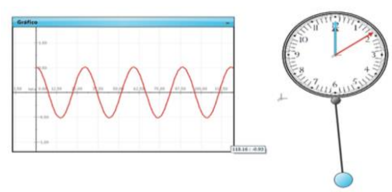
**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**
**ESCUELA NACIONAL COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES**
**PLANTEL ORIENTE**

# CUADERNO DE TRABAJO PARA LA ASIGNATURA DE MATEMÁTICAS IV




## Elaborado por los profesores:

**COORDINADORES:**

**Roberto Pedro Robledo Arana.** **Claudia Verónica Morales Montaño.**

**INTEGRANTES:**

**Alberto Benítez Pérez.**
**Claudia Verónica Morales Montaño.**
**Edgar Eduardo Montoya Velázquez.**
**Francisco Hernández Reyes.**
**Gabriel de Anda López.**
**Gerardo Galicia Toledo.**
**Jesús Lechuga Ayala.**
**Juan Gabriel Montes Medrano.**
**Rafael García Álvarez.**
**Roberto Pedro Robledo Arana.**


**AGOSTO DE 2021**

# Índice

# I. INTRODUCCIÓN.

El presente “Cuaderno de Trabajo Para la Asignatura de Matemáticas IV” de la Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades, se elaboró considerando los Programas de Estudio del Área de Matemáticas I-IV, 2016. De acuerdo con los contenidos y enfoque de la asignatura, con el propósito de apoyar al profesor en el desarrollo de la asignatura. Las unidades que se trabajan en este curso apuntan a la consolidación e integración de conceptos y procedimientos de los ejes temáticos abordados en los cursos anteriores, tanto en el manejo de expresiones algebraicas y del plano cartesiano, como en el estudio de relaciones numéricas entre objetos matemáticos. El Cuaderno de Trabajo busca profundizar y ampliar el concepto de función; identificar sus elementos; incorporar la notación funcional; analizar cualitativamente las relaciones entre los parámetros de la representación algebraica, numérica, gráfica y la forma de variación de la función en cuestión; explorar simetrías y transformaciones en el plano e introducir la noción de función inversa, fomentando así, *la reversibilidad del pensar*, esto es, la inversión de una secuencia de operaciones o de un proceso del pensamiento.

Este semestre constituye un momento de síntesis y culminación, tanto en lo temático como en lo metodológico de las materias del tronco común del Colegio; a la vez prepara el inicio de otra etapa, en donde el concepto de función jugará un papel importante en el estudio del cálculo, la estadística y otras disciplinas.

De manera más amplia este “Cuaderno de Trabajo” está formado por estrategias didácticas, correspondientes al estudio de las funciones mismas que permiten, por un lado, avanzar en el concepto de función al introducir nuevos tipos de variación, y, por otro, las funciones se expresan y aprenden a través de los registros de

representación: algebraico, numérico (tabla) y gráfico. Manipular las representaciones de una función es la llave de entrada a su conocimiento.
Las experiencias de aprendizaje apoyadas con las *TIC* brindan al alumno, experiencias completamente diferentes a lo que han sido las "clases" de la enseñanza tradicional, son la realización de nuestra unidad y estrategias didácticas, es decir, son nuestros espacios de aprendizaje. En ellas ha lugar para la interacción entre estudiantes, el profesor y las tecnologías informáticas contemporáneas, por lo que son el lugar propicio para la construcción de conocimiento matemático conjugando el análisis, la síntesis, la modelación, la representación, etcétera, así como la evaluación del conocimiento construido por todos los participantes.

Los distintos aprendizajes están señalados en cada una de las unidades del programa de estudio, de manera que el profesor puede aplicarlas de acuerdo a las necesidades del grupo, ya que las estrategias y/o secuencias didácticas deben ser trabajadas en equipo por parte de los alumnos, esto permite que el profesor revise el trabajo colectivo y les vaya indicando los errores que se van cometiendo para su corrección por parte de los alumnos, y está apoyada por el software GeoGebra, que ofrece al estudiante ambientes de trabajo que estimulan la reflexión y lo convierten en un ser activo y responsable de su propio aprendizaje, además provee un espacio problemático común al maestro y al estudiante para construir significados, elimina la carga de los algoritmos rutinarios para concentrarse en la conceptualización y la resolución de problemas, da un soporte basado en la retroalimentación y reduce el miedo del estudiante a expresar algo erróneo y, por lo tanto, se aventura más a explorar sus ideas.

Como todo producto de trabajo colegiado, sabemos que este “Cuaderno de Trabajo” está sujeto a la discusión y replica de los docentes del Área de Matemáticas, pues no hay otra forma de medir su contribución. Los autores asumimos como benéficas la retroalimentación, críticas y comentarios con fundamentos académicos que puedan desprenderse de este recurso didáctico.

## II. PRESENTACIÓN.

La enseñanza de las matemáticas es una actividad sumamente compleja. A través de la historia el hombre ha experimentado diversos métodos y procedimientos con el propósito de lograr en forma efectiva tanto su enseñanza como su aprendizaje, sin obtener hasta el momento los resultados buscados. Por esta razón, introducir o investigar la historia de las matemáticas en la clase de *Matemáticas IV*, pareciera ser una opción más para que profesores y alumnos valoren y asimilen la *evolución e importancia* que las matemáticas han tenido a lo largo de la historia. Me parece pues que la historia de las matemáticas resulta un instrumento *utilísimo* en el ejercicio docente pues amplía la concepción que de estas usualmente tiene el alumno. Más aún, de acuerdo con la anterior puedo decir que el profesor puede integrar diferentes pasajes históricos de matemáticos no sólo en cuanto a los aportes logrados sino, también, mostrar el lado humano de ellos para hacer notar a los estudiantes que al igual que ellos los grandes matemáticos también encontraron dificultades para poder establecer algún aporte más a esta ciencia.

Este material[1] resulta un instrumento de aprendizaje invaluable, pues en él se organizan los tres tipos de contenidos por aprender, destacándose el desarrollo de habilidades matemáticas, destrezas procedimentales, así como la motivación del estudiante. Cabe señalar que las actividades de trabajo muestran un orden lógico en las acciones de una estrategia didáctica; más aún, promueven el desarrollo de conocimientos propios de la disciplina que se aplican (empleando los conocimientos adquiridos anteriormente) en diversos contextos, favorecen el logro del propósito planteado (para la estrategia y, en general, para la unidad didáctica) y, por último, su evaluación ofrece elementos para determinar el nivel de desarrollo de los estudiantes.

A lo largo del desarrollo de las diferentes actividades de trabajo de cada unidad didáctica, se fue realizando la adecuación y pertinencia de las construcciones conceptuales de los alumnos a través de diferentes “evaluadores[2]” con la finalidad

[1] Cuaderno de Trabajo para la asignatura de Matemáticas IV.
[2] Usando los materiales de apoyo y autoevaluación.

de confrontar a cada estudiante con sus nuevas adquisiciones y ello le permitirá ir diferenciando aquellas interpretaciones no matemáticas de las que sí lo son para que, en última instancia, reconcilie las interpretaciones matemáticas con las restantes de manera que las nuevos conocimientos queden integrados en su acervo lingüístico de manera permanente y estable. Estos “evaluadores” deben tener siempre presente el trabajo cotidiano que desarrollan los alumnos a través de las secuencias didácticas.

En particular, la evaluación que llevamos a cabo en esta propuesta la tratamos de sustentar más en el esfuerzo, trabajo, participación y actitud (disposición para aprender) de cada estudiante, que en las “respuestas rápidas y/o correctas” de “los estudiantes brillantes”. El aprendizaje es todo un proceso del que no se puede soslayar lo anterior, antes, al contrario, habría que estimular a los estudiantes en la cultura del esfuerzo.

## III. INDICACIONES PARA SU USO.

El “Cuaderno de trabajo para la asignatura de Matemáticas IV” responde a la estructura del Programa indicativo de la misma. Para cada una de las Unidades se presenta una Estrategia Didáctica para uno o más aprendizajes. Cada estrategia cuenta con diferentes actividades mismas que contienen códigos QR para llegar a un sitio concreto de una página web o URL. Estos códigos contienen un video de YouTube relativo a la actividad para que puedas verlo las veces que consideres necesario y puedas completar la parte de la actividad que se te pide. Los profesores pueden adecuar estas estrategias de acuerdo con su experiencia así como a las características de sus grupos, ya que la flexibilidad de los diferentes instrumentos que se proponen en el “Cuaderno de Trabajo” se caracterizan por su flexibilidad en su uso y aplicación para orientar y mejorar el aprendizaje del alumno. Los materiales diversos de apoyo serán un punto muy importante para consolidar los aprendizajes. La autoevaluación de cada unidad permite medir de alguna forma los aprendizajes de los alumnos con la finalidad de realizar las adecuaciones necesarias en cada unidad del curso en cuestión, mismas que se irán haciendo conforme al trabajo cotidiano.

## IV. USO DE ESTRATEGIAS Y/O SECUENCIAS DIDÁCTICAS.

En general, *las estrategias y/o secuencias didácticas* que se diseñarán para este "Cuaderno de Trabajo para la Asignatura de Matemáticas IV", tienen como fin en menor o mayor medida que los alumnos alcancen los *aprendizajes propuestos* para cada unidad didáctica, por las siguientes *consideraciones*:

- *Inciden* en la estructura cognitiva[3] del aprendiz ya que a partir de los conceptos base con los que cuenta el alumno, las ideas nuevas puedan ser relacionadas o ligadas. Por esto, Ausubel argumenta que *el factor individual más importante que influye en el aprendizaje es lo que el estudiante ya sabe.* De ahí que, cada secuencia didáctica debe tener en cuenta *los conocimientos previos, concepciones y motivaciones de los alumnos.*

- Se crean con estas un entorno adecuado para el aprendizaje y la enseñanza.

- Cada secuencia y/o estrategia deberá plantear situaciones en las que los alumnos identifiquen y reconozcan sus ideas, a partir de una reflexión individual y del contraste o diferenciación con las del profesor, de otros compañeros o de la información documental.

- Favorecen aquellos procesos que ayudan a los alumnos a ser responsables de su propio aprendizaje. (Esto tiene lugar cuando los estudiantes construyen sus propios conocimientos).

- Utilizan hechos, fenómenos y situaciones próximas al contexto de los estudiantes, ya que para aprender algo, los alumnos necesitan ver su utilidad.

- Para cada secuencia y/o estrategia didáctica se deberá disponer de un amplio abanico de actividades y recursos para ser utilizados según los diferentes estilos de aprendizaje de los estudiantes, así como la diversidad de situaciones en las que se desarrolla, evitando con ello la improvisación.

---

[3] Hablar de la estructura cognitiva es referirse a la posibilidad de recibir, asimilar, asociar, almacenar y abstraer información, además de darle significado. Pero estas habilidades pudieran no ser sólo producto de la biología humana, sino el resultado de la constante interacción de un individuo con su entorno próximo.

- Todas las *situaciones de aprendizaje*, es decir, los trabajos prácticos, la resolución de problemas, la utilización del conocimiento en la vida cotidiana, etcétera., deben ser contempladas en el diseño y realización de una secuencia didáctica como actividades coadyuvantes para que el aprendizaje sea significativo.
- Dan lugar a una enseñanza intencionada y dirigida de los conocimientos implicados, es decir, el sentido de los conocimientos por enseñar debe ser pertinente al estudiante y a los contenidos, tratando de que esto de lugar a que los descubra o aprenda de manera significativa.
- Favorecen el desarrollo personal, el debate, la cooperación, el rigor, la honestidad, la creatividad, la crítica razonada, los planteamientos no dogmáticos y la satisfacción por aprender.

El uso de estas estrategias y/o secuencias didácticas, deberán tener siempre presente el trabajo cotidiano que los estudiantes realizan en ambientes presenciales, no presenciales e híbridos.

MATEMÁTICAS IV

# Unidad 1. Funciones Polinomiales.

**CUADERNO DE TRABAJO.**

**Propósitos de la unidad.**

Al finalizar, el alumno:
Habrá avanzado en el estudio de las funciones al introducir la notación funcional y la noción de dominio y rango. Relacionando la expresión algebraica de una función polinomial con su gráfica y analizará su comportamiento. Con base en la resolución de problemas y en contexto, usará las gráficas, tablas, expresión matemática para explicar los procesos involucrados. **Tiempo: 25 horas.**

### 1. Presentación de la unidad 1.

En la unidad 1 trabajaremos con Funciones Polinomiales, en la vida cotidiana son muchas la relaciones que existen entre diversos conjuntos. Por ejemplo:

A cada automóvil le corresponde una matrícula.
A cada estudiante de la UNAM le corresponde un número de cuenta.
A cada persona le corresponde una clave CURP.

En la ciencia es muy importante establecer la relación que existe diversos fenómenos, ya que a través de esta relación se pueden hacer predicciones. Un ingeniero puede predecir la corriente que circula por un circuito eléctrico, un biólogo puede predecir el número de bacterias de una colonia. Las relaciones llamadas funciones son uno de los conceptos más importantes en las matemáticas, de aquí la importancia del estudio de las funciones.

Esta unidad se desarrolla a través de estrategias didácticas[1], Su diseño es una de las principales tareas del profesor contemporáneo, independientemente de la interpretación que del aprendizaje tenga. Con el propósito de posibilitar un mejor aprendizaje, o sea, un aprendizaje que fuese adquiriendo un significado propio en los procesos prácticos cercanos a los estudiantes, con vistas a alcanzar los objetivos actitudinales, conceptuales y procedimentales del área de matemáticas del CCH y, específicamente, aquellos que atañen a esta unidad temática.

Más aún, nuestra propuesta agrega la computadora como uno de sus recursos esenciales, dado que con los medios de representación que ofrece, el estudiante tiene la posibilidad de construir y reconstruir el conocimiento matemático "viendo" y "manipulando", literalmente, sus construcciones, las de sus compañeros, así como la de los matemáticos que lo han ido estableciendo en la historia de las matemáticas. El desarrollo de la unidad se lleva a cabo con *4 estrategias didácticas* e incluye: materiales de apoyo diversos, una autoevaluación y las fuentes consultadas en su elaboración.

### 2. Actividades de aprendizaje.

[1] Cf. Páginas 9 y 10.

Estas se llevarán a cabo tomando como base los aprendizajes de la unidad 1, a través de *estrategias didácticas*, utilizando diversas actividades y recursos mismas que incluyen los aprendizajes, códigos QR, actividades diversas y el uso de GeoGebra, con el fin de alcanzar los propósitos de esta unidad.

### 3. Puesta en escena de la unidad 1. Funciones polinomiales.

Las estrategias didácticas que se presenta a continuación han sido diseñadas para que los estudiantes logren un aprendizaje significativo de los contenidos actitudinales, conceptuales y procedimentales de la *Unidad Temática 1*, del curso de Matemáticas IV, con vistas a lograr los aprendizajes de esta. Esta unidad didáctica se ha estructurado conforme a las siguientes *estrategias didácticas.*

***Estrategia didáctica 1. Noción de función. (Inicio).***

***Aprendizajes:***

1. Explora diferentes relaciones, reconociendo las condiciones necesarias para determinar si una relación es función, la simboliza y distingue el dominio y el rango.

2. Comprende el significado de la notación funcional, la utiliza para representar y evaluar funciones polinomiales. Usa la notación de intervalos para representar dominio y rango de una función.

***Para el alumno:*** Actividad de exploración para anclar conocimientos previos.

QR-1. Definición de función.

***Actividad 1. (Extraclase):*** Visita los dos códigos QR, para conocer acerca de las relaciones y funciones. A partir de lo leído y de la información extraída en los links o códigos QR, realiza la actividad que se presenta a continuación.

QR-2. Qué es función.

***Actividad 2. Relaciones y Funciones.***

Junto con tus compañeros (trabajo grupal) revisa los siguientes puntos acerca de su dependencia y decide si se trata de una relación de acuerdo con la definición que está escrita debajo de los puntos señalados.

1. La distancia recorrida con un vehículo con su velocidad.

2. El peso que debe tener una persona respecto a su altura.

3. El consumo de la energía respecto a lo que se paga en el recibo.

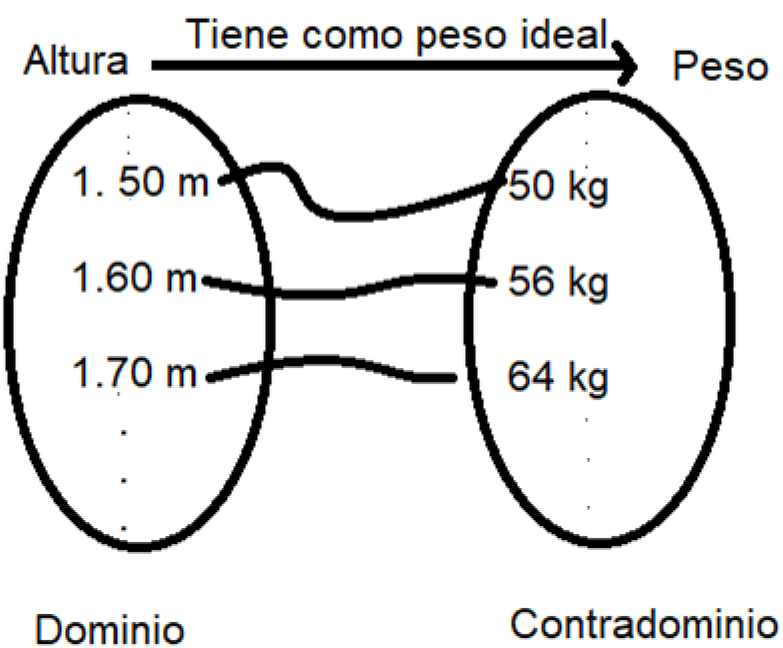
4. Lo que te cobra un taxi respecto a la distancia que recorres.

***Una relación*** **es una regla de correspondencia que asocia a elementos de un conjunto de partida (dominio) a uno o más elementos de un conjunto de llegada (Contradominio).**

5. ¿A qué conclusión llegaste junto con tus compañeros?

______________________________________________________________________
______________________________________________________________________
______________________________________________________________________
______________________________________________________________________

Podemos obtener el Dominio y el contradominio de los anteriores ejemplos ____, empecemos con la relación entre la Altura y el Peso de un ser humano.




El conjunto de partida Altura es el Dominio de la relación, el conjunto de llegada Peso se llama Contradominio.

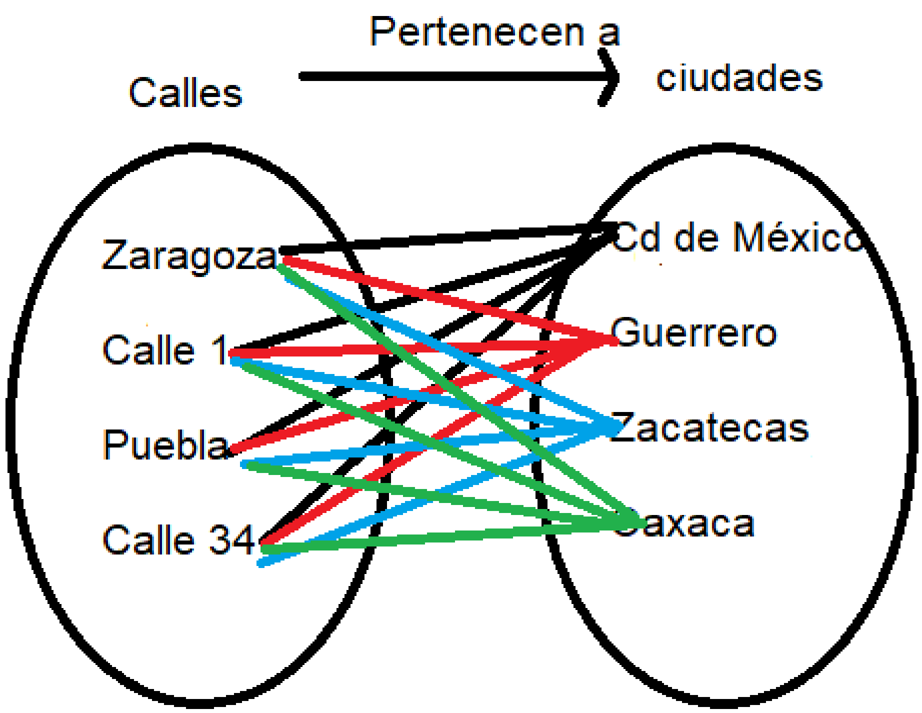
6. De manera grupal menciona de los demás ejemplos que revisaste cuál es el domino y cual el rango.

______________________________________________________________________
______________________________________________________________________
______________________________________________________________________
______________________________________________________________________

Hay un caso especial de las relaciones que tiene mucha importancia que vamos a estudiar a continuación y durante todo el semestre.

***Una función* es una relación entre dos conjuntos donde a cada valor del *dominio* (variable independiente) le corresponde uno y solo uno del *rango* (variable dependiente).**

***Veamos el siguiente ejemplo:***




7. ¿Se tratará de una función? Argumenta tú respuesta.

_______________________________________________

_______________________________________________

_______________________________________________

_______________________________________________

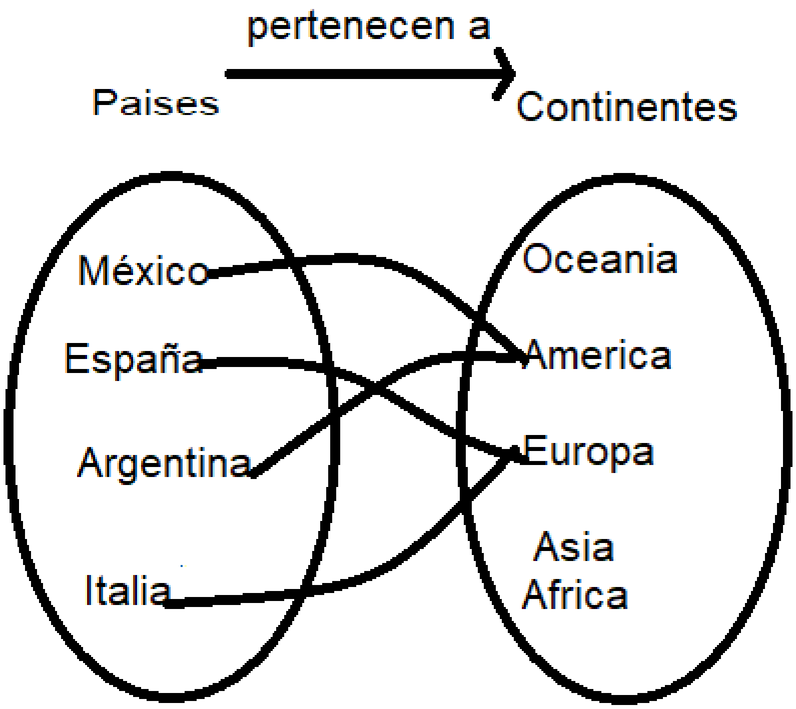
8. ¿Cuál es su Dominio y cuál es su rango?

_______________________________________________

_______________________________________________

_______________________________________________

Ahora considera el siguiente esquema:




9. ¿Se tratará de una función? Argumenta tú respuesta.

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

10. ¿Cuál es su Dominio y cuál es su rango?

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

A partir del anterior ejemplo tenemos otro concepto más: *rango o imagen de la función;* el *contradominio* del anterior ejemplo son todos los continentes, pero el conjunto *imagen o rango* de esa función solo tiene dos elementos que son América y Europa.

***Recordemos la definición de función:***

**Una función es una relación entre dos conjuntos donde a cada valor del dominio (variable independiente) le corresponde uno y solo uno del rango (variable dependiente).**

El dominio siempre se relaciona con la variable independiente y el rango con la variable dependiente, por lo regular recordaras que para la variable independiente utilizamos la literal "$x$" y para la variable dependiente" $y$ ", pero no es forzoso utilizar esas literales.

***Por lo que podemos concluir:***

*Una relación* es una regla de correspondencia que asocia a cada número real "$x$" de un conjunto de partida $A \in \mathcal{R}$ (Dominio de la relación) con uno o más números reales "$y$" de un conjunto de llegada $B \in \mathcal{R}$ (Contradominio).

***Recuerda de matemáticas 1.***

$$\mathcal{R}: Conjunto\ de\ los\ números\ reales$$
$$A \in \mathcal{R}:\ A\ pertenece\ a\ \mathcal{R}.$$
$$B \in \mathcal{R}: B\ pertenece\ a\ \mathcal{R}.$$

*Una función* es una regla de correspondencia que asocia a cada número real "$x$" de un conjunto de partida llamado dominio a uno y solo un único número real "$f(x)$", conjunto de llegada llamado rango o conjunto imagen.

***Denotamos esta correspondencia por $f$:*** *$f: A \to B$, que se lee "$f$ es una función de $A$ en $B$"*

Si consideramos por ejemplo el *precio de una vivienda y su superficie**; podemos afirmar que*** el ***precio de la vivienda*** $(\boldsymbol{y})$ está en ***función*** del número ***de metros cuadrados*** $(\boldsymbol{x})$***,*** otra manera de expresar (***simbolizar***) esta dependencia funcional es la siguiente:

$$\boldsymbol{x} \xrightarrow{\quad\boldsymbol{f}\quad} \boldsymbol{y}$$

$\boldsymbol{y = f(x)}$ ***(regla de correspondencia)***

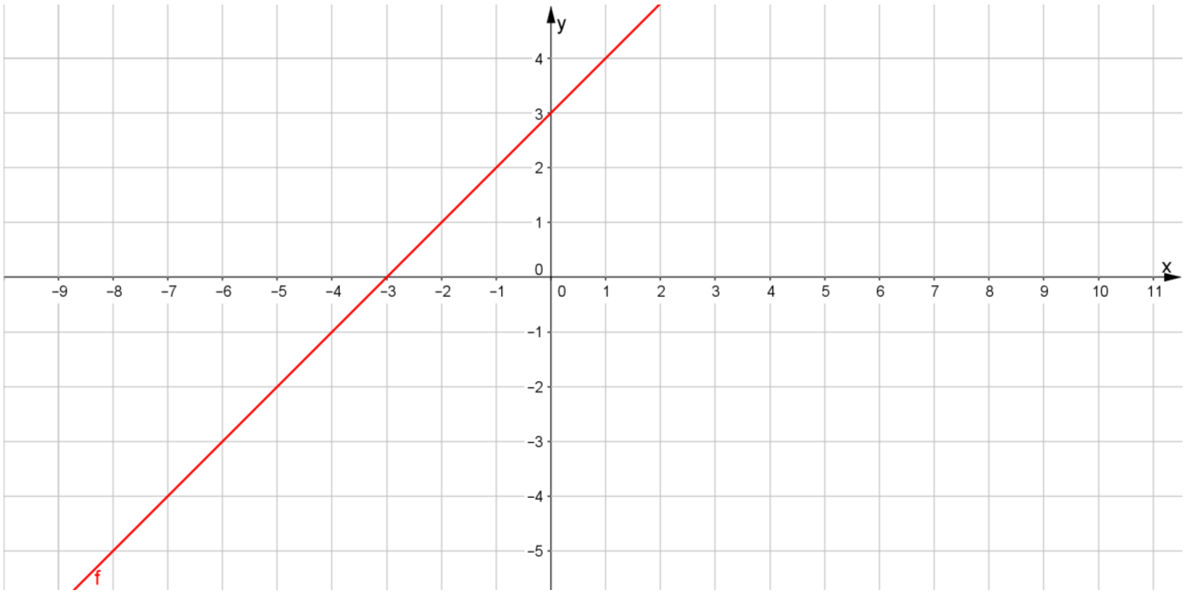
$\boldsymbol{y = f(x)}$***: Símbolo para expresar la relación entre dos cantidades.***

11. Revisa junto con tus compañeros el punto cuatro de esta unidad Materiales diversos de apoyo en el inciso A. Intervalos, comenta en clase.

Ahora trabajemos con gráficas: En este caso utilizando GeoGebra para graficar la expresión siguiente.

$$y = x + 3$$

Tenemos lo siguiente:

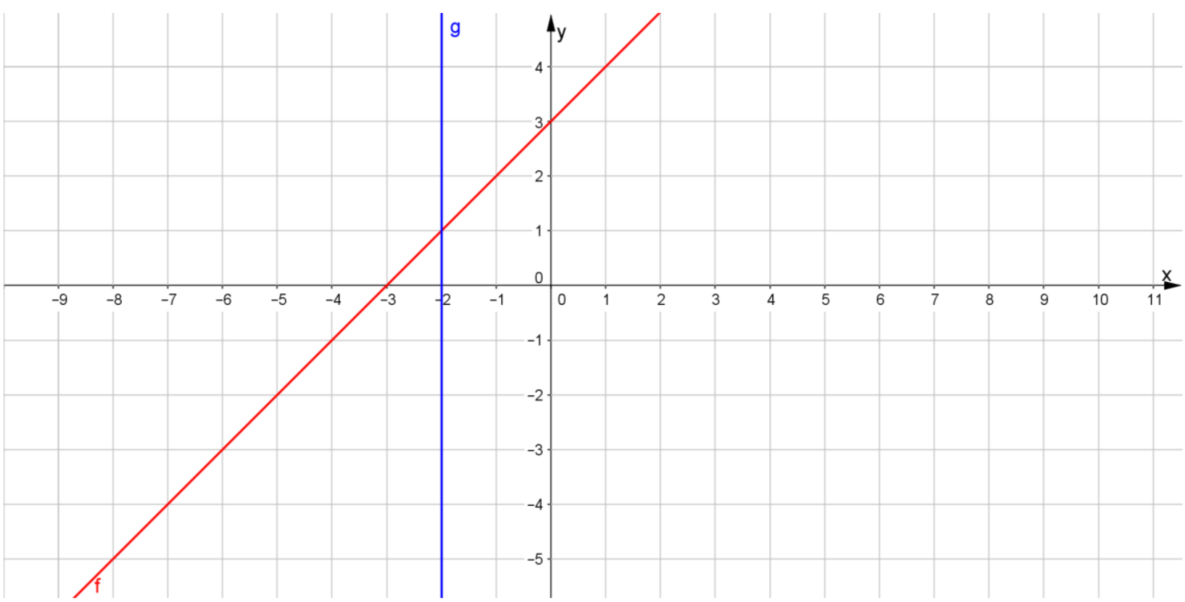



¿Se trata de una función? Justifica tu respuesta?

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

Recuerda que hay una manera muy fácil de saber si una gráfica representa una función o no, pasa una recta vertical y si solo toca un punto que forma parte de la gráfica, esto nos indica que efectivamente se trata de una función.




<u>Sí</u>, se trata de una función.

El dominio serán todos los valores que puede tomar el conjunto Domino en este caso $x$, dado los intervalos estudiados anteriormente utilizaremos la siguiente notación:

$$D_f$$
$$D_f = (-\infty, \infty)$$

y para el rango son todos los valores de llegada, tenemos

$$R_f$$
$$R_f = (-\infty, \infty)$$

Podemos utilizar una notación diferente (llamada notación de conjuntos):

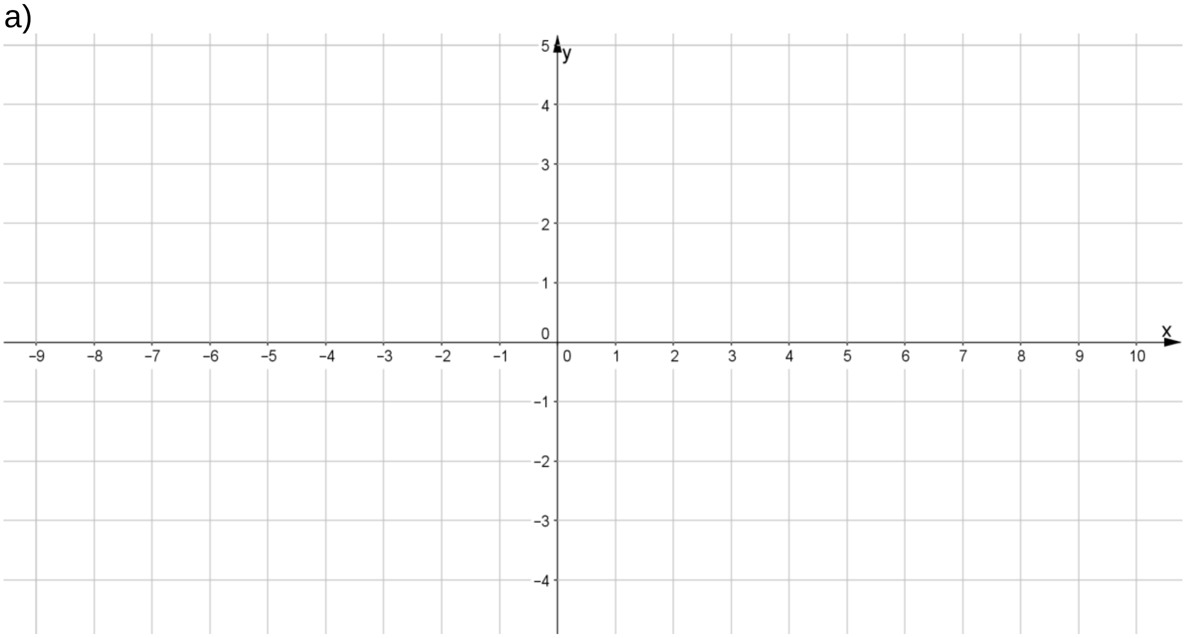
$$D_f = \{x | x \in \mathcal{R}\}$$
$$R_f = \{y | y \in \mathcal{R}\}$$

Por último, mencionemos que la regla de correspondencia es lo que relaciona los dos conjuntos el dominio y el rango, en este caso es: $y = x + 3$.

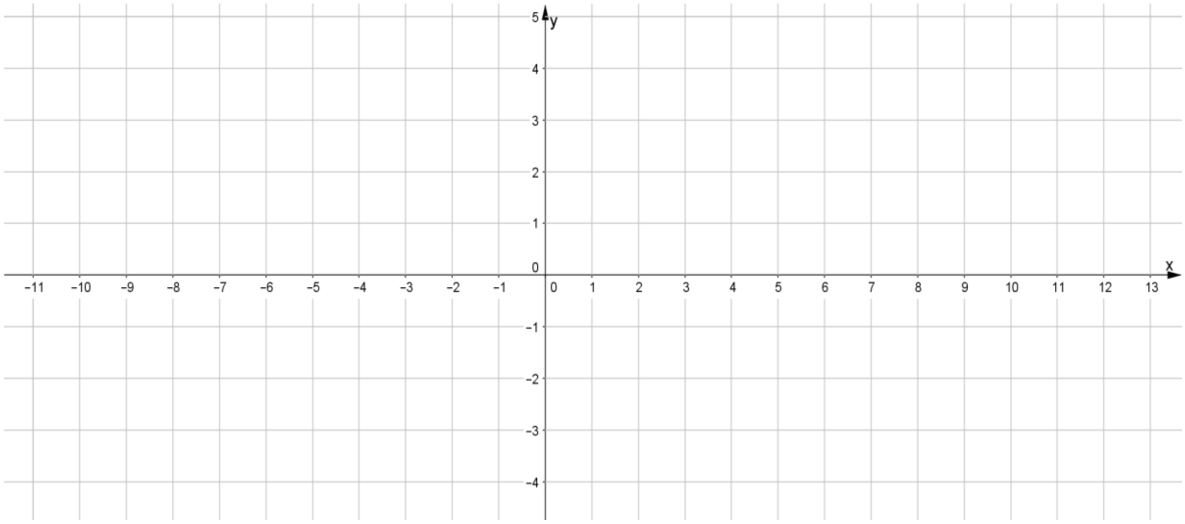
***Actividad 3.*** apoyándote en la actividad anterior, realiza las gráficas a lápiz y papel y menciona su dominio y rango, recuerda que el dominio son los valores que toma $x$ o la variable independiente y el rango son los valores que toma $y$ o la variable dependiente, a partir de las siguientes expresiones.

a) $x^2 + y^2 = 25$ b) $y^2 = 4x$ c) $x^2 = 8y$

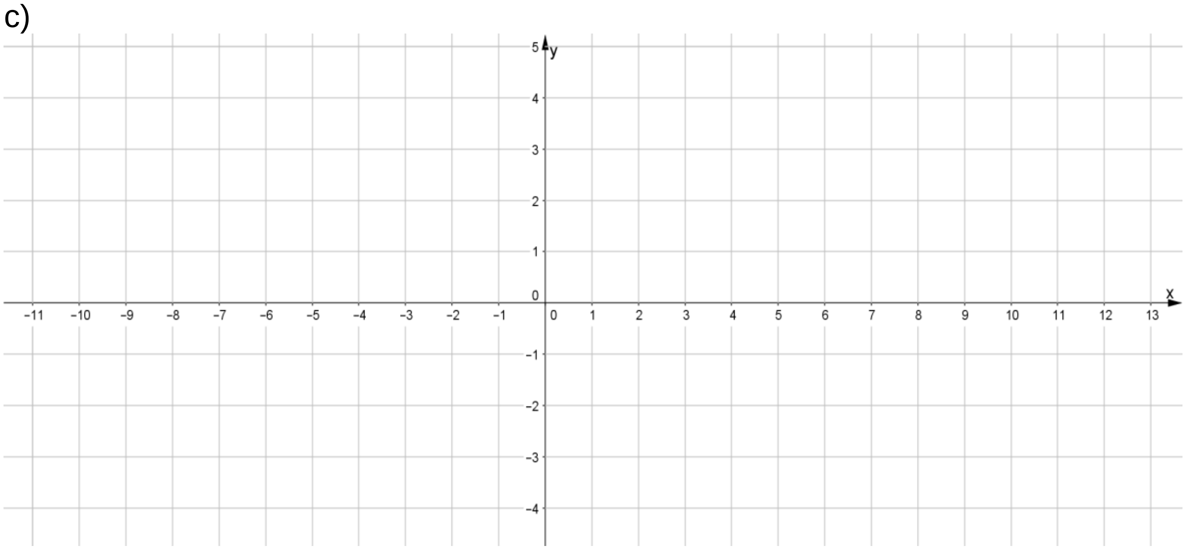
a)




b)




c)




El dominio y el rango de los inicios anteriores fueron:

a) $D_f = \{x| -5 \leq x \leq 5\}$ o también lo puedes escribir así $[-5,5]$.
$R_f = \{y| -5 \leq y \leq 5\}$ o también lo puedes escribir así $[-5,5]$.

Comenta con tus compañeros cuál fue tu respuesta, si la tuviste correcta o no y argumenta.

______________________________________________________________________

_____________________________________________________________________.

b) $D_f = \{x|x \in \mathcal{R}^+\}$ o también lo puedes escribir así $[0, \infty)$.
$R_f = \{y|y \in \mathcal{R}\}$ o también lo puedes escribir así $(-\infty, \infty)$.

Comenta con tus compañeros cuál fue tu respuesta, si la tuviste correcta o no y argumenta.

______________________________________________________________________
____________________________________________________________________.

c) $D_f = \{x|x \in \mathcal{R}\}$ o también lo puedes escribir así $(-\infty, \infty)$.
$R_f = \{y|y \in \mathcal{R}^+\}$ o también lo puedes escribir así $[0, \infty)$.

Comenta con tus compañeros cuál fue tu respuesta, si la tuviste correcta o no y argumenta.

______________________________________________________________________
______________________________________________________________________
______________________________________________________.

Entonces de los ejemplos anteriores, junto con tus compañeros y profesora o profesor menciona quién si cumple con la definición de función y argumenta.

