\theta(t)=\theta(t+T)$ donde T es el tamaño del periodo de oscilación.

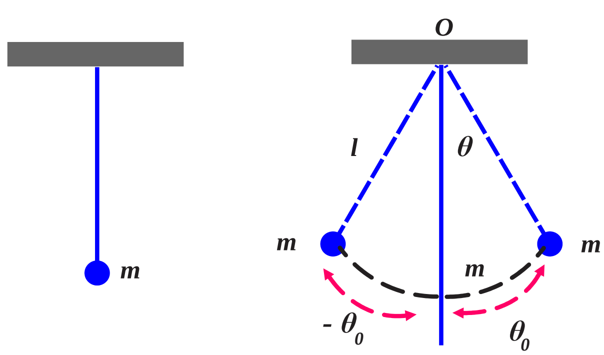


FIGURA 2

c. Un oscilador de pozo cuadrado (o "partícula de caja") puede interpretarse como un "carrito" que se mueve en ambos sentidos a lo largo de una vía horizontal entre dos puntos fijos, la rapidez con que se mueve es constante. Los puntos de inversión P_1 y P_2 son paredes paralelas rígidas entre las que oscila el "carrito" tras efectuar choques perfectamente elásticos con ellas

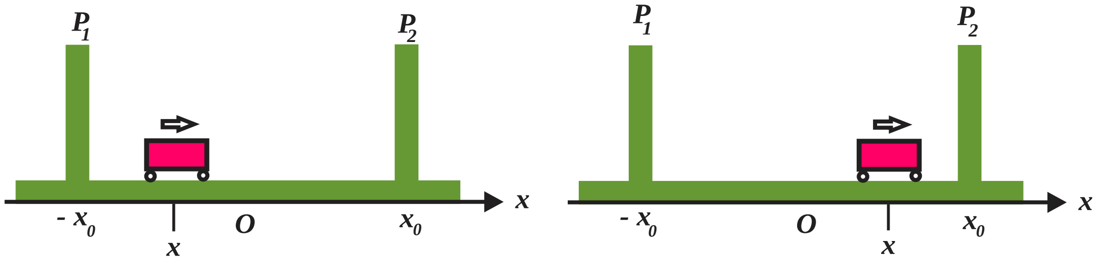


FIGURA 3

El desplazamiento máximo del carrito se denomina *amplitud de oscilación* y tiene longitud $A = 2x_0$. Un ciclo del "carrito" está descrito por el trayecto $P_1P_2P_1$ y se llama periodo de oscilación.

d. De un disco (circular), de radio de longitud uno y con centro en el origen del plano cartesiano se selecciona el punto $P(x, y)$ y se proyecta sobre los ejes coordenados, esto da origen a los segmentos rectilíneos "dirigidos" $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ cuya longitud depende de la amplitud del ángulo central t, explícitamente $\overline{OA} = x(t)$ y $\overline{OB} = y(t)$. Después de n ciclos completos del punto P se cumple: $\overline{OA} = x(t) = x(t + 360° \cdot n)$ y $\overline{OB} = y(t) = y(t + 360° \cdot n)$.

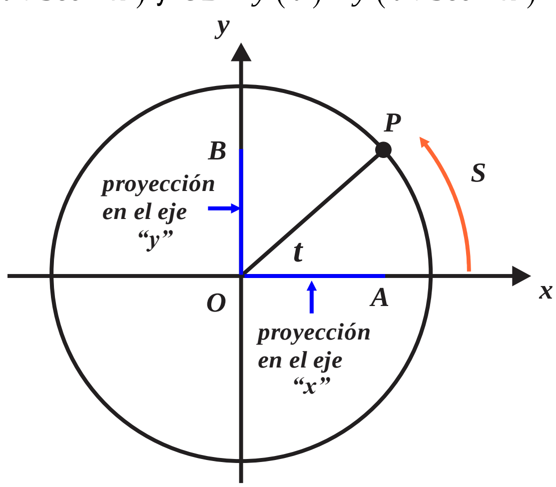


FIGURA 4

DEFINICIÓN 1 FUNCIÓN PERIÓDICA

a. La función regla de correspondencia f que satisface $f(t) = f(t + T)$ para cualquier número t en su dominio y para algún número real positivo T se denomina función periódica con periodo T.
b. El valor positivo más pequeño posible de T es el periodo de la función.
c. La amplitud de una función periódica es la semidiferencia entre su valor máximo y su valor mínimo.

MEDIDA DE UN ÁNGULO, GRADOS Y RADIANES

Vinculados con las funciones periódicas se encuentran los ángulos. En la geometría plana un ángulo se define como la parte del plano limitada por dos segmentos de línea recta (o en su caso semirrectas o rayos).

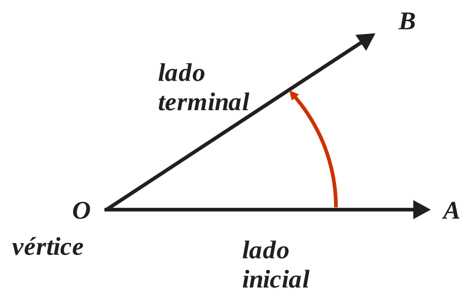


FIGURA 5

En trigonometría se utilizan ***ángulos centrales***, mismos que se vinculan con la circunferencia unitaria (radio de longitud uno y centro en el origen del plano cartesiano) y satisfacen:

i. El vértice del ángulo coincide con el centro de la circunferencia unitaria.

ii. El lado inicial comienza en el origen del plano cartesiano y es parte del eje de las abscisas.

iii. El lado terminal contiene un punto de la circunferencia unitaria

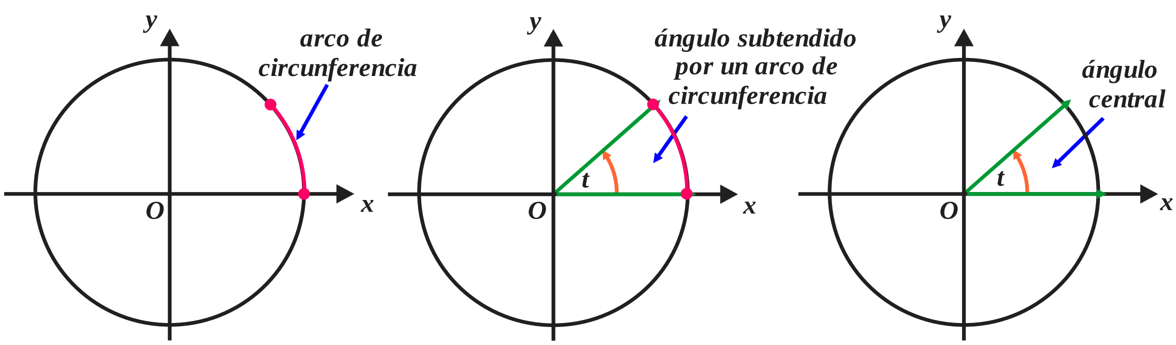
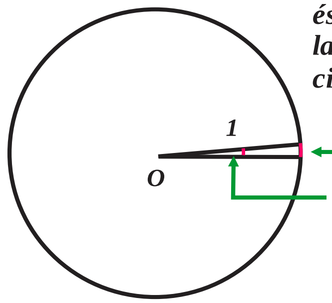


FIGURA 6

Cada ángulo tiene asignada una amplitud (o medida), en geometría las amplitudes se miden en grados, un grado se define como la amplitud del ángulo central subtendido por un arco de circunferencia de longitud igual a $\frac{1}{360}$ parte de circunferencia, sin embargo, los grados tienen la desventaja de estar definidos con base sexagesimal (60). Unidades de mayor utilidad en la medición de ángulos son los radianes puesto que tiene base decimal.

Un ángulo mide un radián, si es subtendido por un arco de longitud igual a un radio de circunferencia.



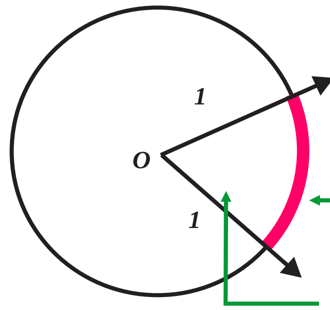


FIGURA 7

DEFINICIÓN 2 GRADO Y RADIÁN

Sea una circunferencia de radio de longitud 1, entonces

a. Un ángulo de medida (amplitud) de un grado es subtendido por un arco de longitud $\dfrac{1}{360}$.

b. Un ángulo mide un radián, si es subtendido por un arco de longitud igual a un radio

Los grados y los radianes se utilizan, tanto para referirse a las amplitudes de los ángulos como a las longitudes de los arcos que los subtienden. ¡Ambas unidades también son medidas de longitud!

Las unidades de medida de los ángulos se encuentran relacionadas proporcionalmente por

$$\frac{2\pi}{360} = \frac{x^r}{x^\circ}, \text{ o bien } \frac{x^r}{x^\circ} = \frac{\pi}{180}.$$

El superíndice ^{r} en x^r carece de valor numérico y sólo indica que el ángulo está medido en radianes.

Para transformar t° grados a radianes se utiliza la relación $t^r = \dfrac{\pi}{180} t^\circ$. Para transformar θ^r radianes a grados se utiliza la relación

$$t^\circ = \frac{180}{\pi} t^r.$$

EJEMPLO 2 CONVERSION DE GRADOS A RADIANES Y DE RADIANES A GRADOS

a. El ángulo de amplitud $t = 45^\circ$ equivale a $(45)\dfrac{\pi}{180} = \dfrac{\pi}{4} \approx 0.7854$ radianes.

b. El ángulo de amplitud $t = -18^\circ$ también equivale a $(-18)\dfrac{\pi}{180} = -\dfrac{\pi}{10} \approx -0.31416$ radianes.

c. El ángulo de amplitud $t = 1.64^r$ también tiene amplitud $(1.64)\dfrac{180^\circ}{\pi} \approx 93.965^\circ$.

d. El ángulo de amplitud $t = -5.072^r$ equivale

$$(-5.072)\frac{180°}{\pi} \approx -290.604° .$$

e. El ángulo de amplitud $t = 1^r$ radián equivale a

$$(1)\frac{180°}{\pi} \approx 57.2856° .$$

f. El ángulo de amplitud $t = 1°$ equivale a

$$(1)\frac{180}{\pi} \approx 0.174533^r .$$

Las funciones trigonométricas (básicas) con variable independiente t (el ángulo central t en la circunferencia unitaria) se definen con base en las coordenadas del punto de proyección p en los ejes coordenados.