______________________________________________________________________
______________________________________________________________________
____________________________________________________________________.

Ahora que identificaste las funciones, menciona sus reglas de correspondencia.

______________________________________________________________________
______________________________________________________________________
______________________________________________________.

***Para el alumno:*** Actividad de exploración para *la noción de función.*

1. *Analiza la siguiente tabla:* las funciones se encuentran en la vida cotidiana por ejemplo la cantidad de proteínas que tienen las frutas.

| $(x)$ fruto por pieza. | Manzana | Uva | Fresa | Plátano | Aguacate |
|---|---|---|---|---|---|
| $(y)$ proteína en (gramos) | 0.5 | 0.6 | 1 | 1.3 | 2 |

La relación funcional $(x, y) = (fruto, proteína)$ es una *función*. A cada fruto *diferente* le corresponde una cantidad de proteína.

2. *Otro ejemplo* es el volumen $V$ de una esfera depende de su radio $r$, esta relación está dada por la regla de correspondencia $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$.

¿Se trata de una función? Argumenta tu respuesta.

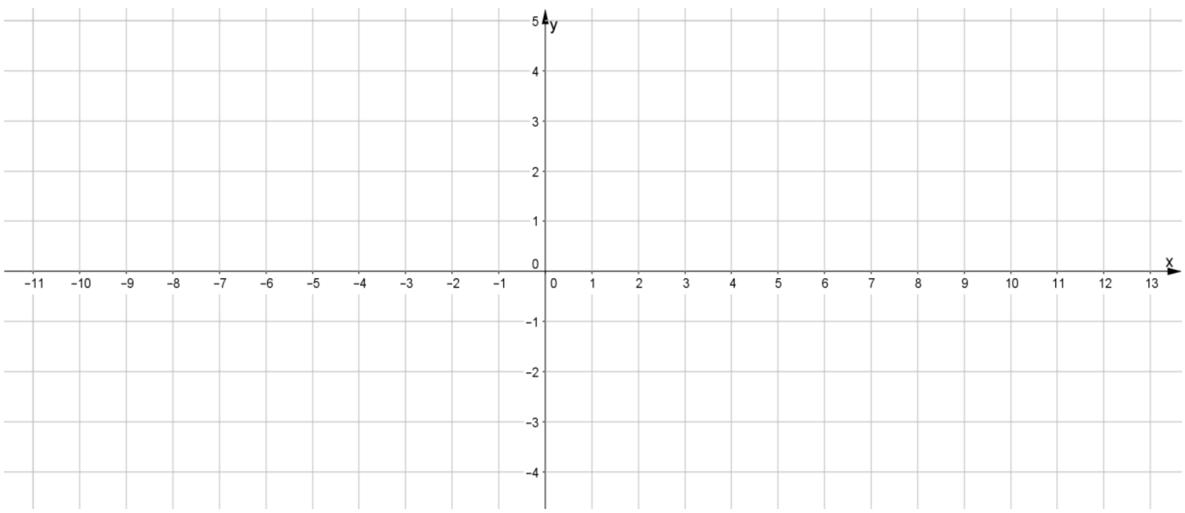
Determina el dominio y el rango utilizando cualquiera de las dos notaciones estudiadas.

$$D_f = \qquad\qquad R_f =$$

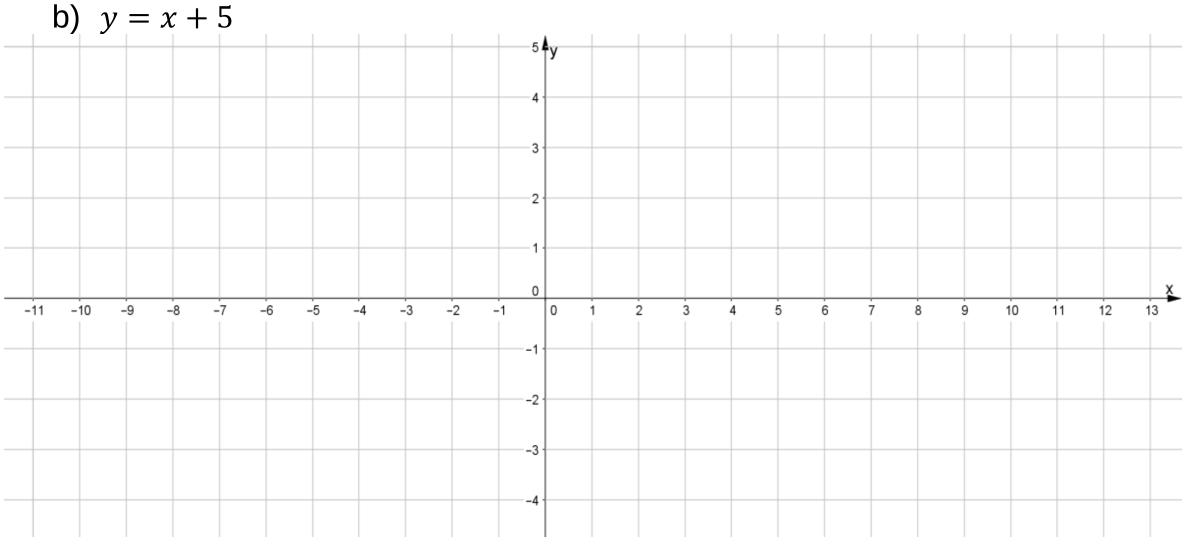
***Actividad 4. Notación Funcional (Funciones Polinomiales)***.

1. Grafica con lápiz y papel las siguientes funciones en el plano cartesiano adjunto.

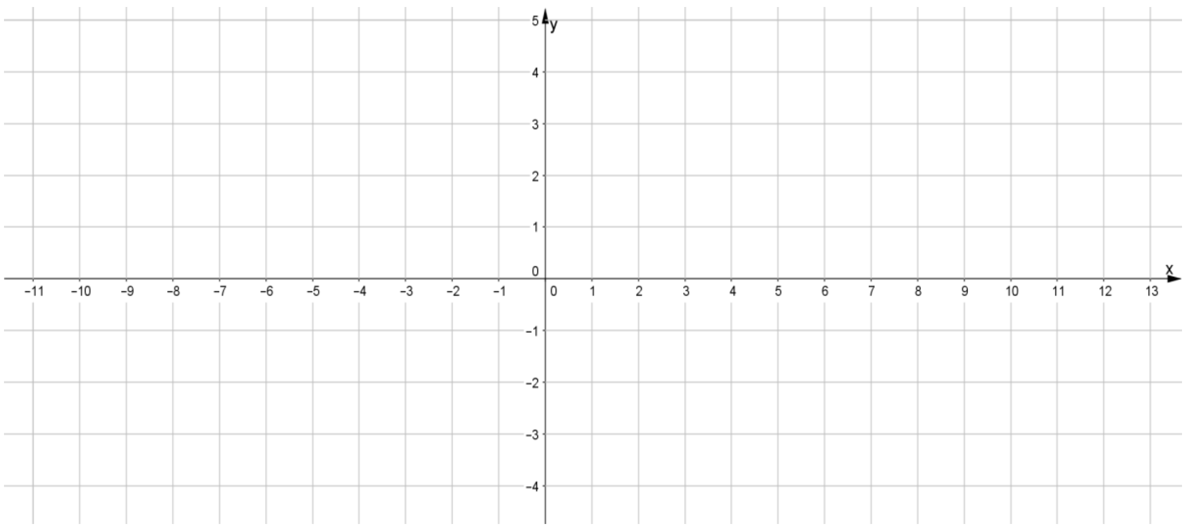
a) $y = 5$



b) $y = x + 5$



c) $y = x^2 + 5$




2. Ahora menciona ¿son funciones o no? Argumenta tu respuesta.

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________.

3. ¡Ya recordaste! Sí ya trabajaste con ellas, en los cursos de *Matemáticas I y Matemáticas II*

| **Función** | **Grado** |
| --- | --- |
| $f(x) = 5$ | Cero” Función identidad” |
| $f(x) = x + 5$ | Uno “Función lineal “ |
| $f(x) = x^2 + 5$ | Dos” Función cuadrática” |

4. Menciona como podrías identificar el grado de la función, en específico basándote en la regla de correspondencia.

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________.

“Las expresiones anteriores son ejemplo de funciones polinomiales”.

El mayor exponente de la variable independiente es su grado, otros ejemplos son los que se muestran en la siguiente tabla (complétala).

| Funciones | Grado |
|---|---|
| $f(x) = x^2 + x + 5$ | |
| $f(z) = -z^4 + 3z^2 - z - 1$ | |
| $f(w) = w^3 - w^2 + 5$ | |
| $f(x) = -2$ | |
| $f(x) = x^6 - 4$ | |
| $f(z) = 5z^5 - 3z^4 + 2z^3 - z^2 - z+1$ | |
| $f(w) = w^4 - w^2$ | |

Cómo pudiste observar en los ejemplos anteriores todas las reglas de correspondencia están constituidas por sumas de términos de la forma $ax^n$. Una constante multiplicada por una potencia de $x$ (o cualquier otra literal).

**Si $f$ es una función polinomial con coeficientes reales, de grado $n$ tiene la forma:**

$$\boldsymbol{f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0},$$

**donde $a_n \neq 0, n\ entero\ no\ negativo$, los *coeficientes* ($a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$) son números reales.**

**El coeficiente principal es $a_n$. El término constante es $a_0$.**

Recordemos el ejemplo del volumen $V$ de una esfera depende de su radio $r$, esta relación está dada por la regla de correspondencia: $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$.
Esta notación no quiere decir que $V$ se va a multiplicar por $r$ , la notación significa $V$ de $(r)$.

***Por ejemplo:***

Si queremos saber cuál es el volumen cuando el radio es igual a $2$, evaluemos la función tenemos:

$$V(2) = \frac{4}{3}\pi(2)^3 = \underline{\qquad\qquad}.$$

Esto no quiere decir que $V$ se va a multiplicar por 2, sino que $r = 2$.

$$V(2) = \frac{4}{3}\pi(2)^3 = \frac{32}{3}\pi$$

Y si queremos saber el volumen cuando el radio es iguala a $10$, tenemos:

$$V(10) = \frac{4}{3}\pi(10)^3 = \underline{\qquad\qquad}.$$

5. *Ahora tenemos la función* $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$.

Construye un bosquejo con lápiz y papel de la gráfica evaluando para $x = -10, x = -5, x = -4, x = -3, x = -2, x = -1, x = 0, x = 1, x = 2, x = 3, x = 4\ y\ x = 10$.

$f(-10) = (-10)^3 - 2(-10)^2 - (-10) + 2 =$ _____. $\quad Punto\ 1\ (-10,\quad)$

$f(-5) = (-5)^3 - 2(-5)^2 - (-5) + 2 =$ ______. $\quad Punto\ 2\ (-5,\quad)$

$f(-4) = (-4)^3 - 2(-4)^2 - (-4) + 2 =$ ______. $\quad Punto\ 3\ (-4,\quad)$

$f(-3) = (-3)^3 - 2(-3)^2 - (-3) + 2 =$ ______. $\quad Punto\ 4\ (-3,\quad)$

$f(-2) = (\quad)^3 - 2(\quad)^2 - (\quad) + 2 =$ ______. $\quad Punto\ 5\ (-2,\quad)$

$f(-1) = (\quad)^3 - 2(\quad)^2 - (\quad) + 2 =$ ______. $\quad Punto\ 6\ (-1,\quad)$

$f(0) = (0)^3 - 2(0)^2 - (0) + 2 = 2$ $\quad Punto\ 7\ (0\ , 2)$

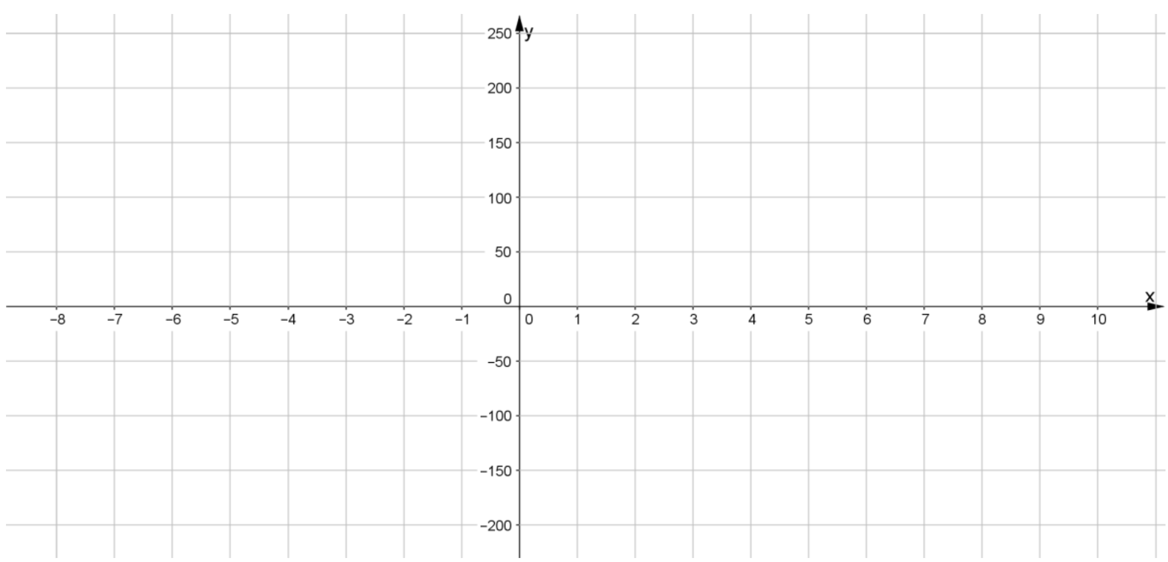
$f(1) = (\quad)^3 - 2(\quad)^2 - (\quad) + 2 =$ ______. $\quad Punto\ 8\ (1,\quad)$

$f(2) = (\quad)^3 - 2(\quad)^2 - (\quad) + 2 =$ ______. $\quad Punto\ 9\ (2,\quad)$

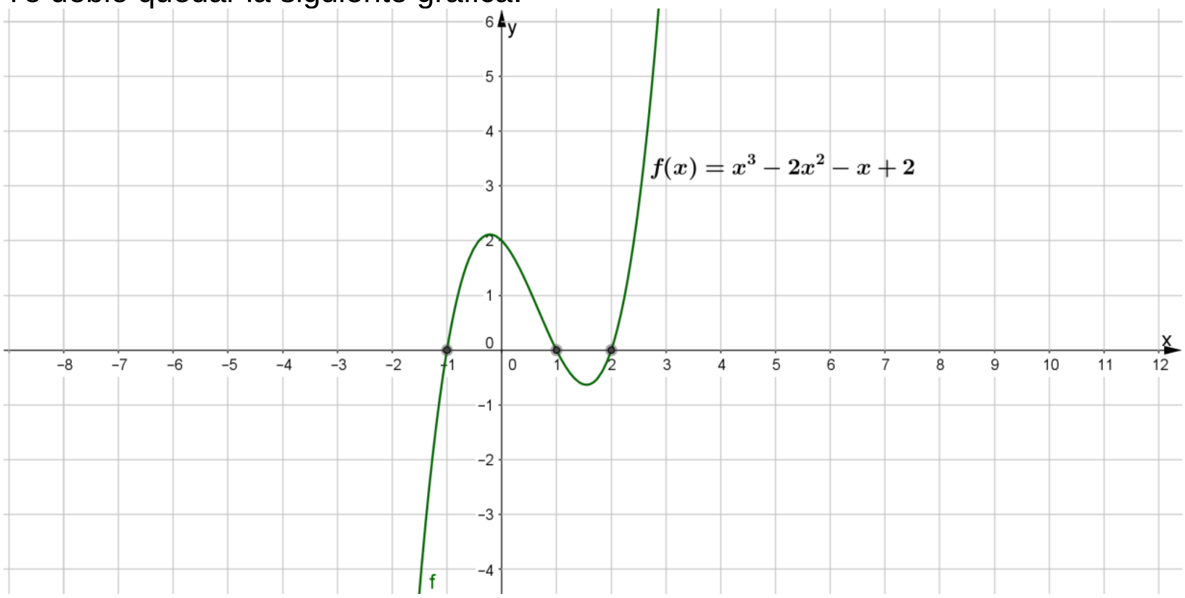
$f(3) = (\quad)^3 - 2(\quad)^2 - (\quad) + 2 =$ ______. $\quad Punto\ 10\ (3,\quad)$

$f(4) = (\quad)^3 - 2(\quad)^2 - (\quad) + 2 =$ ______. $\quad Punto\ 11\ (4,\quad)$

$f(10) = (10)^3 - 2(10)^2 - (10) + 2 =$ ________. $\quad Punto\ 12\ (10,\quad)$



Te debió quedar la siguiente gráfica.



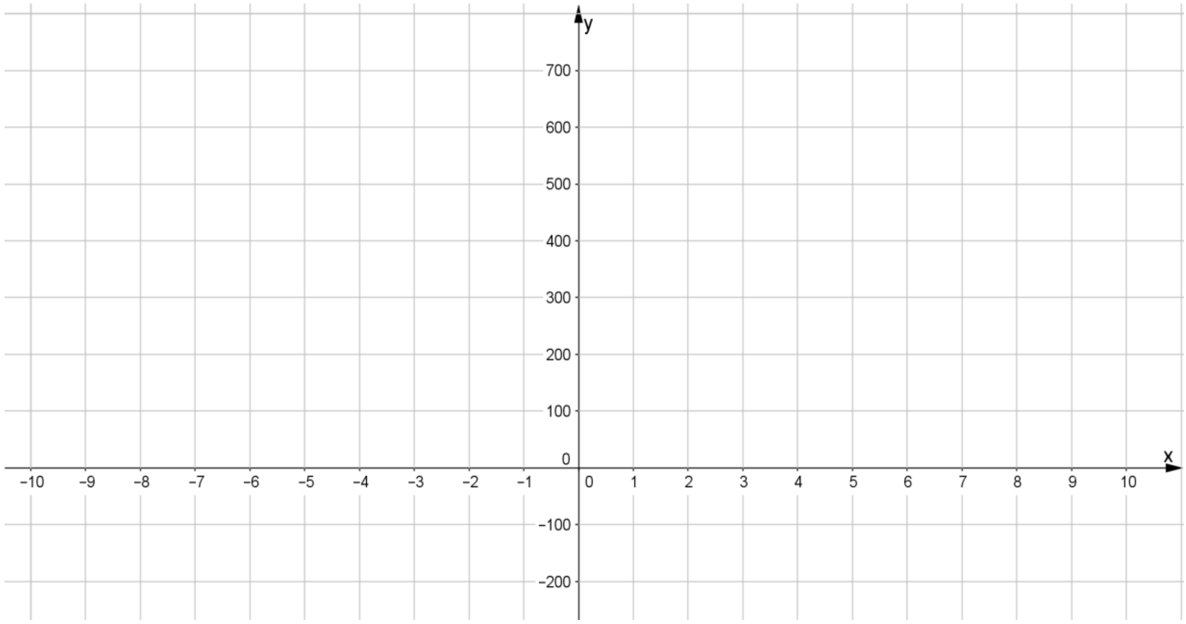

Menciona: dominio y rango de la función.

$$D_f =$$
$$R_f =$$

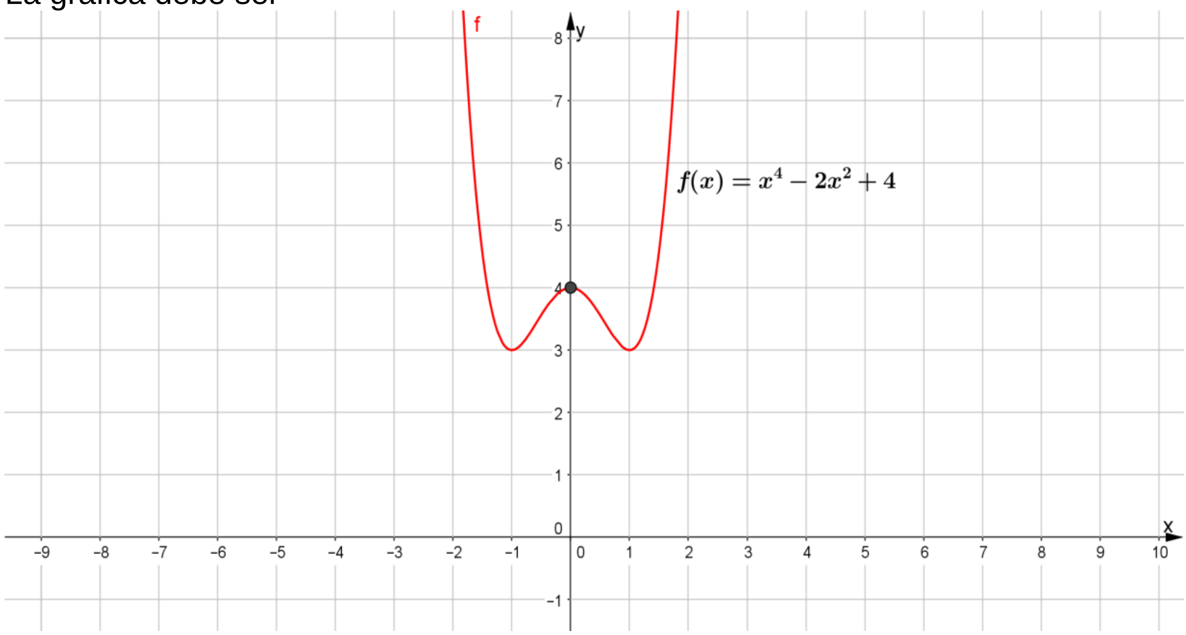
6. Continuemos con la función $f(x) = x^4 - 2x^2 + 4$.

Construye un bosquejo de la gráfica evaluando para $x = -10, x = -5, x = -4, x = -3, x = -2, x = -1, x = 0, x = 1, x = 2, x = 3, x = 4,\ x = 5\ y\ x = 10$.

$f(-10) = (-10)^4 - 2(-10)^2 + 4 =$ ______. $\quad Punto\ 1\ (-10,\quad)$
$f(-5) = (-5)^4 - 2(-5)^2 + 4 =$ ______. $\quad Punto\ 2\ (-5,\quad)$
$f(-4) =$
$f(-3) =$
$f(-2) =$
$f(-1) =$
$f(0) = (0)^4 - 2(0)^2 + 4 =$ __4___. $\quad Punto\ 7\ (0, -4)$
$f(1) =$
$f(2) =$
$f(3) =$
$f(4) =$
$f(5) =$
$f(10) = (10)^4 - 2(10)^2 + 4 =$ _____. $\quad Punto\ 12\ (10,\quad)$



La gráfica debe ser




Menciona dominio y rango

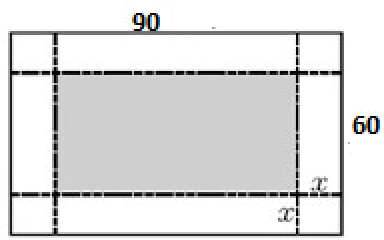
$D_f =$

$R_f =$

***Actividad 5. Actividades de aplicación. Problemas, contextualizados a diferentes ramas de la ciencia.***

Considerando que las funciones polinomiales esta presentes en diferentes ramas de la ciencia y en nuestra vida cotidiana, completa la siguiente actividad.

***Problema 1.*** Con un cartón de 60 por 90 centímetros, se desea hacer una charola, cortando cuadrados en las esquinas.




a) Escribe la expresión algebraica para calcular el volumen $(V)$ en términos de la altura de la charola $(x)$ de los lados de los cuadrados que se cortan.

______________________________________________________________

b) Evalúa la función con $x = 1, x = 5, x = 10, x = 15, x = 20 \ y \ x = 25$.

c) **La variable independiente es: _________________.**
d) **La variable dependiente es: __________________.**

e) **Apóyate con GeoGebra y realiza la gráfica de la función:**

f) **Dominio y rango de la función $\boldsymbol{V(x)}$**:

$D_f =$
$R_f =$

***Ejercicios adicionales a la actividad 5.***

**1.** En cada caso determine si es posible que $y$ sea función de $x$.

**a)** $y =$Cantidad a pagar del recibo de energía eléctrica.
$x =$Número de $kwh$ consumidos.
**b)** $y =$Probabilidad de desarrollar diabetes.
$x =$Número de refrescos tomados al día.
**c)** $y =$Peso de una persona.
$x =$Cantidad de vitamina "$T$" consumida por día.
**d)** $y =$Tiempo transcurrido en el transporte de casa a la escuela.
$x =$Hora de salida.

**2.** Para cada uno de los siguientes enunciados determine una relación que describa a cada función y halle $f(2)$.

**a)** Cinco veces $x$.
**b)** Tres veces $x$ más dos.
**c)** El cubo de $x$ más uno.
**d)** El perímetro de un cuadrado de lado $x$.
**e)** El perímetro de un cuadrado de base $5$ y altura $h$.
**f)** El precio de $x$ boletos del metro.

**3.** Determine el rango para cada función.

**a)** $f(x) = x^2 - 2x - 2$; $f(0)$, $f(2)$, $f(-3)$, $f\left(\frac{1}{8}\right)$.
**b)** $f(w) = w^2 - w - 1$; $f(0)$, $f(2)$, $f(-3)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$.
**c)** $g(z) = \frac{z+3}{z-3}$; $g(0)$, $g(2)$, $g(-3)$, $g\left(\frac{1}{8}\right)$.
**d)** $f(x) = \frac{x}{1-x}$; $f(0)$, $f(2)$, $f(-3)$, $f\left(\frac{1}{8}\right)$.
**e)** $f(p) = \sqrt{p+3}$; $f(0)$, $f(2)$, $f(-3)$.
**f)** $f(x) = \sqrt{2x-1}$; $f(0)$, $f(2)$, $f(-3)$.
**g)** $f(x) = \frac{1}{x}$; $f(10)$, $f(100)$, $f(-5)$.

***Estrategia didáctica 2. Funciones polinomiales (determinación de los ceros de una función polinomial). (Desarrollo).***

***Aprendizajes:***

1. Aplica la división sintética, el teorema del residuo, el teorema del factor, su reciproco para determinar los ceros de $f(x)$ y su gráfica.
2. Construye una función polinomial a partir de las raíces de su ecuación y bosqueja su gráfica y a partir de una función polinomial calcula los ceros y realiza su gráfica.

***Para el alumno:*** Actividad de exploración para conocer la división sintética de polinomios.

QR-3. Introducción a la división sintética de polinomios.

***Actividad 1. (Extraclase):*** Visita el código QR, para conocer acerca de la división sintética de polinomios (polinomio $f(x)$ entre un binomio de la forma $(x-r)$). Una vez que hayas entrado saca una copia con la información relativa al tema y cópiala en tu cuaderno ya que ésta la vas a usar en las siguientes actividades.

**Definición. La función:**

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Es una función en $x$ con $a_n \neq 0, n\ entero\ no\ negativo$, y $a_{n,}\ a_{n-1,} \ldots, a_1,\ a_0$ son números reales, entonces si $f(x) = 0$ la expresión resultante es una ecuación.

***Actividad 2. División sintética.***

Sea la función $f(x) = 3x^4 - 24x^3 + 4x^2 - 29x - 67$, entonces si $f(x) = 0$ el resultado que se obtiene, en este caso es $3x^4 - 24x^3 + 4x^2 - 29x - 67 = 0$ que es una ecuación de cuarto grado en $x$. A continuación se presenta un procedimiento algebraico que se usa para simplificar la solución de ecuaciones de grado superior a 2.

**División Sintética (recuerda lo que viste en código QR-3 de la actividad 1).**

Es un método para dividir un polinomio $\boldsymbol{f(x)}$ entre un binomio de la forma $(\boldsymbol{x - r})$. El *divisor* se obtiene despejando $\boldsymbol{x = r}$.

Se obtienen los coeficientes del polinomio cociente (o polinomio reducido) y el resto (o residuo) de la división.

***Ejemplo 1.*** Dividir el polinomio: $x^3 - 4x^2 + x + 6$ entre $x + 1$.

Ahora se obtienen los coeficientes del polinomio y se colocan en un arreglo como se muestra enseguida y se efectúa el procedimiento de la división sintética que consiste en:

1. Se baja el primer coeficiente del polinomio y luego,
2. Se multiplica este primer coeficiente del cociente por el divisor y se coloca debajo del segundo coeficiente y se efectúa la suma algebraica,

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

3. El resultado obtenido se multiplica por el divisor y se coloca ahora debajo del siguiente coeficiente y se suma nuevamente,
4. así sucesivamente, la última columna de la derecha en el tercer renglón, tendremos al residuo (azul) y todos los números que le antecedentes al tercer renglón representan los coeficientes del cociente (amarillo), faltará agregarle la variable $x$ a cada coeficiente del cociente e iniciar con un exponente menos que el que tenga el polinomio original por lo tanto.

$$Cociente: x^2 - 5x + 6; residuo = 0.$$

***Ejercicios para que complete el alumno.*** Utiliza la división sintética para dividir los siguientes polinomios, solo debes de completar la división sintética.

1. $2x^3 - x^2 - 18x + 9$ entre $x - 3$.

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 2 & -1 & -\_ & 9 \\ & & 6 & 15 & \_\_ \\ \hline & 2 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

$Cociente$: $\qquad ; residuo =$ .

2. $x^4 + x^3 - 6x^2 - 4x + 8$ entre $x - 1$.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & \_ & 1 & -6 & \_\_ & 8 \\ & & 1 & 2 & \_\_ & -8 \\ \hline & 1 & 2 & \_ & \_ & 0 \end{array}$$

$Cociente$: $\qquad ; residuo =$ .

3. 4x$^4$ + 9x$^3$ – 5x$^2$ + 9x - 9 entre $x + 3$.

$$\begin{array}{r|rrrrr} \_\_ & 4 & 9 & -5 & 9 & -9 \\ & & & & & \\ \hline & \_ & -3 & 4 & \_ & \_ \end{array}$$

$Cociente$: $\qquad ; residuo =$ .

- ***Teorema del residuo.***

Si $P(x)$ es un polinomio, $r$ es un número y $P(x)$ se divide entre $(x - r)$, entonces el residuo obtenido es igual a $P(r)$.

***Ejemplo 2.***

Utiliza el teorema del residuo para obtener el valor del polinomio $P(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + x - 6$, para el número dado:

a) $r = 2$

Dividir $P(x)$ entre $(x - 2)$ utilizando división sintética.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 3 | 1 | 1 | -6 |
| | | 2 | 10 | 22 | 46 |
| | 1 | 5 | 11 | 23 | 40 |

Así, por el teorema del residuo $P(2) = 40$. Este es el resultado puede comprobarse por sustitución directa.

$P(2) = (2)^4 + 3(2)^3 + (2)^2 + (2) - 6 = 40$.

b) $r = -3$

Dividir $P(x)$ entre $(x + 3)$ utilizando división sintética, completa la división.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| -3 | 1 | 3 | 1 | 1 | -6 |
| | | _ | _ | _ | _ |
| | 1 | 0_ | 1 | -2 | 0 |

Así, por el teorema del residuo $P(-3) = 0$. Este es el resultado puede comprobarse por sustitución directa.

$P(-3) = (-3)^4 + 3(-3)^3 + (-3)^2 + (-3) - 6 = 0$.

***Ejercicios para que complete el alumno.***

a) Completa lo siguiente, utilizar el teorema del residuo para obtener cada valor de:

$P(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$.

1. $P(1)$  2. $P(-1)$  3. $P(5)$  4. $P(-2)$

1. $P(1) = 1^3 - 3(1)^2 + 1 + 1 =$ _______.
2. $P(_) = _^3 - 3(\ \ )^2 + _ + 1 =$________.
3. $P(5) = \_^3 - 3(\ \ )^2 + \_ + 1 =$ ________.
4. $P(\_) = \_^3 - 3(\ \ )^2 + \_ + 1 =$ ________.

b) Usar el teorema del residuo para obtener cada valor de:

$P(x) = x^5 - 3x^3 - x + 1$.

1. $P(-1)$ 2. $P(2)$ 3. $P(-3)$ 4. $P(1)$

- ***Teorema del Factor.***

Sea $P(x)$ un polinomio y $r$ un número real. Entonces, $r$ es un cero de $P(x)$ si y solo si $(x - r)$ es un factor de $P(x)$.
Los puntos en donde una **función** polinomial cruza al eje del término independiente $(x)$ representa los ceros de la **función** $f(x) = 0$, y los ceros representen las raíces de la ecuación polinomial que se obtiene al hacer $f(x) = 0$.

***Ejemplo 3.***

Determina si $(x - 5)$ es un factor de: $P(x) = x^3 - 7x^2 + 13x - 15$.
Utilizando el teorema del factor, debe determinarse si $P(5) = 0$. La mejor manera de hacerlo es usar la división sintética.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 1 | -7 | 13 | -15 |
| | | 5 | -10 | 15 |
| | 1 | -2 | 3 | 0 |

Ya que $P(5) = 0, x - 5$ es un factor de $P(x)$. Al utilizar la división sintética, no solo se ha descubierto que $P(5) = 0$, sino también que cuando $P(x)$ se divide en $x - 5$ el cociente es $Q(x) = x^2 - 2x + 3$. Así, es posible representar $P(x)$ en la forma factorizada: $P(x) = (x^2 - 2x + 3)(x - 5)$.

Una vez obtenido un cero de la función polinomial puede utilizarse el teorema del factor y hallar otros ceros que serán ceros de un polinomio cuyo grado es 1 menor que el del original.

***Por ejemplo***, para resolver la ecuación polinómica: $x^3 - 7x^2 + 13x - 15 = 0$, si se ha descubierto que 5 es una solución, la ecuación puede escribirse en la forma

factorizada $(x^2 - 2x + 3)(x - 5) = 0$ y utilizarse la regla del producto nulo para obtener $x^2 - 2x + 3 = 0 \; o \; x - 5 = 0$.
Haciéndose uso de la fórmula cuadrática para resolver $x^2 - 2x + 3 = 0$, se obtiene:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(3)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}\, i}{2} = 1 \pm \sqrt{2}\, i$$

Así las soluciones de la ecuación original son: 5, $1 + \sqrt{2}\, i$ y $1 - \sqrt{2}\, i$.

- ***Raíces de multiplicidad impar o par.***

Cada función polinomial $f(x)$ de grado $n$ tiene exactamente $n$ raíces (contando multiplicidades) que son números reales o complejos. Es decir, la ecuación:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0, \text{ con } a_n \neq 0.$$

Tiene exactamente $n$ soluciones o raíces (contando multiplicidades).

***Ejemplo 4.***

Determina una ecuación polinomial que tenga a (– 2) como raíz doble (una raíz de multiplicidad dos) a (4) como raíz triple (una raíz multiplicidad de tres) y a (1) como raíz simple (una raíz de multiplicidad uno).

Contando multiplicidades, debe obtenerse un polinomio de grado seis $(2 + 3 + 1 = 6)$, que tenga como factores a $(x - (-2))^2 = (x + 2)^2, (x - 4)^3$ y $(x - 1)$. Ya que $(x + 2)^2 (x - 4)^3 (x - 1) = 0$, los factores pueden multiplicarse para obtener:

$$x^6 - 9x^5 + 12x^4 + 76x^3 - 144x^2 - 192x + 256 = 0$$

Una ecuación polinómica que tiene las raíces deseadas.

- **Raíces racionales de una ecuación polinomial.**

Supóngase que $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$, con $a_n \neq 0$. Es una función polinomial para el cual todos los coeficientes, $a_n$, $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$, son enteros. Si $\frac{p}{q}$ es un número real reducido a su mínimo expresión, tal que $\frac{p}{q}$ es una raíz de $f(x) = 0$ (es decir $f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$), entonces $p$ es un factor de $a_0$ y $q$ es un factor de $a_n$.

El resultado anterior no proporciona directamente los ceros de un polinomio $f(x)$ (las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$), pero si ofrece una lista limitada de soluciones racionales posibles. El teorema de la raíz racional se utiliza junto con el proceso de división sintética y el siguiente resultado.

Supóngase que $\frac{p}{q}$ es una raíz, entonces $x - \frac{p}{q}$ es un factor y:

$$f(x) = \left(x - \frac{p}{q}\right).Q(x)$$

Donde $Q(x)$ es un polinomio cuyo grado es uno menos que el de $f(x)$. las soluciones adicionales de $f(x) = 0$ deben ser entonces soluciones de $Q(0) = 0$. Entonces se aplica el teorema de la raíz racional para resolver $Q(0) = 0$. Además, es aconsejable considerar primero el número de soluciones reales positivas y negativas posibles.

***Ejemplo 5.***

Dada la ecuación polinomial $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 6x - 4 = 0$.
Si $\frac{p}{q}$ es una solución racional de esta ecuación, entonces $p$ es un factor (se conoce como factor cada una de las cantidades o expresiones que pueden multiplicarse para formar un producto) de $-4$ $(a_0 = -4)$ y $q$ es un factor de $2$ $(a_n = 2)$. Así, las posibilidades para $p$ y $q$ son:

$$p: 1, -1, 2, -2, 4, -4; q: 1, -1, 2, -2.$$

De modo que las soluciones racionales posibles son:

$$\frac{p}{q}: 1, -1, 2, -2, 4, -4, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}.$$

Si se utiliza la división sintética para encontrar una solución, se descubrirá también el polinomio de grado 3 que es el otro factor de $f(x)$. Después, hay que concentrarse en encontrar sus ceros.

Procédase a probar las ocho soluciones posibles.

$\frac{p}{q} = 1$:

| | | | | | |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | -3 | 2 | -6 | -4 |
| | | 2 | -1 | 1 | -5 |
| | 2 | -1 | 1 | -5 | -9 |

Así, $f\left(\frac{p}{q}\right) = f(1) = -9 \neq 0$ de modo que 1 no es una solución.

$\frac{p}{q} = -1$:

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 2 & -3 & 2 & -6 & -4 \\ & & -2 & 5 & -7 & 13 \\ \hline & 2 & -5 & 7 & -13 & 9 \end{array}$$

De esta manera $f\left(\frac{p}{q}\right) = f(-1) = 9$ de modo que – 1 no es una solución. Más aun, ya que los signos en la tercera fila se alternan, no hay necesidad de probar con – 2 o – 4 puesto que – 1 es una cota inferior para las raíces.

$\frac{p}{q} = 2$:

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 2 & -3 & 2 & -6 & -4 \\ & & 4 & 2 & 8 & 4 \\ \hline & 2 & 1 & 4 & 2 & 0 \end{array}$$

Entonces $f\left(\frac{p}{q}\right) = f(2) = 0$ de modo que 2 es una solución y, por el teorema del factor, $(x - 2)$ es un factor de $f(x)$, con $Q(x) = 2x^3 + x^2 + 4x + 2$ como el otro factor. Así $f(x) = (x - 2)(2x^3 + x^2 + 4x + 2) = 0$, lo cual significa que debe resolverse $2x^3 + x^2 + 4x + 2 = 0$.

Cualquier solución racional $\frac{p}{q}$ de esta ecuación debe encontrarse todavía en la lista anterior, pero ahora se sabe que $p$ debe ser un factor de 2 ($a_0$ es ahora 2) y que $q$ debe ser un factor de 2 ($a_n$ es ahora 2). Las únicas posibilidades son:

$$\frac{p}{q}: 2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}.$$

Debido a que 1, - 1 y – 2 ya se han descartado. Ahora intentemos con $\frac{p}{q} = 2$. Aunque se encontró que 2 es una solución debe probarse nuevamente puesto que podría ser una solución de la nueva ecuación polinómica $2x^3 + x^2 + 4x + 2 = 0$, es decir, podría ser una raíz doble de la ecuación original.

$\frac{p}{q}: 2$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ & & 4 & 10 & 28 \\ \hline & 2 & 5 & 14 & 30 \end{array}$$

Por consiguiente, 2 no es una raíz doble. Ya que los signos son todos positivos, 2 es una cota superior para las siguientes soluciones reales de la ecuación. Las únicas posibilidades restantes son $-\frac{1}{2}$ $y$ $\frac{1}{2}$.

$\frac{p}{q} = -\frac{1}{2}$

$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{1}{2} & 2 & 1 & 4 & 2 \\ & & -1 & 0 & -2 \\ \hline & 2 & 0 & 4 & 0 \end{array}$$

Así, $f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$, de modo que $-\frac{1}{2}$ es una solución y, por el teorema del factor, $\left(x + \frac{1}{2}\right)$ es un factor de $2x^3 + x^2 + 4x + 2$ con $2x^2 + 4$ como el otro factor. De esta forma se ha resuelto la ecuación original en: $f(x) = (x-2)\left(x + \frac{1}{2}\right)(2x^2 + 4)$ y se sabe que $2$ y $-\frac{1}{2}$ son las dos soluciones racionales. Procédase ahora a resolver la ecuación cuadrática $2x^2 + 4 = 0$.

$$2x^2 + 4 = 0$$
$$2x^2 = -4$$
$$x^2 = -2$$
$$x = \pm\sqrt{-2} = \pm\sqrt{2}\, i$$

Las cuatro soluciones de la ecuación original son $2, -\frac{1}{2}, \sqrt{2}\, i, y - \sqrt{2}\, i$. Obsérvese que se ha obtenido una solución real negativa, una solución real positiva y dos soluciones complejas.

***Ejercicios.*** Determina las soluciones para cada ecuación polinomial.

1. $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 0$ , completa la división sintética.

$$\frac{p}{q} =$$

| | | | | |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 1 | 6 | 12 | 8 |
| | | _ | _ | _ |
| | 1 | | | 27 |

| | | | | |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| -2 | 1 | 6 | 12 | 8 |
| | | _ | _ | _ |
| | 1 | | | 0 |

Continúa con las divisiones sintéticas para que obtengas las demás soluciones.

2. $x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6 = 0.$, completa la división sintética.

| | | | | | |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 1 | 5 | 5 | -5 | -6 |
| | | | | | |
| | 1 | | | | 0 |

Continúa con las divisiones sintéticas para que obtengas las demás soluciones

***Estrategia didáctica 3. Graficación de funciones polinomiales.***

***Para el alumno:*** Actividad de exploración para conocer acerca del método de Ruffini.

QR-4. Método de Ruffini.

***Actividad 1.*** *(Extraclase):* Visita el código QR, para conocer acerca del método de Ruffini. Una vez que hayas entrado saca una copia con la información relativa al tema y cópiala en tu cuaderno ya que ésta la vas a usar en las siguientes actividades.

***Actividad 2.*** Para graficar funciones polinomiales es conveniente seguir el procedimiento siguiente:

1. Resolver la ecuación que resulta de igualar a cero la función es decir $f(x) = 0$ ó $y = 0$.
2. Factorizar el polinomio por el método de Ruffini.
3. Hacer una tabla de Ruffini.
4. Tomar en cuenta los intervalos en los que la función está arriba del eje "$x$" y abajo del eje "$x$" para ver cuando la función es creciente o decreciente.
5. Hacer un bosquejo de la función en esos intervalos.

***Ejemplo 1.***

Traza la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.
Para poder graficar la función polinomial se obtienen sus ceros teniendo en cuenta que los ceros de la función coinciden con los puntos donde la curva corta al eje "$x$", es decir, son los puntos de intersección con el eje "$x$" por lo tanto en el paso "1", se necesita resolver la ecuación: $0 = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, a continuación, se ven los divisores del término independiente $6$ que en este caso son: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.
Se construye una tabla de Ruffini:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | -6 | 11 | -6 |
| $x = 1$ | | 1 | -5 | 6 |
| $(x-1) = 0$ | 1 | -5 | 6 | 0 |

Entonces $0 = (x-1)(x^2 - 5x + 6)$

Factorizando $x^2 - 5x + 6$.
Por lo tanto $0 = (x-1)(x-2)(x-3)$

| | | |
|---|---|---|
| $x - 1 = 0$ | $x - 2 = 0$ | $x - 3 = 0$ |
| $x = 1$ | $x = 2$ | $x = 3$ |

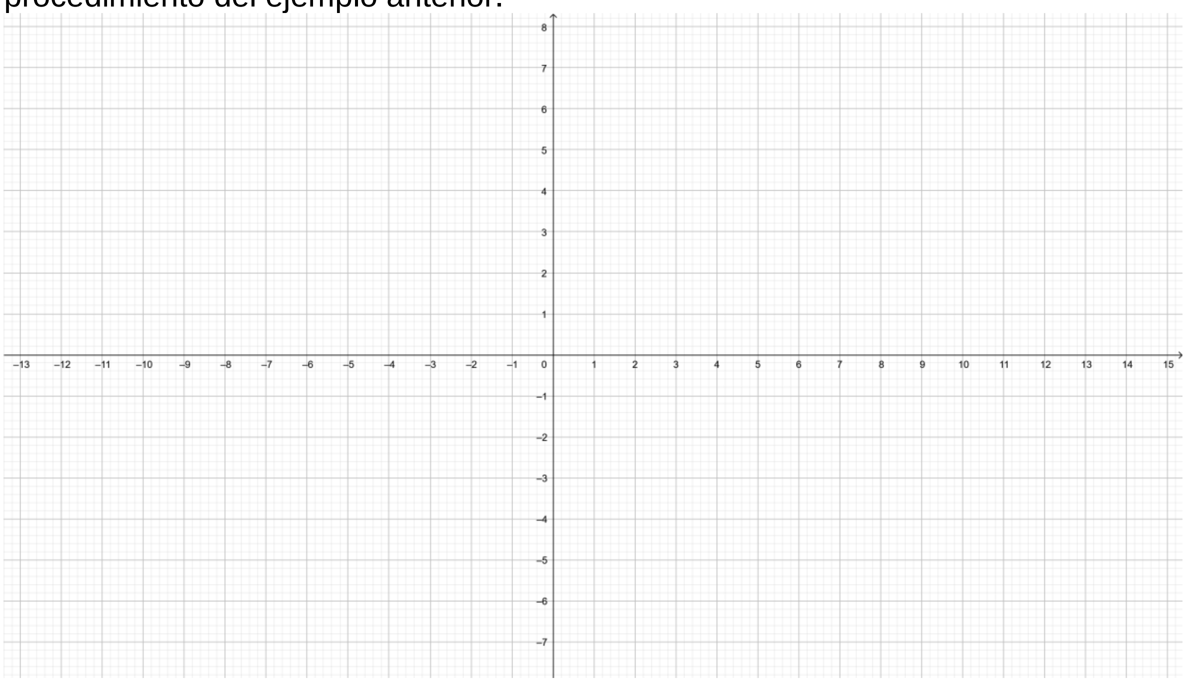
Luego los puntos de intersección son: $(1,0), (2,0)\ y\ (3,0)$ y considerando los intervalos en los cuales la función es Creciente y Decreciente se puede trazar una gráfica.

Investiga cual es la definición de función creciente y función decreciente y a continuación escribe los resultados de la investigación con tus palabras:

______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________
_____________________________________________________________________________.

***Ejercicios para el alumno.***

Traza la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 2x^2 - x - 2$ utilizando el mismo procedimiento del ejemplo anterior.



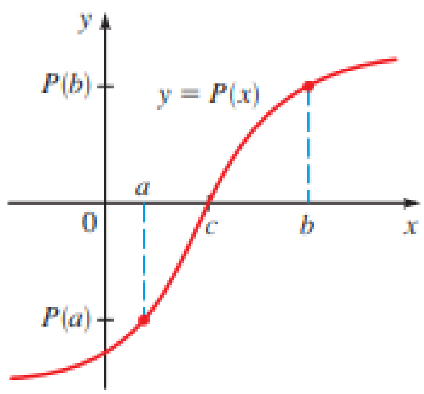

- **Uso de ceros para graficar funciones polinomiales.**

    - Si $P$ es una función polinomial, entonces $c$ se denomina cero de $P$.
    - Si $P(c) = 0$. En otras palabras, recuerda lo que habíamos mencionado los ceros de $P$ son las soluciones de la ecuación polinomial $P(x) = 0$. Observe que si $P(c) = 0$, entonces la gráfica de $P$ tiene un punto de intersección $x$ en $x = c$, de modo que los puntos de intersección $x$ de la gráfica son los ceros de la función.

- **Ceros reales de funciones polinomiales.**

Si $P$ es una polinomial y $c$ es un número real, entonces los siguientes son equivalentes:

1. $c$ es un cero de $P$.
2. $x = c$ es una solución de la ecuación $P(x) = 0$.
3. $x = c$ es un factor de $P(x)$.
4. $c$ es un punto de intersección con el eje $x$ de la gráfica de $P$ $(c, 0)$.




Para hallar los ceros de una polinomial $P$, factorizamos y usamos la Propiedad del Producto Cero. Por ejemplo, para hallar los cerros de $P$, factorizamos $P$ para obtener
$P(x) = x^2 + x - 6$.
$P(x) = (x + 3)(x - 2)$.
Desde esta forma factorizada podemos ver fácilmente que
1) $2$ es un cero de $P$.
2) $x = 2$ es una solución de la ecuación $x^2 + x - 6 = 0$
3) $(x - 2)$ es un factor de $x^2 + x - 6$.
4) $(2{,}0)$ es un punto de intersección con el eje $x$ de la gráfica de $P$. Los mismos datos son verdaderos para el otro cero, $-3$.

***Estrategia didáctica 4. Problemas de Aplicación. (Cierre).***

***Aprendizajes:***

Reconoce a las funciones como modelos de variación de fenómenos naturales, económicos y sociales.

***Para el alumno:*** Actividad de exploración para conocer acerca de la aplicación de la función polinomial.

QR-5. Función polinomial. Ejercicios de aplicación.

***Actividad 1.*** *(Extraclase):* Visita el código QR, para conocer acerca de las aplicaciones de la función polinomial. Una vez que hayas entrado saca una copia con la información relativa al tema y cópiala en tu cuaderno ya que ésta la vas a usar en las siguientes actividades.

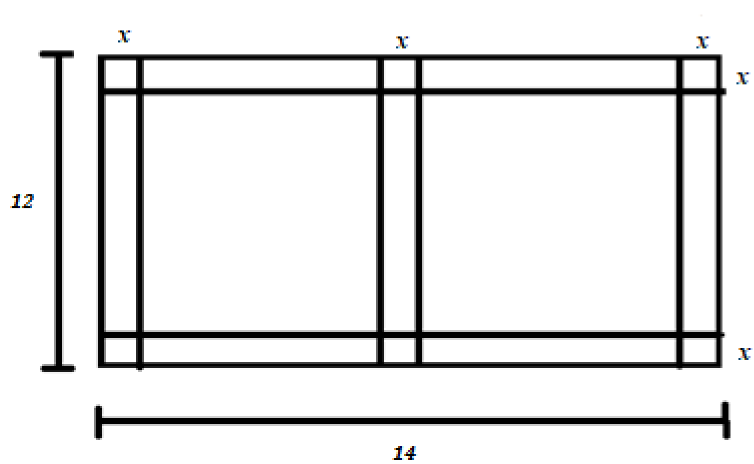
***Actividad 2. Problemas de aplicación.***

1. ***Resuelve los siguientes problemas con el apoyo de tu profesor.***

***Problema 1.*** Construye una caja con tapa para guardar clips con una hoja de papel de 12 por 14 cm.

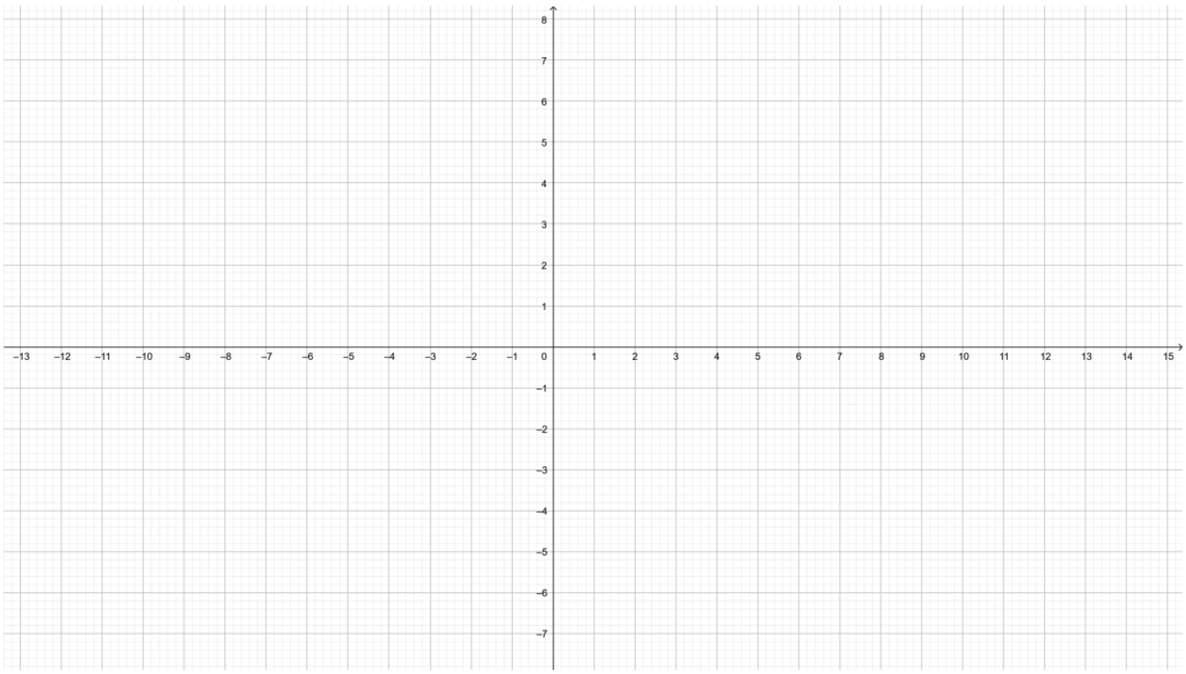
Determinar la función que dé el volumen en términos de $x$.

Vamos a realizar un dibujo de la caja en el papel.




Evalúa la función con $x = 1, x = 2, x = 3, x = 4, x = 5, x = 6$.

Construye la gráfica con lápiz y papel utilizando el siguiente plano cartesiano. Verifica tu bosquejo con GeoGebra.




Qué valor de $x$ produce el mayor volumen.

Ahora evalúa con: $x = 2.1, x = 2.2, x = 2.3, x = 2.4, x = 2.5$.

¿Qué puedes observar?

_______________________________________________________________________

_______________________________________________________________________

______________________________________________________________________.

Exacto el valor esta entre $2.1 \ y \ 2.2$.

Ahora evalúa con $x = 2.11, x = 2.12, x = 2.13, x = 2.14, x = 2.15$.

Muy bien el valor más cercano de $x$ al volumen máximo es con $2.15$.

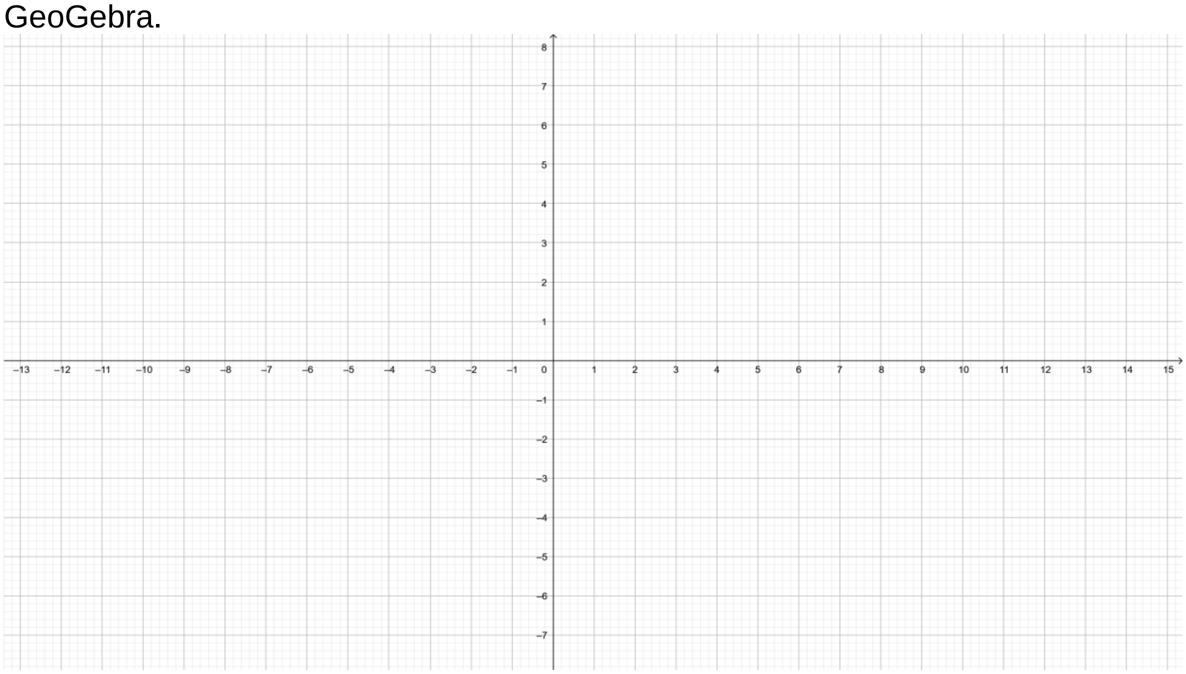
¿Cuál es el máximo volumen? ________________________________________.

________________________________________________________________.

***Problema 2.*** Un terreno rectangular en frente de una playa va a ser bardeado, no se cerrará el terreno del lado de la playa, se utilizarán dos materiales diferentes para el lado paralelo a la playa cuesta $400 y para los otros dos lados $200 el metro lineal, se va a invertir $200,000.00

Expresar el largo del terreno en términos del ancho: ________________________.
Área en términos del ancho: ____________________________________________.
Variable independiente: ______________________________________________.
Variable dependiente: ______________________________________________.

Realiza la gráfica de la función utilizando lápiz y papel y verifícalo utilizando GeoGebra.



¿Para qué valor del ancho tenemos la máxima área?

______________________________________________

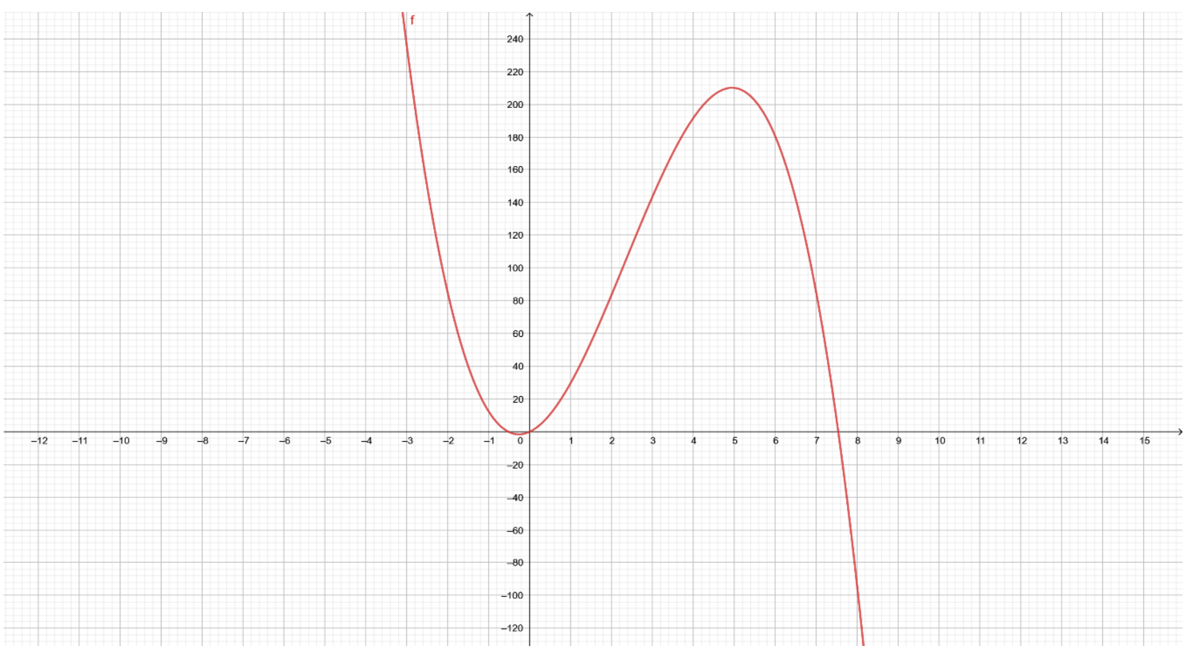
Dominio y rango de la función:

$D_f =$

$R_f =$

Grado de la función: ________________.

***Problema 3.*** La función $y = -3x^3 + 21x^2 + 12x$ indica las utilidades obtenidas por una empresa de juegos mecánicos.




$y =$ ganancias (millones de pesos).
$x =$ meses de servicio.

Recuerda que estamos en un problema de la vida real por lo tanto ¿deberás tomar en cuenta los valores negativos? Argumenta tu respuesta.

______________________________________________

______________________________________________

¿Qué significan los ceros de la función del problema?

_________________________________________________________________________

_______________________________________________________________________.

La función es de grado: __________.

Domino y Rango de la función del problema

$D_f =$

$R_f =$

***Problema 4.*** El volumen de una esfera es directamente proporcional al cubo de su radio. ¿Cuál es la función polinomial que describe el comportamiento del volumen?

***Problema 5.*** El perímetro de un rectángulo de ancho $\boldsymbol{x}$ y altura $\boldsymbol{h}$ es de 120 m.

a) Determina el área $\boldsymbol{A}$ del rectángulo en términos de $\boldsymbol{x}$.
b) ¿Cuál es el dominio de la función del problema?
c) ¿Cuál es su rango de la función del problema?

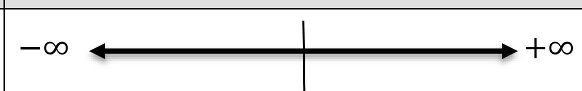
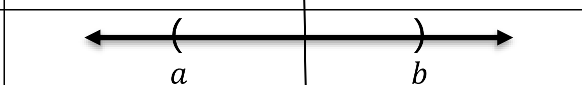
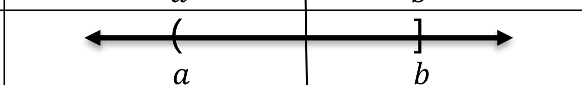
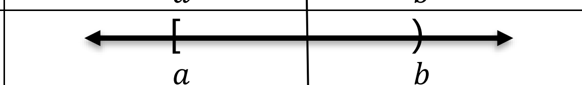
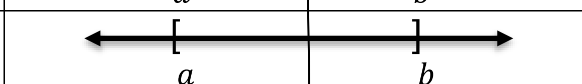
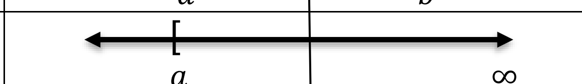
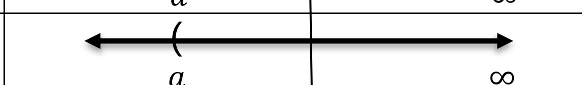
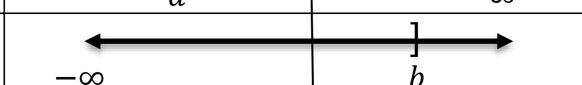
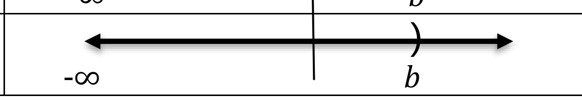
***Problema 6.*** Encuentra un polinomio $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ de grado 7 con coeficientes principal 1, tal que el número -3 sea un cero de multiplicidad 2 y 0 sea un cero de multiplicidad 5.

### 4. Materiales diversos de apoyo.

### A. Intervalos.

La expresión $a \neq b$ significa que "$a$" no es igual a b.
Esto es que:
$a > b$, que se lee "$a$ mayor que $b$", cuando la diferencia $a - b$ es positiva.
$a < b$, que se lee "$a$ menor que $b$", cuando la diferencia $a - b$ es negativa.
La notación $a \geq b$, que se lee "$a$ es mayor o igual que $b$".
La notación $a \leq b$ que se lee "$a$ es menor o igual que $b$".

Los intervalos que podemos trabajar en las funciones son los siguientes, junto con tu profesor analiza cada notación:

| Nombre | Gráfica | Notación |
|---|---|---|
| Los reales |  | $(-\infty, +\infty) = \mathcal{R}$ |
| Abierto |  | $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$ |
| Abierto-Cerrado |  | $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$ |
| Cerrado-Abierto |  | $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$ |
| Cerrado |  | $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ |
| Cerrado-Infinito |  | $[a, \infty) = \{x \mid x \geq a\}$ |
| Abierto-Infinito |  | $(a, \infty) = \{x \mid x > a\}$ |
| Infinito-Cerrado |  | $(-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\}$ |
| Infinito-Abierto |  | $(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$ |

### *B. Problemas adicionales sobre las funciones polinomiales.*

***Problema 1.*** Las dimensiones de una caja son 1, 2 y 3 cm., de ancho, largo y alto, respectivamente. Si se modifican las dimensiones aumentando cada lado de la caja en la misma cantidad y como consecuencia de esto el volumen es de $60\ cm^3$.

a) Escribe la ecuación que resuelve el problema.
b) ¿En cuánto se incrementa cada lado?

***Respuesta:*** (a) $x^3 + 6x^2 + 11x - 54 = 0$; (b) Cada lado se aumenta en $2\ cm$.

***Problema 2.*** Se necesita construir una caja de cartón sin tapa de diferentes capacidades. Para su construcción se utilizan láminas que tienen la forma de un cuadrado de 10 cm., de lado.

a) ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la caja?
b) Obtén una función $V(x)$ que relacione a la caja con su volumen.
c) Realiza un bosquejo de su gráfica.
d) ¿Para qué valores de la variable $x$ se obtiene un volumen máximo

***Respuesta:*** (a) Las dimensiones de la caja deben ser se alto $x, 10 - 2x$ de largo y de ancho. (b) $V(x) = x(10 - 2x)^2 = 4x^3 - 40x^2 + 100x$. (d) El valor máximo del volumen de la caja se observa que se aproxima a 74.05 para valores cercanos a $x = 1.7\ cm$.

***Problema 3.*** Conocida la función $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 14x - 15$, obtener.

a) El número máximo de sus raíces.
b) La función en forma factorizada.
c) Los ceros de la función.

***Respuesta:*** (a) El número máximo de raíces es 3. (b) La función en forma factorizada es: $f(x) = (x + 1)(x + 3)(2x - 5)$. (c) Las intersecciones con los ejes cartesianos son: $(-3,0), (-1,0), \left(\frac{5}{2}, 0\right)\ y\ (0, -15)$.

***Problema 4.*** Sea la función polinomial $P(x) = x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 12x$, obtener:

a) Los ceros de la función.
b) El bosquejo de su gráfica.
c) Su dominio.

***Respuesta:*** (a) $x = -3, -2, 0\ y\ 2$. (c) $D_f = \mathcal{R}$.

### 5. Formas e instrumentos de evaluación.

Sin duda, una de las cuestiones más importantes de la enseñanza, es la evaluación de lo aprendido por los estudiantes. En nuestro caso, esta evaluación debe ser continua y en estrecha observancia de los dos principios básicos del constructivismo, a saber, la *diferenciación progresiva* y la *reconciliación integradora* de los nuevos contenidos con los que ya traía el aprendiz. Por ello es por lo que, a lo largo del desarrollo de esta estrategia didáctica, se deberá ir determinando la adecuación y pertinencia de las construcciones conceptuales de los alumnos. Al final de la autoevaluación, encontraras las respuestas a cada sección con la finalidad de que te puedas autoevaluar.

## Autoevaluación.

1. Una función queda definida como:

a) La correspondencia que asocia a cada elemento de un conjunto $A$ uno y solo un elemento de un conjunto $B$.
b) Correspondencia entre los elementos de un junto $A$ y un conjunto $B$.
c) Relación entre dos conjuntos.
d) El conjunto de todas las $x$ que se corresponden con todas las $y$.

2. Es una función polinomial:

a) $f(x) = 2x + sen\ x$
b) $f(x) = 3x^2 + x + 1$
c) $f(x) = \frac{3}{x^3}$
d) $f(x) = logx$

3. La ecuación $3x^2 - 6x^4 + x^6 = 0$ ¿cuántas raíces nulas tiene?

a) $6$
b) Ninguna
c) $2$
d) $3$

4. Si se tiene la función $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 4x - 3$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$ es igual a:

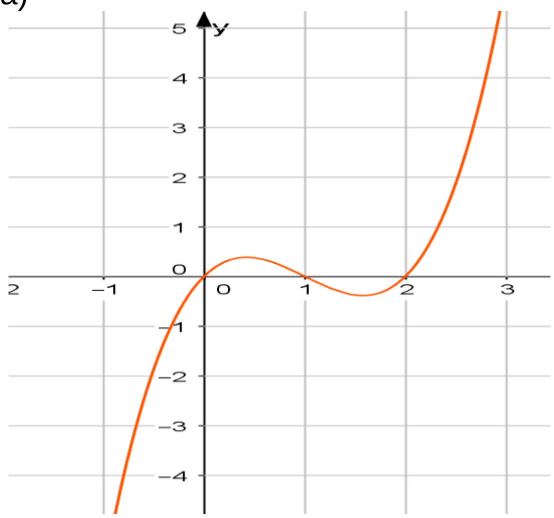
a) $2$
b) $-1$
c) $\frac{3}{2}$
d) $\frac{1}{2}$

5. Los ceros de la función $f(x) = x(x-3)(x+1)^2$.

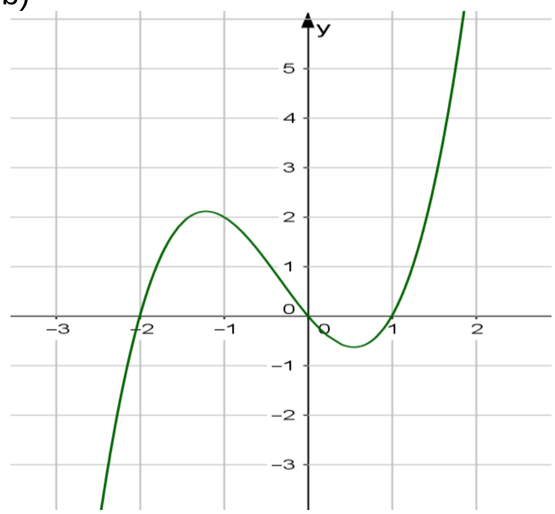
a) $0, 2\ y\ 3$
b) $-1, 0\ y -3$
c) $-1, 0\ y\ 3$
d) 0, 1 y 1

6. La grafica de la función $f(x) = x(x-2)(x+1) es$:

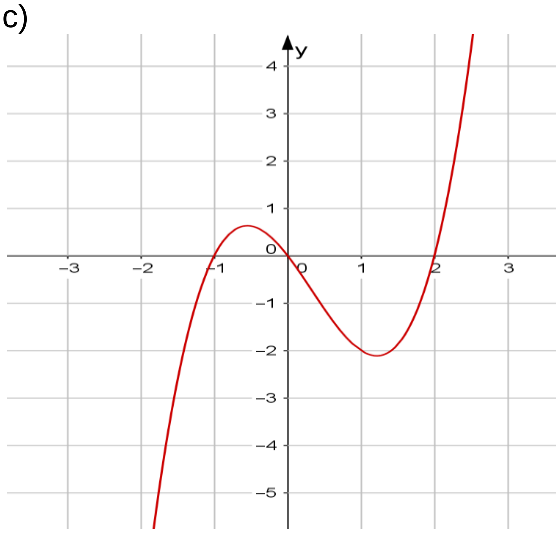
a)



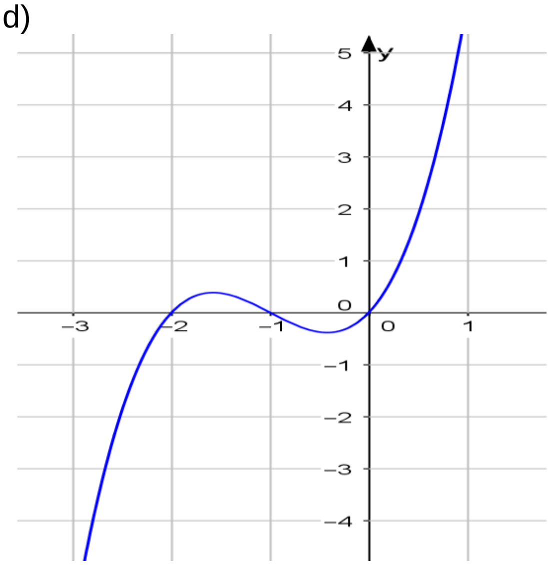

b)




c)




d)




7La ecuación que tiene raíces $0, -1, 2, 4$ es:

a) $x(x-1)(x+2)(x-4) = 0$
b) $x(x+1)(x-2)(x-4) = 0$

c) $(x+1)(x-1)(x+2)(x-4)=0$
d) $x(x-1)(x+2)(8x-4)=0$

8. Los ceros de la función $f(x)=\ x^3+2x^2-x-2$.

a) $0, -2\ y\ 3$
b) $-2, -1\ y\ 1$
c) $-3, -1\ y\ 2$
d) $-1, 2\ y\ 3$

9. La base de una caja es cuadrada, la altura sumada con el perímetro de la base es de 17 dm. ¿Cuál es la altura de la caja si su volumen es de 45 dm$^3$?

a) 2.56034 dm y 5 dm.
b) 5 dm y 6.36059 dm.
c) 4 dm y 5.45067 dm.
d) 3.456 dm y 5.45067 dm.

10. El término principal de la función polinomial $f(x)=2x+3x^4-10x^{-5}+10$ es:

a) $2$
b) $10$
c) $3x^4$
d) $-10x^{-5}$

| **Tabla de respuestas de la autoevaluación.** | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Funciones polinomiales.* | | | | | | | | | |
| 1. a | 2. b | 3. c | 4. b | 5. c | 6. c | 7. b | 8. b | 9. b | 10. c |

### 6. Valoración del profesor de los resultados obtenidos.

En esta sección se incluye una lista de cotejo para que todos podamos aplicarla al final de su puesta en escena par ser llenada por los alumnos de cada grupo.

<table>
<tr><td colspan="3">MATERIA: MATEMÁTICAS IV.<br>NIVEL: BACHILLERATO.<br>UNIDAD 1: FUNCIONES POLINOMIALES.<br>MATERIAL: CUADERNO DE TRABAJO.<br>Nombre: ______________________________________________. Grupo: ________.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Lista de cotejo para evaluar los resultados obtenidos en la puesta en escena de la Unidad 1. Funciones polinomiales.</td></tr>
<tr><td>INDICADORES DE LOS APRENDIZAJES INCLUIDOS EN LA UNIDAD 1.</td><td>SI</td><td>NO</td></tr>
<tr><td>1. Se exploran diferentes relaciones para determinar si corresponden a una función, la simboliza y distingue el dominio y el rango.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2. Se comprende el significado de la notación funcional, la utiliza para representar y evaluar funciones polinomiales.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3. Se identifican a partir de sus gráficas las funciones y las que no son.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4. Se usa la notación de intervalos para representar dominio y rango de una función.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5. identifican los términos que conforman a la función $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>6. Se aplica la división sintética, el teorema del residuo y el teorema del factor, para determinar las raíces enteras y racionales de una ecuación polinomial.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>7. Se construye una función polinomial a partir de las raíces de su ecuación.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>8. Se bosqueja la gráfica de una función polinomial.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>9. Se resuelven problemas en diferentes contextos que se modelen con funciones polinomiales</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>INDICADOR</td><td>A</td><td>R</td></tr>
<tr><td>AUTOEVALUACIÓN.</td><td></td><td></td></tr>
</table>

## 7. Bibliografía y/o Fuentes Consultadas.

Ruiz, J. (2009). *Matemáticas IV.* México. Editorial Patria.

Dennis, Z. (2012). *Precálculo con avances de Cálculo.* (5ª ed.) México: McGraw-Hill.

Demana, F., Waits, B., Foley, G. y Kennedy, D. (2007). *Precálculo, Gráfico, Numérico, Algebraico.* México: Pearson Addison Wesley.

## 8. Bibliografía Virtual. Sitios WEB y Fuentes Relevantes.

El portal académico del CCH. (2020). Recuperado de: http://portalacademico.cch.unam.mx/. Contiene guías para el profesor, material interactivo, así como textos de interés pedagógico.

Dirección General Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades. (2016). *Programas de Estudio, Mapa curricular del Plan de estudios. Recuperado de* https://www.cch.unam.mx/programasestudio

The Visual Brain (14 de agosto de 2021). *Teoría del Aprendizaje Significativo de David P. Ausubel.* Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=NJQpyLbVMkQ

**SITIOS WEB.**

QR-1. Pérez, J y Gardey, A. (2017). *Definición de función matemática.* Recuperado de: https://definicion.de/funcion-matematica/

QR-2. Matemáticas profe Alex. (2 de diciembre de 2020). *Qué es función* | *Concepto de función.* YouTube. https://youtu.be/LI7xfe3HoZE

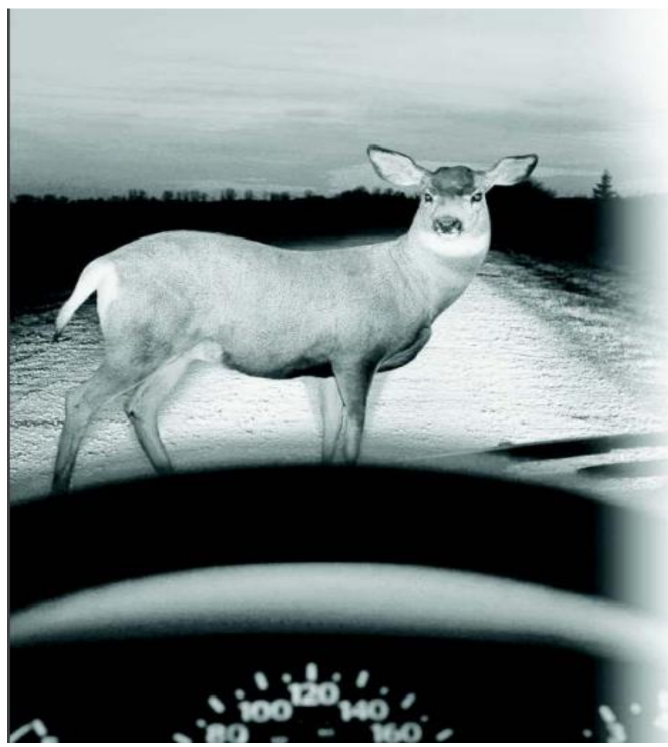
QR-3. KhanAcademyEspañol. (2 de diciembre de 2020). *División sintética.* YouTube. https://youtu.be/YQZiGicU8E8

QR-4. Math4all. (8 de diciembre de 2020). *Factorización de polinomios de grado 2, 2, 4. (método de Riffini).* YouTube. https://youtu.be/ozzalwEBhw0

QR-5. Matemóvil. (8 de diciembre de 2020). *Función polinomial -Nivel 3- Ejercicios de aplicación.* YouTube. https://youtu.be/u0Gs2r-yk1g

MATEMÁTICAS IV

# Unidad 2. Funciones Racionales y Funciones con Radicales.




**CUADERNO DE TRABAJO.**

**Propósitos de la unidad.**

Al finalizar, el alumno:
Modelará algunas situaciones que dan lugar a funciones racionales y con radicales, analizará una gráfica para identificar su dominio, rango, asíntotas y relacionar estas características con la situación problemática planteada. **Tiempo: 15 horas.**

## 1. Presentación de la unidad 2.

En esta unidad analizaremos las funciones racionales y las funciones con radicales para identificar dominio, rango, asíntotas, ceros y huecos, graficas asociadas a la función, así como problemas de aplicación.