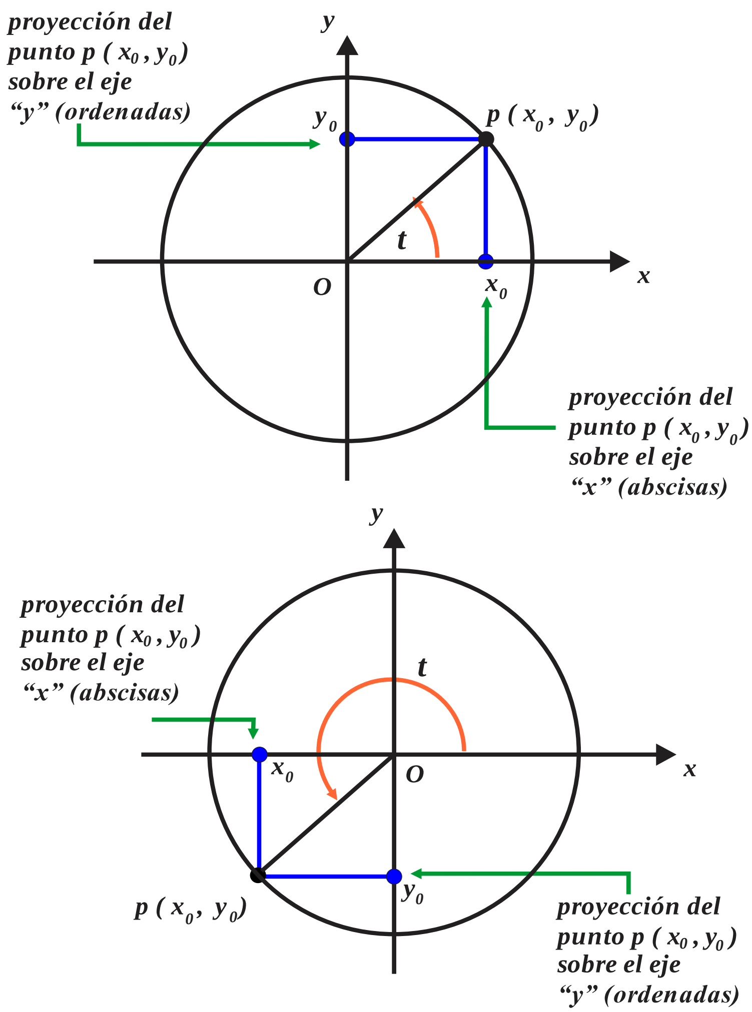


FIGURA 8

EJEMPLO 3 PUNTOS PROYECCIÓN EN LOS EJES COORDENADOS

a. Las proyecciones de $p\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ en los ejes coordenados son:

eje de las abscisas $p_x\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, eje de las ordenadas $p_y\left(0, -\frac{1}{4}\right)$.

b. Las proyecciones de $P(-0.5, 0)$ en los ejes coordenados son:

eje de las abscisas $p_x(-0.5, 0)$, eje de las ordenadas $p_y(0, 0)$.

c. Las proyecciones de $p(-0.4, -0.3)$ en los ejes coordenados son:

eje de las abscisas $p_x(-0.4, 0)$, eje de las ordenadas $p_y(0, 0.3)$.

d. Las proyecciones de $p(1, 0)$ en los ejes coordenados son:

eje de las abscisas $p_x(1, 0)$, eje de las ordenadas $p_y(0, 0)$.

Estamos en condiciones de definir las funciones trigonométricas (básicas).

DEFINICIÓN 3 FUNCIÓN SENO, FUNCIÓN COSENO

Sean

i. La circunferencia de radio de longitud 1, y centro común con el origen del plano cartesiano.

ii. $p_0(x_0, y_0)$ el punto de la circunferencia de radio de longitud 1 que genera el ángulo t con lado inicial el eje de las abscisas.

Entonces, definimos y representamos:

a. La función "seno de t" por $y_0 = f(t) = sen\, t$.

b. La función "coseno de t" por $x_0 = f(t) = cos\, t$.

EJEMPLO 4 IMÁGENES DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

a. Los valores (imágenes) de las funciones trigonométricas (seno, coseno y tangente) del punto $p\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ en el círculo unitario son:

i. $f(t) = sen\, t = -\frac{1}{4}$.

ii. $f(t) = cos\, t = \frac{1}{2}$.

b. Los valores (imágenes) de las funciones trigonométricas (seno, coseno y tangente) del punto $p_y(0, 0.3)$ en el círculo unitario son:

i. $f(t) = sen\, t = 0.3$.

ii. $f(t) = cos\, t = 0$.

SECCIÓN 4.1
EJERCICIOS 1

1. Completa las tablas:

a.

GRADOS	0	30	45				135	150	180
RADIANES				$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$			

b.

GRADOS				240	270	300			
RADIANES	π	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$				$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

2. Obtén los puntos proyección en los ejes coordenados.

a. $p\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.

b. $P(-0.5, 0)$.

c. $P\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

3. Obtén el valor del seno y del coseno que corresponden al punto $p\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ de la circunferencia unitaria.

4. Obtén el valor del seno y del coseno que corresponden al punto $p\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ de la circunferencia unitaria.

5. Los valores (imágenes) de las funciones trigonométricas (seno y coseno) correspondientes al punto $p\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ de la circunferencia unitaria.

SECCIÓN 4.2 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS Y APLICACIONES

APRENDIZAJES

4. Extiende el concepto de razón trigonométrica a función mediante la elaboración de una tabla o gráfica de:

$f(x) = sen\ x, \ f(x) = cos\ x$

5. Analiza e identifica los parámetros que aparecen en las funciones:

$f(x) = D + sen\ (Bx + C),$
$f(x) = D + cos\ x\ (Bx + C)$

D desplazamiento vertical, A amplitud, B frecuencia y desfasamiento.

6. Utiliza las funciones trigonométricas para representar fenómenos de variación periódica.

TEMÁTICA

4. Funciones trigonométricas:

$f(x) = sen\ x, \ f(x) = cos\ x$

Gráfica, dominio, rango, ceros amplitud y periodo-

5. Análisis del comportamiento de la gráfica respecto de los paráームeros:

A, B, C y D.

$f(x) = D + sen\ (Bx + C),$
$f(x) = D + cos\ x\ (Bx + C)$

6. Problemas de aplicación.

TRAZO DE LA GRÁFICA DE LAS FUNCIONES SENO Y COSENO

1. Las funciones trigonométricas $f(t) = sen\, t$ y $f(t) = cos\, t$ son periódicas con periodo $T = 2\pi$, esto significa que la forma que presenta sus gráficas sobre el intervalo $[\,0\,,\,2\pi\,]$, se repite en todos los intervalos en la recta real de la forma

$$[\,2n\pi\,,\,2(\,n+1\,)\pi\,]$$

(n representa un número entero), es decir,

$$\cdots,\ [\,-6\pi\,,-4\pi\,],\ [\,-4\pi\,,-2\pi\,],\ [\,-2\pi\,,0\,],\ [\,0\,,2\pi\,],\ [\,2\pi\,,4\pi\,],\ [\,6\pi\,,8\pi\,],\ \cdots$$

2. Los valores (imágenes) de $f(t) = sen\, t$ y $f(t) = cos\, t$ para $t = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2},\ 2\pi$ los justifica, la figura anexa y se observan en la tabla de la derecha (recuerda que $p(\,cos\, t\,,\,sen\, t\,)$.

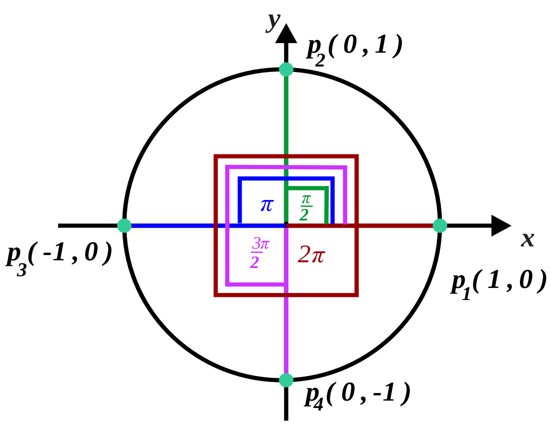


FIGURA 1

Ángulo	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$y(\,t\,) = sen\ t$	0	1	0	-1	0
$x(\,t\,) = cos\ t$	1	0	-1	0	1

3. Las imágenes bajo $f(t) = sen\, t$ y $f(t) = cos\, t$, para $t = \frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6},\ \frac{7\pi}{6},\ \frac{11\pi}{6}$ se obtienen con, el teorema de Pitágoras y las dos figuras:

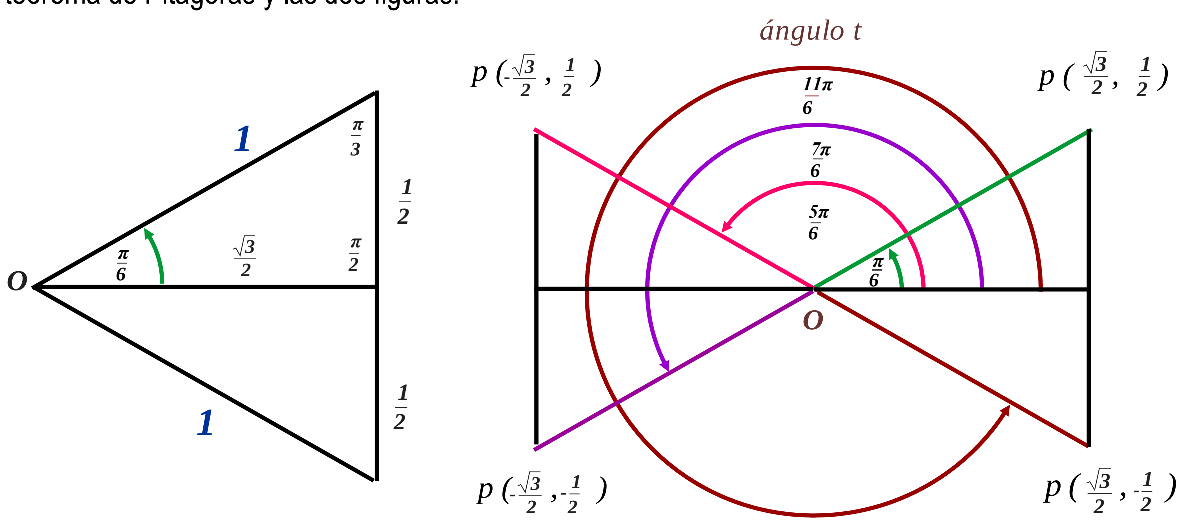


FIGURA 2

estos son:

Ángulo	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$
$y(t) = sen\ t$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$x(t) = cos\ t$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. Los valores (imágenes) de $f(t) = sen\,t$ y $f(t) = cos\,t$, cuando $t = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ se obtienen aplicando el teorema de Pitágoras en las figuras,

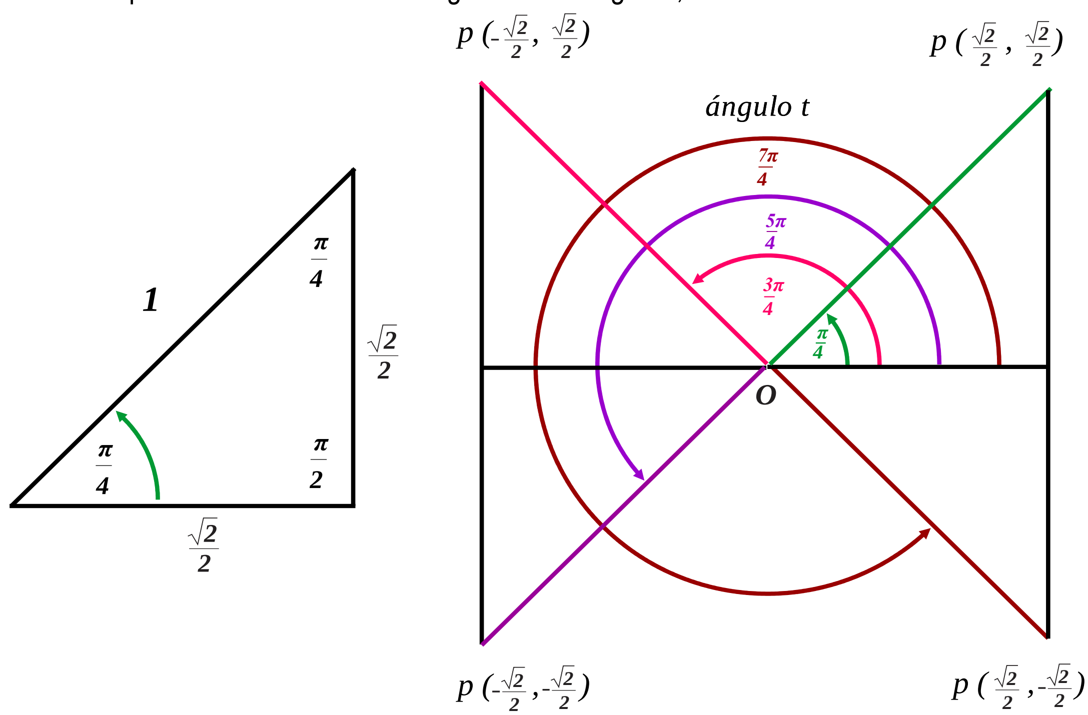
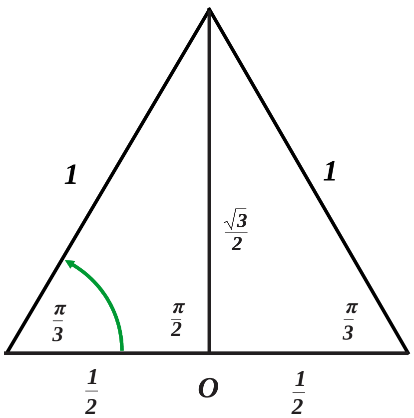


FIGURA 3

Por tanto,

Ángulo	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$
$y(t) = sen\ t$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$x(t) = cos\ t$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

5. El teorema de Pitágoras y las figuras justifican los valores (imágenes) de $f(t) = sen\,t$ y $f(t) = cos\,t$, para $t = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$, mismos que se encuentran en la siguiente tabla.