Esta unidad se desarrolla a través de estrategias didácticas[1], su diseño es una de las principales tareas del profesor contemporáneo, independientemente de la interpretación que del aprendizaje se tenga. Con el propósito de posibilitar un mejor aprendizaje, o sea, un aprendizaje que fuese adquiriendo un significado propio en los procesos prácticos cercanos a los estudiantes, con vistas a alcanzar los objetivos actitudinales, conceptuales y procedimentales del área de matemáticas del CCH y, específicamente, aquellos que atañen a esta unidad temática.

Más aún, nuestra propuesta agrega la computadora como uno de sus recursos esenciales, dado que con los medios de representación que ofrece, el estudiante tiene la posibilidad de construir y reconstruir el conocimiento matemático "viendo" y "manipulando", literalmente, sus construcciones, las de sus compañeros, así como la de los matemáticos que lo han ido estableciendo en la historia de las matemáticas. El desarrollo de la unidad se lleva a cabo con 6 estrategias didácticas e incluye: una autoevaluación, materiales de apoyo diversos y la bibliografía utilizada en su elaboración.

## 2. Actividades de aprendizaje.

Éstas se llevarán a cabo tomando como base los aprendizajes de la unidad 2, a través de *estrategias didácticas*, utilizando diversas actividades y recursos mismas que incluyen los aprendizajes, códigos QR, actividades diversas y el uso de GeoGebra, con el fin de alcanzar los propósitos de esta unidad.

## 3. Puesta en escena de la unidad 2. Funciones Racionales y con Radicales

Las estrategias didácticas que se presenta a continuación han sido diseñadas para que los estudiantes logren un aprendizaje significativo de los contenidos actitudinales, conceptuales y procedimentales de la *Unidad Temática 2*, del curso

[1] Cf. Anexo 1.

de Matemáticas IV, con vistas a lograr los aprendizajes de ésta. Esta unidad didáctica se ha estructurado conforme a las siguientes *estrategias didácticas.*

***Estrategia didáctica 1. Funciones racionales*. *(Inicio).***

***Aprendizajes:*** Explora situaciones que se modelan con funciones racionales.

QR-1. Función Racional

***Actividad 1. (Extraclase):*** Visita el código QR-1, para conocer acerca de las Funciones Racionales. Una vez que hayas realiza un reporte en tu cuaderno acerca de ¿cómo se realiza la gráfica de una función racional? y ¿cómo se determina el dominio y rango de éstas?

***Actividad 2. Problemas de aplicación.***

***Problema 1.*** Supongamos que un automóvil deportivo viaja a una velocidad promedio de 180 km/hora, efectúa el recorrido entre dos poblados en 1 hora. ¿En cuánto tiempo efectuaría el recorrido viajando a una velocidad de $x$ k/h?, es decir en: ¿1 km/h? ¿2 Km/hora? ¿3 km/h?, etc.

Observemos que el tiempo está en función de la velocidad, entonces tenemos que:

a) La variable independiente es:

___

b) La variable dependiente es:

___

Considerando los datos, realicemos una tabla que represente lo que sucede con las variables.

| Velocidad (km/h) | Tiempo (horas) |
| --- | --- |
| 1 | 180 |
| 2 | 90 |
| 3 | __ |
| 100 | __ |
| 180 | 1 |
| $x$ | __ |

En todos los casos, ¿cuál es el producto de la velocidad por el tiempo?

______________________________________________

El modelo matemático que representa el problema para $x$ km/h es:

$$t(x) = \frac{180}{x}$$

¿Qué representa $x$? ______________________________________________

¿Qué representa $t(x)$? ______________________________________________

¿Tendrá sentido que $x$ tome valores negativos? Argumenta tu respuesta.

______________________________________________

______________________________________________

¿Tendrá sentido que $x$ tome valor de cero? Argumenta tu respuesta.

______________________________________________

______________________________________________

Por tanto ¿Cuál es la restricción para los valores que puede tomar $x$ en este problema?

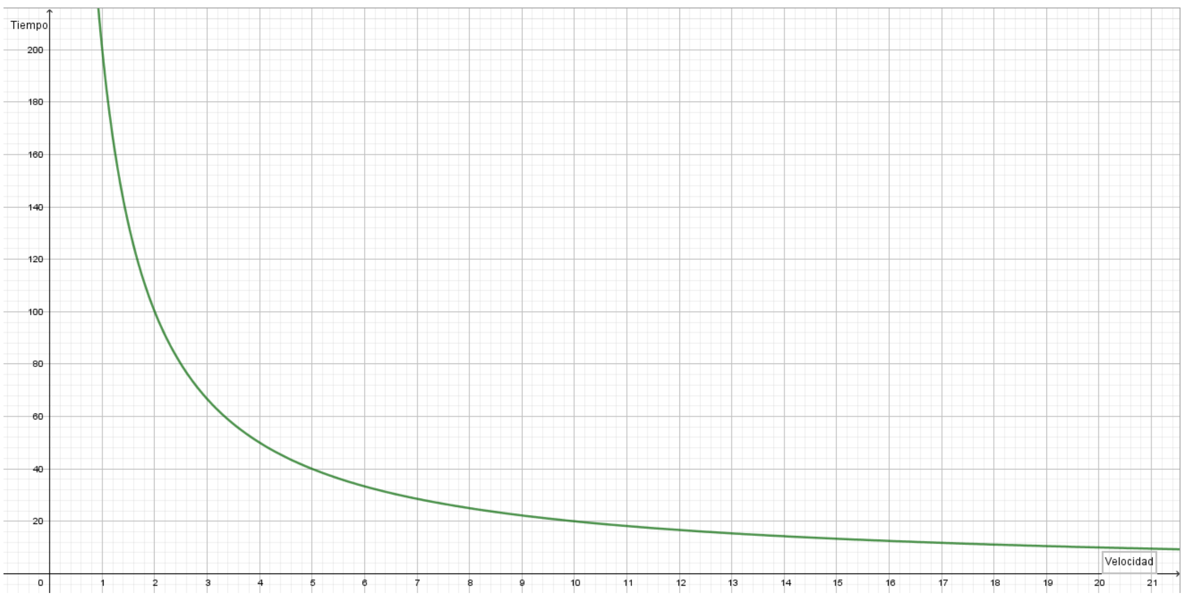
______________________________________________

En forma de desigualdad, tenemos que:

$$t(x) = \frac{180}{x} \quad \text{con } x > 0$$

$x$ debe ser mayor a cero.

Al graficar la función se tiene:




Responde lo siguiente basándote en la gráfica anterior.

¿Si la velocidad aumenta el tiempo? _______ ¿si la velocidad disminuye el tiempo? ___________.

El dominio $D_t$ de la función $t(x) = \frac{180}{x}$ con $x > 0$, es el conjunto de todos los valores que puede tomar la velocidad $x$ (variable independiente), en este caso por todos los números reales que son mayores que cero, por lo tanto, el dominio se representa por:

$D_t = \{x \in \mathcal{R}: x > 0\}$. Se lee: El dominio de la función es igual al conjunto de números reales que son mayores que cero, también lo podemos escribir de la siguiente manera $D_t = (0, \infty)$.

El rango son los valores que toma el tiempo $t$ (variable dependiente), en el problema es por todos los números reales que son mayores que cero, por lo tanto, el rango se representa por:

$R_t = \{y \in \mathcal{R}: y > 0\}$**.** Se lee: El rango de la función es igual al conjunto de números reales que son mayores que cero, También se puede escribir de la siguiente manera $R_t = (0, \infty)$.

El análisis del problema nos ha llevado a una función que tiene la forma:

$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, llamada ***función racional***, donde: $g(x)$ y $h(x)$ son polinomios cualesquiera y $h(x) \neq 0$. Recuerda que la división entre 0 no está definida.

Retomando el problema anterior ¿qué polinomio representa $g(x)$ y cuál $h(x)$?, además ¿de qué grado son cada uno de ellos?:

$g(x) =$ ______________________________________________

$h(x) =$ ______________________________________________

***Problema 2.***

Se va a pintar una barda del CCH Oriente para esto se contrataron trabajadores que cobraran $1200 y se comprometen a pintar la barda en 9 horas. Pero ha surgido un problema renunciaron varios trabajadores, se tardarán más en pintar la barda, el jefe de mantenimiento decide que pagará menos porque tardaran más, el desea calcular cuánto tardaran en pintar la pared dependiendo de lo que les quiere pagar, suponiendo que todos trabajan al mismo ritmo.

a) La variable independiente es:

---

b) La variable dependiente es:

---

Considerando los datos, realicemos una tabla que represente lo que sucede con las variables.

| Costo ($) | Tiempo (horas) |
|---|---|
| 1200 | 9 |
| 600 | 18 |
| 300 | 36 |
| $x$ | $\frac{10800}{x}$ |

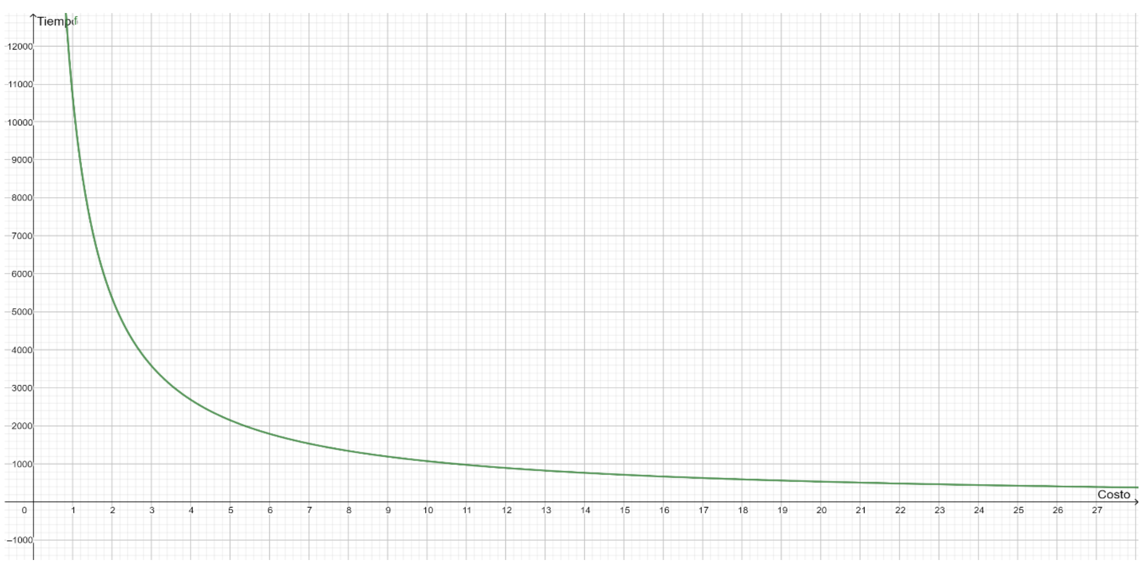
En todos los casos, ¿cuál es el producto del costo por el tiempo es?

---

El modelo matemático que representa el problema es:

$$t(x) = \frac{10800}{x} \quad \text{con } x > 0$$

Al graficar la función se tiene:



Observa que, si el número de trabajadores disminuye aumenta el tiempo para pintar la barda, aumenta el número de trabajadores disminuye el tiempo para pintar la barda.

El dominio $D_t$ de la función $t(x) = \frac{10800}{x}$ con $x > 0$, es el conjunto de todos los valores que puede tomar el costo $x$ (variable independiente), en este caso por todos los números reales que son mayores que cero, por lo tanto, el dominio se representa por:

$$D_t = \_\_\_\_\_\_$$

El rango son los valores que toma el tiempo $t$ (variable dependiente), en el problema es por todos los números reales que son mayores que cero, por lo tanto, el rango se representa por:

$$R_t = \_\_\_\_\_\_\_$$

Después de estos dos problemas y de haber definido el dominio de la función racional puedes mencionar ¿Cuál es la restricción para las funciones racionales?

______________________________________________________________________

***Estrategia Didáctica 2. Elementos y gráficas de una función racional. (Desarrollo).***

***Aprendizajes:***

1. Identifica los elementos de una función racional: ceros, asíntotas verticales y huecos, dominio y rango para graficarla.

2. Realiza gráficas de funciones que tengan asíntota horizontal diferente al eje de las $x$, asíntotas verticales, ceros, huecos, dominio y rango.

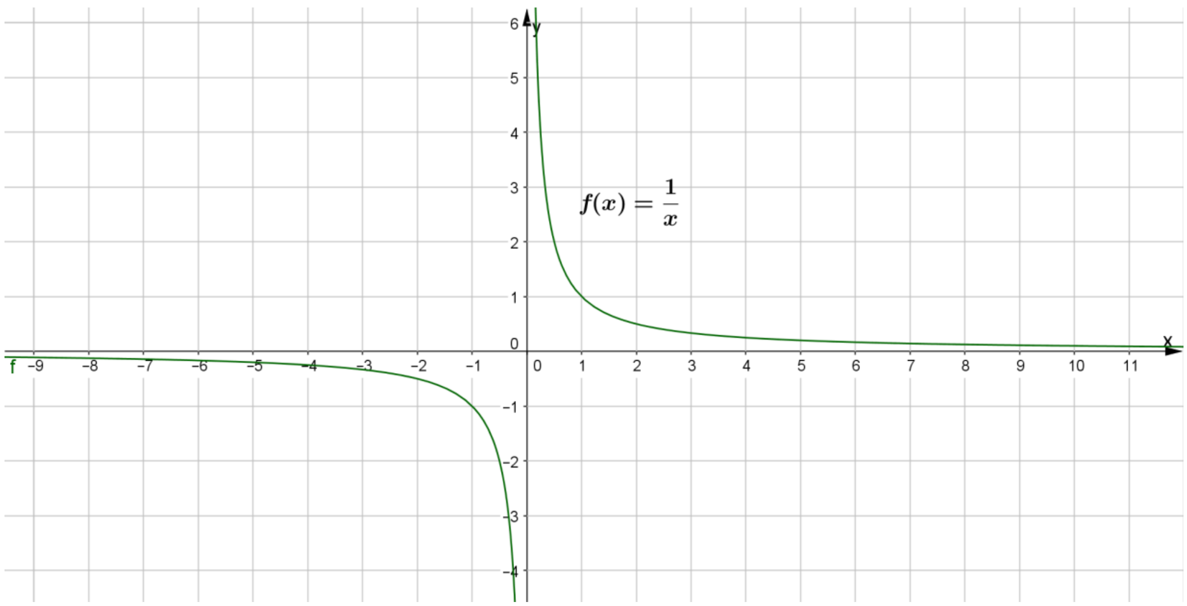
Analizaremos las funciones racionales de la forma $\boldsymbol{f(x) = \frac{a}{x^n}}$ , en donde $a$ es un número real diferente de cero, $n$ es un entero positivo, y $x \neq 0$.

***Ejercicio 1.*** Empecemos con una función de la forma anterior es: $f(x) = \frac{1}{x}$ con $x \neq 0$, realicemos un bosquejo de su gráfica, para ello se le dan valores a $x$ cercanos a cero, por la derecha y por la izquierda (recuerda que no puedes dar el valor de $x = 0$ ya que la división entre 0 no está definida), de $-10$ $a$ $10$.

¿Qué pasa cuando le das a $x$ el valor de cero?

| $x$ | -10 | -5 | -4 | -2 | -1 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{5}$ | 0 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 4 | 5 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | -0.1 | -0.2 | -0.25 | - 0.5 | - 1 | -2 | -5 | | 5 | -2 | 1 | 0.5 | 0.25 | 0.2 | 0.1 |

Graficando con GeoGebra se obtiene:




A partir de la Tabla y de la gráfica de la función puedes determinar:

La gráfica está formada por dos curvas, que comprenden los intervalos $(-\infty,$ ___) y (0, _______).
Cuando $x$ toma valores positivos y se va acercando a cero, la función $f(x)$ crece indefinidamente.
Cuando los valores de $x$ aumentan positivamente, los valores de la función son más pequeños, se van acercando a __________.
Cuando $x$ toma valores negativos y se va acercando a cero, la función decrece indefinidamente.
Cuando $x$ toma valores muy pequeños cercanos a cero, los valores de la función $f(x)$ se van acercando a ________.

¿Qué pasa con las curvas que forman la gráfica respecto a los ejes "$x$" e "$y$"? _____________________________________________________________________________________________________________________________________________________________________________.

Exacto se acercan las curvas a los ejes tanto "$x$" como "$y$".

Las rectas a las cuales la gráfica se acerca, pero no las toca son llamadas ***asíntotas a la curva.*** En este caso la asíntota vertical es el eje "$y$" la asíntota horizontal es el eje "$x$".

Una curva puede tener asíntota horizontal y asíntotas verticales.

Las asíntotas están representadas algebraicamente por su ecuación.

En nuestra gráfica la recta del eje de las abscisas es la ***asíntota horizontal*** y tiene como **ecuación $\boldsymbol{y = 0}$**.

La recta del eje de las ordenadas es la ***asíntota vertical***, tiene la **ecuación $\boldsymbol{x = 0}$**.

**Ahora obtén tanto el dominio como el rango de $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0}$.**

$\boldsymbol{D_f}$:

$\boldsymbol{R_f}$:

***Resumen:***

**Asíntota horizontal, ecuación $\boldsymbol{y = 0}$.**

**Asíntota vertical, ecuación $\boldsymbol{x = 0}$.**

**Dominio de la función es: $\boldsymbol{D_f = \{x \in \mathcal{R}: x \neq 0\}}$ o $\boldsymbol{D_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)}$.**

**El rango de la función es: $\boldsymbol{R_f = \{y \in \mathcal{R}: y \neq 0\}}$ o $\boldsymbol{R_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)}$.**

***Ejercicio 2.*** Ahora examinemos $f(x) = \frac{9}{x+3}$.

Necesitamos, primero conocer para que valores de $x$ la función no está definida, para ello igualamos a cero el denominador.

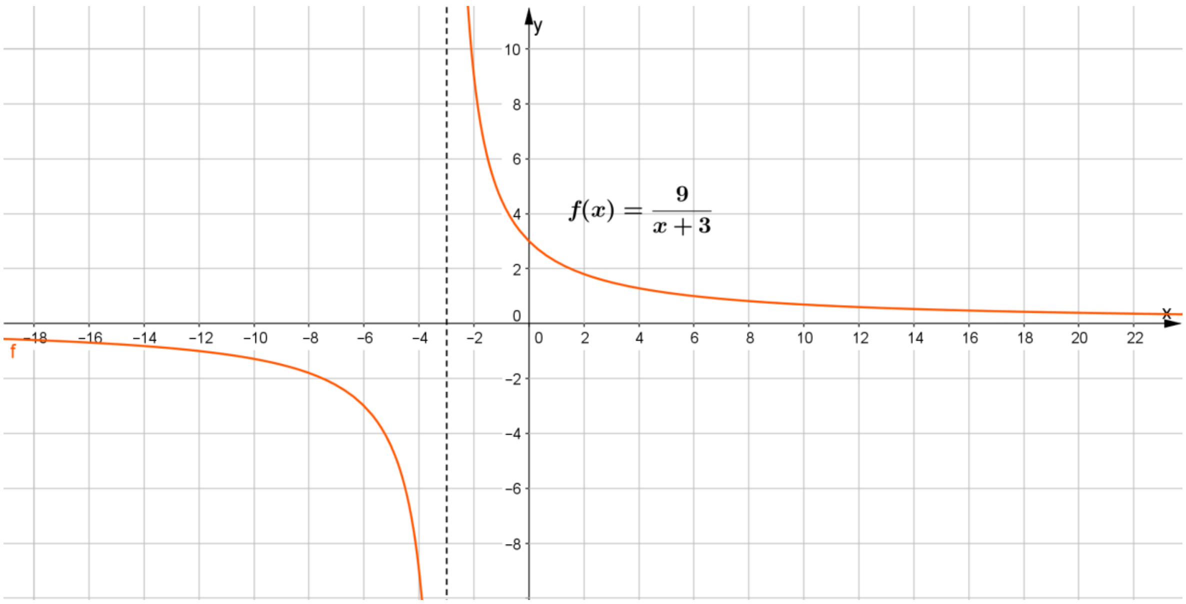
Se resuelve la ecuación que se obtiene $x + 3 = 0, x = -3$ es la solución, así que la función está definida para todos los números reales excepto para $x = -3$, es decir hay discontinuidad y la recta $x = -3$, es la asíntota vertical.

Para graficar le damos valores a $x$, cercanos a la asíntota vertical $x = -3$, por la derecha y por la izquierda, por ejemplo de $-7\ a\ 7$, ¿qué pasa cuando $x = -3$?

______________________________________________________________.

| $x$ | -7 | -6 | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-\frac{9}{4}$ | $-3$ | $-\frac{9}{2}$ | $-9$ |  | $9$ | $\frac{9}{2}$ | $3$ | $\frac{9}{4}$ | $\frac{9}{5}$ | $\frac{9}{6}$ | $\frac{9}{7}$ | $\frac{9}{8}$ | $1$ | $\frac{9}{10}$ |

Graficando con GeoGebra se obtiene:




Ecuación de la asíntota vertical $x =$ ______________________________________________

Ecuación de la asíntota horizontal $y =$ ____________________________________________

Dominio de la función es: $D_f = \{x \in \mathcal{R}: \_\_\_\_\_\_\_\}$

Rango de la función es: $R_f = \{y \in \mathcal{R}: \_\_\_\_\_\_\_\}$

En general, las funciones racionales son de la forma $f(x) = \frac{a}{x-b}$, presentan las siguientes propiedades:

i. **Ecuación de la asíntota vertical es: $\boldsymbol{x = b}$**

ii. **Ecuación de la asíntota horizontal es: $\boldsymbol{y = 0}$**

iii. **Dominio de la función es:** $D_f = \{x \in \mathcal{R}: x \neq b\}$

$$\boldsymbol{D_f = (-\infty, b) \cup (b, \infty)}$$

**iv. Rango de la función es:** $R_f = \{y \in \mathcal{R}: y \neq b\}$

$$\boldsymbol{R_f} = (-\infty, \mathbf{0}) \cup (\mathbf{0}, \infty)$$

Considerando $f(x) = \frac{a}{x-b}$, vamos a trabajar con $f(x) = \frac{a}{x-b} + c$.

***Ejercicio 3.*** Realizar la gráfica, determinar asíntota horizontal, asíntota vertical, domino y rango de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{10}{x-7} + 8$$

i. Hacemos $x - 7 = 0$, se tiene $x = 7$, por lo tanto, la ecuación de la asíntota vertical es _______.

ii. La función tiene una traslación vertical de 8 unidades, por lo tanto, la ecuación de la asíntota horizontal es _________.

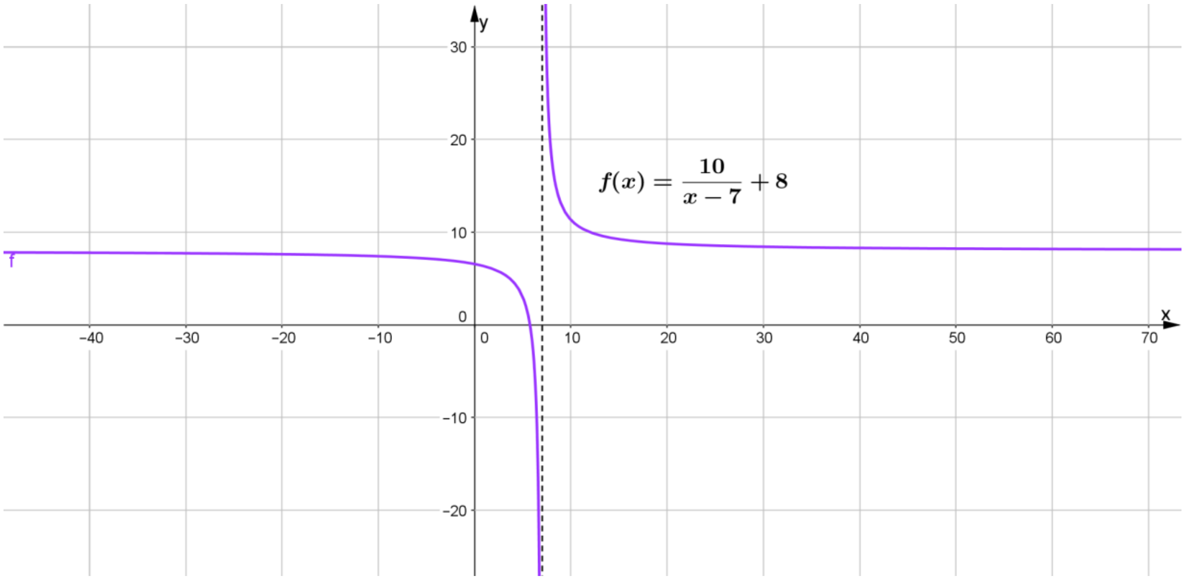
iii. Dominio de la función es: $D_f = \{x \in \mathcal{R}: x \neq$ ______$\}$

iv. El rango de la función es: $R_f = \{y \in \mathcal{R}: y \neq$ ______$\}$

v. Para hacer el bosquejo de la gráfica se trazan las asíntotas y se toman algunos valores para $x$ cercanos a la asíntota vertical $x = 7$, por la derecha y por la izquierda, por ejemplo, en el intervalo de 3 a 8.

| $x$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | | | | | | | | |

vi. La gráfica de la función $f(x)$, se ha realizado con GeoGebra.




Retomando $f(x) = \frac{a}{x-b} + c$, el término $b$, hace en la función una traslación horizontal de $b$ unidades. Observa que el término $c$ significa una traslación ________ de $c$ unidades modificar grafica.

Cuando $y = 0$ no es la asíntota horizontal y observando la gráfica podemos obtener los ceros de la función, ya que la rama izquierda intercepta el eje de las $x$.
Para esto recuerda que buscamos un punto sobre el eje $x$, en el que la coordenada $y$ es cero, tenemos

$$y = \frac{10}{x-7} + 8$$

$$0 = \frac{10}{x-7} + 8$$

$$-8 = \frac{10}{x-7}$$

$$-8(x-7) = 10$$

$$-8x + 56 = 10$$

Despejamos $x$.

$$-8x = -46$$

$$x = \frac{46}{8}$$

Por lo tanto, el cero de la función es: $x = \frac{46}{8}$

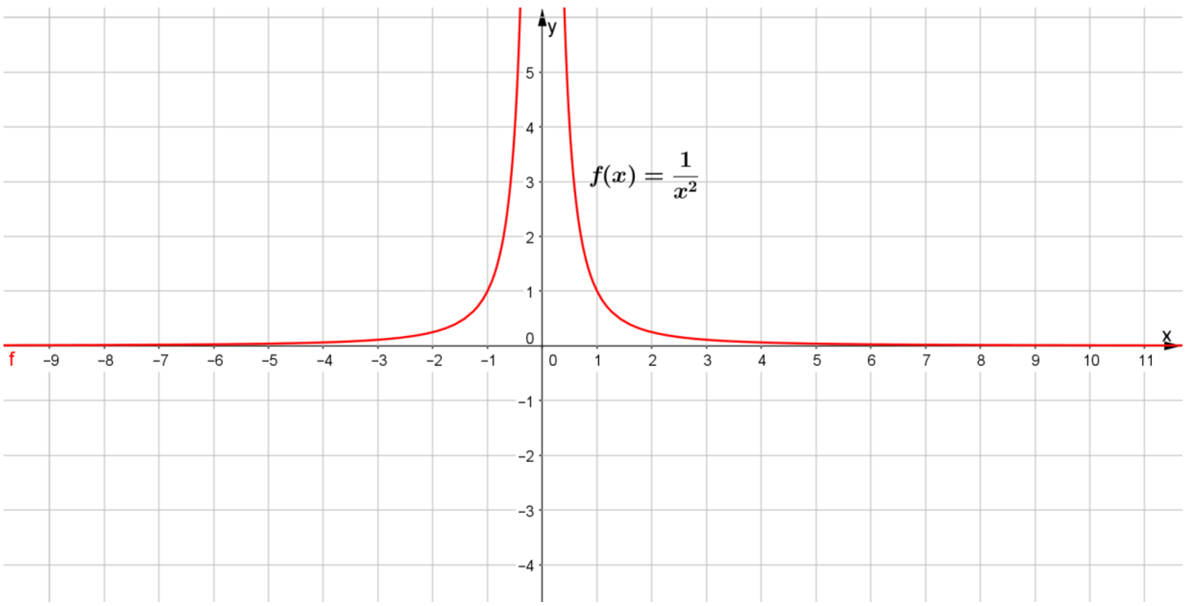
***Ejercicio 4.*** Analicemos $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x$ tiene que ser diferente de cero, ya que sabemos que la división entre cero no está definida.

Para graficar, como $x \neq 0$, le damos a $x$ valores cercanos a la asíntota vertical $x = 0$, por la derecha y por la izquierda, por ejemplo, en el intervalo de -5 a 5. Completa la tabla.

| $x$ | -5 | -1 | -0.5 | -0.1 | -0.01 | 0 | 0.01 | 0.1 | 0.5 | 1 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0.04 | 1 | 4 | 100 | 10000 | | 10000 | 100 | 4 | 1 | 0.04 |

Observa que:

Cuando "$x$" toma valores cada vez más cercanos a cero, el valor de "$y$" _______.
Cuando "$x$" toma valores cada vez más grandes, ya sean positivos o negativos el valor de "$y$" es _________, es decir se va acercando al eje de las abscisas.
Graficando con GeoGebra los valores de la tabla se obtiene:




La función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ no intercepta a los ejes "$x$" $e$ "$y$".

**i. Ecuación de la asíntota vertical $x =$ __________**

**ii. Ecuación de la asíntota horizontal $y =$ ________**

**iii. Dominio de la función es: $D_f = \{x \in \mathcal{R}$: ______$\}$**

**iv. El rango de la función es: $R_f = \{y \in \mathcal{R}$: ______$\}$**

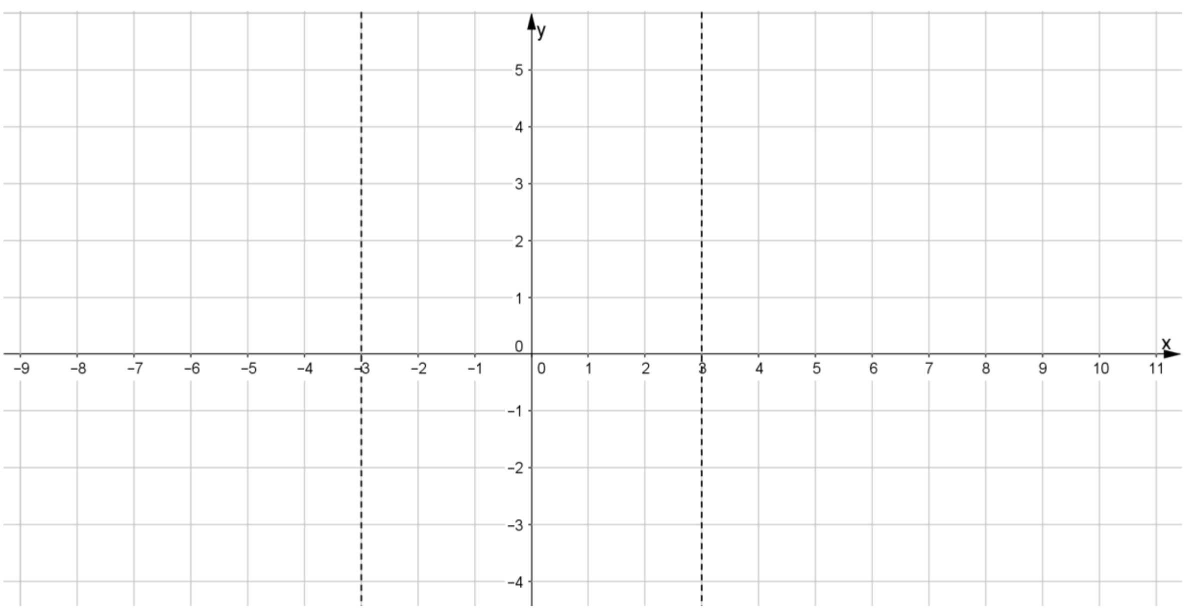
***Ejercicio 5.*** Realizar la gráfica, determinar asíntota horizontal, asíntota vertical, domino y rango de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{5}{x^2 - 9}$$

i. Al resolver la ecuación $x^2 - 9 = 0, x = -3\ y\ x = 3$, por lo tanto, tiene dos asíntotas verticales.
ii. La función tiene una traslación horizontal de 0 unidades $c = 0$, por lo tanto, la ecuación de la asíntota horizontal es $y = 0$.
iii. Dominio de la función es: $\boldsymbol{D_f} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{R}}: \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{-3}\ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{3}\}$.
iv. El rango de la función es: $R_f =$ ______________.
v. Para hacer el bosquejo de la gráfica se trazan las asíntotas y se toman algunos valores para $x$ cercanos a las asíntotas $x = -3\ y\ x = 3$, por la derecha y por la izquierda, por ejemplo de -5 a 5.

| $x$ | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | | | | | | | | | | | |

Realiza la gráfica con lápiz y papel y verificala con GeoGebra.




***Ejercicio 6.*** Resolver:

$$f(x) = \frac{5}{x^2 - 9} + 3$$

¿Cuál o cuáles son las asíntotas verticales?

______________________________________________

¿Cuál es la asíntota horizontal?

______________________________________________

¿Hay posibilidad de encontrar los ceros de la función? Argumenta tú respuesta.

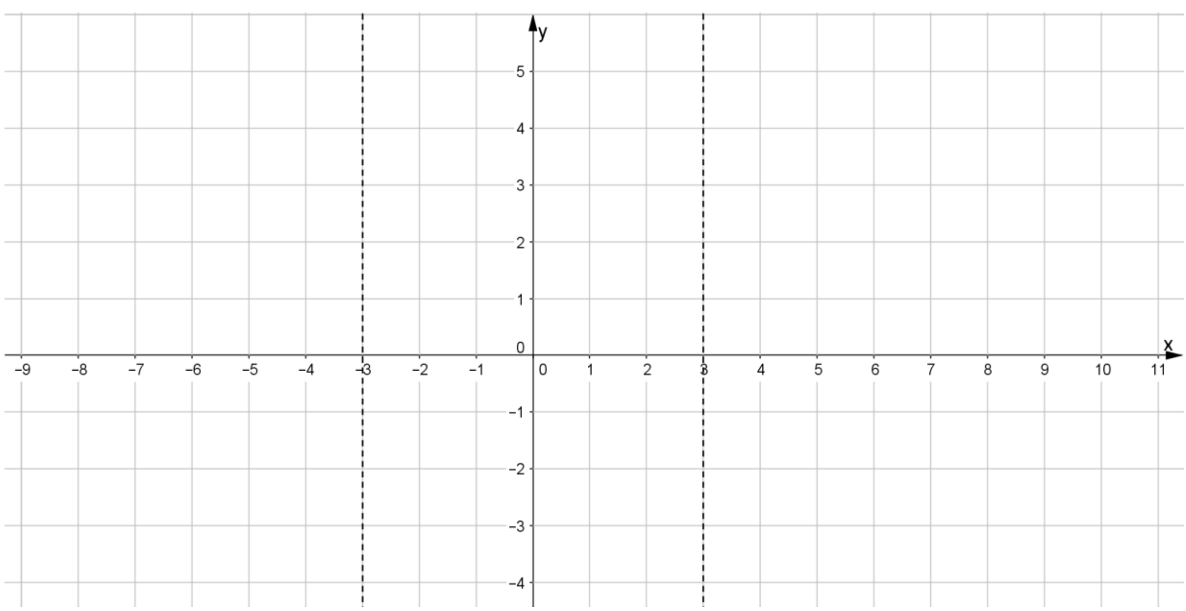
______________________________________________

______________________________________________

Dominio de la función es: $D_f =$
El rango de la función es: $R_f =$
Ceros de la función $=$

Completa la Tabla y realiza un bosquejo de la gráfica y verifícala utilizando GeoGebra.

| $x$ | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | | | | | | | | | | | |




***Ejercicio 7.*** Obtener el dominio, rango, gráfica de la función, ceros y junto con tu profesora o profesor conocerás una nueva característica “hueco”:

$$f(x) = \frac{x^2 - 81}{x - 9}$$

Factorizando $f(x) = \frac{(x-9)(x+9)}{x-9} = x + 9$

Explica porque el resultado es $x + 9$:

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

_________________________________________________________________

De acuerdo con lo anterior el dominio de la función es el siguiente:

$\boldsymbol{D_f = \{x \in \mathcal{R}: x \neq 9\}}$

Y para obtener el rango tenemos:

$$f(x) = x + 9$$

Evaluamos con el valor de la restricción:

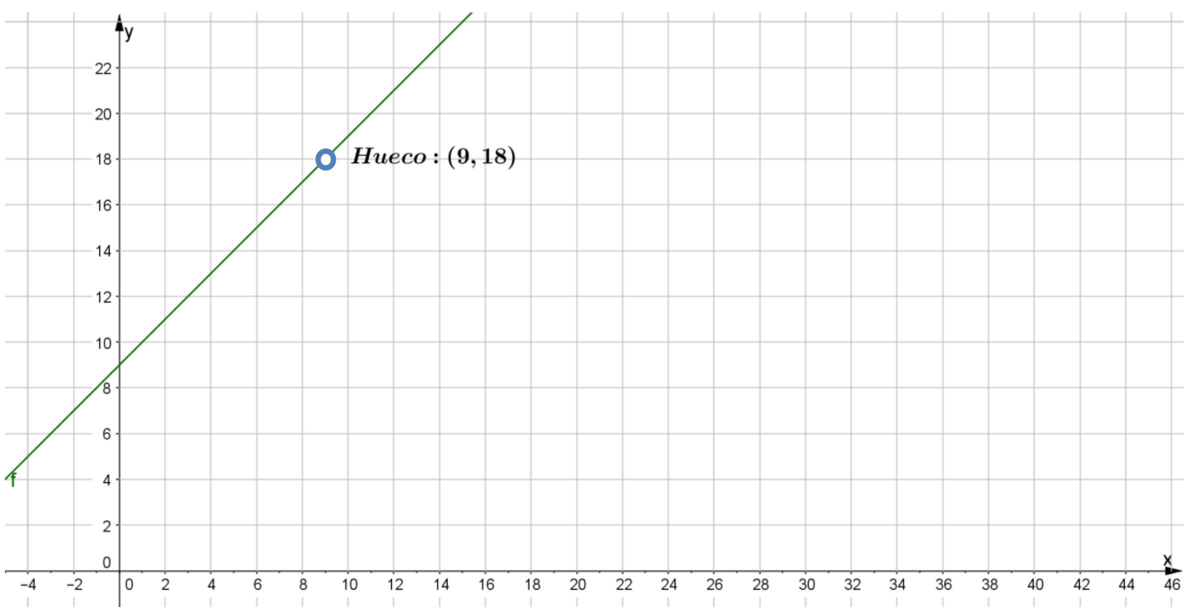
$$f(9) = 9 + 9 = 18$$

Por lo que el punto (9,18) no existe en la gráfica de la función

Obtenemos el rango:

$\boldsymbol{R_f = \{y \in \mathcal{R}: y \neq 18\}}$

Y por lo tanto el punto $(9{,}18)$ representa un hueco en la gráfica de la función.