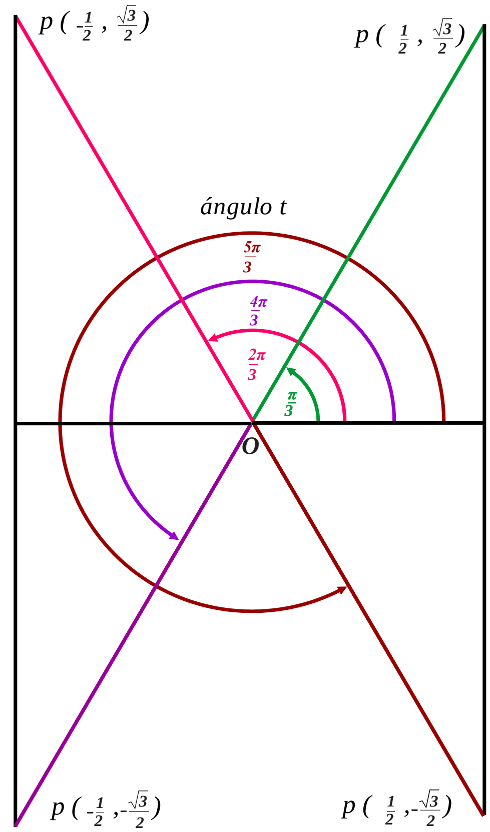
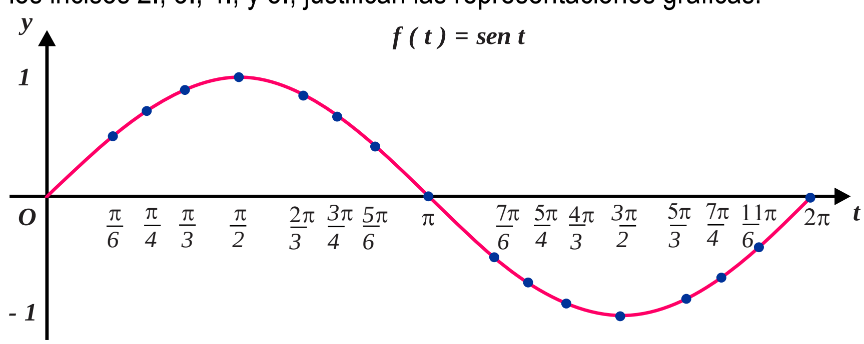


FIGURA 4

Ángulo	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$
$y(t) = sen\ t$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$x(t) = cos\ t$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Las tablas de los incisos 2., 3., 4., y 5., justifican las representaciones gráficas:



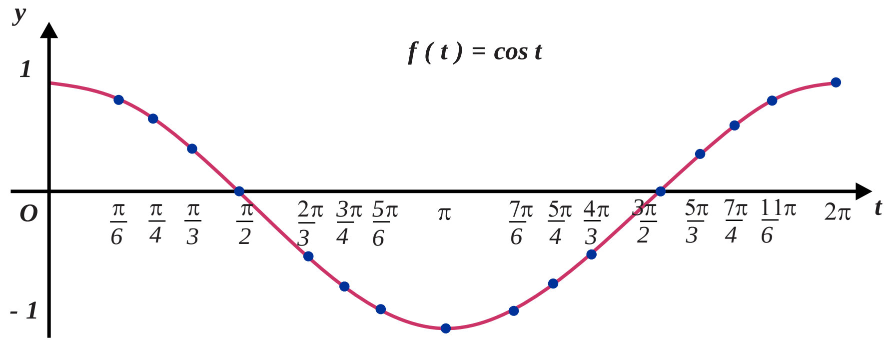


FIGURA 5

Llamaremos "ciclo" a cada una de curvas en las dos figuras anteriores, observa que cada "ciclo" corresponde a un giro de 2π radianes del radio de la circunferencia unitaria, es decir, cuando la variable t asume todos los números del intervalo $[\,0\,,2\pi\,]$.

EJEMPLO 1 CICLOS DE LAS FUNCIONES $f(t) = sen\,t$ y $f(t) = \cos t$.

a. La representación gráfica de $f(t) = sen\,t$ sobre $[\,0\,,4\pi\,]$ es:

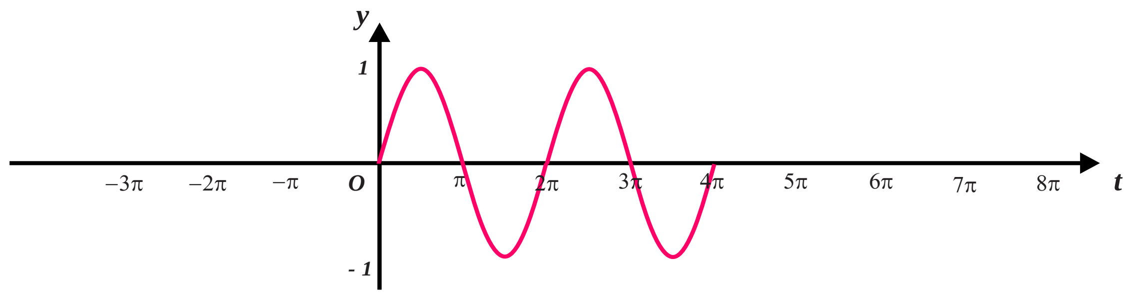


FIGURA 6

b. La representación gráfica de $f(t) = \cos t$ sobre $[\,2\pi\,,8\pi\,]$ es:

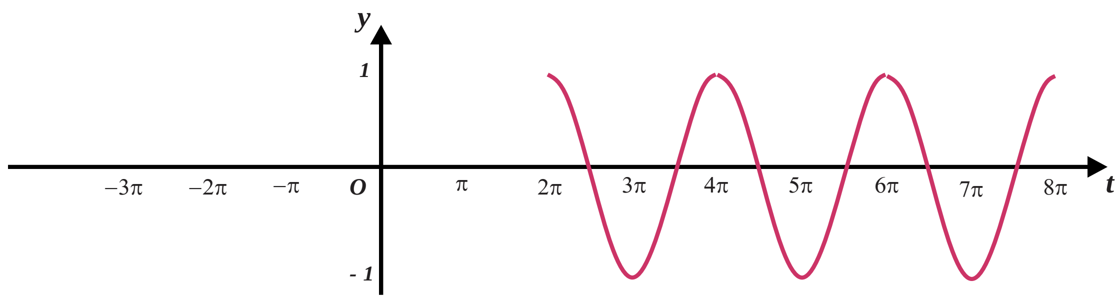


FIGURA 7

c. La representación gráfica de $f(t) = sen\,t$ sobre $[\,0\,,8\pi\,]$ es:

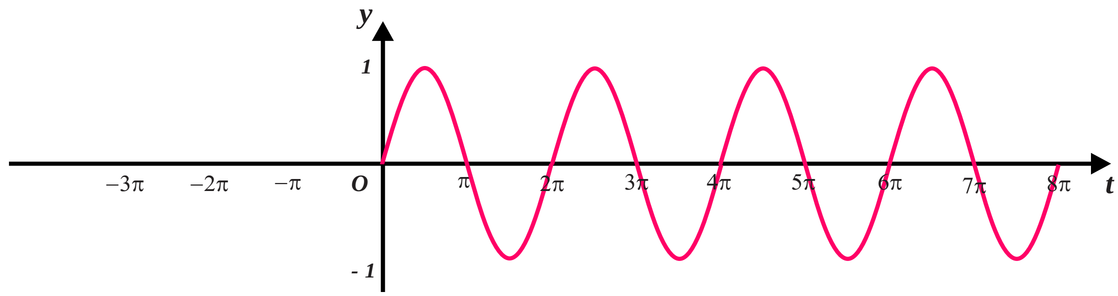


FIGURA 8

d. La representación gráfica de $f(t)=\cos t$ sobre $[\,4\pi\,,6\pi\,]$ es:

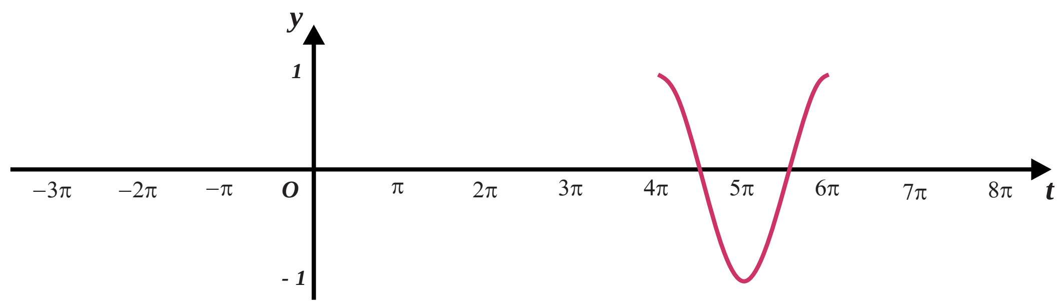


FIGURA 9

PROPIEDADES DE LA FUNCIONES $f(t)=\operatorname{sen} t$ Y $f(t)=\cos t$.

De lo tratado antes justifica las siguientes propiedades de

$$f(t)=\operatorname{sen} t \text{ y } f(t)=\cos t.$$

1. Tienen como dominio al intervalo $(-\infty\,,+\infty)$, cuya parte positiva se relaciona al ángulo de rotación del radio de la circunferencia unitaria en levógira, y la parte negativa se relaciona al ángulo de rotación del radio de la circunferencia unitaria en dirección dextrógira.

2. Su representación en el plano cartesiano se muestra en las siguientes figuras:

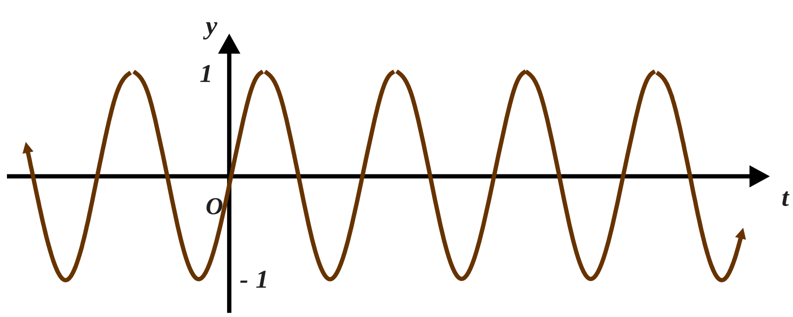


FIGURA 10

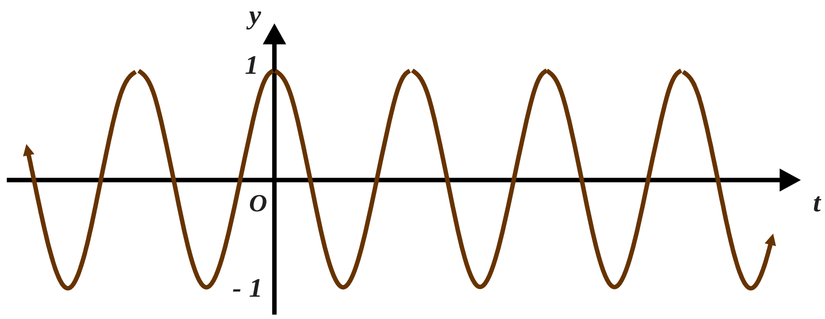


FIGURA 11

3. El recorrido (rango o conjunto imagen) es el intervalo $[-1\ ,\ 1]$, es decir,

$$rec(\ sen\, t\ )=[-1\ ,\ 1] \text{ y } rec(\ cos\, t\ )=[-1\ ,\ 1].$$

4. Su valor máximo es el número $y_{máx}=1$ y su valor mínimo el número $y_{mín}=-1$.

Las funciones $f(t)=sen\, t$ y $f(t)=cos\, t$ se generalizan (introduciendo parámetros) dando lugar a las funciones senoidales y/o cosenoidales.