Al factorizar una **función racional**, si hay términos comunes en el numerador y en el denominador con la misma multiplicidad, hay un **hueco** en la función.

***Ejercicio 8.*** Determina Dominio, Rango, Hueco (si es que existen) y la Gráfica de la función.

$$f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x-1}.$$

Factorizando: $f(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{x-1} = \quad x-3 \quad ; \quad f(x) = x-3$

¿Por qué $f(x) = x - 3$?_______________________________________________

Determina el dominio:

$$\boldsymbol{D_f} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{R}}: \boldsymbol{x} \neq \_\_\_\_\}$$

Y para el rango evaluamos el valor restringido que es 1.

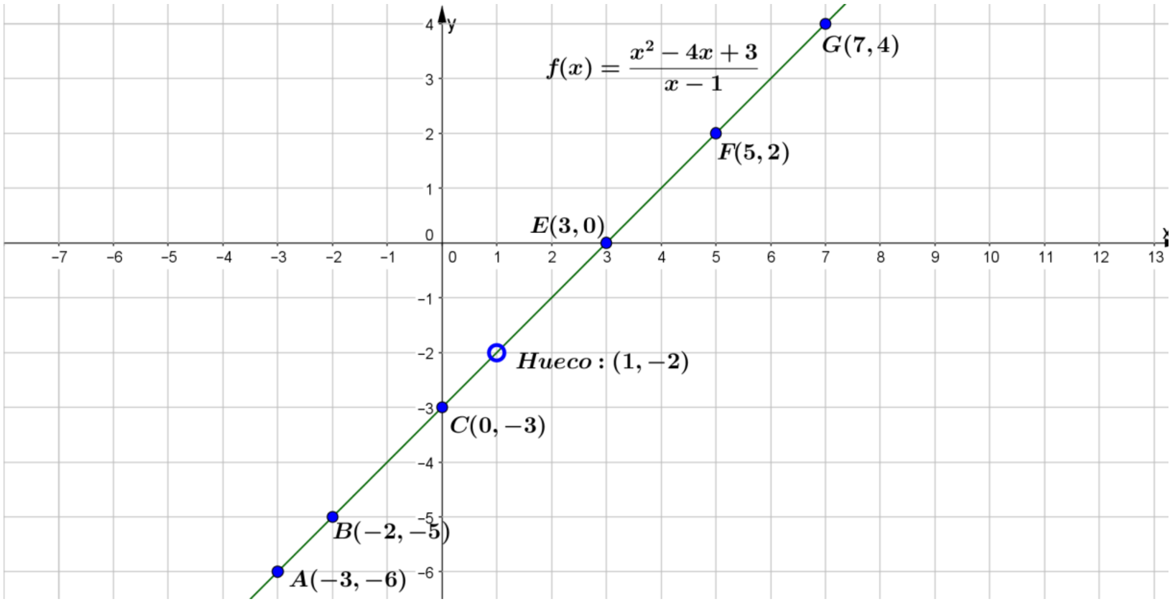
$$f(1) = x - 3$$

$$f(1) = \_\_ - 3 = \_\_\_\_\_\_$$

Obtenemos el rango

$$\boldsymbol{R_f} = \{\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{\mathcal{R}}: \boldsymbol{y} \neq \_\_\_\_\}$$

Gráfica de la función.




***Ejercicio 9.*** Resolver:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$$

Determinar los ceros de la función, si los tiene, sino es así, argumentar el porqué.

Determinar los huecos de la función, si los tiene, sino es así, argumentar el porqué.

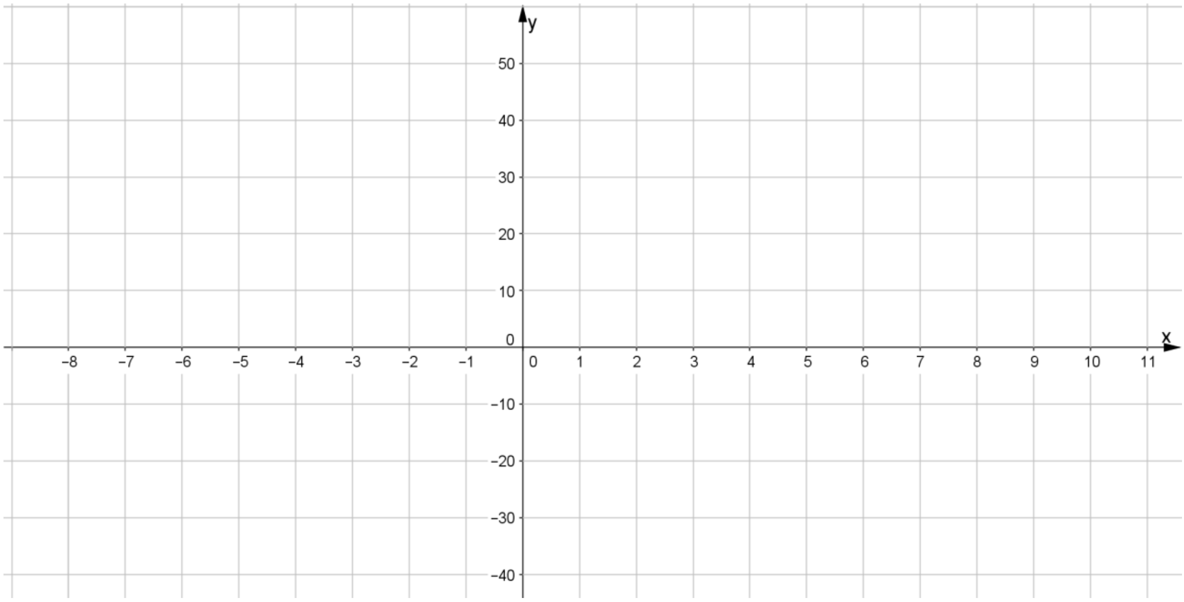
Determinar las asíntotas verticales

Determinar la Asíntota horizontal

Determinar dominio de la función $D_f$.

Determinar Rango de la función $R_f$.

Realiza un bosquejo de la gráfica y verifícala con GeoGebra.




**Marco Teórico.** Son funciones Racionales si son de la forma: $P(x) = \frac{Q(x)}{R(x)}$, donde $Q(x)$, y $R(x)$ son polinomios cualesquiera y $R(x) \neq 0$. Recuerda que la división entre 0 no está definida.

1. A través de una factorización, si hay términos comunes en el numerador y en el denominador con la misma multiplicidad, la función racional se convierte en una función polinomial, dejando uno o más huecos (un punto o más vacíos).
2. Donde el numerador es un número racional preferentemente entero y el denominador es una expresión algebraica., teniendo presente que la relación $f(x) = \frac{PQ(x)\ de\ grado\ 0}{0}$, no está definida, es decir da una indeterminación.
3. Cuando numerador y el denominador son expresiones algebraicas y no se eliminan a través de una factorización. En este caso hay que tener presente el siguiente teorema, para obtener las asíntotas horizontales.

Teorema de las asíntotas horizontales.

Sea $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)} = \dfrac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x^1 + b_0}$, entonces:

- La asíntota horizontal tiene por ecuación a la recta $y = 0$, si $m > n$. Es decir, si el grado del polinomio $h(x)$ es mayor o igual al grado del polinomio $g(x)$.
- si $m = n$, la recta $y = \dfrac{a_n}{b_m}$, es la asíntota horizontal.
- Si $m < n$, no hay asíntota horizontal.

- Cuando hay un traslado vertical dela asíntota horizontal: no es asíntota horizontal.

***Estrategia didáctica 3. Resolución de Problemas de aplicación*. *(Cierre).***

***Aprendizajes:*** Resuelve problemas de aplicación.

***Problema 1.*** El costo en miles de pesos por producir x toneladas de plástico para esferas, se puede representar con la función:
$C(x) = 14400 + 7450x$.
La anterior función considera gasto fijo por operación de maquinaria, equipo y herramienta, más gastos de administración $\$14{,}400$ y un costo de $\$7{,}450$ por producir cada tonelada del plástico.

a) Expresar como función de x el costo promedio para producir una tonelada de plástico y dibuja la gráfica
b) Hallar el costo promedio por tonelada cuando se alcanza una producción de 150 toneladas de plástico.

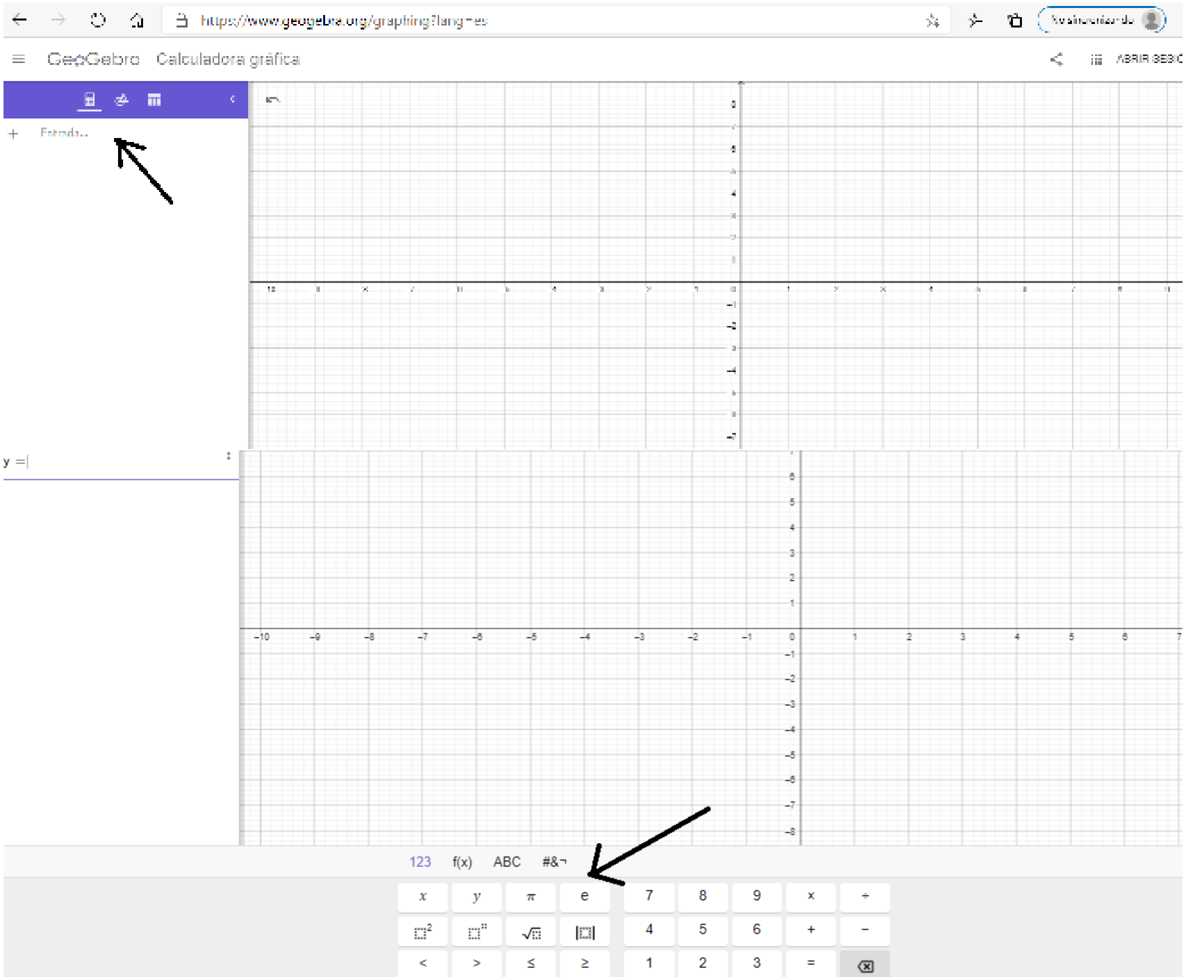
Recuerda para obtener el costo promedio $C_p(x)$ se divide el costo total entre la cantidad de toneladas producidas.

$C_p(x) =$ ______________________________

Dibujemos la gráfica en GeoGebra.

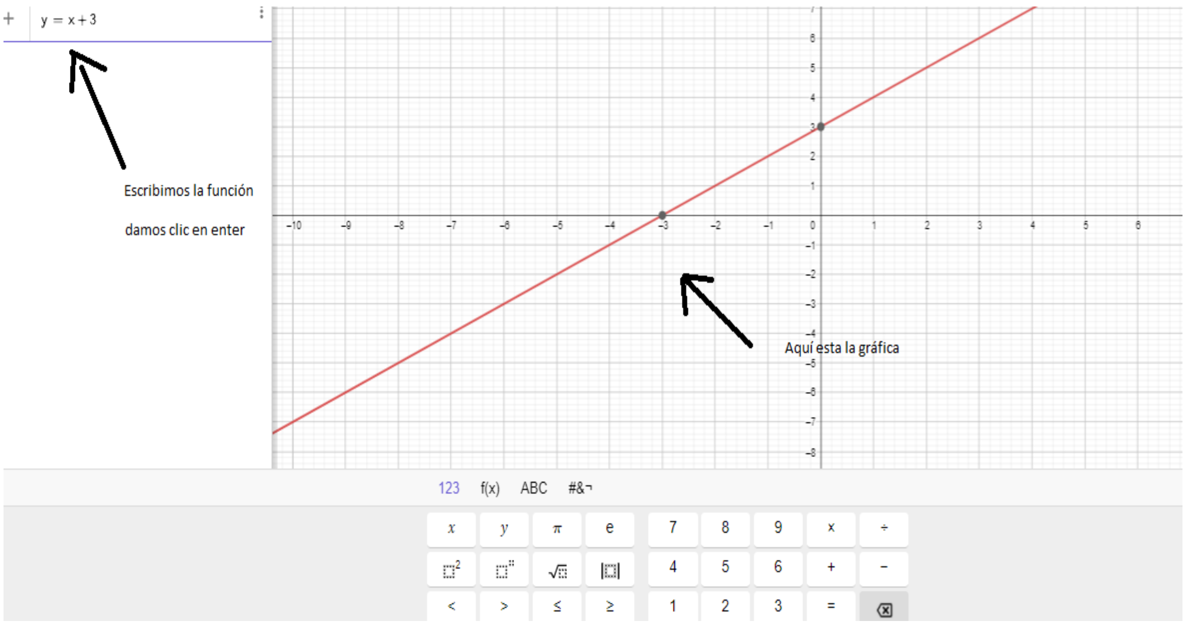
Teniendo la regla de correspondencia de la función solo la escribimos en el software.

Ejemplo para realizar gráfica en GeoGebra.



Por ejemplo:

$y = x + 3$




Para practicar realiza la gráfica en GeoGebra con la función que determinaste, imprímela y pégala a continuación

Con base a la gráfica que obtuviste, ¿cuál es la asíntota vertical?
Nota: pregunta a tu profesor cómo modificar los parámetros de los ejes "$x$" $e$ "$y$", en GeoGebra para el problema en específico de aplicación.

c) $C_p(150) =$

***Problema 2.*** La función $f(x) = \frac{240x+1400}{14(x+1)}$ representa el porcentaje de residuos de hidrocarburo que permanecen en el mar después de un derrame de un Buque Cisterna transportador de petróleo, de efectuarse durante cuatro meses las tareas de recuperación y limpieza por parte de la empresa responsable. Transcurrido ese tiempo, el proceso continúa más lentamente por la acción natural de los procesos de biodegradación.
La variable tiempo 'x' son los meses que lleva la tarea de limpieza

a) ¿Qué porcentaje de residuo de petróleo queda al concluir el cuarto mes de la operación de limpia?
b) ¿Cuál es el máximo porcentaje de limpieza que se puede obtener de acuerdo con este modelo?

Para resolver el inciso a) tenemos que evaluar los cuatro meses $f(4) =$____________________

Para resolver el inciso b) hay que realizar la gráfica puedes hacerlo con GeoGebra.

c) ¿Determinar cuál es la asíntota horizontal? ______________________

d) ¿Qué significa el anterior resultado?
___________________________________________________________
___________________________________________________________
___________________________________________________________

***Problema 3.*** Para evitar la extinción de los gorilas en África se crearon programas de protección en reservas dentro de su hábitat natural. La función $g(x) = \frac{91.8x+84}{0.6x+3}$ representa el aumento de la población de esta especie al reubicar un grupo en un parque. La variable "$x$" representa el número de gorilas en el hábitat natural.

a) ¿Cuál es la población inicial?
b) Dibujar la gráfica.
c) ¿Cuánto tiempo la población aumentará a 50 gorilas?
d) ¿Cuál es el límite de aumento previsto para la estabilidad ecológica?

Empecemos a solucionar el problema

a) Para la población inicial $x =$______

$g(\quad) = 24$

¿Lo que significa qué?
___________________________________________________________
___________________________________________________________

b) Gráfica (recuerda realizarla en GeoGebra).

c) Para responder tienes que realizar lo siguiente $g(x) = 50$.

$$50 = \frac{91.8x + 84}{0.6x + 3}$$

d) Para este inciso te recomendamos determinar la asíntota horizontal: ______________________

Ahora ¿Cuál es la interpretación del resultado de la asíntota horizontal? ______________________________________________________.

***Problema 4.*** En una reserva ecológica se introduce 100 lobos. La población está modelada por la función $l(t) = \frac{2584+2t}{1+0.05t}$ para $t \geq 0$, donde $t$ es el tiempo en años.

a) Calcula la población de lobos para $t = 5, t = 15\ y\ t = 25$.

b) Traza la gráfica correspondiente y a partir de ella responde: ¿Cuál sería el tamaño límite del número de lobos a medida que aumenta el tiempo?

***Solución:***

a) Para determinar el tamaño de la población de lobos que se solicita, hay que evaluar la función para cada uno de los valores de $t$.

$l(5) =$

$l(15) =$

$l(25) =$

b) Grafica. (Recuerda utilizar el software GeoGebra).

¿Qué valor tiene la Asíntota horizontal?: __________________________________________

A partir de la gráfica podemos observar, que la población de Lobos se estabiliza a lo largo del tiempo en _______ individuos.

# Funciones con Radicales.

***Estrategia didáctica 4. Funciones con radicales. (Inicio).***

***Aprendizajes:*** Explora problemas sencillos que se modelen con Funciones con Radicales.

QR-2. Raíces y radicales.

***Actividad 1. (Extraclase):*** Visita el código QR-2, para conocer acerca de raíces y radicales. Esta información te va a servir para que puedas entender las diferentes actividades expuestas en el tema de funciones con radicales.

Empecemos a trabajar con las funciones en las cuales la regla de correspondencia involucra a los radicales.

***Actividad 2.*** Problemas de Aplicación.

Recordaremos una unidad de Matemáticas 3, Geometría Analítica, “la párabola”.

***Problema 1.***
Comencemos analizando la función que está relacionada con la semiparábola que tiene vértice de coordenadas $(-2,0)$ y foco de coordenadas $\left(-\frac{3}{2},0\right)$.

Por los datos que nos proporcionan, se trata de una parábola ________, por lo tanto, se tiene lo siguiente:

Ecuación de la forma: $(y-k)^2 = 4p(x-h)$.

Vértice: $(h,k) = (-2,0)$, se tiene que $h =$ ___ y $k =$___.
Foco: $(h+p,k)$, entonces, $h+p = -\frac{3}{2}$, sustituyendo $h=-2$, se tiene $-2+p = -\frac{3}{2}$.

Despejando $p$, $p = -\frac{3}{2}+2$, $p =$ _____.

Sustituyendo los valores en la ecuación de la parábola tenemos.

$(y-0)^2 = 4\left(\frac{1}{2}\right)(x+2)$

$y^2 = 2(x+2)$

$y^2 =$ _________.

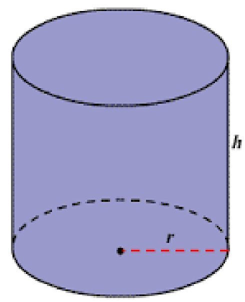
Extrayendo raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuaciaón para despejar $y$, se obtiene la función:

$$y = \sqrt{\phantom{xx}}$$

***Problema 2.***

La función que modela el volumen $V$ de un cilindro circular recto de altura constante de $4\ m$ y radio $r$, es $V = \pi r^2 h$.

a) Expresar el volumen V en función del radio r.




$$V = \pi r^2 h$$

Para expresar el volumen en función del radio, despejemos el radio

$$\frac{V}{\pi h} = \frac{\pi r^2 h}{\pi h}$$

$$\frac{V}{\pi h} = r^2$$

$$\sqrt{\frac{V}{\pi h}} = \sqrt{r^2}$$

$$\sqrt{\frac{V}{\pi h}} = r$$

$$r(V) = \sqrt{\frac{V}{\pi h}}$$

Como $h = 4$.

$$r(V) = \sqrt{\frac{V}{4\pi}}$$

Las funciones que tienen en su regla de correspondencia al menos un radical son denominadas Funciones con radicales.

***Estrategia didáctica 5. Dominio, rango y gráfica de funciones con radicales. (Desarrollo).***

***Aprendizajes:*** Identifica los elementos de la función: dominio, rango, ceros y traza su gráfica.

***Ejercicio 1.*** Analicemos la primera función:

$$y^2 = x$$

Extrayendo raíz cuadrada en ambos miembros se tiene:

y = $\sqrt{x}$ o $f(x) = \sqrt{x}$

Veamos qué pasa si $x = -4$, tenemos:

$$f(-4) = \sqrt{-4}$$
$$f(-8) = \sqrt{-8}$$
$$f(-1) = \sqrt{-1}$$
$$f(-10) = \sqrt{-10}$$

Qué puedes mencionar:

______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________

Entonces, la variable "$x$" tiene que ser mayor o igual que cero y por lo tanto la variable "$y$" toma valores mayores o igual que cero, concluyendo que:

**Dominio de la función es:** $D_f = \{x \in \mathcal{R}: x \geq 0\}$

**o** $\boldsymbol{D_f} = [\mathbf{0}, \infty)$

**Rango de la función es:** $R_f = \{y \in \mathcal{R}: y \geq 0\}$

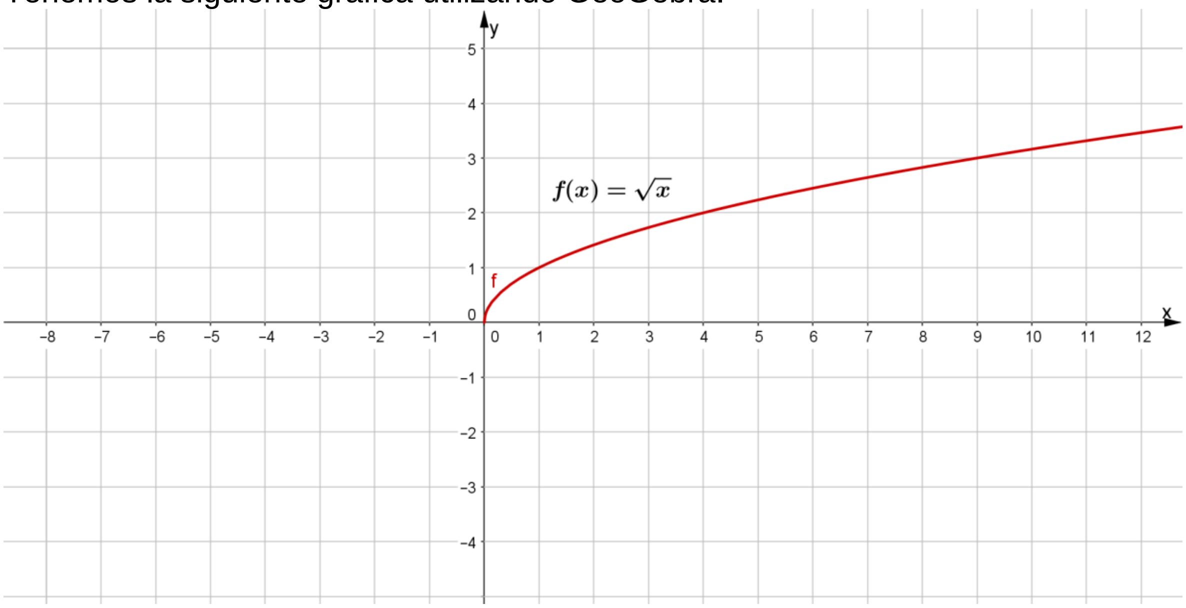
**o** $\boldsymbol{R_f} = [\mathbf{0}, \infty)$

Verifiquemos:

Elabora la tabla para $f(x) = \sqrt{x}$ con algunos valores estratégicos para la variable $x$, para que sea más fácil calcular el valor de $y$.

| $x$ | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = \sqrt{x}$ | | | | | | | | |

Tenemos la siguiente gráfica utilizando GeoGebra.




Con esto comprobamos que el domino y el rango de la función son correctos.

Observa que la gráfica corresponde a una semiparábola horizontal, que abre hacia la derecha y tiene su vértice en el origen.

Con lo que se mencionó anteriormente que puedes concluir acerca de los ceros de la función. Argumenta tu respuesta.

______________________________________________

______________________________________________

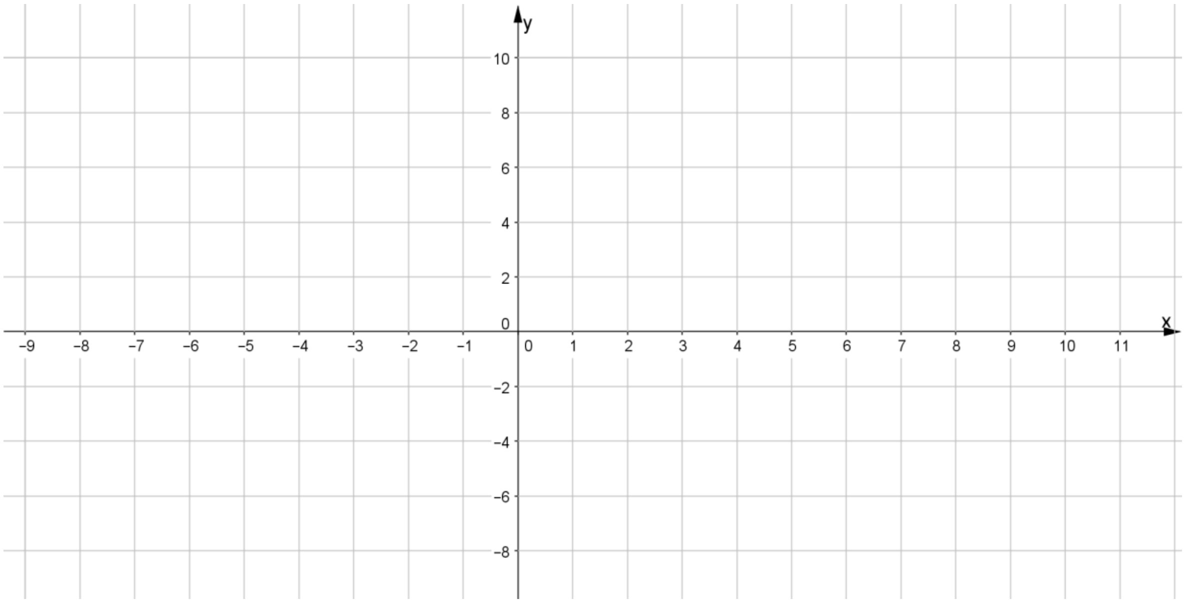
***Ejercicio 2.*** Determina dominio y rango, completa la tabla, realiza la gráfica y obtén los cerros de la función.

$$f(x) = \sqrt{x+1}$$

Elabora una tabla:

| $x$ | -2 | -1 | 0 | 3 | 8 | 15 | 24 | 35 | 48 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = \sqrt{x+1}$ | | | | | | | | | |

Realiza un bosquejo de la gráfica de la función.



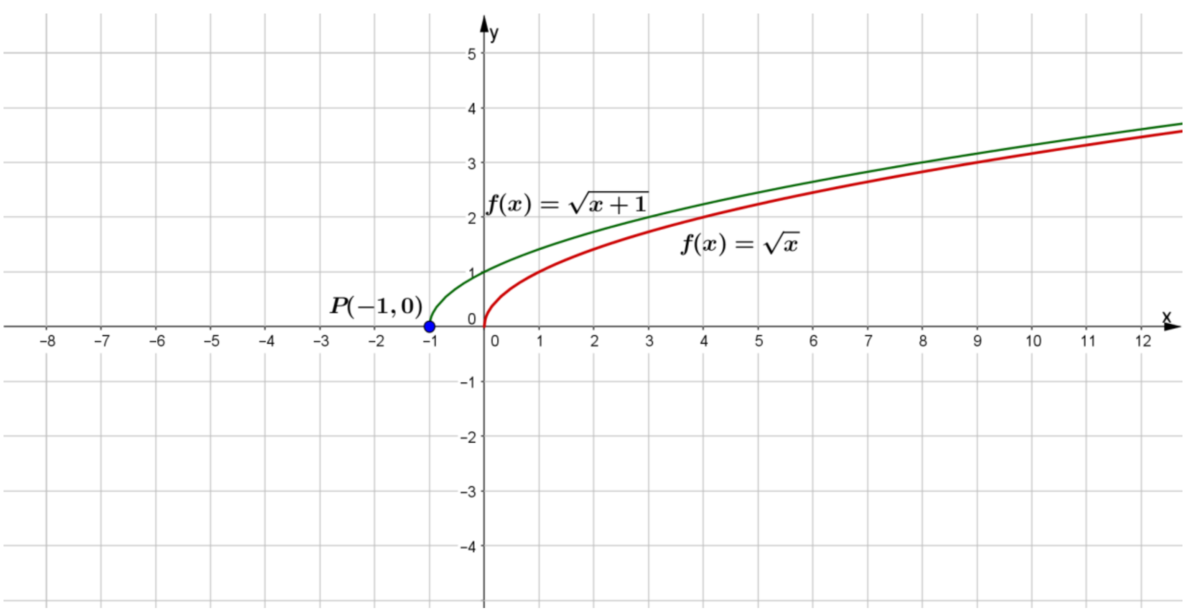
**Dominio de la función es:** $D_f =$ ______________________

**Rango de la función es:** $R_f =$ ________________________

**Cero de la función:** __________________________________

Es importante que observes que:

- La gráfica corresponde a una semiparábola horizontal, que abre hacia la derecha y tiene su vértice en el punto $(-1,0)$.
- Con respecto a la gráfica $f(x) = \sqrt{x}$ se ha trasladado una unidad hacia la izquierda.



***Ejercicio 3.*** Determinar dominio, rango, ceros de la función y realizar gráfica.

$$f(x) = \sqrt{x-7}$$

Ahora ya comprobaste que el valor del radicando debe de ser mayor a cero entonces podemos utilizar las desigualdades.

Por favor debes de revisar la sección 4. Materiales diversos de apoyo inciso b) desigualdades antes de continuar, después de haber trabajado en ese inciso continua.

Primero resolvemos la desigualdad del radicando.

$$x - 7 \geq 0$$

Despejando "$x$" se tiene:

$$x \geq 7$$

Entonces la función está definida para valores de la variable $x$, mayores o iguales que 7.

Puedes escribir en base a este resultado el domino y el rango.

**Dominio de la función es:** $\boldsymbol{D_f} =$

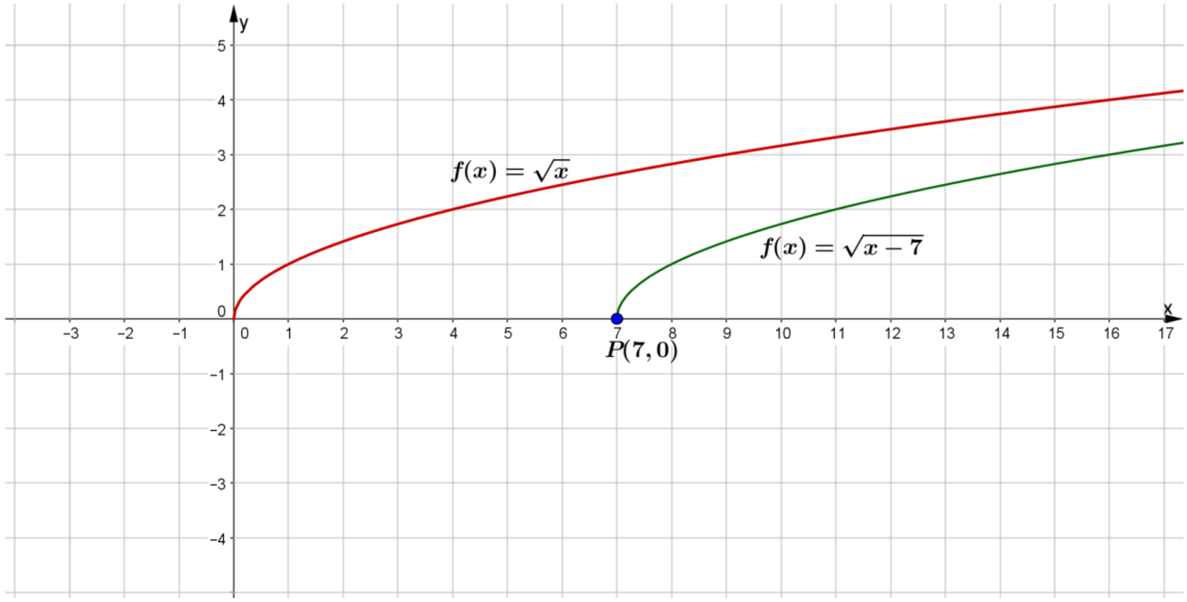
**Rango de la función es:** $\boldsymbol{R_f} =$

**Cero de la función**$=$

Recuerda puedes realizar la gráfica en software GeoGebra, y pégala.

Es importante que observes que:

- La gráfica corresponde a una semiparábola horizontal, que abre hacia la derecha y tiene su vértice en el punto (7,0).
- Con respecto a la gráfica $f(x) = \sqrt{x}$ se ha trasladado siete unidades hacia la derecha.




***Conclusión.***

Se tiene que las funciones de la forma:

$$f(x) = \sqrt{x+b}$$

Tienen las siguientes características:

$$D_f = \{x \in \mathcal{R}: x \geq -b\}$$

$$R_f = \{y \in \mathcal{R}: y \geq 0\}$$

Sus gráficas corresponden a una semiparábola horizontal, que abre hacia la derecha y tiene su vértice en el punto $(-b, 0)$.

***Ejercicio 4.*** Retomemos el problema 1.

$$y = \sqrt{2x+4}$$

Obtenemos de la semiparábola:

Vértice en $(-2,0)$.
Foco de coordenadas $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$,

Resolvemos la desigualdad del radicando.

$$2x + 4 \geq 0$$

Despejando $x$ se tiene:

$$2x \geq \_\_\_\_$$

$$x \geq \_\_\_$$

La función está definida para valores de la variable "$x$", mayores o iguales a menos dos, por lo tanto, la variable "$y$" toma valores mayores o igual que cero.

Determinar el Dominio y el Rango:

$$D_f =$$

$$R_f =$$

Realiza la gráfica asociada a $f(x) = \sqrt{2x+4}$ en GeoGebra.

Ahora examinemos otra función.

***Ejercicio 5.***

$$f(x) = \sqrt{9x - 18}$$

Factorizando el radicando y aplicando las propiedades de los radicales en la función $f(x) = \sqrt{9x - 18}$ se tiene:

$$f(x) = \sqrt{9(x-2)}$$

$$f(x) = \sqrt{9}\,\sqrt{x-2}$$
$$f(x) = 3\,\sqrt{x-2}$$

Determina el domino y el rango:

$D_f =$

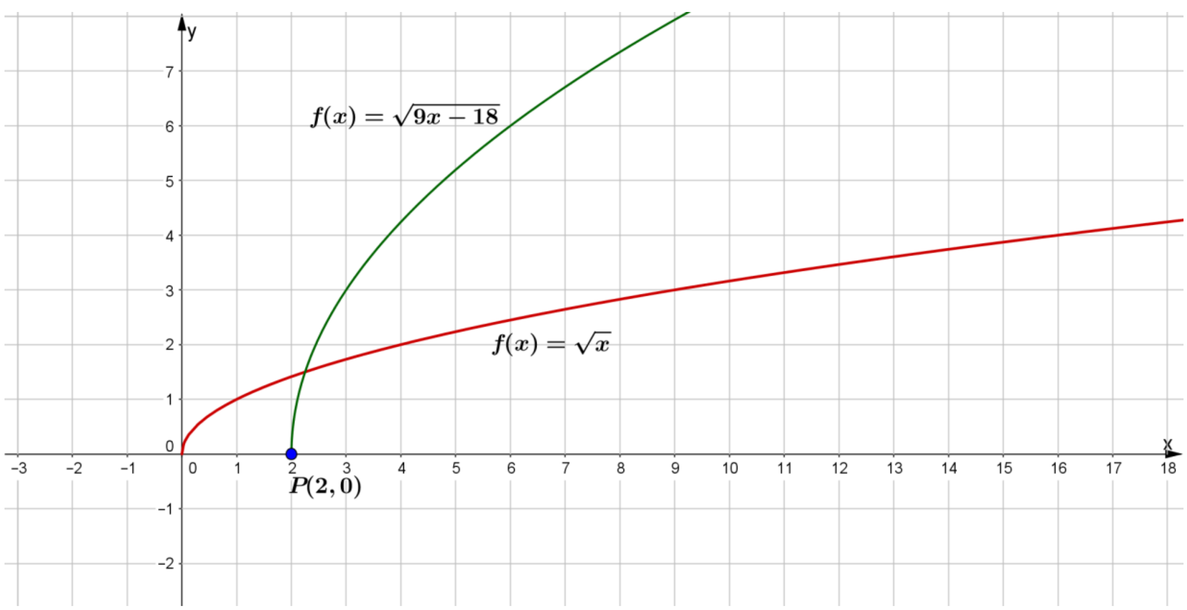
$R_f =$

La función $f(x) = 3\sqrt{x-2}$ , comparada con $f(x) = \sqrt{x}$, se ha trasladado dos unidades a la derecha y el valor de la variable y se ha triplicado.

Para verificar que nuestra conclusión es correcta, realicemos la gráfica, ya sea tabulando o utilizando un software dinámico como GeoGebra.

Realicemos la tabulación y la gráfica.

| $x$ | 2 | 3 | 6 | 11 | 18 | 27 | 38 | 51 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = \sqrt{9x-18}$ | | | | | | | | |




***Actividades para el alumno.***

***Ejercicio 1.*** Obtén dominio, rango y ceros de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \sqrt{x - 25}$

b) $g(x) = \sqrt{x + 16}$

***Conclusiones:*** Se tiene que las funciones de la forma:

$$f(x) = \sqrt{ax \pm b}$$

Tienen las siguientes características:

$$D_f = \left\{x \in \mathcal{R}: x \geq \pm\frac{b}{a}\right\}$$

$$R_f = \{y \in \mathcal{R}: y \geq 0\}$$

Sus gráficas corresponden a una semiparábola horizontal, que abre hacia la derecha y tiene su vértice.

Vértice en el punto $(\pm\frac{b}{a}, 0)$.

***Ejercicio 6.*** Determina dominio, rango y ceros de la siguiente función:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 15}$$

Resolvamos el radicando $x^2 + 2x - 15$.

Utilizar formula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sustituye los valores de $a, b\ y\ c$ en la fórmula.

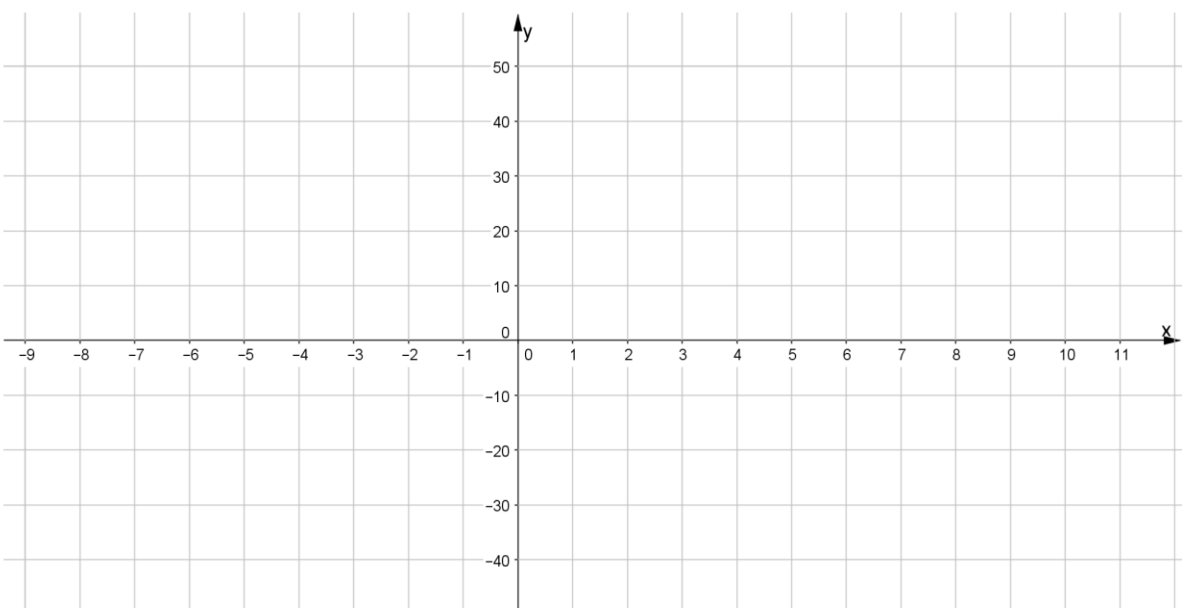
$$x = \frac{-(\quad) \pm \sqrt{(\_\_)^2 - 4(\quad)(\quad)}}{2(\quad)}$$

$x_1 =$ ____________ y $x_2 =$____________

Ya que tenemos la solución vamos a tabular

| $x$ | -10 | -8 | -6 | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = \sqrt{x^2 + 2x - 15}$ | | | | | | | | | | | | | | | |

**Realiza la Gráfica.**




**De acuerdo con la gráfica obtenida menciona:**

$D_f =$

$R_f =$

Ceros:

***Ejercicio 7.*** Obtener dominio, rango y ceros de la función:

$$f(x) = \sqrt{6x^2 - 5x - 6}$$

Resolvamos el radicando $6x^2 - 5x - 6 -$

Utilizar formula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sustituye

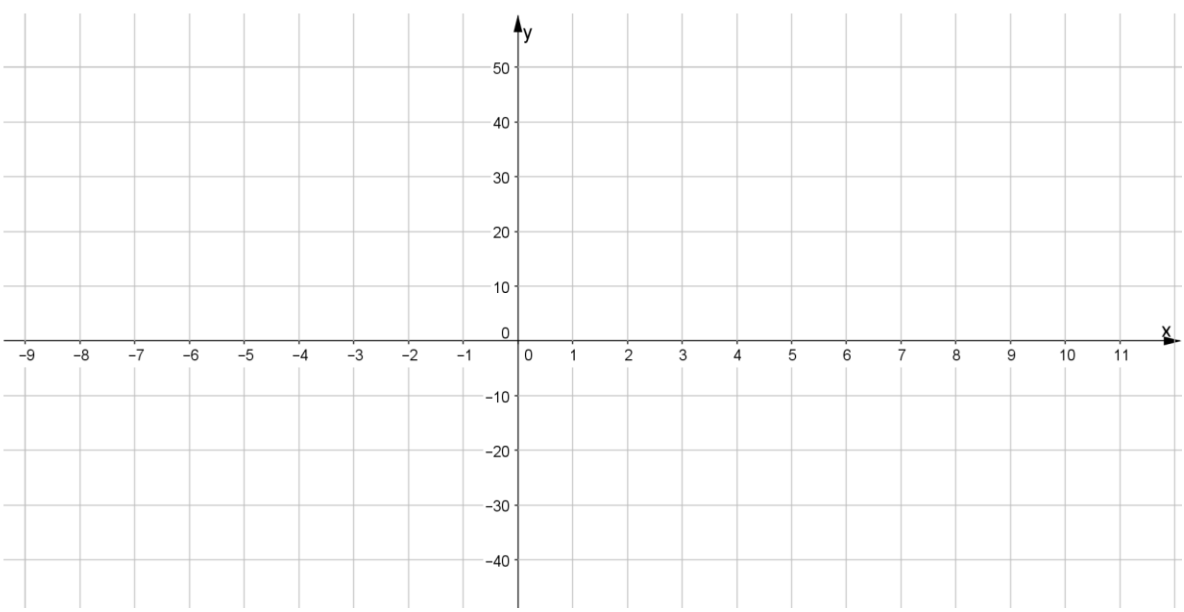
$$x = \frac{-(\quad) \pm \sqrt{(\_\_)^2 - 4(\quad)(\quad)}}{2(\quad)}$$

$x_1 =$ ___________ y $x_2 =$___________

Ya que tenemos la solución vamos a tabular.

| $x$ | -10 | -8 | -6 | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | $\frac{-2}{3}$ | 0 | 1 | $\frac{3}{2}$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = \sqrt{6x^2 - 5x - 6}$ | | | | | | | | | | | | | | | | | |

**Realiza la Gráfica.**



**De acuerdo con la gráfica obtenida menciona:**

$D_f =$

$R_f =$

Ceros:

¿Qué puedes concluir acerca de estos dos últimos ejercicios enfocándote en las gráficas obtenidas?

___

___

***Ejercicio 8.*** Obtener domino, rango y ceros de la función.

$$f(x) = \sqrt{-x^2 - 2x + 15}$$

Resolvamos el radicando $-x^2 - 2x + 15$.

Utilizar formula general

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sustituye

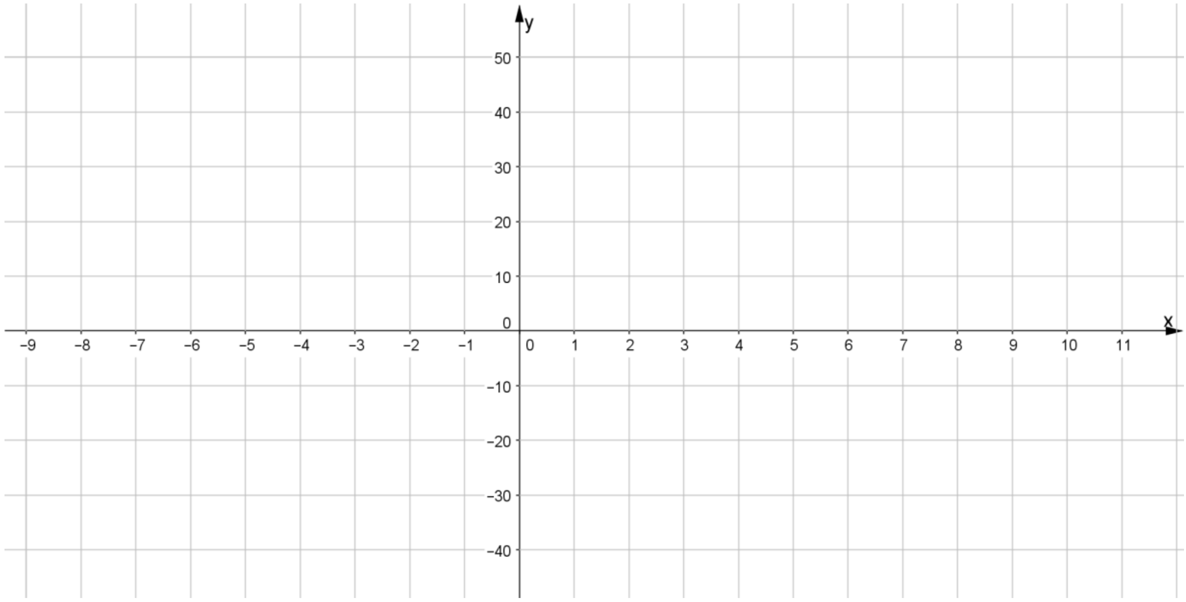
$$x = \frac{-(\quad) \pm \sqrt{(\_\_)^2 - 4(\quad)(\quad)}}{2(\quad)}$$

$x_1 =$ ___________ y $x_2 =$ ___________

Ya que tenemos la solución vamos a tabular

| $x$ | -7 | -6 | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = \sqrt{-x^2 - 2x + 15}$ | | | | | | | | | | | | | | |

**Realiza la Gráfica**




De acuerdo con la gráfica obtenida menciona:

$D_f =$

$R_f =$

Ceros:

¿Qué puedes concluir acerca de este último ejercicio enfocándote en la gráfica obtenida?

___

___

___

***Ejercicios.***

Realiza los ejercicios, obtén dominio, rango, ceros y gráfica de las siguientes funciones y por último, concluye que pasa con la gráfica de cada una de estas funciones respecto a la gráfica de la función cuya regla de correspondencia es $f(x) = \sqrt{x}$ (puedes realizar la gráfica en GeoGebra).

a) $f(x) = \sqrt{-x}$
b) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 25}$
c) $f(x) = -\sqrt{x}$

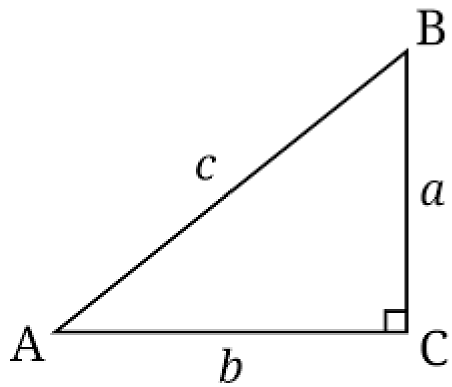
d) $f(x) = -\sqrt{6x^2 - 5x - 6}$
e) $f(x) = -\sqrt{-x}$
f) $f(x) = -\sqrt{x^2 + 2x - 15}$
g) $f(x) = -\sqrt{-x^2 - 2x + 15}$

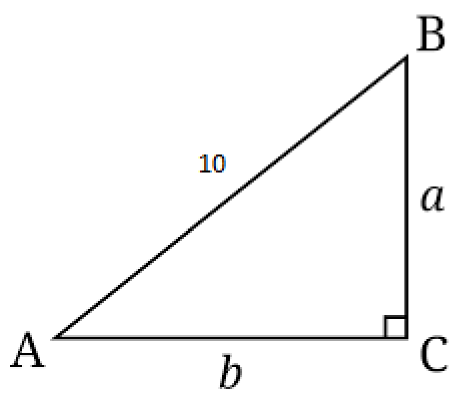
***Estrategia didáctica 6. Problemas de aplicación de las funciones con radicales. (Cierre).***

***Aprendizajes:*** Resuelve problemas de aplicación.

***Problema 1.***

En un triángulo rectángulo, se mantiene constante la longitud de la hipotenusa y las longitudes de los catetos son variables.
a) Expresa el Teorema de Pitágoras, como una función de sus catetos.
b) Realiza la gráfica de la función resultante.
c) Establece el dominio de acuerdo con las condiciones del problema.




**Aplicando el teorema de Pitágoras estudiado en Matemáticas II, unidad IV, tenemos**

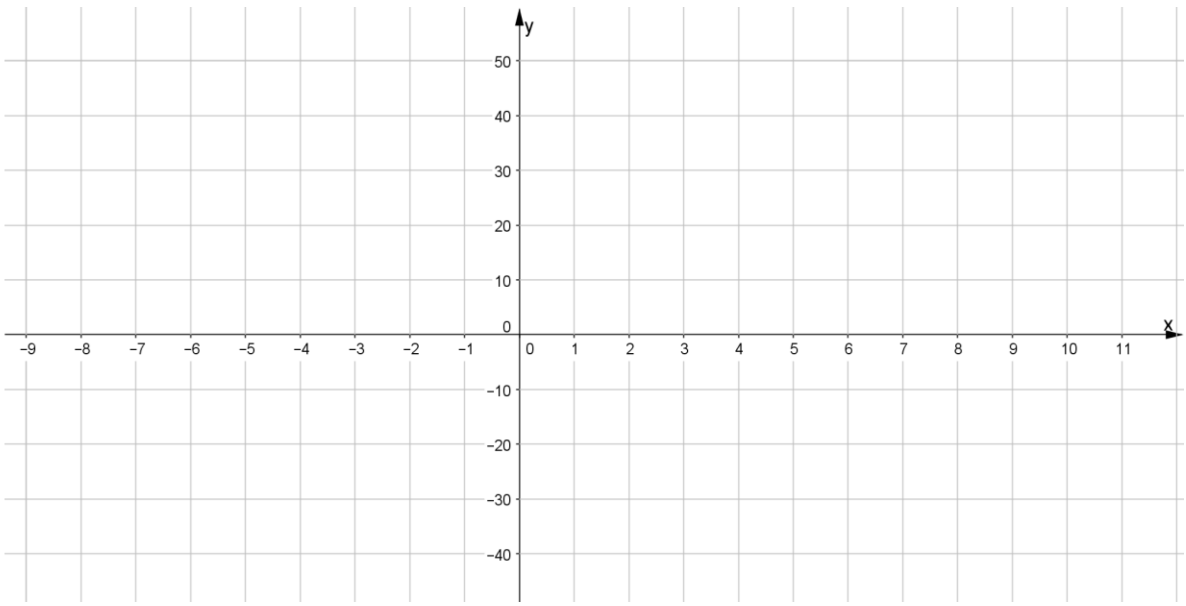
$$b^2 + a^2 = 10^2$$

**Podemos despejar a "$a$" o "$b$" en este caso despejemos a "$b$":**

$$\boldsymbol{b} = \sqrt{\quad}$$

$$\boldsymbol{b(a)} = \sqrt{\boldsymbol{100 - a^2}}$$

Ahora con lo estudiado anteriormente realiza la gráfica de la función, obtén el domino, rango.



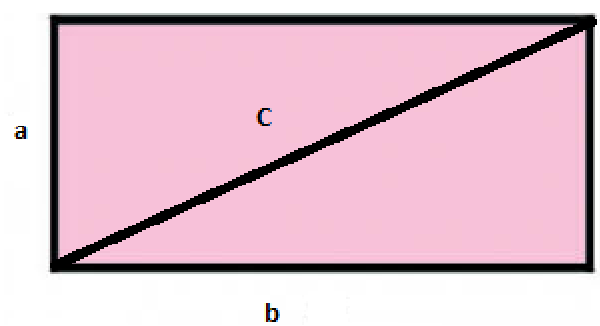
$D_f =$

$R_f =$

Ceros:

***Problema 2.***

¿Cómo puede expresarse la longitud de la diagonal de un rectángulo cuyo perímetro es 20 metros, en función de su ancho?




Aplicando el teorema de Pitágoras

$c^2 = a^2 + b^2$……*Ecuación 1*

A partir del perímetro

$20 = 2a + 2b$

$20 = 2(\_\_ + \_\_)$

$10 = \_\_\_ + \_\_\_$

$b = \_\_\_\_ - \_\_\_\_$ ......... *Ecuación 2.*

Sustituyendo la *Ecuación 2* en *Ecuación 1.*

$c = \sqrt{\_\_\_ + (10 - a)^2}$

$c = \sqrt{a^2 + \_\_ - \_\_ + a^2}$

$c = \sqrt{2a^2 - \_\_ + 100}$

Realiza la gráfica en GeoGebra.

Qué puedes concluir a partir de la gráfica.

______________________________________________________________

______________________________________________________________

## 4. Materiales diversos de apoyo.

### *a) Factorización.*

En primer lugar, veremos cómo resolver una ecuación de la forma.

$$x^2 + bx + c = 0$$

Ilustraremos el primer método explicando varios ejemplos.

***Ejemplo 1.*** Resuelve la ecuación, $x^2 - 5x - 66 = 0$.

i. El trinomio $x^2 - 5x - 66$, será factorizado de la siguiente manera.

$(x + n)(x + m)$.

ii. Primero se descompone el 66 en factores primos.

$$\begin{array}{r|r} 66 & 2 \\ 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

iii. Ahora multiplicamos entre sí los números primos 2, 3, 11, para obtener dos números n y m, cuya suma sea -5, en este caso los números son, $2 * 3 = 6$, y $-11$. Así que $n = 6$ y $m = -11$.

iv. Los factores que buscamos son, $(x + 6)(x - 11)$.

v. La primera raíz de la ecuación se obtiene de resolver la ecuación, $x + 6 = 0$, o sea $x_1 = -6$.

vi. La segunda raíz se obtiene al resolver la ecuación, $x - 11 = 0$, de donde $x_2 = 11$.

vii. Comprobación, sustituyendo $x = -6$ en la ecuación original tenemos, $(-6)^2 - 5(-6) - 66 = 36 + 30 - 66 = 66 - 66 = 0$.

viii. Comprobación, sustituyendo $x = 11$ en la ecuación original tenemos, $(11)^2 - 5(11) - 66 = 121 - 55 - 66 = 121 - 121 = 0$.

***Ejemplo 2.*** Resuelve la ecuación, $x^2 + 7x + 18 = 0$.

i. El trinomio $x^2 + 7x + 18$, será factorizado de la siguiente manera.

$(x + n)(x + m)$.

ii. Descomponemos el 18 en factores primos.

$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

iii. Ahora multiplicamos entre sí los números primos 2, 3, 3, para obtener dos números $n$ $y$ $m$, cuya suma sea 7, en este caso los números no se pueden encontrar.

iv. Si el polinomio no se puede factorizar se denomina *Primo.*

***Ejemplo 3.*** Resuelve la ecuación, $x^2 + 2x - 15 = 0$.

i. El trinomio $x^2 + 2x - 15$, será factorizado de la siguiente manera.

$(x + n)(x + m)$.

ii. Primero se descompone el 15 en factores primos.

$$\begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

iii. En este caso $n = 5$ $y$ $m = -3$.

iv. Los factores que buscamos son, $(x + 5)(x - 3)$.

v. La primera raíz de la ecuación se obtiene de resolver la ecuación, $x + 5 = 0$, o sea $x_1 = -5$.

vi. La segunda raíz se obtiene al resolver la ecuación, $x - 3 = 0$, de donde $x_2 = 3$.

Comprobación, sustituyendo $x = -5$ en la ecuación original tenemos, $(-5)^2 + 2(-5) - 15 = 25 - 10 - 15 = 25 - 25 = 0$.

vii. Comprobación, sustituyendo $x = 3$ en la ecuación original tenemos, $(3)^2 + 2(3) - 15 = 9 + 6 - 15 = 15 - 15 = 0$.

***Ejemplo 4.*** Resuelve la ecuación, $6x^2 - 5x - 6 = 0$.

Como $a = 6, b = -5, c = -6$.

Buscamos dos números $n\ y\ m$ que cumplan las siguientes condiciones.

1. El producto, $n * m = a * x = (6)(-6) = -36$.
2. La suma, $n + m = b = -5$.

i. Se descomponen $a = 6$ y $c = -6$ en sus factores primos.

$$\begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

ii. Ahora se multiplican entre si los números primos, tomando cada uno de ellos una sola vez, para encontrar $n\,y\,m$ de manera que cumplan la condición 2, $n + m = -5$.

$n = 3 * 3 = 9$ y $m = 2 * 2 = 4$
Como $b = -5, m = -9$ es negativo y $n = 4$ debe ser positivo.

iii. Escribimos.

$6x^2 - 5x - 6 = 6x^2 - 9x + 4x - 6 = 3x(2x - 3) + 2(2x - 3) =$
$(2x - 3)(3x + 2)$.

iv. De $3x + 2 = 0$, se tiene, $x_1 = -\frac{2}{3}$.

v. De $2x - 3 = 0$, se tiene, $x_2 = \frac{3}{2}$.

Las raíces de la ecuación son.
$x_1 = -\frac{2}{3}$ y $x_2 = \frac{3}{2}$
Comprobación, sustituyendo $x_2 = \frac{3}{2}$ en la ecuación.
$6\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{3}{2}\right) - 6$
Haciendo la operación $6\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{6}{1}\right)\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{54}{4} = \frac{27}{2}$
Sustituyendo el resultado en la ecuación.
$= \frac{27}{2} - \frac{15}{2} - 6$
El resultado de la resta de fracciones es, $\frac{27}{2} - \frac{15}{2} = \frac{12}{2} = 6$
$6 - 6 = 0$.

***Ejemplo 5.*** Resuelve la ecuación, $12x^2 - 45x + 42 = 0$.

En este caso los tres términos son divisibles por 3, por lo que al simplificar se tiene la ecuación, $3(4x^2 - 15x + 14) = 0$.

Una vez simplificada la ecuación trabajaremos con la ecuación.

$$4x^2 - 15x + 14 = 0.$$

Con $a = 4,\ b = -15,\ c = 14$.

Buscamos dos números $n\ y\ m$ que cumplan las siguientes condiciones.

1. El producto, $n * m = a * c = (4)(14) = 56$.
2. La suma, $n + m = b = -15$.

i. Se descomponen $a = 4\ y\ c = 14$ en sus factores primos.

| | |
|---|---|
| 4 | 2 |
| 2 | 2 |
| 1 | |

| | |
|---|---|
| 14 | 2 |
| 7 | 7 |
| 1 | |

ii. Ahora se multiplican entre si los números primos, tomando cada uno de ellos una sola vez, para encontrar $n\ y\ m$ de manera que cumplan la condición 2, $n + m = -15$.

$n = 2 * 2 * 2 = 8$ y $m = 7$.
Como $b = -15, m = -8$ es negativo y $n = -7$ debe ser negativo.
Para que $m + n = -8 - 7 = -15$.

iii. Escribimos.

$4x^2 - 15x + 14 = 4x^2 - 8x - 7x + 14 = 4x(x - 2) - 7(x - 2) =$
$(4x - 7)(x - 2)$.

iv. De $4x - 7 = 0$, se tiene, $x_1 = \frac{7}{4}$.

v. De $x - 2 = 0$, se tiene, $x_2 = 2$.

Las raíces de la ecuación son.
$x_1 = \frac{7}{4}$ y $x_2 = 2$
Comprobación, sustituyendo $x_2 = 2$ en la ecuación.
$4(2)^2 - 15(2) + 14 = 4(4) - 30 + 14 = 16 - 30 + 14 = 30 - 30 = 0$.

***b) Diferencia de cuadrados.***

Se le llama diferencia de cuadrados al binomio conformado por dos términos a los que se les puede sacar raíz cuadrada exacta.

Al estudiar los productos notables tenemos que:

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

Donde siempre la diferencia de cuadrados es igual al producto de la suma por la diferencia de sus bases.

***Ejemplo:***

$x^2 - x^2 \qquad raíces: \sqrt{x^2} = x \quad \sqrt{y^2} = y \qquad (x+y)(x-y)$

## c) Desigualdades.

**DESIGUALDAD:** Es una expresión que indica que una cantidad es mayor o menor que otra.

**INECUACIÓN:** Es una desigualdad en la que hay una o más cantidades desconocidas (incógnitas) y que sólo se verifica para determinados valores de las incógnitas. Las inecuaciones también se llaman Desigualdades condicionales.

$4x - 3 > x + 9$ es una inecuación porque tiene la incógnita $x$.

Es condicional, porque es cierta para cualquier valor de $x$ mayor que 4, pero es falsa si $x$ es menor o igual que 4.

***Propiedades:***

Sean $c, b, a$ tres números reales.

I. Una desigualdad no cambia de sentido cuando se añade o se resta un mismo número a cada miembro.

Esto es, si $a > b$, entonces se cumple que $a + c > b + c$. ***Ejemplo:***

$$6x + 1 > 5x - 2$$
$$6x - 5x > -2 - 1$$
$$x > -3.$$

II. Una desigualdad no cambia de sentido cuando se multiplican sus dos miembros por un mismo factor positivo, o se dividen por un mismo divisor, también positivo. Esto es, dado un número $c > 0$, si $a > b$ entonces se cumple que: $a * c > b * c$ y que $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

***Ejemplo:***

$$5x - 3 < 3x - 2$$
$$5x - 3x < 3 - 2$$
$$2x < 1$$
$$x < \frac{1}{2}$$

III. Una desigualdad cambia de sentido cuando se multiplican sus dos miembros por un mismo factor negativo, o se dividen por un mismo divisor, también negativo

Esto es, dado un número $c < 0$, si $a > b$ entonces se cumple que:

$a * c < b * c$ y que $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

***Ejemplo:***

$$-6x + 18 < 2 - 4x$$
$$-6x + 4x < 2 - 18$$
$$-2x < -16$$
$$\frac{-2x}{-2} < \frac{-16}{-2}$$
$$x > 8$$

El grupo se organiza en equipos de 2 o 3 alumnos para resolver las siguientes ecuaciones.

| | | |
| --- | --- | --- |
| $x^2 + 2x - 3 = 0$ | $x^2 + 7x + 6 = 0$ | $x^2 - 3x - 10 = 0$ |
| $x^2 - x - 12 = 0$ | $x^2 - 7x - 30 = 0$ | $x^2 - 3x - 18 = 0$ |
| $x^2 - 15x - 14 = 0$ | $x^2 + 4x - 21 = 0$ | $x^2 + 14x + 24 = 0$ |
| $x^2 - 7x - 72 = 0$ | $x^2 + 4x + 4 = 0$ | $x^2 - 6x + 9 = 0$ |
| $x^2 - 9$ | $25x^2 - 16y^2$ | $x^2 - \left(\frac{81}{4}\right)$ |
| $6x - 4 > 7x + 2$ | $5x - 4 > 2x + 2$ | $-6x - 3 > -7x + 2$ |

***d) Ejercicios. Funciones racionales y con radicales.***

Determine el dominio, rango, ceros, huecos, asíntota vertical, asíntota horizontal y traza la gráfica de las siguientes funciones racionales. Anexa al final del documento esta actividad, continuando la numeración con respecto a la última hoja.

a) $f(x) = \frac{x^2-25}{x-5}$ b) $y = \frac{x^2-4x+3}{x-1}$ c) $f(x) = \frac{(x^2+3x-4)(x^2-9)}{(x^2+x-12)(x+3)}$

d) $f(x) = \frac{1}{x}$ e) $g(x) = \frac{x^2-9}{x+3}$ f) $f(x) = \frac{x^2+11x+30}{x+6}$

g) $h(x) = \frac{2}{x-4}$ h) $g(x) = \frac{1}{x-1}$ i) $p(x) = \frac{5}{x+3}$

Traza la gráfica de las siguientes funciones y determina el dominio, rango y ceros de la función.

a) $f(x) = \sqrt{2x-1}$ b) $f(x) = \sqrt{3x+4}$ c) $f(x) = \sqrt{x^2-4}$

d) $f(x) = \sqrt{25-x^2}$ e) $f(x) = \sqrt{x^2-5x-14}$ f) $f(x) = \sqrt{x^2-x-12}$

## 5. Formas e instrumentos de evaluación.

Sin duda, una de las cuestiones más importantes de la enseñanza, es la evaluación de lo aprendido por los estudiantes. En nuestro caso, esta evaluación debe ser continua y en estrecha observancia de los dos principios básicos del constructivismo, a saber, la *diferenciación progresiva* y la *reconciliación integradora* de los nuevos contenidos con los que ya traía el aprendiz. Por ello es por lo que, a lo largo del desarrollo de esta estrategia didáctica, se deberá ir determinando la adecuación y pertinencia de las construcciones conceptuales de los alumnos. Al final de la autoevaluación, encontraras las respuestas a cada sección con la finalidad de que te puedas autoevaluar.

### Autoevaluación.

1. La asíntota vertical de $f(x) = \frac{1}{x+3}$ es:

   a) $x = 3$
   b) $x = 0$
   c) $x = -3$
   d) $x = 1$

2. El dominio de $f(x) = -\frac{1}{x+3}$ es:

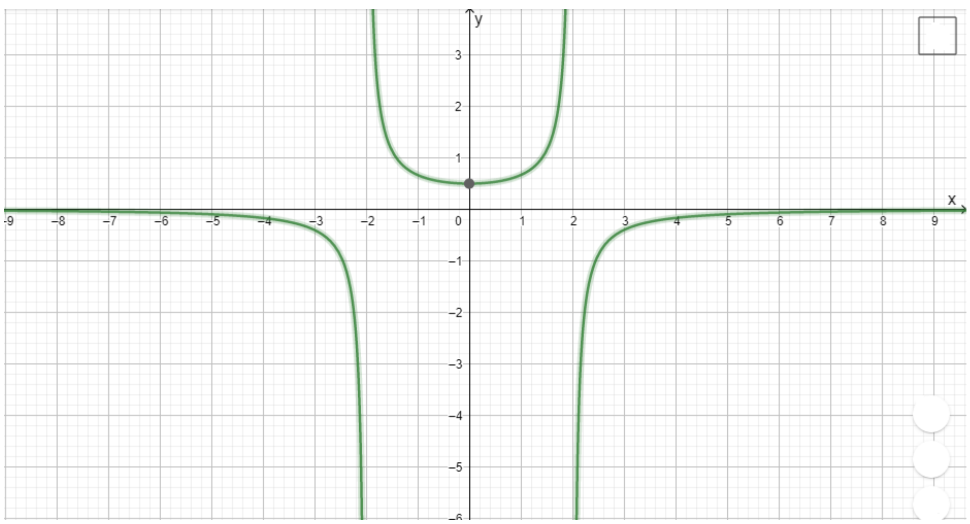
   a) $(-\infty, 3) \cup (-3, \infty)$
   b) $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$

c) $(-\infty, 3) \cup (3, \infty)$
d) $(-\infty, -3) \cup (-3, \infty)$

3. El rango de $f(x) = -\frac{1}{(x-2)^2} + 1$ es:

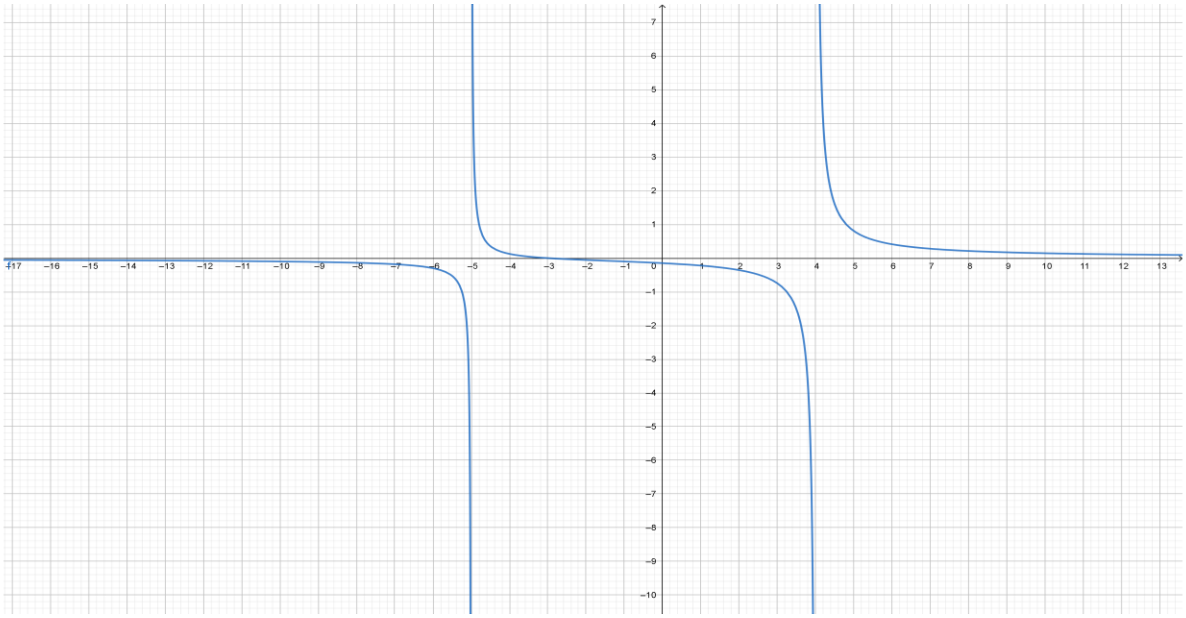
a) $(-\infty, -1)$
b) $(-\infty, 1)$
c) $(\infty, -1)$
d) $(\infty, 1) \cup (-\infty, 1)$

4. La siguiente gráfica, ¿A cuál de las siguientes funciones corresponde?




a) $f(x) = -\frac{2}{(x-2)(x-2)}$
b) $f(x) = -\frac{2}{(x+2)(x-2)}$
c) $f(x) = -\frac{2}{(x+2)(x+2)}$
d) $f(x) = \frac{2}{(x-2)(x-2)}$

5. La siguiente gráfica, ¿A cuál de las siguientes funciones corresponde?



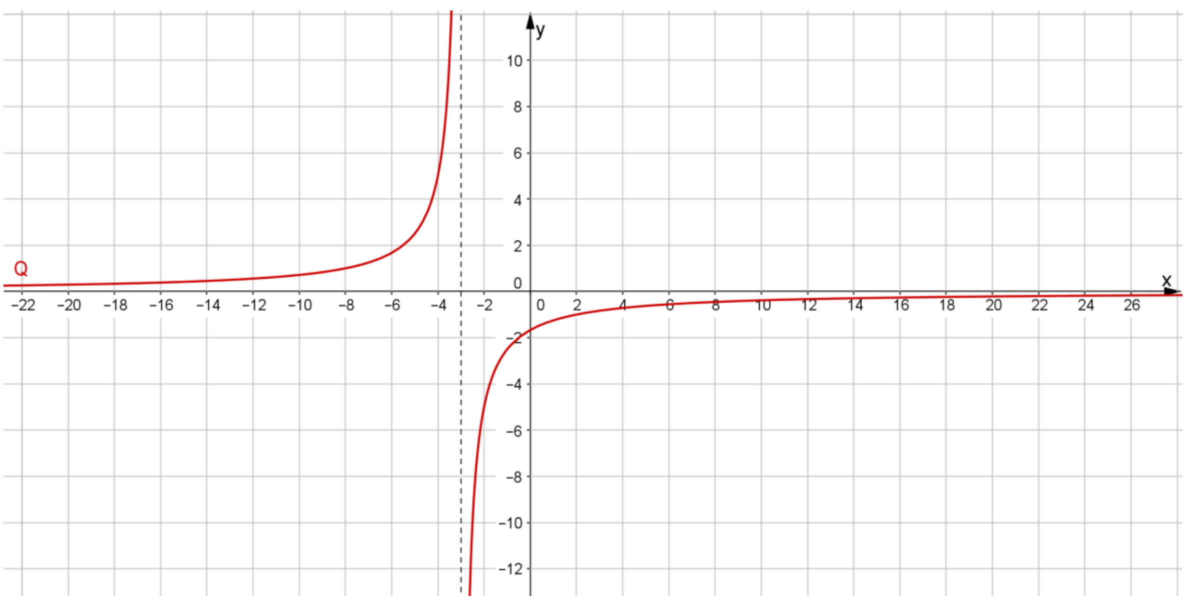
a) $f(x) = \frac{x-3}{x^2+x-20}$

b) $f(x) = \frac{x+3}{x^2+x-20}$

c) $f(x) = \frac{x+3}{x^2-x-20}$

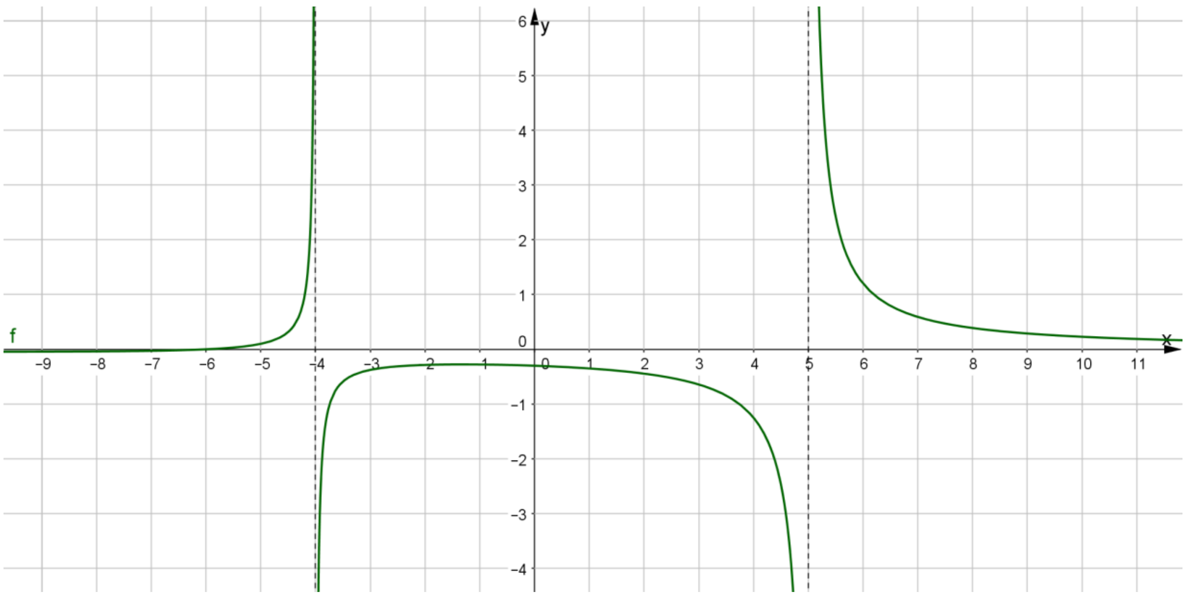
d) $f(x) = \frac{x-3}{x^2-x-20}$

6. ¿Cuál es la función que representa a la siguiente gráfica?




a) $Q(x) = -\frac{5}{x+3}$ b) $Q(x) = \frac{1}{(x-7)^2} + 4$ c) $Q(x) = \frac{4}{(x+4)^2}$ d) $Q(x) = \frac{x-2}{x+6}$

7. ¿Cuál es la función que representa a la siguiente gráfica?