TRANSFORMACIONES EN $f(t)=sen\, t$ y $f(t)=cos\, t$

La generalización de las funciones

$$f(t)=sen\, t \text{ y } f(t)=cos\, t$$

son las funciones:

$$f(t)=A\,sen(\ Bx-C\ )+D \text{ y } f(t)=A\cos(\ Bx-C\ )+D,$$

A, B, C y D reciben el nombre de parámetros y transforman la curva de la función

$$f(t)=sen\, t \text{ (o } f(t)=cos\, t\text{)}$$

de la siguiente forma:

a. El parámetro A se denomina amplitud (siempre se considera positivo), si lo incluimos en $f(t)=sen\, t$ (o $f(t)=cos\, t$**)** obtenemos

$$f_1(t)=A\,sen\, t \text{ (o } f_1(t)=A\cos t\text{),}$$

la curva asociada se construye con la curva de

$$f(t)=sen\, t \text{ (o } f(t)=cos\, t\text{)}$$

tomando en cuenta:

i. Si $0<A<1$, “contrayéndola verticalmente” de manera que oscile entre A y $-A$.

ii. Si $A>1$, “dilatándola verticalmente” de manera que oscile entre A y $-A$.

iii. Si $A<0$ se rotar π radianes la curva obtenida en cualquiera de los incisos anteriores.

Observa las siguientes figuras:

i. Si $0 < A < 1$.

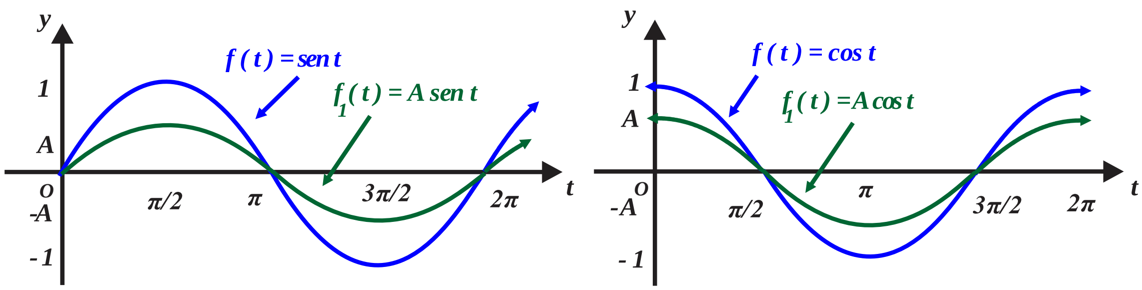


FIGURA 12

ii. Si $A > 1$.

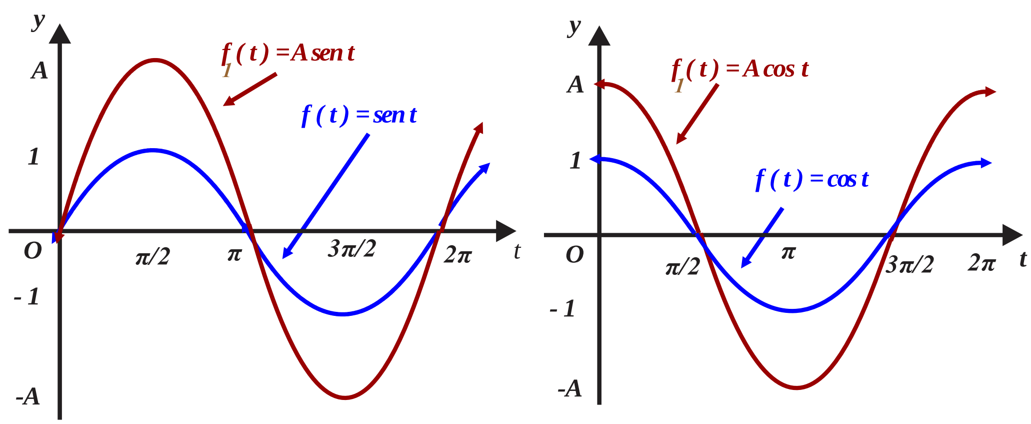


FIGURA 13

iii. Si $A < 0$.

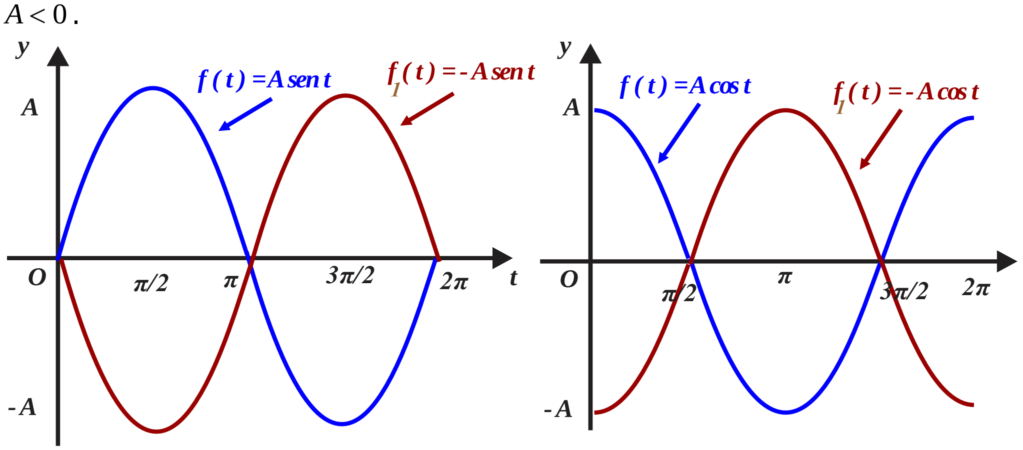


FIGURA 14

b. El parámetro B se llama frecuencia y se relaciona con el número de “ciclos” y/o la fracción de un “ciclo” sobre el intervalo $[\,0\,,\,2\pi\,]$, si lo agregamos a la función

$f_1(t) = A\,sen\,t$ (o $f_1(t) = A\cos t$) obtenemos

$$f_2(t) = A\,sen\,Bt \text{ (o } f_2(t) = A\cos Bt\text{)}$$

con representación en el plano cartesiano:

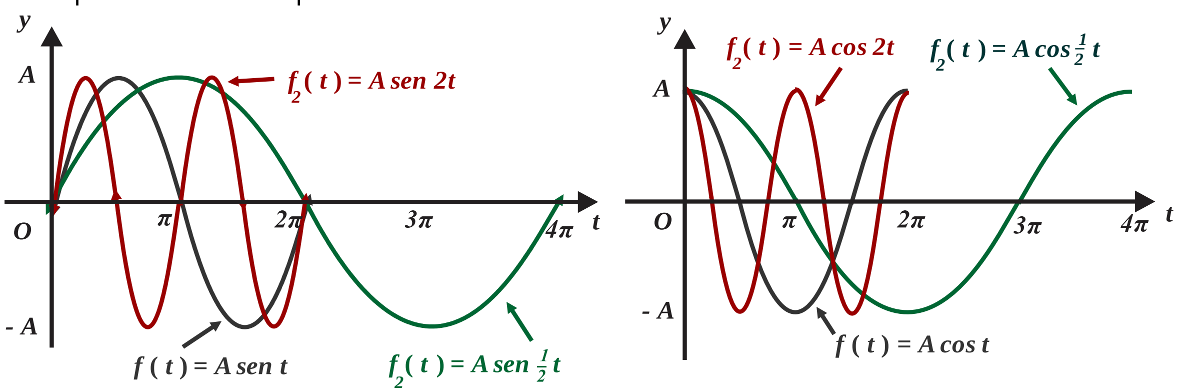


FIGURA 15

El parámetro B se relaciona con el periodo T (longitud del intervalo mínimo en el que ocurre un ciclo) de la función $f_2(t) = A\,sen\,Bt$ (o $f_2(t) = A\cos Bt$), el periodo es

$$T = \frac{2\pi}{|B|}$$

c. La combinación de los parámetros B y C en la forma $\frac{B}{C}$ se conoce como fase, su inclusión en

$$f_2(t) = A\,sen\,Bt \text{ (o } f_2(t) = A\cos Bt\text{)}$$

da

$$f_3(t) = A\,sen\,(Bt - C) \text{ (o } f_3(t) = A\cos(Bt - C)\text{)},$$

y se manifiesta mediante un desplazamiento horizontal de

$$\frac{B}{C}$$

unidades respecto a la curva asociada a $f_2(t) = A\,sen\,t$ (o $f_2(t) = A\cos Bt$).

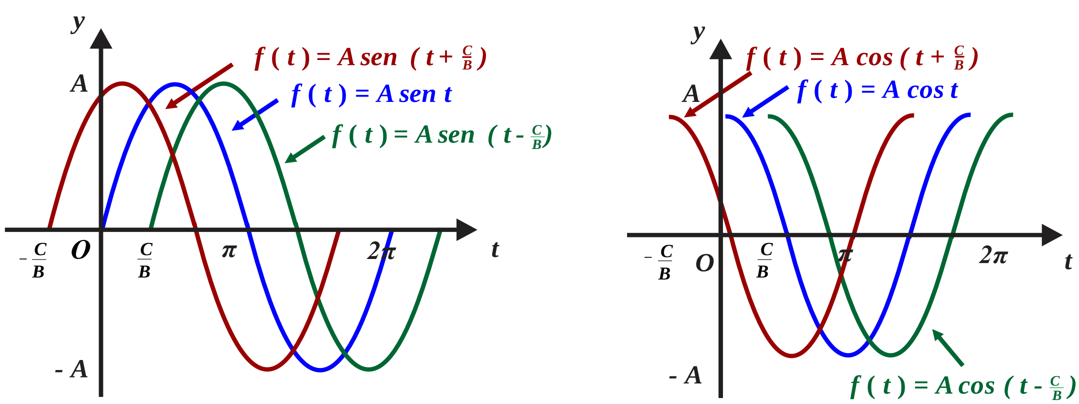


FIGURA 16

d. Si sumamos el parámetro D a $f_3(t)=A\,sen\,(Bt-C)$ ($f_3(t)=A\cos\,(Bt-C)$) obtenemos $f_4(t)=A\,sen(Bt-C)+D$ ($f_4(t)=A\cos(Bt-C)+D$) y su representación gráfica se construye desplazando verticalmente la curva asociada a $f_3(t)=A\,sen\,(Bt-C)$, ($f_3(t)=A\cos\,(Bt-C)$) D unidades.

EJEMPLO 2 PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES SENOIDALES (O COSENOIDALES)

a. Si $f(t)=\frac{3}{2}sen(2t+\pi)$: $dom(f)=(-\infty,+\infty)$, amplitud $A=\frac{3}{2}$, $rec(f)=\left[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right]$, frecuencia $B=2$, periodo $T=\frac{2\pi}{|2|}=\pi$ y fase $\frac{C}{B}=-\frac{\pi}{2}$.

b. En $f(t)=-2\,sen\left(\frac{1}{2}t+\frac{\pi}{6}\right)$: $dom(f)=(-\infty,+\infty)$, amplitud $A=2$. $rec(f)=[-2,2]$, frecuencia $B=\frac{1}{2}$, periodo $T=\frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|}=4\pi$ y fase $\frac{C}{B}=-\frac{\pi}{3}$.

c. En $f(t)=4\,sen\left(\frac{1}{3}t-\frac{\pi}{6}\right)$: $dom(f)=(-\infty,+\infty)$, amplitud $A=4$, $rec(f)=[-4,4]$, frecuencia $B=\frac{1}{3}$, periodo $T=\frac{2\pi}{\left|\frac{1}{3}\right|}=6\pi$ y fase $\frac{C}{B}=\frac{\pi}{2}$.

d. Para $f(t)=\frac{3}{4}\cos\left(\frac{1}{2}t-\frac{\pi}{8}\right)$: $dom(f)=(-\infty,+\infty)$, amplitud $A=\frac{3}{4}$, $rec(f)=\left[-\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right]$, frecuencia $B=\frac{1}{2}$ y fase $\frac{C}{B}=\frac{\pi}{4}$.

e. Si $f(t)=-\frac{2}{3}\cos\left(\frac{1}{3}t-\frac{\pi}{9}\right)$, entonces $dom(f)=(-\infty,+\infty)$, amplitud $A=\frac{2}{3}$, $rec(f)=\left[-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right]$, periodo $T=\frac{2\pi}{\left|\frac{1}{3}\right|}=6\pi$, frecuencia $B=\frac{1}{3}$ y fase $\frac{C}{B}=\frac{\pi}{3}$.

EJEMPLO 3 TRAZO DE GRÁFICAS DE FUNCIIONES SENOIDALES (O COSENOIDALES)

Traza la grafica de manera que muestre un periodo.

a. Si $f(t)=2\,sen\left(2t-\frac{\pi}{2}\right)$, $A=2$, $B=2$, $T=\frac{2\pi}{|2|}=\pi$ y $\frac{C}{B}=\frac{\pi}{4}$.

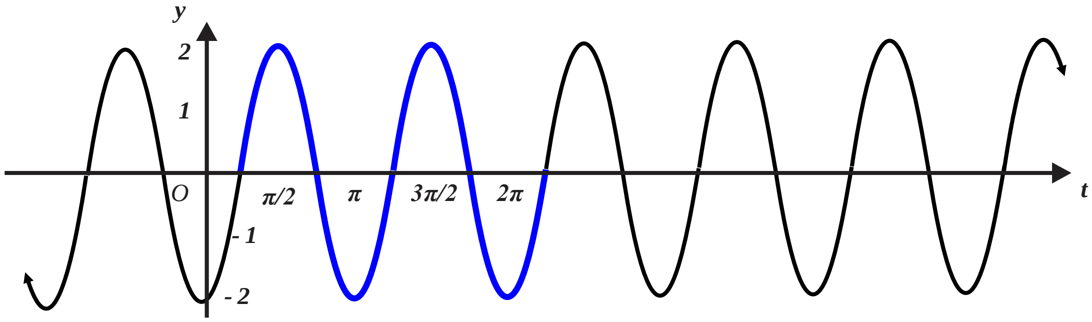


FIGURA 17

b. En $f(t)=\frac{3}{2}sen\left(3t+\pi\right)$, $A=\frac{3}{2}$, $B=3$, $T=\frac{2\pi}{|3|}=\frac{2}{3}\pi$ y fase $\frac{C}{B}=-\frac{\pi}{3}$.

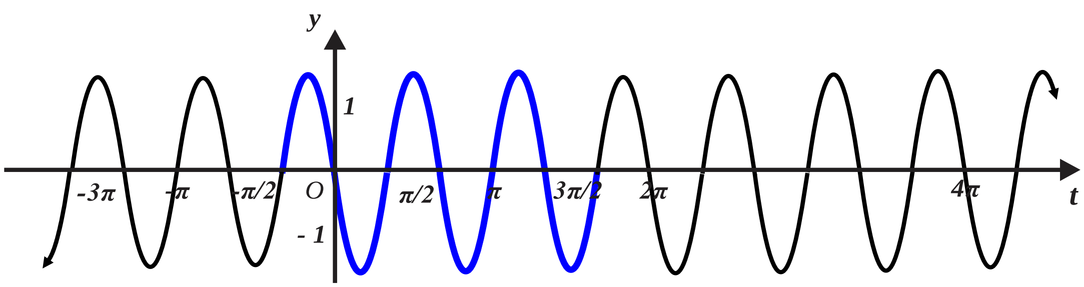


FIGURA 18

c. Si $f(t)=\frac{3}{4}cos\left(\frac{1}{2}t-\frac{\pi}{3}\right)$, entonces $A=\frac{3}{4}$, $B=\frac{1}{2}$, $T=\frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|}=4\pi$ y $\frac{C}{B}=\frac{2\pi}{3}$.

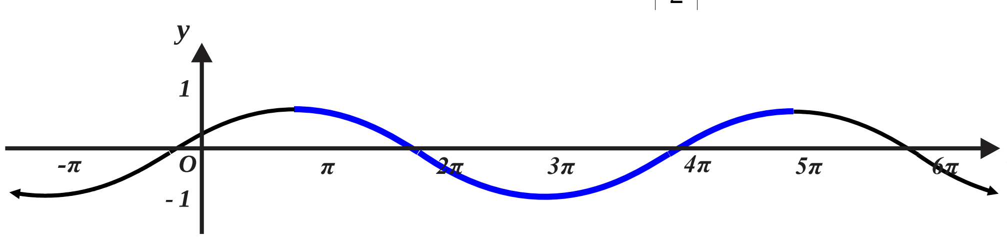


FIGURA 19

d. En $f(t)=4\,cos\left(\frac{2}{3}t-\frac{\pi}{6}\right)$: $A=4$, $B=\frac{2}{3}$, $T=\frac{2\pi}{\left|\frac{2}{3}\right|}=3\pi$ y $\frac{C}{B}=\frac{\pi}{4}$.

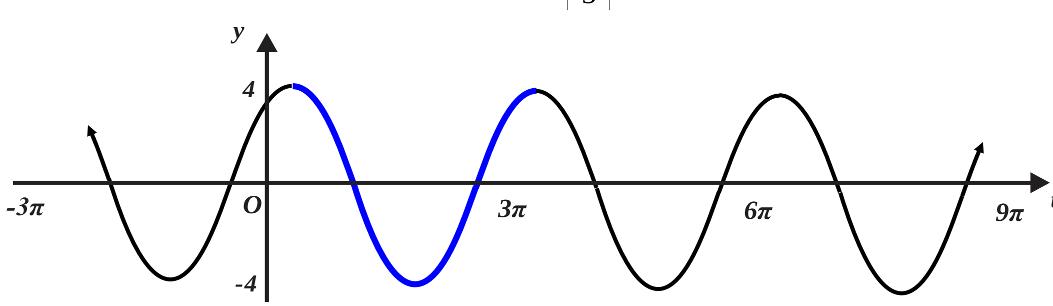


FIGURA 20

e. En $f(t) = -3\cos\left(4t - \frac{\pi}{2}\right)$: $A = 3$, $B = 4$, $T = \frac{2\pi}{|4|} = \frac{1}{2}\pi$ y $\frac{C}{B} = \frac{\pi}{8}$. Rotación de $\frac{\pi}{2}$ radianes.

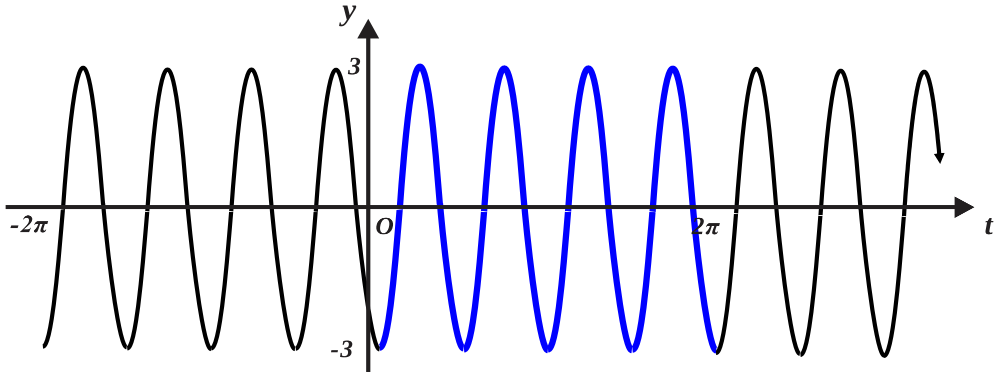


FIGURA 21

EJEMPLO 4 TRAZO DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN SENOIDALES (O COSENOIDAL)

a. Si $f(t) = \cos\left(2t - \frac{\pi}{2}\right) + 2$, entonces amplitud $A = 1$, frecuencia $B = 2$, fase $\frac{C}{B} = \frac{\pi}{4}$, desplazamiento vertical

$$D = 2 \text{ y } rec(f) = [1, 3].$$

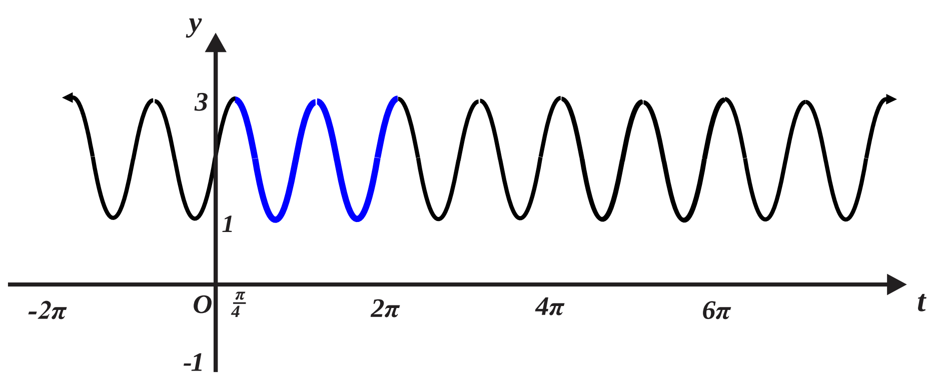


FIGURA 22

b. Si $f(t) = -2\,sen\left(3t - \frac{\pi}{2}\right) - 1$, entonces,

$A = 2$ y rotación de $\frac{\pi}{2}$ radianes,

$$B = 3,\ T = \frac{2\pi}{|3|} = \frac{2}{3}\pi \text{ y } \frac{C}{B} = \frac{\pi}{6},$$

desplazamiento vertical

$$D = -1 \text{ y } rec(f) = [-3, 1].$$

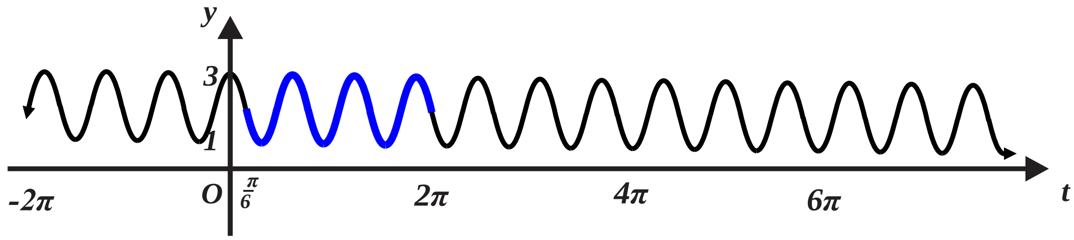


FIGURA 23

EJEMPLO 5 RECONOCIMIENTO DE GRÁFICAS

Determina la regla de correspondencia.

a.