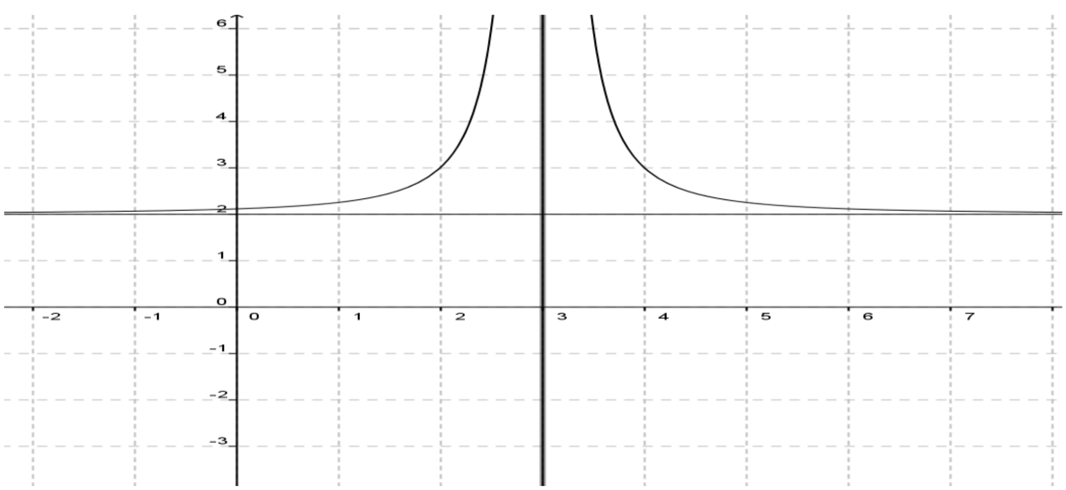


a) $f(x) = \frac{x+6}{x^2-x-20}$ b) $f(x) = \frac{x}{x^2+9x+20}$ c) $f(x) = \frac{x+6}{x^2-x+6}$ d) $f(x) = \frac{x+6}{x^2+x-20}$

8. El dominio de la función racional $f(x) = \frac{x^2-2}{x^2-1}$ es:

a) $\mathcal{R} - \{1\}$ b) $\mathcal{R} - \{-1\}$ c) $\mathcal{R}$ d) $\mathcal{R} - \{-1, +1\}$

9. La siguiente gráfica está representada por la siguiente función racional.



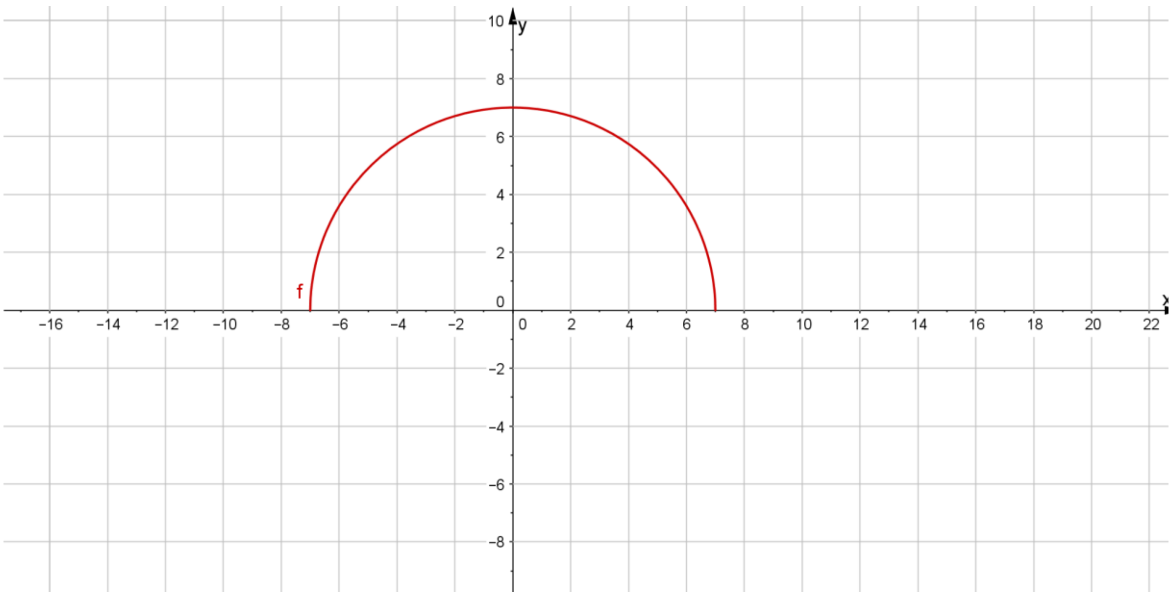
a) $f(x) = \dfrac{1}{(x+3)^2} - 2$ b) $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^2} - 2$

c) $f(x) = \dfrac{-1}{(x-3)^2} + 2$ d) $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^2} + 2$

10. ¿Cuál es el dominio de la función $f(x) = \sqrt{2x-10}$?

a) $(5, \infty)$ b) $(5, \infty]$ c) $[-5, \infty]$ d) $[5, \infty)$

11. La función que le corresponde a la siguiente gráfica:




a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 49}$ b) $f(x) = \sqrt{(x-7)(x-7)}$ c) $f(x) = \sqrt{(x+7)(x+7)}$
d) $f(x) = \sqrt{49 - x^2}$

12. El dominio de la función $f(x) = -\sqrt{x^2 - 1}$ es:

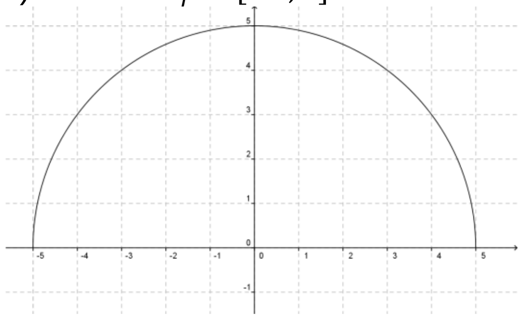
$a)$(-∞, $-1] \cup [1, \infty)$ $b)[-\infty. -1]$ $c)[\infty, 1]$ d) $\mathcal{R}$

13. El rango de la función $f(x) = \sqrt{2 + 2x}$ es:

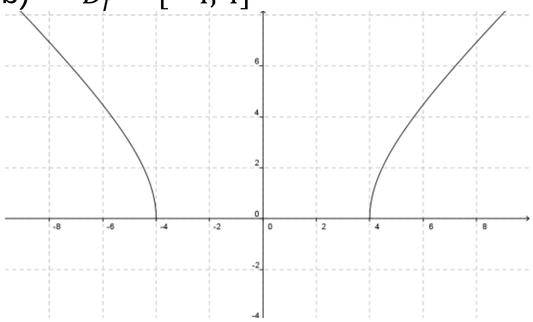
$a)$ $[-\infty, 0]$ $b)$ $[-3,3]$ $c)[-1, \quad \infty)$ $d)[-2,2]$

14. La gráfica de la función $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ y su dominio son:

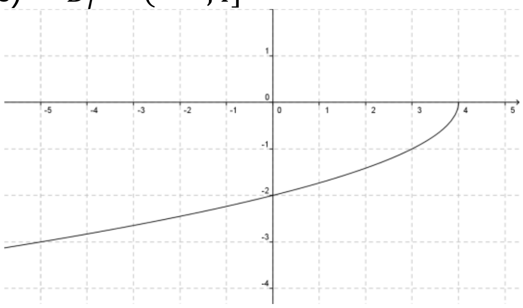
a) $D_f = [-4, 5]$



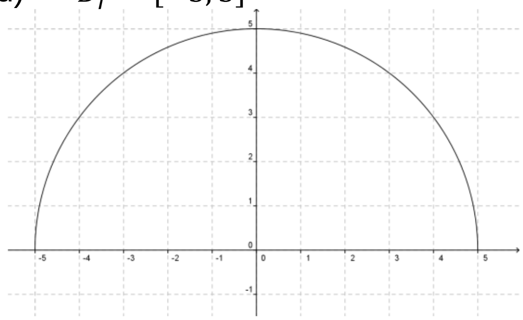
b) $D_f = [-4, 4]$



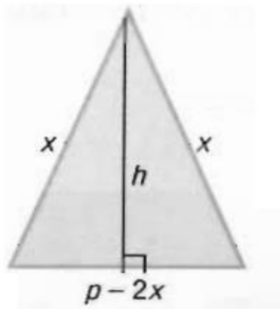
c) $D_f = (-\infty, 4]$



d) $D_f = [-5, 5]$



15. Considera un triángulo isósceles de perímetro fijo $20\ u$. Si $x$ es el valor de uno de los lados de igual longitud exprese su área $A(x)$como función de $x$.




**a)** $A(x) = (10 - x)\sqrt{20x - 100}$

**b)** $A(x) = x\sqrt{20x - 100}$

**c)** $A(x) = (10 - x)\sqrt{20x + 100}$

**d)** $A(x) = 10\sqrt{20x - 100}$

| **Tabla de respuestas de la autoevaluación.** | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Sección I. Funciones racionales.* | | | | | | | | |
| 1. c | 2. e | 3. b | 4. b | 5. b | 6. a | 7. a | 8. d | 9. d |
| *Sección II. Funciones con radical.* | | | | | | | | |
| 10. d | 11. d | 12. a | 13. c | 14. d | 15. a | | | |

## 6. Valoración del profesor de los resultados obtenidos.

En esta sección se incluye una lista de cotejo para que todos podamos aplicarla al final de su puesta en escena.

| | | |
|---|---|---|
| **MATERIA: MATEMÁTICAS IV.**<br>**NIVEL: BACHILLERATO.**<br>**UNIDAD 2: FUNCIONES RACIONALES Y FUNCIONES CON RADICALES.**<br>**MATERIAL: CUADERNO DE TRABAJO.**<br>Nombre: ____________________________________________. Grupo: _________. | | |
| **Lista de cotejo para evaluar los resultados obtenidos en la puesta en escena de la Unidad 2. Funciones Racionales y con Radicales.** | | |
| INDICADORES DE LOS APRENDIZAJES INCLUIDOS EN LA UNIDAD 2. | **SI** | **NO** |
| 1. Se exploran situaciones que se modelan con Funciones Racionales. | | |
| 2. Se identifican los elementos de una Función Racional: ceros, asíntotas verticales y huecos, dominio y rango para graficarla. | | |
| 3. Realiza graficas de Funciones Racionales que tengan asíntota horizontal, diferente al eje de las $x$, asíntotas verticales, ceros, huecos, dominio y rango. | | |
| 4. Se resuelven problemas de aplicación. | | |
| | | |
| 5. Se exploran problemas sencillos que se modelan con Funciones Radicales. | | |
| 6. Se identifica los elementos de la función: Domino, rango, ceros y se traza su gráfica. | | |
| 7. Se resuelven problemas de aplicación. | | |
| INDICADOR | **A** | **R** |
| AUTOEVALUACIÓN. | | |

## 7. Bibliografía y/o Fuentes Consultadas.

Ruiz, J. (2009). *Matemáticas IV*. México: Editorial Patria.
Robledo, R. *et al*. (2020). *Matemáticas II*. CCH.UNAM.

## 8. Bibliografía Virtual. Sitios WEB y Fuentes Relevantes.

El portal académico del CCH. (2020). Recuperado de http://portalacademico.cch.unam.mx/. Contiene guías para el profesor, material interactivo, así como textos de interés pedagógico.

Dirección General Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades. (2016). *Programas de Estudio, Mapa curricular del Plan de estudios. Recuperado de* https://www.cch.unam.mx/programasestudio

Acevedo, A. (s.f.). *Nuestra Pared para pintar. (Imagen).* Recuperado de: Nuestra pared para pintar | Angel Acevedo | Flickr

Anonimo. (s.f.). *Gorila. (Imagen).* Recuperado de GORILA | TAMAÑO: Grande: 44 cm X 63 cm - Gigante: 60 cm X 71… | Flickr

Jesust793. (s.f). *IMG_6120.(Imagen).* Recuperado de IMG_6120 | jesust793 | Flickr

Maldonado, L. (s.f.). *Clave A1 Esferas de Plástico. Irrompibles(Imagen).*Recuperado de CLAVE A1 | ESFERAS DE PLASTICO, IRROMPIBLES | Lilian Maldonado | Flickr

Miguel. (s.f). *Lobo (Imagen).* Recuperado de: Lobo | Lobo. 70-300 IS-USM | Miguel Angel | Flickr

Petit. (s.f). *Trabant-Rock & Roll-Musical Show(imagen).* Recuperado de Trabant-Rock & Roll-Musical Show | Petit model réduit, Traba… | Flickr

**SITIOS WEB.**

QR-1. NEUROCHISPAS. APRENDE INTUITIVAMENTE. (8 de febrero de 2021). *Función Racional.* Recuperado de https://www.neurochispas.com/wiki/aplicaciones-de-las-funciones-racionales

QR-2. Allen R, A. (2008). *Álgebra Intermedia (capitula 7).* (7ª ed.) PEARSON Prentice-Hall. Recuperado de https://www.cimat.mx/ciencia_para_jovenes/bachillerato/libros/algebra_angel_aop7.pdf

MATEMÁTICAS IV

# Unidad 3. Funciones Exponenciales y Logarítmicas.

**CUADERNO DE TRABAJO.**

**Propósitos de la unidad.**

Al finalizar, el alumno:
Utilizará las funciones exponencial y logarítmica para representar formas de variación de fenómenos de la naturaleza, que estás permitan modelar. Retomará los conceptos de dominio, rango, así como el análisis de las relaciones entre los parámetros de estas funciones y su gráfica. **Tiempo: 20 horas.**

## 1. Presentación de la unidad 3.

Hasta ahora hemos estudiado funciones algebraicas. A las funciones que no son algebraicas se les llama trascendentales o trascendentes. Algunos ejemplos de funciones trascendentes son las exponenciales y logarítmicas. A menudo, observamos o escuchamos acerca del crecimiento muy acelerado de poblaciones, por ejemplo, de ratones o cucarachas, de la propagación de bacterias o de *virus*, de los peligros de la desintegración radioactiva, de los residuos en la sangre de una sustancia ingerida, de la intensidad de los terremotos, y de la acides de una sustancia. El estudio de este tipo de fenómenos se relaciona en gran medida con las funciones exponenciales y logarítmicas, y abarcan las ciencias físicas, biológicas y sociales.

Esta unidad se desarrolla a través de estrategias didácticas[1], Su diseño es una de las principales tareas del profesor contemporáneo, independientemente de la interpretación que del aprendizaje tenga. Con el propósito de posibilitar un mejor aprendizaje, o sea, un aprendizaje que fuese adquiriendo un significado propio en los procesos prácticos cercanos a los estudiantes, con vistas a alcanzar *los objetivos actitudinales, conceptuales y procedimentales* del área de matemáticas del CCH y, específicamente, aquellos que atañen a esta unidad temática.

Más aún, nuestra propuesta agrega la computadora como uno de sus recursos esenciales, dado que con los medios de representación que ofrece, el estudiante tiene la posibilidad de construir y reconstruir el conocimiento matemático "viendo" y "manipulando", literalmente, sus construcciones, las de sus compañeros, así como la de los matemáticos que lo han ido estableciendo en la historia de las matemáticas. El desarrollo de la unidad se lleva a cabo con 7 estrategias didácticas e incluye: una autoevaluación, materiales de apoyo diversos y la bibliografía utilizada en su elaboración.

## 2. Actividades de aprendizaje.

Estas se llevarán a cabo tomando como base los *aprendizajes* de la unidad 3, a través de *estrategias didácticas*, utilizando diversas actividades y recursos mismas

[1] Cf. Anexo 1.

que incluyen códigos QR, actividades diversas y el uso de GeoGebra, con el fin de alcanzar los propósitos de esta unidad.

**3. Puesta en escena de la unidad 3. Funciones exponenciales y logarítmicas.**

Las estrategias didácticas que se presenta a continuación han sido diseñadas para que los estudiantes logren un aprendizaje significativo de los contenidos actitudinales, conceptuales y procedimentales de la *Unidad Temática 3*, del curso de Matemáticas IV, con vistas a lograr los aprendizajes de esta. La unidad didáctica se ha estructurado conforme a las siguientes *estrategias didácticas.*

## *SECCIÓN I. Funciones Exponenciales.*

***Estrategia didáctica 1. Situaciones que involucran crecimiento y decaimiento exponencial. (Inicio).***

***Aprendizajes:*** El alumno en función de la resolución de problemas: explora situaciones o fenómenos que corresponden a crecimiento o decaimiento exponencial, las relaciones o condiciones existentes y analiza las formas de variación.

***Para el alumno:*** Actividad de exploración para anclar conocimientos previos.

QR-1. Leyes de los exponentes.

***Actividad 1. (Extraclase):*** Visita los dos códigos QR, para conocer acerca de las leyes de los exponentes. Una vez que hayas entrado saca una copia con la información relativa al tema y cópiala en tu cuaderno ya que ésta la vas a usar en las siguientes actividades.

QR-2. Leyes de los exponentes|Álgebra.

### *Actividad 2. Leyes de los exponentes.*

En base a la actividad 1, sobre las leyes de los exponentes realiza lo siguiente.

1. Calcula el valor de $5^4$

$$5^4 = \_\_\_ \text{ x } \_\_\_ \text{ x } \_\_\_ \text{ x } \_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

a) El número 5 recibe el nombre de: _____________, y el 4 se llama _____________.

2. Completa la siguiente tabla, tomando en consideración el resumen que realizaste de los códigos QR-1 y QR-2 sobre las leyes de los exponentes. Completa las dos columnas.

| Regla | Ejemplo |
|---|---|
| $x^m \bullet x^n =$ | $x^5 \bullet x^6 =$ |
| $\dfrac{x^m}{x^n} =$ | $\dfrac{x^9}{x^4} =$ |
| $(x^m)^n =$ | $(x^3)^4 =$ |
| $(x^m y^n)^k =$ | $(x^2 y^4)^5 =$ |
| $\left(\dfrac{x}{y}\right)^m =$ | $\left(\dfrac{x^4}{y^6}\right)^7 =$ |
| $\boldsymbol{x^0 = \quad para\ x \neq 0}$ | $5^0 = \qquad \left(\dfrac{1}{2}\right)^0 = \qquad 3m^0 - 5m^0 =$ |
| $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{-n} =$ | $\left(\dfrac{1}{b^3}\right)^{-n} =$ |
| $\dfrac{x^{-m}}{y^{-n}} =$ | $\dfrac{x^{-7}}{y^{-10}} =$ |
| $(x)^{\frac{m}{n}} =$ | $(x)^{\frac{2}{3}} =$ |

3. Simplifica las siguientes expresiones y escribe el resultado con exponentes positivos.

| |
|---|
| $\dfrac{2a^2}{8a^{-2}} =$ |
| $\left(\dfrac{3m^4}{n}\right)^3 \left(\dfrac{n}{n^2}\right)^4 =$ |
| $\left(\dfrac{4x^{-2}}{9x^2}\right)^{-1/2} =$ |

| |
|---|
| $\left(\dfrac{2}{5x^{-3}}\right)^{2} =$ |
| $\left(\dfrac{3}{4}x^{-6}\right)\left(\dfrac{4}{3}x^{2}\right) =$ |
| $\left(\dfrac{1}{8}a^{-4}b^{2}\right)^{-3} =$ |

***Actividad 3. Actividades de aplicación. Problemas contextualizados a diferentes ramas de la ciencia.***

***Problema 1.*** Enrique tiene que escoger entre las siguientes opciones para que su mamá ahorre dinero para su fiesta de *18 años.*


a) Ahorrar *$1000.00* cada mes durante *10 meses.*

b) Ahorrar *$1 el primer mes, $3 el segundo mes, $9 el tercer mes* y así sucesivamente hasta llegar al décimo mes.

i) ¿Cuál es la cantidad que ahorro con el primer procedimiento?

________________________________________________

ii) Completa la siguiente tabla para calcular el ahorro total que se obtendría con el segundo procedimiento.

| Meses | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Dinero $ | 1 | 3 | 9 | | | | | | | |
| Potencias | | | | | | | | | | |

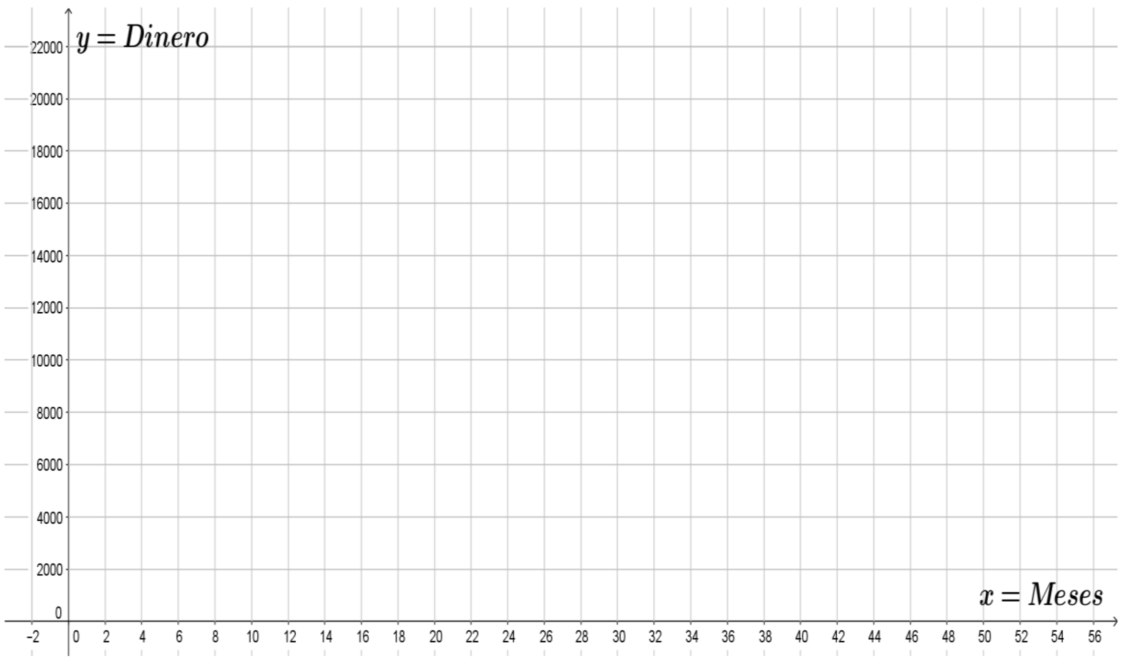
iii) ¿Cuál de las dos opciones le conviene más a Enrique?

________________________________________________.

¿Por qué razón?

______________________________________________.

iv) Realiza la gráfica correspondiente *meses vs dinero.*




v) Describe brevemente lo que observas en la gráfica y establece con el apoyo de tu profesor el modelo matemático de esta situación:

______________________________________________

______________________________________________

***Problema 2.*** Patricia, decide invertir \$10,000 en el banco y el ejecutivo le propone dos tipos de inversión ¿Cuál de los siguientes planes de inversión es el mejor para Patricia?

a) *Primer plan:* invertir \$10,000 durante un año con una tasa de interés del 7% anual.
b) *Segundo plan:* invertir \$10,000 durante 12 meses con una tasa de interés del 0.58% mensual y con reinversión mensual de los intereses.

c) Utiliza las siguientes tablas para establecer la mejor opción.

**Primer plan de inversión durante un año.**

| Meses | Capital | % Interés anual | Interés | Capital Acumulado |
|---|---|---|---|---|
| 12 | | | | |

**Segundo plan de inversión a 12 meses**

| Meses | Capital + Interés | Capital Acumulado |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |
| 6 | | |
| 7 | | |
| 8 | | |
| 9 | | |
| 10 | | |
| 11 | | |
| 12 | | |

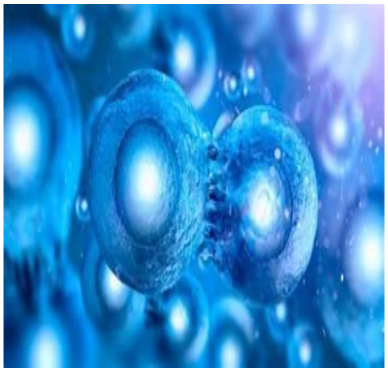
d) *¿Cuál plan fue la mejor inversión?*

______________________________________________________________________.

e) ¿Por qué razón?

________________________________________________________.

***Problema 3.*** Crecimiento de las células: Las células se reproducen conforme a la tabla 1.



Todos los organismos vivos poseen como unidad fundamental de función y estructura a la célula, esta se desarrolla únicamente a partir de una célula preexistente y posteriormente la célula tiene vida propia. Mediante varias investigaciones y con la evolución de los instrumentos tecnológicos, se logró descubrir la parte esencial de la vida en el siglo XVII y tras la invención del microscopio se lograron determinar las células en los tejidos animales y vegetales, por último, se encontró similitud en la organización estructural de los organismos.

| **Tabla 1. Reproducción de las células** | | |
|---|---|---|
| Generación | Dibuje los enlaces de las células | # de Células |
| 5 | OO OO OO OO OO OO OO OO OO OO OO OO OO OO OO OO | |
| 4 | O O O O O O O O O O O O O O O O | |
| 3 | O O O O O O O O | |
| 2 | O O O O | |
| 1 | O O | |
| 0 | O | |

Con la información mostrada en la tabla 1, contesta las siguientes preguntas.

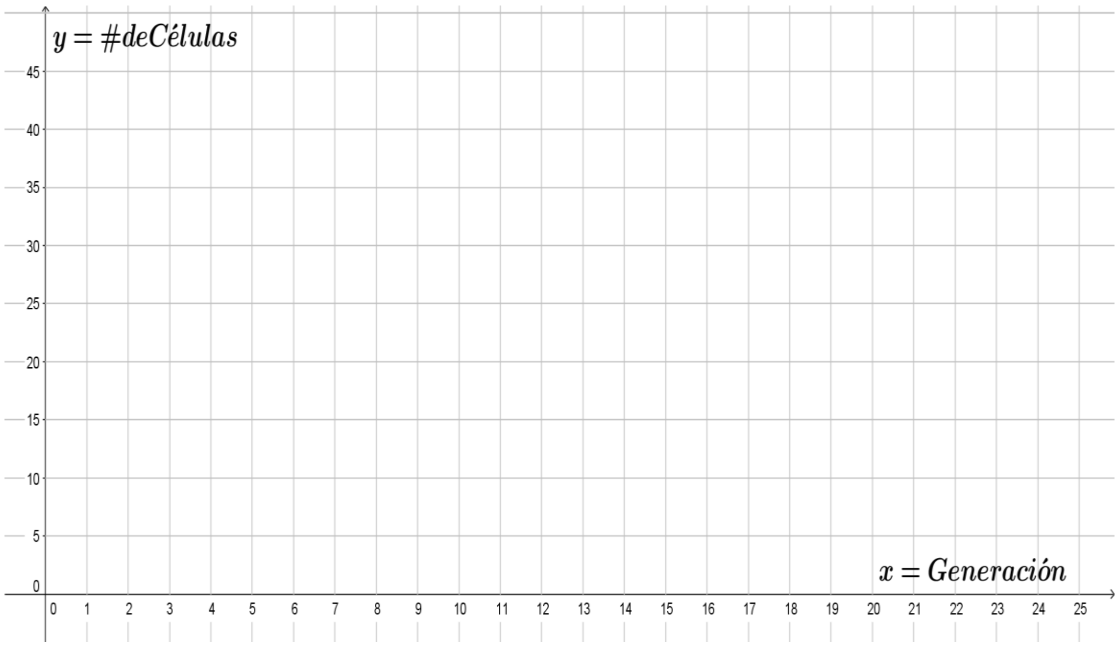
a) Las células se ____________________ en cada generación.
b) Las células crecen _______________________cada que surge una generación.
c) Determina una expresión para el cálculo de células para cada nueva generación.

______________________________________ .

d) Calcule el número de células de las siguientes generaciones.

| G-6 | G-9 | G-15 | G-18 |
|---|---|---|---|
| | | | |

e) **Dibuje la gráfica** de la reproducción de células de las primeras cinco generaciones.




***Problema 4. La leyenda del ajedrez.***

"Cuentan los hombres dignos de fe (pero Alá sabe más), que el rey que recibió como regalo el juego del ajedrez de manos de su inventor, le ofreció las riquezas o placeres que él quisiera. A ello, el inventor le respondió que lo único que quería era lo siguiente: que pusiera un grano de trigo en la primera casilla del tablero; en la segunda que pusiera dos granos de trigo, y así sucesivamente, que en la siguiente casilla pusiera el doble de granos de trigo que en la casilla anterior. A lo que el rey respondió afirmativamente y gustoso. Acto seguido, ordenó a sus lacayos que le pusieran el trigo que el inventor demandaba mientras ambos se sentaban a comer. Poco tiempo después de terminar la comida, vino corriendo el contador real a darle la siguiente noticia:

Querido rey, lo que el inventor demanda de trigo no puede ser satisfecho por la cosecha completa que tenemos actualmente; pero lo más grave, es que ni siquiera con las siguientes veinte cosechas de trigo de todo el reino se podría satisfacer aquella petición".

Más o menos, ésta es la leyenda del ajedrez, descrita por *Malba Tahan* en el libro "*El hombre que calculaba"*. Ahora bien, contesta las siguientes preguntas:

a. Escribe la expresión aritmética correspondiente a cada casilla.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29<br>$2^{28}$ | 30 | 31 | 32 |
| 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 |
| 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 |
| 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | **64** |

b. Completa la siguiente tabla.

| **Tabla 2. La leyenda del ajedrez** | | |
|---|---|---|
| **# Casilla** | **Expresión aritmética** | **Número de granos de trigo** |
| 1 | $2^0$ | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |
| 6 | $2^5$ | 32 |

| | | |
|---|---|---|
| 7 | | |
| 8 | | |
| 9 | | |
| 10 | | |
| 15 | | |
| 20 | | |
| 25 | $2^{24}$ | 16,777,216 |
| 30 | | |
| 35 | | |
| 40 | | |
| 45 | | |
| 50 | | |
| 55 | | |
| 56 | | |
| 58 | | |
| 60 | | |
| 64 | | |
| **Suma Total de granos de trigo de las 64 casillas.** | | |

Nota: Consulta Internet para la suma total de granos de trigo de las 64 casillas.

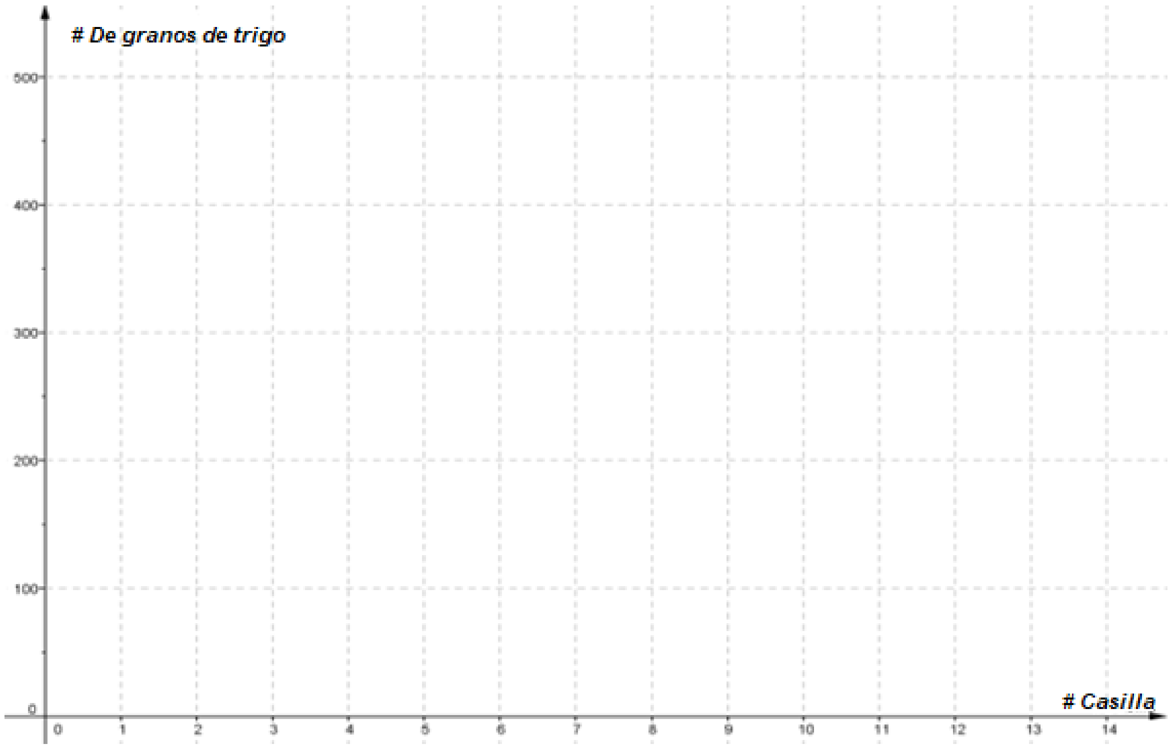
c. ¿Cómo obtuviste el número de granos de la casilla # *64*?

______________________________________________________________.

d. Escribe la fórmula con la que se puede calcular el número de granos de trigo para cualquier casilla.

______________________________________________________________ .

e. Gráfica una muestra de parejas #casilla **vs** #granos de trigo (10 casillas) de la tabla 2.




***Problema 5. Decaimiento Radioactivo.***

Ciertas cantidades crecen o decaen exponencialmente. Uno de los ejemplos más comunes es la desintegración de las sustancias radiactivas. Para ilustrar esto, consideremos el isótopo radiactivo de bismuto 210, que tiene una vida media de 5 días. Es decir, la mitad se desintegrará en 5 días. Si la muestra inicial es de 150 mg., realiza lo siguiente.

a) Completa la siguiete tabla.

| t(días) | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 27.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Cantidad restante(mg.) | 150 | 75 | 37.5 | | | | |

b) Si consideramos que la expresión que indica la cantidad restante al cabo de $t$ intervalos de tiempo se puede escribir como: $N(t) = N_0 2^{kt}$. Para el bismuto, $k = -\frac{1}{5} = -0.2$, por lo que: $N(t) = N_0 2^{-0.2t}$. Donde $N_0 = Muestra\ inicial$.

- Utilizando esta última expresión, corrobora los resultados obtenidos en la tabla del inciso (a).

- Completa las siguiente operaciones para 32, 35 y 37 días, utilizando tu calculadora.

$$N(32) = 150(2)^{(-0.2)(\quad)} = \qquad\qquad mg.$$

$$N(35) = 150(2)^{(-0.2)(\quad)} = \qquad\qquad mg.$$

$$N(37) = 150(2)^{(-0.2)(\quad)} = \qquad\qquad mg.$$

c) En la figura 1, se muestra la gráfica de la desintegración del bismuto 210.

i. Describe brevemente lo que observas en la gráfica, que la hace diferente a las que vienes construyendo en los problemas anteriores.

__________________________________________________________

_________________________________________________________.

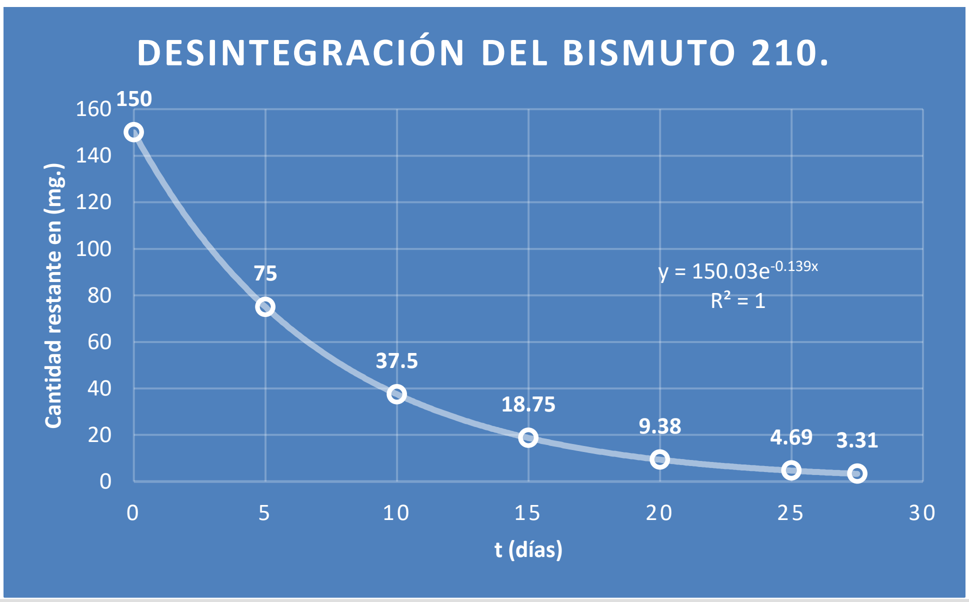



Figura 1. Gráfica de la desintegración del bismuto 210.

***Problema 6.*** **El conejo y la zanahoria**. Un conejo intenta comerse una zanahoria de la siguiente manera. Primero se come la mitad de la zanahoria; después, la mitad de la mitad, y así sucesivamente. De esta manera, el conejo se va comiendo las siguientes proporciones de la zanahoria:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \ldots$$

En efecto, al principio se come la mitad de la zanahoria, en el segundo bocado, el conejo deberá comerse la mitad de la mitad, de manera que se come la cuarta parte. En el tercer bocado, el conejo deberá comerse la mitad de la cuarta parte de la zanahoria que queda, por lo que se come la octava parte y así *sucesivamente*. Como podemos observar, en cada nuevo bocado el conejo se come una parte más pequeña a la anterior.

a) ¿Se acabará la zanahoria el conejo?
_______________________________________________.

b) ¿Cuánto tiempo le llevaría?
_______________________________________________.

c) Completa la siguiente tabla. Grafica los pares de puntos que obtengas del conejo y la zanahoria.

| **Tabla 3. Pares de puntos del conejo y la zanahoria** | | |
|---|---|---|
| ***n*** | ***g*** | ***(n,g)*** |
| *1* | *1/2* | ***(1,1/2)*** |
| *2* | | |
| *3* | | |

| | | |
|---|---|---|
| *4* | | |
| *5* | | |
| *6* | *1/64* | ***(6,1/64)*** |
| *7* | | |
| *8* | | |
| *9* | | |
| *10* | | |

***Sugerencia. Emplea una calculadora para completar la tabla.***

d) Grafica los pares de puntos obtenidos en la tabla 3 y únelos con una línea suave.

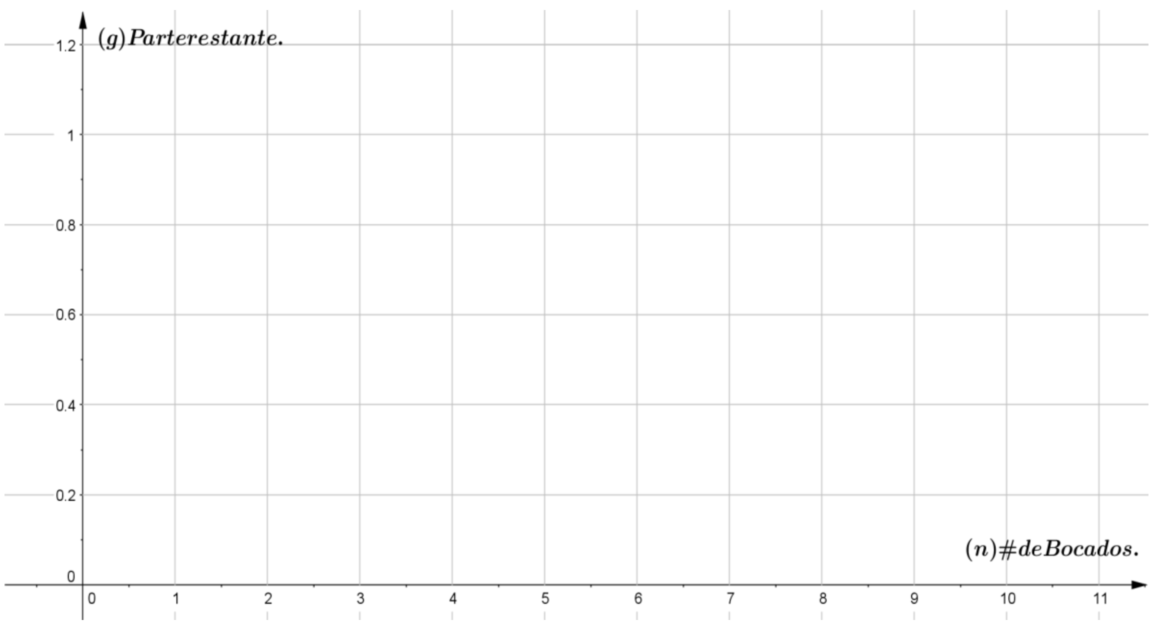



**Figura 2.** La gráfica del conejo y la zanahoria tiene por término general al siguiente número:

$$C(n) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n}.$$

e) ¿Están alineados los puntos de esta gráfica? Explica tu respuesta.