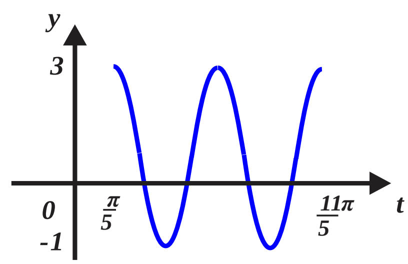


FIGURA 24

En la figura de la izquierda observamos:

$A=\frac{3-(-3)}{2}=3,\ B=2,\ T=\frac{2\pi}{2}=\pi$

$\frac{C}{B}=\frac{\pi}{4}$, entonces $\frac{C}{2}=\frac{\pi}{4}$ y $C=\frac{\pi}{2}$.

Por tanto, $f(t)=3cos\left(2t-\frac{\pi}{2}\right)$.

b.

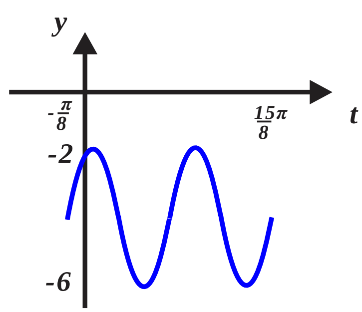


FIGURA 25

De la figura de la izquierda:

$A=\frac{-2-(-6)}{2}=2,\ B=2\ T=\frac{2\pi}{2}=\pi$,

$\frac{C}{B}=-\frac{\pi}{8}$, entonces $\frac{C}{2}=-\frac{\pi}{8}$ y $C=-\frac{\pi}{4}$.

Por tanto, $f(t)=2cos\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)-3$.

c.

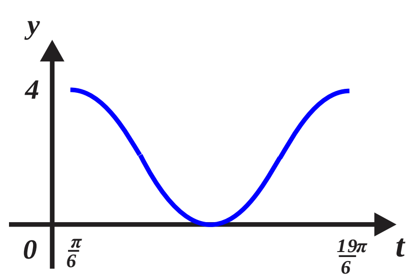


FIGURA 26

De la figura de la izquierda:

$A=\frac{4-(0)}{2}=2\ ,\ B=\frac{2}{3}\ ,\ T=\frac{2\pi}{\frac{2}{3}}=3\pi\ ,\ \frac{C}{\frac{2}{3}}=\frac{\pi}{6}$,

entonces $C=\frac{\pi}{9}$, así $f(t)=2cos\left(\frac{2}{3}t-\frac{\pi}{9}\right)+2$.

EJEMPLO 6 CONSTRUCCIÓN DE FUNCIONES

Supón comportamiento senoidal (cosenoidal) y determina: dominio, amplitud, recorrido, frecuencia, fase y la regla de correspondencia adecuada.

a. Seno, amplitud $A=3$ y rotación de $\frac{\pi}{2}$ radianes. Frecuencia $B=3$ .Fase $\frac{C}{B}=\frac{\pi}{6}$ y desplazamiento vertical $D=4$.

i. En $f(t)=A\,sen\,(Bt-C)+D$, sustituimos $A=-3$, obtenemos

$$f(t)=-3\,sen\,(Bt-C)+D.$$

ii. En $f(t)=-3\,sen\,(Bt-C)+D$, sustituimos $B=3$, obtenemos

$$f(t)=-3\,sen\,(3t-C)+D.$$

iii. De $\frac{C}{B}=\frac{\pi}{6}$ y $B=3$ obtenemos $\frac{C}{3}=\frac{\pi}{6}$ o $C=\frac{\pi}{2}$. En $f(t)=-3\,sen\,(3t-C)+D$, sustituimos $C=\frac{\pi}{2}$, obtenemos

$$f(t)=-3\,sen\left(3t-\frac{\pi}{2}\right)+D.$$

iv. En $f(t)=-3\,sen\,(3t-C)+D$, sustituimos $D=4$, obtenemos $f(t)=-3\,sen\left(3t-\frac{\pi}{2}\right)+4$.

b. Coseno, amplitud $A=2$. Frecuencia $B=\frac{2}{3}$.Fase $\frac{C}{B}=\frac{3\pi}{8}$ y desplazamiento vertical $D=-2$.

i. En $f(t)=A\cos\,(Bt-C)+D$, sustituimos $A=3$, obtenemos $f(t)=2\cos\,(Bt-C)+D$.

ii. En $f(t)=2\cos\,(Bt-C)+D$, sustituimos $B=\frac{2}{3}$, obtenemos

$$f(t)=2\cos\left(\frac{2}{3}t-C\right)+D.$$

iii. De $\frac{C}{B}=-\frac{3\pi}{8}$ y $B=\frac{2}{3}$ obtenemos $\frac{C}{\frac{2}{3}}=-\frac{3\pi}{8}$ o $C=-\frac{\pi}{4}$,

sustituimos en

$$f(t)=2\cos\left(\frac{2}{3}t-C\right)+D \text{ y}$$

obtenemos

$$f(t)=2\cos\left(\frac{2}{3}t+\frac{\pi}{4}\right)+D.$$

iv. En $f(t)=2\cos\left(\frac{2}{3}t+\frac{\pi}{4}\right)+D$ sustituimos $D=-2$,

obtenemos

$$f(t) = 2\cos\left(\frac{2}{3}t + \frac{\pi}{4}\right) - 2.$$

APLICACIONES

1. Una partícula vibra verticalmente de acuerdo con la ecuación $x(t) = 0.05\,sen(4t)$, con una velocidad $v(t) = 0.20\cos(4t)$ y aceleración descrita por la función $a(t) = -0.8\,sen(4t)$. Calcula su desplazamiento, su velocidad y su aceleración cuando $t = 1.75\pi$ segundos.

$$x(1.75\pi) = 0.05\,sen(4(1.75\pi)) = 0.05\,sen(7\pi) = 0.$$

$$v(t) = 0.20\cos(4 \cdot 1.75 \cdot \pi) = 0.20\cos(7 \cdot \pi) = -0.20.$$

$$a(t) = -0.8\,sen(4 \cdot 1.75 \cdot \pi) = -0.8\,sen(7 \cdot \pi) = 0.$$

2. Una rueda con radio de longitud 5 centímetros y completa un giro cada 20 segundos, si las funciones que describen la posición del extremo exterior del radio son: $x(t) = 5\cos\left(\frac{\pi t}{10}\right)$ y $y(t) = 5\,sen\left(\frac{\pi t}{10}\right)$.

Determina las posiciones de extremo exterior del radio a los 5, 10, 15 segundos.

Solución

A los 5, segundos:

$$x(5) = 5\cos\left(\frac{5\pi}{10}\right) = 5\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ y } y(5) = 5\,sen\left(\frac{5\pi}{10}\right) = 5\,sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5.$$

A los 10 segundos:

$$x(10) = 5\cos\left(\frac{10\pi}{10}\right) = 5\cos(\pi) = -5 \text{ y } y(10) = 5\,sen\left(\frac{10\pi}{10}\right) = 5\,sen(\pi) = 0.$$

A los 15 segundos:

$$x(15) = 5\cos\left(\frac{15\pi}{10}\right) = 5\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 \text{ y } y(15) = 5\,sen\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 5\,sen(\pi) = -5.$$

3. Un corcho flota en la superficie de una alberca de acuerdo con la función $h(t) = 3\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$ en donde $h(t)$ representa la altura del corcho respecto a la superficie del agua de la alberca a los t segundos.

a. Determina el periodo de vibración del corcho.

b. Determina la amplitud de vibración del corcho.

Solución

a. En $h(t)=3cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$, $B=\frac{\pi}{4}$, por tanto $T=\frac{2\pi}{B}=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}}=8$.

b. En $h(t)=3cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$, $A=3$.

---

4. Una partícula se mueve de en movimiento armónico simple de acuerdo con la siguiente figura:

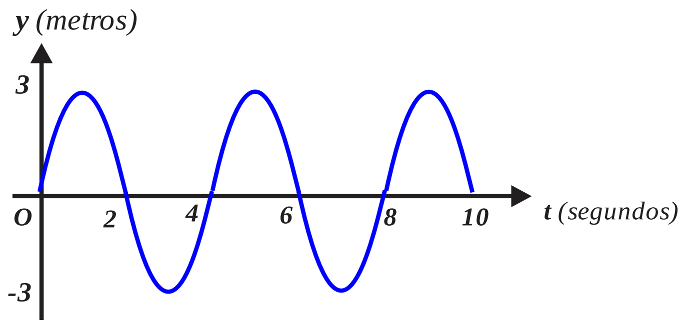


FIGURA 27

Determina si son verdaderas las afirmaciones.

a. El periodo (pulsación) del movimiento es 4 segundos.

b. El movimiento tiene una amplitud de 6 metros.

c. La frecuencia del movimiento es $\frac{1}{4}$.

d. La ecuación de movimiento es $f(t)=3sen\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ metros.

Solución

a. Verdadero, en la figura muestra dos ciclos y medio en $t=10$ segundos, por tanto, $T=4$.

b. Falso, $A=3$.

c. Falso, si $T=4$, entonces $B=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$.

d. Verdadero. $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$, $f(t)=3sen\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ metros.

---

5. Un oscilador armónico describe la posición de un objeto de acuerdo con la función

$$f(t)=0.3sen\left(2\pi t+\frac{\pi}{2}\right) \text{ metros.}$$

Escribir la posición del objeto en términos de la función coseno (positivo).

Solución

Para rescribir la función seno positiva como una función coseno positiva debemos desplazarla $\frac{\pi}{2}$ radianes a la izquierda (la función coseno se encuentra "adelantada" $\frac{\pi}{2}$ radianes respecto a la función seno), por tanto,

$$f(t) = 0.3\cos(2\pi t).$$

---

6. Un móvil describe un movimiento armónico simple de 5 metros de amplitud y 1.25 segundos de periodo. Si inicialmente la amplitud es máxima y positiva construir la función senoidal que describe su movimiento.

Solución

La función es de la forma $f(t) = A\,sen(Bt + \varphi)$

o bien

$$f(t) = A\,sen\left(\frac{2\pi}{T}t + C\right).$$

Pero $A = 5$ y $B = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1.25} = 1.6\pi$, por tanto, $f(t) = 5sen(1.6\pi t + C)$ metros.

Por la condición: "inicialmente la amplitud es máxima y positiva" tenemos

$$5 = 5sen(1.6\pi(0) + C) \text{ o bien } sen(C) = 1\text{, por tanto, } C = \frac{\pi}{2}.$$

Por último

$$f(t) = 5sen\left(1.6\pi t + \frac{\pi}{2}\right).$$

SECCIÓN 4.2
EJERCICIOS 1

1. Determina: dominio, amplitud, recorrido, frecuencia, fase desplazamiento vertical.

a. $f(t) = -2\,sen\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$.

b. $f(t) = \frac{2}{3}\,sen\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) - 3$.

c. $f(t) = 4\,sen\left(\frac{1}{3}t + \frac{\pi}{9}\right) + 1$.

d. $f(t) = 5\,sen\left(\frac{1}{5}t - \frac{\pi}{10}\right) + 4$.

e. $f\left(t\right)=\frac{3}{2}cos\left(2t-\frac{\pi}{3}\right)-2$.

f. $f\left(t\right)=-\frac{7}{4}cos\left(3t-\frac{\pi}{3}\right)+1$.

2. Traza la gráfica.

a. $f\left(t\right)=4\,sen\left(2t-\frac{\pi}{2}\right)$.

b. $f\left(t\right)=\frac{1}{2}sen\left(3t+\pi\right)-2$.

c. $f\left(t\right)=3\,cos\left(\frac{1}{2}t-\frac{\pi}{8}\right)+1$.

d. $f\left(t\right)=2\,sen\left(\frac{3}{2}t-\frac{\pi}{2}\right)+2$.

e. $f\left(t\right)=2cos\left(\frac{3}{2}t+\frac{\pi}{2}\right)+2$.

f. $f\left(t\right)=-2\,sen\left(3t-\frac{\pi}{2}\right)-1$.

3. Determina la regla de correspondencia de la función con las características señaladas.

a. Senoidal, $A=-\frac{1}{3}$ y rotación de $\frac{\pi}{2}$ radianes. $B=3$. $\frac{C}{B}=\frac{\pi}{12}$ y $D=\frac{1}{3}$.

b. Cosenoidal, $A=4$. $B=\frac{2}{3}$, $\frac{C}{B}=\frac{\pi}{6}$ y $D=5$.

c. Senoidal, $A=7$, $B=1$, $\frac{C}{B}=\frac{\pi}{4}$ y $D=-3$.

d. Cosenoidal, $A=1$, $B=3$, $\frac{C}{B}=-\frac{\pi}{6}$ y $D=2$.

e. Senoidal, $A=4$ y rotación de $\frac{\pi}{2}$ radianes, $B=4$, $\frac{C}{B}=\frac{\pi}{8}$ y $D=5$.

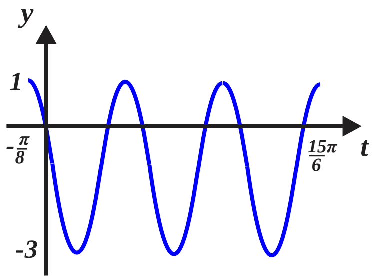
f. Cosenoidal, $A=2$, $B=\frac{2}{3}$, $\frac{C}{B}=\frac{3\pi}{8}$ y $D=-2$.

g. Cosenoidal, $rec(f)=[-1,\ 3]$, $B=6$ y fase $-\frac{\pi}{12}$ (dos respuestas).

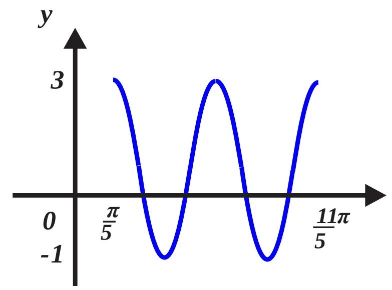
h. Senoidal, $rec(f)=[-4,\ 4]$, $B=\frac{1}{3}$ y fase $\frac{\pi}{3}$ (dos respuestas).

4. Determina la regla de correspondencia de la función acorde con la sección de curva mostrada.

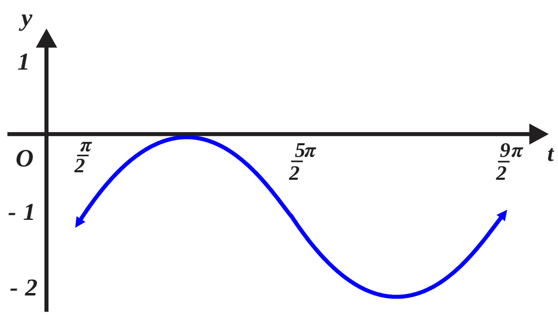
a.



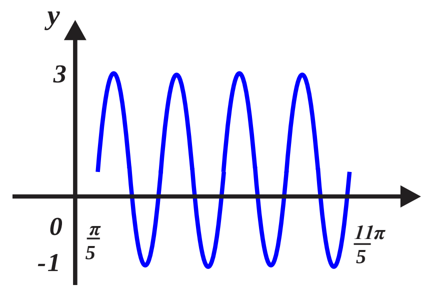
b.



c.



d.



5. La temperatura en una bodega con aire acondicionado oscila de acuerdo con la función $T(t) = 4\cos\left(\frac{\pi}{10}t\right) + 12$ grados centígrados, t representa el tiempo en minutos.

Calcula:

a. La temperatura máxima y la temperatura mínima.

b. La temperatura de la bodega a los 2.5 minutos de puesto en marcha el aire acondicionado.

c. El tiempo que transcurre para que se repita la temperatura (periodo o pulsación).

6. Un engrane circular con radio de longitud 50 centímetros completa una revolución cada 30 segundos, las funciones que describen la posición del extremo exterior del radio son: $x(t) = 50\cos\left(\frac{\pi t}{15}\right)$ y $y(t) = 50\,sen\left(\frac{\pi t}{15}\right)$. Determina las posiciones de extremo exterior del radio a los 5, 10, 15 segundos.

7. Cierto felino, al respirar, inhala y exhala en ciclos de 6 segundos. El volumen máximo que pueden contener sus pulmones es 8 litros y el volumen mínimo 0 litros.

a. Suponiendo un modelo senoidal, construye la función que describe el comportamiento del volumen del felino en términos del tiempo.

b. Traza el gráfico correspondiente.

8. Un oscilador armónico describe la posición de un objeto de acuerdo con la función

$$s(t)=\frac{1}{5}cos\left(2\pi t-\frac{\pi}{2}\right) \text{ metros.}$$

Escribir la posición del objeto en términos de la función coseno (positivo).

9. Una masa sujeta a un resorte describe un movimiento armónico simple de 2 metros de amplitud y 5 segundos de periodo. Inicialmente la amplitud es máxima y positiva.

a. Construir la función senoidal que describe su movimiento.

b. Construir la función cosenoidal que describe su movimiento.

4.3 SOLUCIONES Y EVALUACIÓN

SOLUCIÓN A EJERCICIOS PROPUESTOS

EXAMEN DE LA UNIDAD

SOLUCIÓN AL EXAMEN

SECCIÓN 4.1 SOLUCIONES A EJERCICIOS 1

1. a.

GRADOS	0	30	45	60	90	120	135	150	180
RADIANES	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

b.

GRADOS	180	210	225	240	270	300	315	330	360
RADIANES	π	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

2. a. Eje de las abscisas $p_x\left(\frac{1}{2},0\right)$, eje de las ordenadas $p_y\left(0,-\frac{1}{4}\right)$.

b. Eje de las abscisas $p_x\left(-0.5,0\right)$, eje de las ordenadas $p_y\left(0,0\right)$.

c. Eje de las abscisas $p_x\left(\frac{1}{2},0\right)$, eje de las ordenadas $p_y\left(0,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

3. $f(t)=sent=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. $f(t)=cost=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **4.** $f(t)=sent=\frac{\sqrt{3}}{2}$. $f(t)=cos\,t=\frac{1}{2}$.

5. $f(t)=sen\,t=-\frac{1}{4}$. $f(t)=cos\,t=\frac{1}{2}$.

SECCIÓN 4.2 SOLUCIONES A EJERCICIOS 1

1. a. $dom(f)=(-\infty,+\infty)$, $A=2$, $rec(f)=[-2,2]$, $B=1$, $\frac{C}{B}=\frac{\pi}{2}$ y $D=0$.

b. $dom(f)=(-\infty,+\infty)$, $A=\frac{2}{3}$, $rec(f)=\left[-\frac{11}{3},-\frac{7}{3}\right]$, $B=2$, $\frac{C}{B}=-\frac{\pi}{8}$ y $D=-3$.

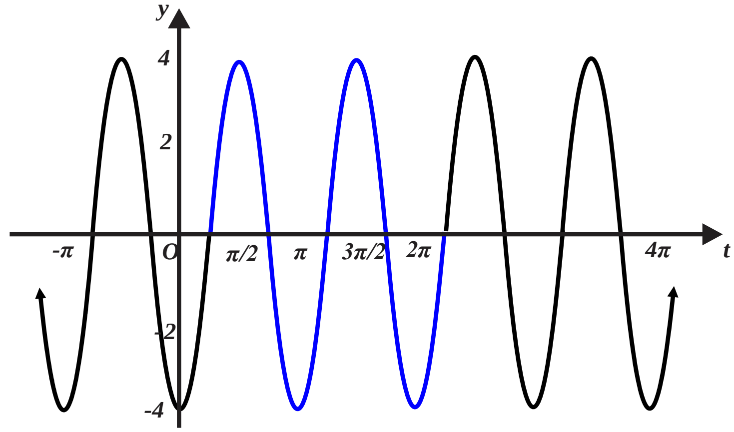
c. $dom(f)=(-\infty,+\infty)$, $A=4$, $rec(f)=[-3,5]$, $B=\frac{1}{3}$, $\frac{C}{B}=-\frac{\pi}{3}$ y $D=1$.

d. $dom(f)=(-\infty,+\infty)$, $A=5$, $rec(f)=[-1,9]$, $B=\frac{1}{5}$, $\frac{C}{B}=\frac{\pi}{2}$ y $D=4$.

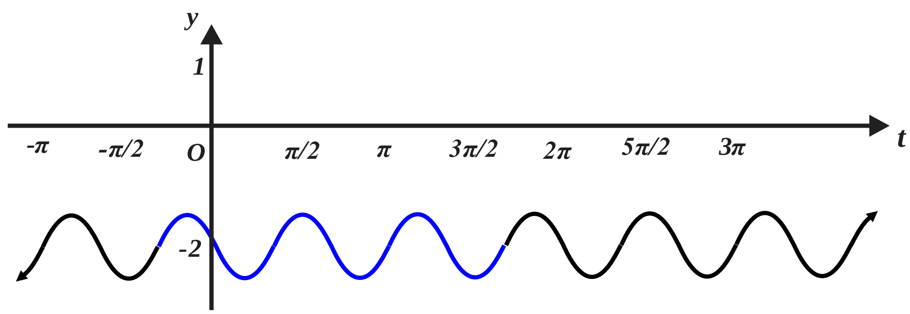
e. $dom(f)=(-\infty,+\infty)$, $A=\frac{3}{2}$, $rec(f)=\left[-\frac{7}{2},-\frac{1}{2}\right]$, $B=2$, $\frac{C}{B}=\frac{\pi}{6}$ y $D=-2$.

f. $dom(f)=(-\infty,+\infty)$, $A=\frac{7}{4}$, $rec(f)=\left[-\frac{3}{4},\frac{11}{4}\right]$, $B=3$, $\frac{C}{B}=\frac{\pi}{9}$ y $D=1$.

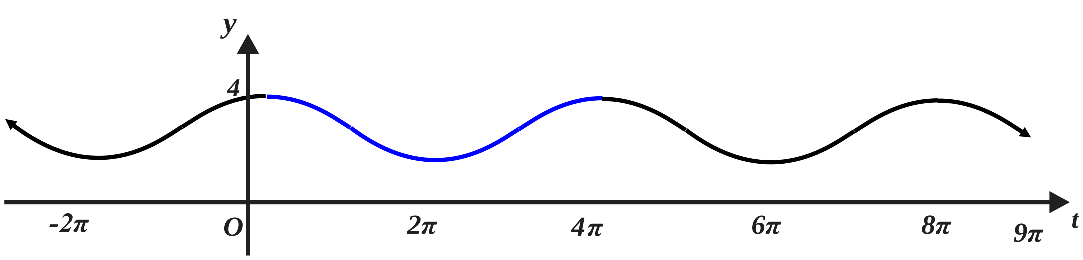
2. a.


y
4
2
-π
O
π/2
π
3π/2
2π
4π
t
-2
-4

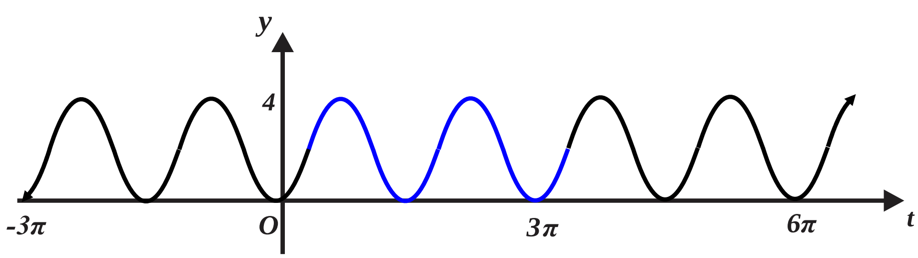
b.


y
1
-π
-π/2
O
π/2
π
3π/2
2π
5π/2
3π
t
-2

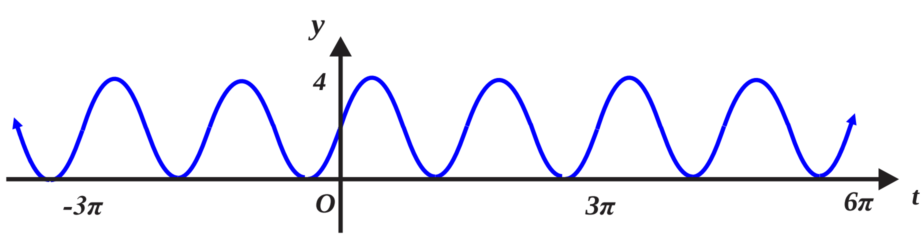
c.


y
4
-2π
O
2π
4π
6π
8π
9π
t

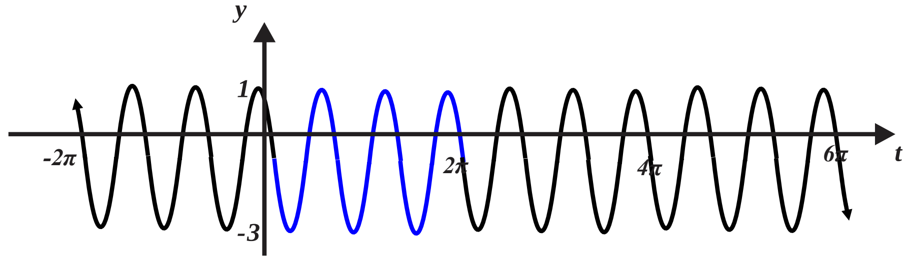
d.


y
4
-3π
O
3π
6π
t

e.


y
4
-3π
O
3π
6π
t

f.



3. a. $f(t)=-\frac{1}{3}sen\left(3t-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{3}$. **b.** $f(t)=4cos\left(\frac{2}{3}t-\frac{\pi}{9}\right)+5$. **c.** $f(t)=7sen\left(t-\frac{\pi}{4}\right)-3$.

d. $f(t)=cos\left(3t+\frac{\pi}{2}\right)+2$. **e.** $f(t)=-4sen\left(4t-\frac{\pi}{2}\right)+5$. **f.** $f(t)=2cos\left(\frac{1}{4}t+\frac{\pi}{8}\right)-2$.

g. $f(t)=2cos\left(6t+\frac{\pi}{2}\right)-1$ y $f(t)=-2cos\left(6t+\frac{\pi}{2}\right)+1$.

h. $f(t)=4sen\left(\frac{1}{3}t-\frac{\pi}{9}\right)$ y $f(t)=-4sen\left(\frac{1}{3}t-\frac{\pi}{9}\right)$.

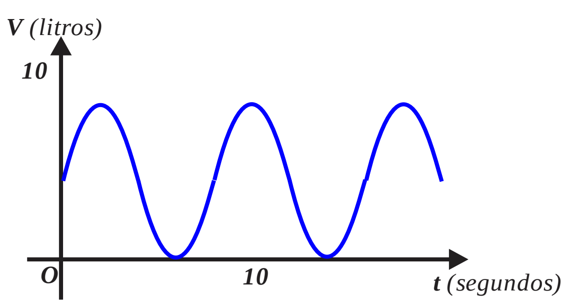
4. a. $f(t)=2cos\left(3t+\frac{3\pi}{8}\right)-1$. **b.** $f(t)=2cos\left(2t-\frac{2\pi}{5}\right)-1$.

c. $f(t)=sen\left(\frac{1}{2}t-\frac{\pi}{4}\right)-1$. **d.** $f(t)=2sen\left(4t-\frac{4\pi}{5}\right)+1$

5. a. $T_{MÁX}=16$ y $T_{mín}=8$, grados centígrados. **b.** $T(t)=4cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+12\approx 12.7071$ grados centígrados. **c.** $T=8$ minutos.

6. A los 5, segundos: $x(5)=25$ y $y(5)=25\sqrt{3}$. A los 10 segundos: $x(10)=-25$ y $y(10)=25\sqrt{3}$. A los 15 segundos: $x(t)=-50$ y $y(t)=0$.

7. a. $V(t)=4sen\left(\frac{\pi t}{4}\right)+4$. **b.**



8. $s(t)=\frac{1}{5}sen(2\pi t)$. **9. a.** $f(t)=2sen\left(0..6\pi t+\frac{\pi}{2}\right)$. **b.** $f(t)=2cos(0..6\pi t)$.

UNIDAD 4 EXAMEN

CONCEPTOS

COMPLETA LA FRASE

1. En una función periódica ______________________________ recibe el nombre de periodo y tiene signo positivo.

2. Una función periódica tiene un patrón repetitivo, por tanto, su gráfica puede construirse utilizando el ______________________________.

3. Un ángulo mide un radián, si sus lados determinan ______________________________.

4. La relación $\frac{180}{\pi}t^r$ se utiliza para obtener el número de __________________________ que corresponden a t^r radianes.

5. La proyección del punto ________________________ de la circunferencia unitaria en el eje de las ordenadas determina una de las imágenes de la función ___________________.

6. La función $f(t) = sen\ t$ tiene como conjunto imagen _________________________.

7. La función $f(t) = cos\ t$ tiene como periodo ______________________________.

8. Si en $f(t)=sen\,Bt$ se incrementa B (entro), entonces ______________________________ sobre el intervalo $[\,0\ ,\ 2\pi\,]$.

9. Las funciones $f(t) = A\,sen(Bt - C)$ y $g(t) = A\,cos(Bt - C)$ reciben el nombre de

______________________________.

10. El valor mínimo de la función $f(t) = A\,cos\ t$ es ______________________________.

CIERTO O FALSO (Justifique su respuesta)

1. Una función periódica puede tener periodo negativo. **(   )**

2. La amplitud de una función periódica es un número positivo. **(   )**

3. Las razones trigonométricas son también funciones trigonométricas. **(   )**

4. Toda función senoidal es periódica. **(   )**

5. Todas las funciones cosenoidales tiene periodo $t = 2\pi$. **(   )**

6. La curva asociada a $f(t)=Asen\ t$ coincide con la curva asociada a $f(t)=Asen\ (t+4\pi)$.

7. La función $f(t)=-A\ sen(Bt-C)$ tiene amplitud $-A$. **(   )**

8. La media aritmética entre los valores máximo y mínimo de una función senoidal representa a su amplitud. **(   )**

ALGORITMOS Y OBSERVACIONES

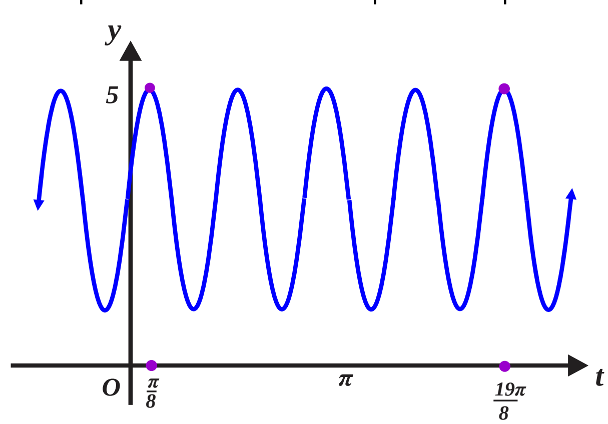
1. Convierte $2°$ a radianes.

2. Determina: dominio, amplitud, recorrido, periodo, frecuencia, fase y desplazamiento vertical de la función $f(t)=-\frac{1}{8}sen\left(3\pi t-\frac{\pi}{2}\right)$.

3. Traza la gráfica de la función $f(t)=2cos\left(4t-\frac{\pi}{2}\right)+3$.

4. Determina la regla de correspondencia de la función coseno con, $A=\frac{1}{3}$ y rotación de $\frac{\pi}{2}$ radianes respecto al eje de las abscisas, $B=2$. $\frac{C}{B}=\frac{\pi}{12}$ y $D=\frac{1}{3}$.

5. Determina la regla de correspondencia de la función que tiene representación gráfica:



APLICACIONES

1. Un oscilador armónico describe la posición de un objeto de acuerdo a la función

$$s(t)=\frac{1}{2}sen\left(2\pi t-\frac{\pi}{2}\right) \text{ metros.}$$

a. Escribe la posición del oscilador en términos de la función coseno (positivo).

b. Calcula la posición del oscilador cuando $t=2$.

UNIDAD 4 SOLUCIÓN AL EXAMEN

CONCEPTOS

COMPLETA LA FRASE

1. EL NÚMERO T POSITIVO. **2.** PATRÓN REPETITIVO. **3.** UN ARCO DE LONGITUD IGUAL A UN RADIO. **4.** GRADOS $t^r = \frac{\pi}{180}\theta°$. **5.** $p(x, y)$. **6.** EL INTERVALO $[-1, 1]$. **7.** $T = 2\pi$. **8.** AUMENTA EL NÚMERO DE CICLOS. **9.** SENOIDALES O COSENOIDALES. **10.** $|A|$.

CIERTO O FALSO (Justifique su respuesta)

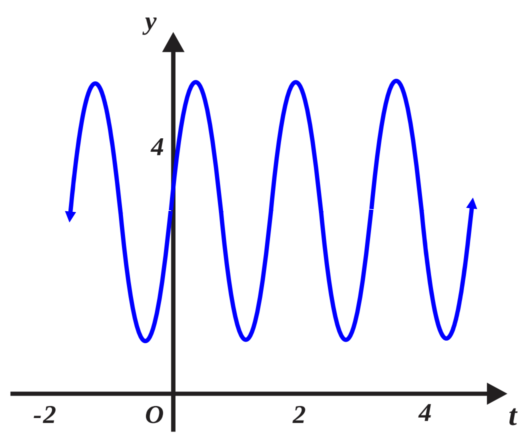
1. F. **2.** V. **3.** F. **4.** V. **5.** F. **6.** F. **7.** F. **8.** V.

ALGORITMOS Y OBSERVACIONES

1. $2° \approx 0.03490$ radianes.

2. $dom(f) = (-\infty, +\infty)$, $A = \frac{1}{8}$, $rec(f) = \left[-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right]$, $T = \frac{2}{3}$, $B = 3\pi$, $\frac{C}{B} = \frac{1}{6}$ y $D = 0$.

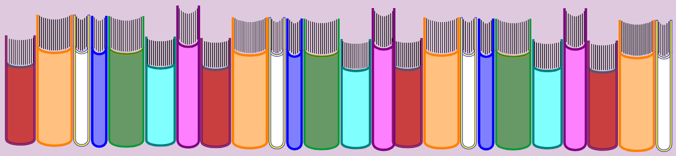
3.



4. $f(t) = -\frac{1}{3}cos\left(2t - \frac{\pi}{12}\right) + \frac{1}{3}$. **5.** $f(t) = 2cos\left(4t - \frac{\pi}{2}\right) + 3$.

APLICACIONES

1. a. $s(t) = \frac{1}{2}cos(2\pi t)$. **b.** $s(2) = 0.5$.



BIBLIOGRAFÍA

Haeussler, F. (2015). *Matemáticas para administración y economía Treceava Edición*. México: Pearson.

Haeussler, F. (2011). *Precálculo Treceava Edición*. México: Pearson.

Larson, R. (2012). *Precálculo Octava Edición*. México: Cengage Learning.

Miller, Ch. (2013). *Matemática: razonamiento y aplicaciones*. México: Pearson - Addison Wesley.

Purcell, E. (2007). *Calculo diferencial e integral Novena edición*. México: Pearson - Addison Wesley.

Stewart, J. (2012). *Precálculo Matemáticas para el cálculo Sexta Edición*. México: Cengage Learning.

Sullivan, Michael. *Precálculo*, Prentice-Hall Hispanoamericana, México, 1997.

Swokowski, E., & Cole, J. (2018). *Precálculo: álgebra y trigonometría con geometría analítica*. Ciudad de México: Cengage Learning.

Zill, D., & Dewar, J. (2012). *Álgebra, trigonometría y geometría analítica (3 ra ed.)*. México, D. F.: Mc Graw Hill.