____________________________________________________________.

Los puntos de la figura 2, también cumplen la siguiente *relación exponencial*:

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}.$$

***Estrategia didáctica 2. Patrones de cambio en una función exponencial. (Desarrollo).***

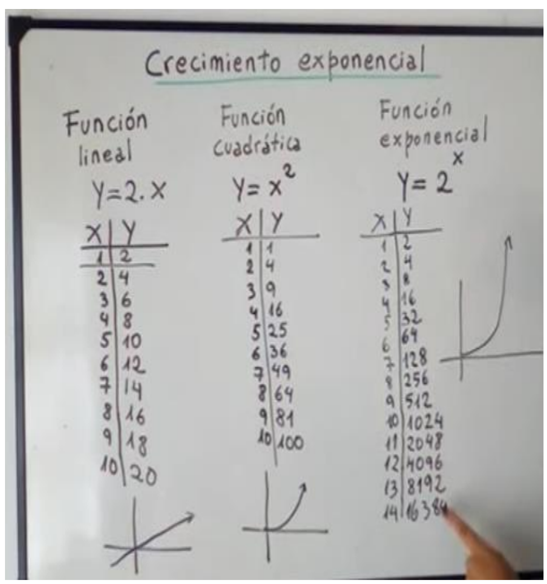
***Aprendizajes:*** El alumno identificará patrones de cambio involucrados en el crecimiento o decaimiento de una función exponencial y bosqueja su gráfica.

***Para el alumno:*** Actividad de exploración para diferenciar las funciones exponenciales de las funciones lineal y cuadrática.

QR-3. Coronavirus crecimiento exponencial.

***Actividad 1. (Extraclase):*** Visita el código QR-3, para conocer más acerca del crecimiento exponencial, así como la comparación que hay entre magnitudes que varían de forma exponencial y magnitudes que no lo hacen. Una vez que hayas entrado saca una copia con la información relativa al tema y cópiala en tu cuaderno ya que ésta la vas a usar para resolver la *actividad 2.*

***Actividad 2. Crecimiento exponencial.***




1. Encuentras diferencias en el registro aritmético de las tres funciones analizadas en el video. Explica tu respuesta.

________________________________
________________________________
________________________________.

2. Encuentras alguna similitud en el registro algebraico de las tres funciones analizadas. Explica tu respuesta.

________________________________
________________________________
________________________________.

3. Hay alguna similitud en el registro geométrico de las tres funciones analizadas. Explica tu respuesta.

________________________________________________________________
________________________________________________________________.

4. ¿Qué puedes decir acerca de la función exponencial?
______________________________________________________________________
______________________________________________________________________.

***Actividad 3. Taza de cambio en un modelo exponencial.***

Consideremos los siguientes problemas, para conocer acerca de la taza de cambio de una función exponencial.

***Problema 1.*** Patricia subió a su sitio *web* un video simpático, que rápidamente obtiene visitas a lo largo del tiempo. La relación entre el tiempo transcurrido, $t$ en días, desde que Patricia subió el video y el número total de vistas, $V(t)$, se modela con la siguiente función: $V(t) = 100 * (1.53)^t$. Con base en el desarrollo de la tabla 4, completa las siguientes oraciones y la tabla hasta el día 7.

| Tabla 4. Vistas del sitio *web.* | |
|---|---|
| $t(días)$ | $V(t) = 100 * (1.53)^t$ |
| $0$ | $100$ |
| $1$ | $100 * 1.53$ |
| $2$ | $100 * 1.53 * 1.53$ |
| $3$ | $100 * 1.53 * 1.53 * 1.53$ |
| $4$ | |
| $5$ | |
| $6$ | |
| $7$ | |

Completa las siguientes oraciones sobre la taza de cambio diaría del número de vistas del video.

1. Cada día que pasa tenemos ________ vistas más que ____________________.
2. Cada día el número de vistas: crece o decrece _____________.
3. En un factor de _____________.
4. ¿Cuántas visitas se han acumulado al día 7 ____________________________.

5. Apoyate con GeoGebra y realiza el gráfico de la tabla 4 ($t\ vs\ V(t)$). Realiza una descripción verbal del gráfico y compartelo con tus compañeros.

***Problema 2.*** Vera es una ecologista que estudia los cambios en la población de osos en Siberia a lo largo del tiempo. La relación entre el tiempo transcurrido, $t$ en años, desde que Vera empezó a estudiar la población, y el número de osos, $N(t)$, se modela con la siguiente función:

$$N(t) = 2187 * \left(\frac{2}{3}\right)^t.$$

Con base en el desarrollo de la tabla 4, completa las siguientes oraciones y la tabla hasta el año 7.

| Tabla 5. Población de osos en Siberia. | |
|---|---|
| $t(años)$ | $N(t) = 2187 * \left(\frac{2}{3}\right)^t$ |
| $0$ | $2187$ |
| $1$ | $2187 * 2/3$ |
| $2$ | $2187 * 2/3 * 2/3$ |
| $3$ | $2187 * 2/3 * 2/3 * 2/3$ |
| $4$ | |
| $5$ | |
| $6$ | |
| $7$ | |

Completa las siguientes oraciones sobre la taza de cambio anual de la población de osos.

1. Cada año la población de osos _______________ en un factor de _______________.
2. ¿Cuántos osos habrá en 5 años _____________________________.
3. Al cabo de 5 años, ¿Cuántos osos habrá? ___________________________.

4. Apoyate con GeoGebra y realiza el gráfico de la tabla 5 ($t\ vs\ N(t)$). Realiza una descripción verbal del gráfico y compartelo con tus compañeros.

***Conclusiones:***

El modelo matemático de los problemas 1 y 2 ($V(t)$ $y$ $N(t)$) corresponde a funciones exponenciales del tipo:

$$f(x) = a * b^x \;\; con\, b > 1 \;\text{ó}\; 0 < b < 1 \;\; y \;\; a \neq 0.$$

Estas funciones se abordarán con detalle en la ***"Estrategia didáctica 3"***

***Actividad 4. Razón de cambio.***

Con frecuencia en la vida cotidiana leemos que ciertas cosas crecen "*exponencialmente*". Por ejemplo, cuando se habla de los precios de las mercancías (inflación), que la población mundial tiene un crecimiento exponencial, o que el uso del correo electrónico está creciendo de manera exponencial. Aquí la pregunta importante es ¿cómo? podríamos cuantificar en qué momento *la variación* de precios de las mercancías, de la población o del uso del correo es más rápida o menos rápida. *La razón de cambio* es un indicador que nos permite analizar como varia una función con respecto a otra, y mostrar la importancia de la *función exponencial.*

***Para el profesor:*** Actividad de exploración para anclar conocimientos sobre la razón de cambio de una función lineal y exponencial.

| **Tabla 6. Comparación de la razón de cambio entre una función lineal y una exponencial.** | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | $f(x) = y_1 = 2x$ | $y_2 = 2^x$ | $y_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (Razón de cambio) | $y_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (Razón de cambio) |
| 0 | 0 | 1 | | |
| 1 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| 2 | 4 | 4 | 2 | 2 |
| 3 | 6 | 8 | 2 | 4 |
| 4 | 8 | 16 | 2 | 8 |
| 5 | 10 | 32 | 2 | 16 |
| 6 | 12 | 64 | 2 | 32 |
| 7 | 14 | 128 | 2 | 64 |
| 8 | 16 | 256 | 2 | 120 |
| 9 | 18 | 512 | 2 | 256 |
| 10 | 20 | 1024 | 2 | 512 |
| 11 | 22 | 2048 | 2 | 1024 |
| 12 | 24 | 4096 | 2 | 2048 |

1. ¿Qué sucede con la razón de cambio de las funciones $y_1\ e\ y_2$?

   ______________________________________________________________________
   _____________________________________________________________________.

2. ¿Cuál es la razón de cambio de la función $y_1 = 2x$, cuando $x = 15$?

   _____________________________________________________________________.

3. ¿Cuál es la razón de cambio de la función $y_2 = 2^x$, cuando $x = 15$?

   _____________________________________________________________________.

4. ¿Cómo es la variación en el intervalo: $x = 10\ y\ x = 11$, de la función $y_1 = 2x$.

   _____________________________________________________________________.

5. ¿Cómo es la variación en el intervalo: $x = 10\ y\ x = 11$, de la función $y_2 = 2^x$.

   _____________________________________________________________________.

6. ¿Qué podemos concluir sobre la razón de cambio de ambas funciones $(y_1\ e\ y_2)$.

   ______________________________________________________________________
   _____________________________________________________________________.

7. El alumno Grafica las funciones de la tabla 6, con GeoGebra y realiza una descripción puntual de cada una de las gráficas, enfatizando la variación de ambas.

| Gráfica de la función $f(x) = y_1 = 2x$ | Gráfica de la función $f(x) = y_2 = 2^x$ |
|---|---|
| | |

| ***Descripción*** | ***Descripción*** |
|---|---|
| | |

***Para el alumno:*** Se le propone al alumno las siguientes actividades basándose en la actividad 4, para llegar al aprendizaje del porqué la función exponencial es importante.

***Instrucciones:*** Trabajo en equipo. En las siguientes situaciones contesten lo que se pide explicando lo más ampliamente posible. Será valiosa la explicación que den de cómo pensaron en sus respuestas.

***Equipo 1. Tabla 7.*** *Razón de cambio de una función lineal con una exponencial.*

| $x$ | $f(x) = y_1 = 3x$ | $y_2 = 3^x$ | $y_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (Razón de cambio) | $y_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (Razón de cambio) |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | | |
| 1 | 3 | 3 | 3 | 2 |
| 2 | | | | |
| 3 | | | | |
| 4 | | | | |
| 5 | | | | |
| 6 | | | | |
| 7 | | | | |
| 8 | | | | |
| 9 | | | | |
| 10 | | | | |
| 11 | | | | |
| 12 | | | | |
| 13 | | | | |
| 14 | | | | |
| 15 | | | | |

1. ¿Qué sucede con la razón de cambio de las funciones $y_1$ $e$ $y_2$?

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________.

2. ¿Cuál es la razón de cambio de la función $y_1 = 3x$, cuando $x = 15$?

______________________________________________________________________.

3. ¿Cuál es la razón de cambio de la función $y_2 = 3^x$, cuando $x = 15$?

______________________________________________________________________.

4. ¿Cómo es la variación en el intervalo: $x = 10$ $y$ $x = 11$, de la función $y_1 = 3x$.

______________________________________________________________________.

5. ¿Cómo es la variación en el intervalo: $x = 10$ $y$ $x = 11$, de la función $y_2 = 3^x$.

______________________________________________________________________.

6. ¿Qué podemos concluir sobre la razón de cambio de ambas funciones ($y_1$ $e$ $y_2$).

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________.

7. El alumno Grafica las funciones de la tabla 7, con GeoGebra y realiza una descripción puntual de cada una de las gráficas, enfatizando la variación de ambas.

| Gráfica de la función $f(x) = y_1 = 3x$ | Gráfica de la función $f(x) = y_2 = 3^x$ |
|---|---|
| | |
| ***Descripción*** | ***Descripción*** |

***Equipo 2. Tabla 8.*** *Razón de cambio de una función cuadrática con una exponencial.*

| $x$ | $f(x) = y_1 = x^2$ | $y_2 = 2^x$ | $y_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (Razón de cambio) | $y_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (Razón de cambio) |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | | |
| 1 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 2 | | | | |
| 3 | | | | |
| 4 | | | | |
| 5 | | | | |
| 6 | | | | |
| 7 | | | | |
| 8 | | | | |
| 9 | | | | |
| 10 | | | | |
| 11 | | | | |
| 12 | | | | |

1. ¿Qué sucede con la razón de cambio de las funciones $y_1$ $e$ $y_2$?

   ______________________________________________________________________

   _____________________________________________________________________.

2. ¿Cuál es la razón de cambio de la función $y_1 = x^2$, cuando $x = 15$?

   _____________________________________________________________________.

3. ¿Cuál es la razón de cambio de la función $y_2 = 2^x$, cuando $x = 15$?

______________________________________________________________

______________________________________________________________.

4. ¿Cómo es la variación en el intervalo: $x = 10\ y\ x = 11$, de la función $y_1 = x^2$.

______________________________________________________________

______________________________________________________________.

5. ¿Cómo es la variación en el intervalo: $x = 10\ y\ x = 11$, de la función $y_2 = 2^x$.

______________________________________________________________

______________________________________________________________.

6. ¿Qué podemos concluir sobre la razón de cambio de ambas funciones ($y_1\ e\ y_2$).

______________________________________________________________

______________________________________________________________.

7. El alumno Grafica las funciones de la tabla 8, con GeoGebra y realiza una descripción puntual de cada una de las gráficas, enfatizando la variación de ambas.

| Gráfica de la función $f(x) =\ y_1 = x^2$ | Gráfica de la función $f(x) =\ y_2 = 2^x$ |
|---|---|
| | |
| ***Descripción*** | ***Descripción*** |

| | |
|---|---|
| | |

***Equipo 3. Tabla 9.*** *Razón de cambio de una función lineal con una exponencial natural* ($e \approx 2.7182828 \ldots$).

| $x$ | $f(x) = y_1 = 2x$ | $y_2 = e^x$ | $y_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (Razón de cambio) | $y_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (Razón de cambio |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | | |
| 1 | 2 | 2.72 | 2 | 2.72 |
| 2 | | | | |
| 3 | | | | |
| 4 | | | | |
| 5 | | | | |
| 6 | | | | |
| 7 | | | | |
| 8 | | | | |
| 9 | | | | |
| 10 | | | | |
| 11 | | | | |
| 12 | | | | |

1. ¿Qué sucede con la razón de cambio de las funciones $y_1$ $e$ $y_2$?

   ______________________________________________________________________

   ______________________________________________________________________.

2. ¿Cuál es la razón de cambio de la función $y_1 = 2x$, cuando $x = 12$?

   ______________________________________________________________________.

3. ¿Cuál es la razón de cambio de la función $y_2 = e^x$, cuando $x = 12$?

______________________________________________________________________

_____________________________________________________________________.

4. ¿Cómo es la variación en el intervalo: $x = 10 \ y \ x = 11$, de la función $y_1 = 2x$.

______________________________________________________________________

_____________________________________________________________________.

5. ¿Cómo es la variación en el intervalo: $x = 10 \ y \ x = 11$, de la función $y_2 = e^x$.

______________________________________________________________________

_____________________________________________________________________.

6. ¿Qué podemos concluir sobre la razón de cambio de ambas funciones $(y_1 \ e \ y_2)$.

______________________________________________________________________

_____________________________________________________________________.

7. El alumno Grafica las funciones de la tabla 9, con GeoGebra y realiza una descripción puntual de cada una de las gráficas, enfatizando la variación de ambas.

| Gráfica de la función $f(x) = \ y_1 = 2x$ | Gráfica de la función $f(x) = \ y_2 = e^x$ |
|---|---|
| | |
| ***Descripción*** | ***Descripción*** |

***Estrategia didáctica 3. Dominio, rango y gráfica de una función exponencial.***

***Aprendizajes 1:*** El alumno identifica el dominio y rango de una función exponencial y traza su gráfica.

***Aprendizajes 2:*** El alumno analiza la relación entre las gráficas de funciones exponenciales con diferentes bases incluyendo el número $e$.

***Funciones Exponenciales.***

***Definición:*** se llaman así a todas aquellas funciones de la forma $f(x) = a * b^x$, en donde $a \neq 0$ y la base $b$, es una constante y $(x)$ el exponente. Estas funciones tienen gran aplicación en campos muy diversos como la Biología, Administración, Economía, Química, Física e Ingeniería. En general esta clase de funciones cumplen con la siguiente relación.

$$\boldsymbol{y = f(x) = a * b^x \ \ con \ \ b > 1 \quad ó \quad 0 < b < 1 \ \ y \ \ a \neq 0}$$

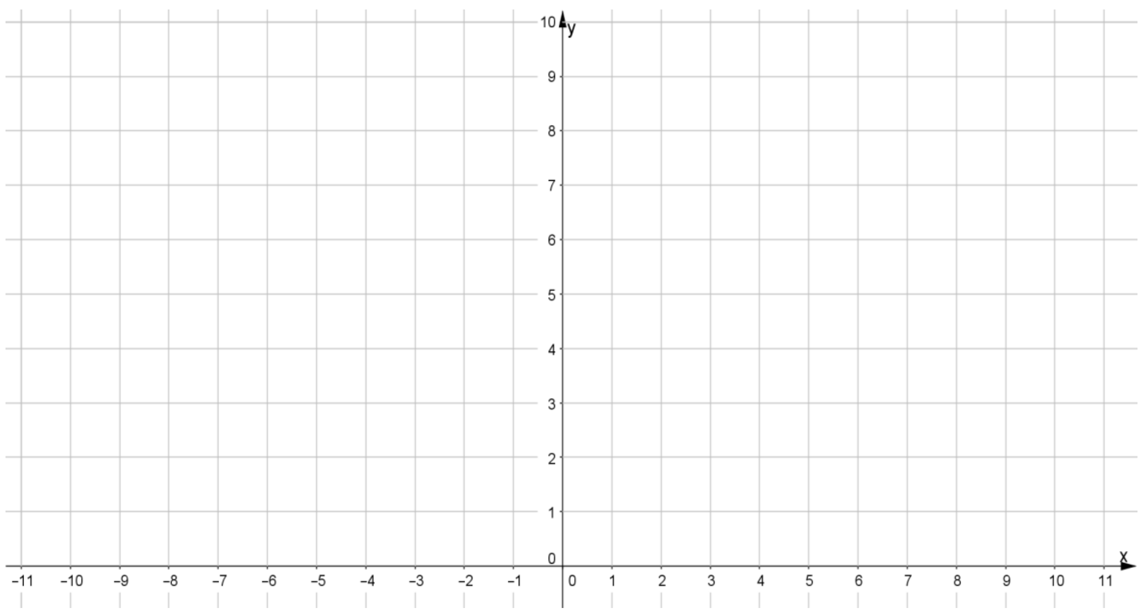
La definición de función exponencial exige que la *base* sea siempre positiva y diferente de uno. La condición que "$b$" sea diferente de uno se impone, debido a que al reemplazar "$b$" por 1, la función $f(x) = a * b^x$ se transforma en la función constante $f(x) = a$. La *base* no puede ser tampoco negativa porque funciones de la forma $f(x) = (-9)^{1/2}$ no tendrían sentido en los números reales. El dominio de la función exponencial está formado por el conjunto de los números reales $(-\infty, \infty)$, y su recorrido (rango) está representado por el conjunto de los números positivos $(0, \infty)$.

***Actividad 1.*** **La función exponencial** $(\boldsymbol{f(x) = a * b^x})$ **para** $\boldsymbol{b > 1 \ y \ a = 1}$**.** Por ejemplo, la función**:** $f(x) = 2^x$.

a) La tabla siguiente muestra algunos valores para la función de base dos, completa los espacios en blanco.

| $x$ | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $f(x) = 2^x$ | | $\frac{1}{8}$ | | $\frac{1}{2}$ | $1$ | | $4$ | | |

b) Para graficar esta función se localizan estos puntos en el plano cartesiano siguiente, uniéndolos con una curva suave. Obsérvese que en esta gráfica los valores de la función crecen al aumentar el valor de $x$ y decrecen al disminuir el valor de $x$.



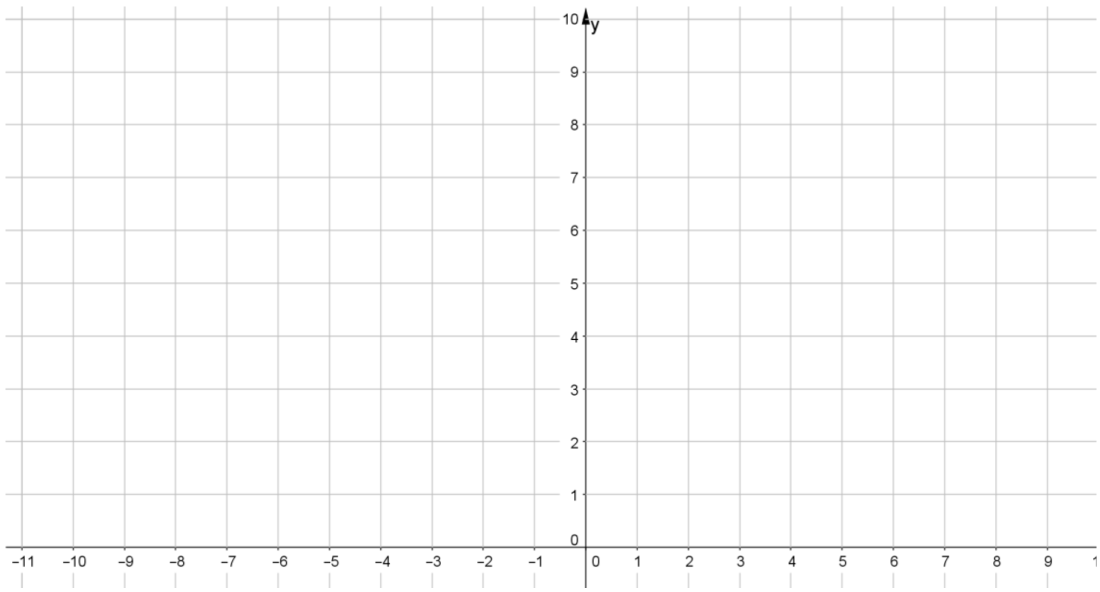

***Actividad 2.*** **La función exponencial** $(\boldsymbol{f(x) = a * b^x})$ **para** $\mathbf{0 < b < 1 \;\; y \;\; a = 1}$**.** Por ejemplo, la función $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Analicemos ahora el comportamiento de la función exponencial de base $\frac{1}{2}$. Observa el comportamiento de la función cuando el valor de $x$ tiende a $(+\infty)$ y cuando el valor de $x$ tiende a $(-\infty)$.

a) La tabla siguiente muestra algunos valores para la función de base $\frac{1}{2}$, completa los espacios en blanco.

| $x$ | -3 | -2 | -1.5 | -1 | 0 | 1 | 2 | 2.5 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ | | $4$ | | $2$ | | $\frac{1}{2}$ | | | $\frac{1}{8}$ |

b) Grafica esta función localizando los puntos en el siguiente plano cartesiano, uniéndolos con una curva suave.



***Conclusiones: Los gráficos de las actividades 1 y 2 permiten deducir que:***

- La función exponencial existe siempre para cualquier valor de la variable independiente $x$.
- Toma valores positivos para cualquier valor de $x$.
- El dominio de la función exponencial es todo el conjunto de los números reales $(-\infty, \infty)$.
- Todas las funciones pasan por el punto $(0,1)$.
- Las gráficas de las funciones exponenciales de la forma $f(x) = b^x$, con $b > 1$, son crecientes. Los valores de la función crecen cuando $x$ aumenta.

- Las gráficas de las funciones exponenciales de la forma $f(x) = b^x$, con $0 < b < 1$, son decrecientes. Los valores de la función decrecen cuando $x$ aumenta.
- El eje $X$ es una asíntota horizontal, hacía la izquierda si b$> 1$, y hacía la derecha si $b < 1$.
- La definición exige que la base sea positiva y diferente de uno.
- Si $b = 1$, la función se transforma en la función constante.

***Actividad 3.*** **Comparación de funciones exponenciales $\boldsymbol{f(x) = a * b^x}$, y $\boldsymbol{a = 1}$.**

***Desarrollo.***

a) Completa los registros aritméticos para las siguientes funciones con $b > 0$ $y$ $0 < b < 1$. Determinado el *dominio* y el *rango* de las funciones propuestas.

| $x$ | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) = 2^x$ | | $\frac{1}{8}$ | | | $1$ | | | | |
| $g(x) = 3^x$ | | $\frac{1}{27}$ | | | | | | | |
| $h(x) = 10^x$ | | | $\frac{1}{100}$ | | | | | | |
| $i(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ | | | | | | | | $\frac{1}{8}$ | |
| $j(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ | | | | | $1$ | | | $\frac{1}{27}$ | |
| $k(x) = \left(\frac{1}{6}\right)^x$ | $1296$ | | | | | | $\frac{1}{36}$ | | |

$D_f(\qquad)$, $\quad R_f(\qquad)$.

b) Los alumnos (de forma individual o por equipos) grafican con colores y hojas milimétricas las 6 funciones exponenciales (las tres primeras en una misma gráfica y las tres restantes en otra) del inciso (a) y en plenaria se contrastan con lo obtenido en el inciso (c).

c) Utilizando GeoGebra verifican las 6 funciones exponenciales del inciso (a), y se contrastan con lo hecho por los alumnos en el inciso anterior.

| | |
| --- | --- |
| | |
| $f(x) = a * b^x$ , con $b > 1$ $y$ $a = 1$. | $f(x) = a * b^x$ , con $0 < b < 1$ $y$ $a = 1$. |

d) Describe brevemente, el comportamiento del registro geométrico (gráfica) cuando la base de la función $f(x)$ es **mayor que uno**, es decir $f(x) = a * b^x$ , con $b > 1$ $y$ $a = 1$.

_______________________________________________________________________________

_______________________________________________________________________________

_______________________________________________________________________________

_______________________________________________________________________________.

e) Describe brevemente, el comportamiento del registro geométrico (gráfica) cuando la base de la función $f(x)$ es **mayor que cero**, pero **menor que uno,** es decir $f(x) = a * b^x$ , con $0 < b < 1$ $y$ $a = 1$.

_______________________________________________________________________________

_______________________________________________________________________________

_______________________________________________________________________________

_______________________________________________________________________________.

***Actividad 4.*** **Comparación de funciones exponenciales** $\boldsymbol{f(x) = a * b^x}$, y $\boldsymbol{a \neq 0}$.

a) Completa los registros aritméticos para las siguientes funciones con $b > 0$ , $0 < b < 1$ $y$ $a \neq 0$. Determinado el *dominio* y el *rango* de las funciones propuestas.

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $Dominio\ y\ rango$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) = 3 * 2^x$ | $\frac{3}{8}$ | | | $3$ | | | | $D_f = (\quad)$<br>$R_f = (\quad)$ |
| $g(x) = -2 * 3^x$ | | $-\frac{2}{9}$ | | | | | | $D_f = (\quad)$<br>$R_f = (\quad)$ |
| $h(x) = 5 * 10^x$ | | | | $5$ | | | | $D_f = (\quad)$<br>$R_f = (\quad)$ |
| $i(x) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^x$ | | | | | | | $\frac{1}{2}$ | $D_f = (\quad)$<br>$R_f = (\quad)$ |
| $j(x) = -3\left(\frac{1}{3}\right)^x$ | | | | $-3$ | | | $-\frac{1}{9}$ | $D_f = (\quad)$<br>$R_f = (\quad)$ |
| $k(x) = 6\left(\frac{1}{6}\right)^x$ | | | | | | $\frac{1}{6}$ | | $D_f = (\quad)$<br>$R_f = (\quad)$ |

b) Los alumnos (de forma individual o por equipos) grafican con colores y hojas milimétricas las 6 funciones exponenciales del inciso (a) y en plenaria se contrastan con lo obtenido en el inciso (c).

c) Utilizando GeoGebra verifican las 6 funciones exponenciales del inciso (a), y se contrastan con lo hecho por los alumnos en el inciso anterior.

| | |
|---|---|
| | |
| $f(x) = a * b^x$ , con $b > 1$ $y$ $a \neq 0$. | $f(x) = a * b^x$ , con $0 < b < 1$ $y$ $a \neq 0$. |

***Actividad 5.*** **Función Exponencial Natural.**

La función exponencial natural, es la función definida por $f(x) = e^x$. El dominio de la función exponencial natural, es el conjunto de los números reales $(-\infty, +\infty)$ y el rango es el conjunto de los números positivos $(0, +\infty)$.

El número "$e$" surge de aproximar el número $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ conforme el valor de "$n$" crece. De hecho, se puede decir que el límite de esa expresión cuando el valor de "$n$" tiende a infinito, es el número "$e$".

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e = 2.718281828459\ldots$$

Hagamos una tabla para diferentes valores de "$n$".

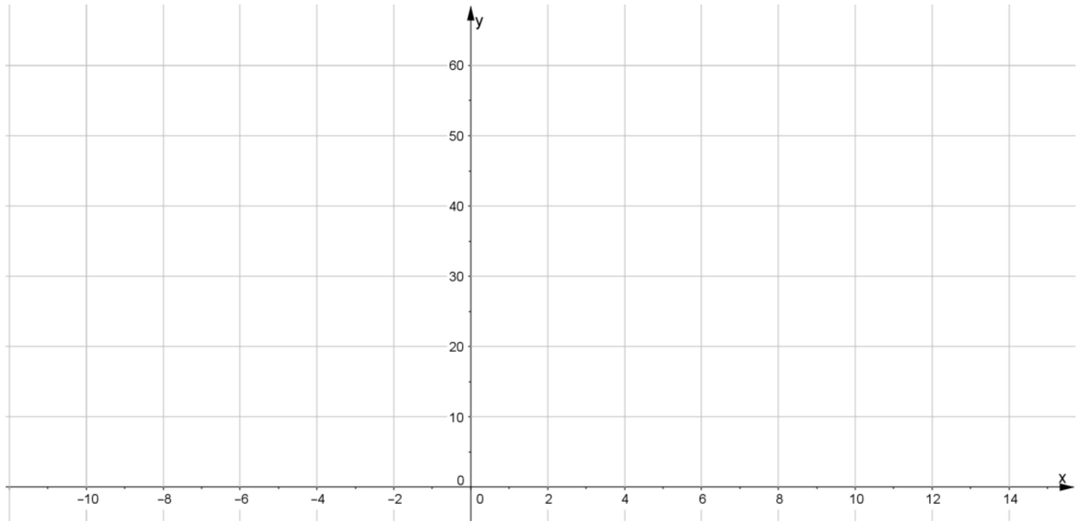
| $n$ | $\frac{1}{n}$ | $1+\frac{1}{n}$ | $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 2 |
| 10 | 0.1 | 1.1 | 2.59374246 |
| 100 | 0.01 | 1.01 | 2.704813829 |
| 1000 | 0.001 | 1.001 | 2.716923932 |
| 10000 | 0.0001 | 1.0001 | 2.718145927 |
| 100000 | 0.00001 | 1.00001 | 2.718268237 |
| 1000000 | 0.000001 | 1.000001 | 2.718280469 |
| 10000000 | 0.0000001 | 1.0000001 | 2.718281693 |
| 100000000 | 0.00000001 | 1.00000001 | 2.718281815 |

De la tabla se puede observar que conforme el valor de "$n$" crece, el valor de la expresión $\frac{1}{n}$ se hace cada vez más pequeño, aproximándose a cero; el valor de la tercera columna tiende a 1; y que, sin embargo, el valor de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ se aproxima cada vez más precisamente al valor del número "$e$". La función exponencial natural es el resultado de la investigación de fenómenos físicos naturales. Es una de las funciones con mayor número de aplicaciones, no solamente en las matemáticas, sino también en una gran variedad de disciplinas.

a) La tabla siguiente muestra algunos valores para la función de base "$e$", completa los espacios en blanco.

| $x$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) = e^x$ | | 0.049 | | | 1 | | | 20.08 | |

b) Grafica esta función, localizando los puntos en el siguiente plano cartesiano, uniéndolos con una curva suave.



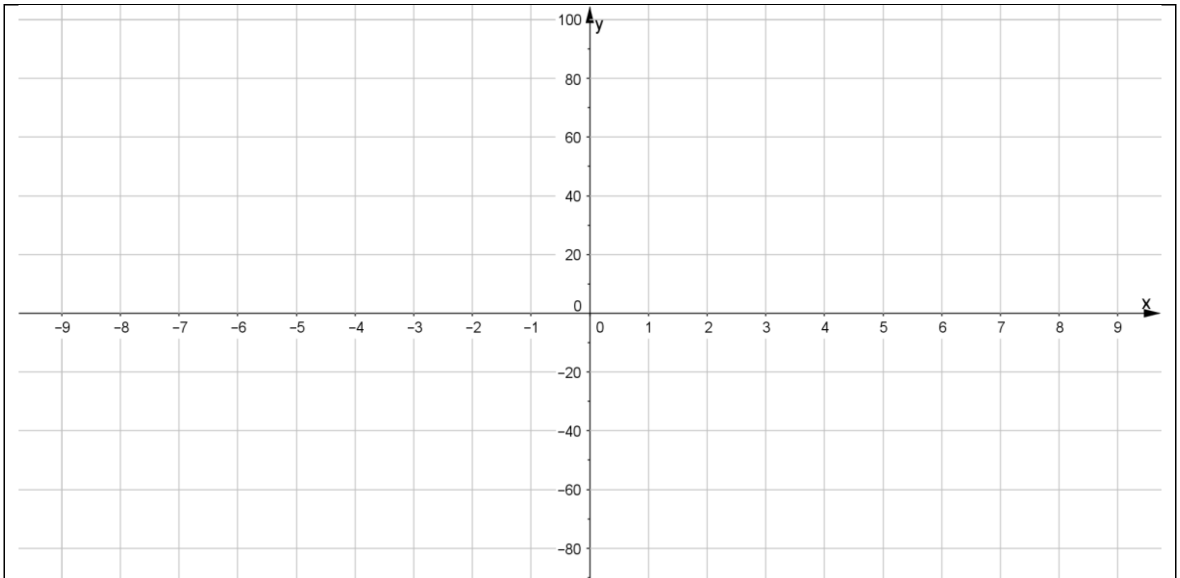

En general, la función exponencial natural se puede expresar como $y = e^{kx}$, donde $k$ es una constante que puede ser positiva o negativa.
Si $k > 0$, habrá un crecimiento.
Si $k < 0$, habrá un decrecimiento, o una disminución.

***Actividad 6.*** **Variación de parámetros en una función exponencial natural** $\boldsymbol{f(x) = a * e^x \text{ y } a \neq 0}$**.**

a) Completa los registros aritméticos así como el *dominio* y el *rango* de las funciones propuestas.

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $Dominio\ y\ rango$ |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $f(x) = 3e^x$ | $0.15$ | | | $3$ | | | | $D_f = (\qquad)$<br>$R_f = (\qquad)$ |
| $g(x) = -2 * e^x$ | | $-0.27$ | | | | | | $D_f = (\qquad)$<br>$R_f = (\qquad)$ |
| $h(x) = 5 * e^x$ | | | | $5$ | | | | $D_f = (\qquad)$<br>$R_f = (\qquad)$ |
| $i(x) = -4e^x$ | | | | | | | $-80.3$ | $D_f = (\qquad)$<br>$R_f = (\qquad)$ |

b) Los alumnos (de forma individual o por equipos) grafican con colores y hojas milimétricas las 4 funciones exponenciales del inciso (a) y en plenaria se contrastan sus gráficas.




$f(x) = a * e^x \;\; y \;\; a \neq 0.$

***Actividad 7.*** **Variación de parámetros en una función exponencial.**

***La forma general de la función exponencial es:***

$$\boldsymbol{f(x) = a * b^{x+c} + k, con\ a = 1, b > 1\ y\ c = 0}.$$

Tenemos la función exponencial: $f(x) = 2^x + k$.

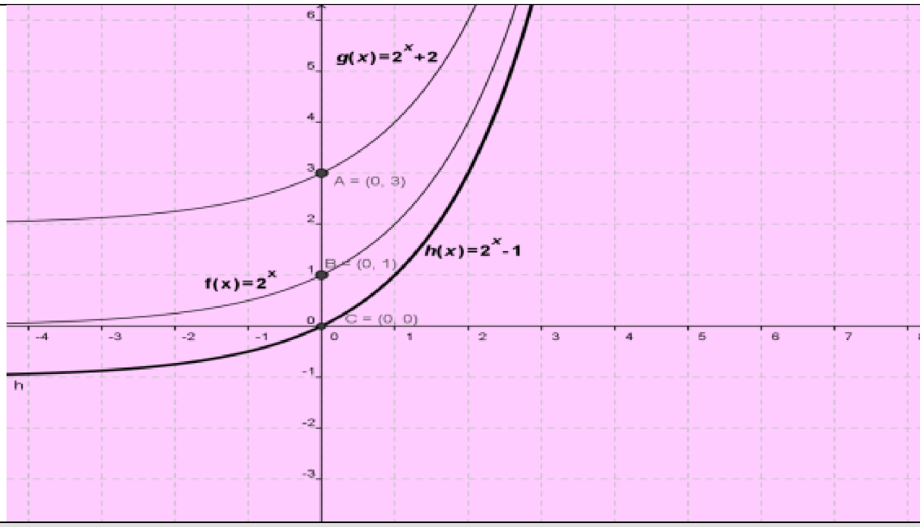
***A. Desplazamiento vertical, variación del parámetro $k$, con $c = 0$.***

1. Completa el registro aritmético de las siguientes funciones. Determinado su *dominio* y su *rango.*

| $x$ | $-3$ | $-2.5$ | $-2$ | $-1.5$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $1.5$ | $2$ | $2.5$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) = 2^x$ | | | $\frac{1}{4}$ | | | | | | | | |
| $g(x) = 2^x + 2$ | | | | | $\frac{5}{2}$ | | | | | | |
| $h(x) = 2^x - 1$ | | | | | $-\frac{1}{2}$ | | | | | | |

2. Los alumnos (de forma individual o por equipos) grafican con colores y hojas milimétricas las 3 funciones exponenciales del registro aritmético y en plenaria se contrastan con lo obtenido utilizando GeoGebra, como se muestra en la pregunta 3.

3. Con base en el registro gráfico de las tres funciones exponenciales elaboradas con GeoGebra, contesta la pregunta 4.




***Gráfica de la función*** $\boldsymbol{f(x) = b^{x+c} + k}$***, con*** $\boldsymbol{c = 0}$.

4. Describe brevemente, el comportamiento del registro geométrico (gráfica) cuando se hace variar el parámetro $k$ de la función $f(x) = 2^x + k$.

______________________________________________

______________________________________________

***B. Desplazamiento horizontal, variación del parámetro*** $\boldsymbol{c}$***, con*** $\boldsymbol{k = 0}$.

$$\boldsymbol{f(x) = a * b^{x+c} + k, con\ a = 1, b > 1\ y\ k = 0}.$$

Tenemos la función exponencial: $f(x) = 2^{x+c}$.

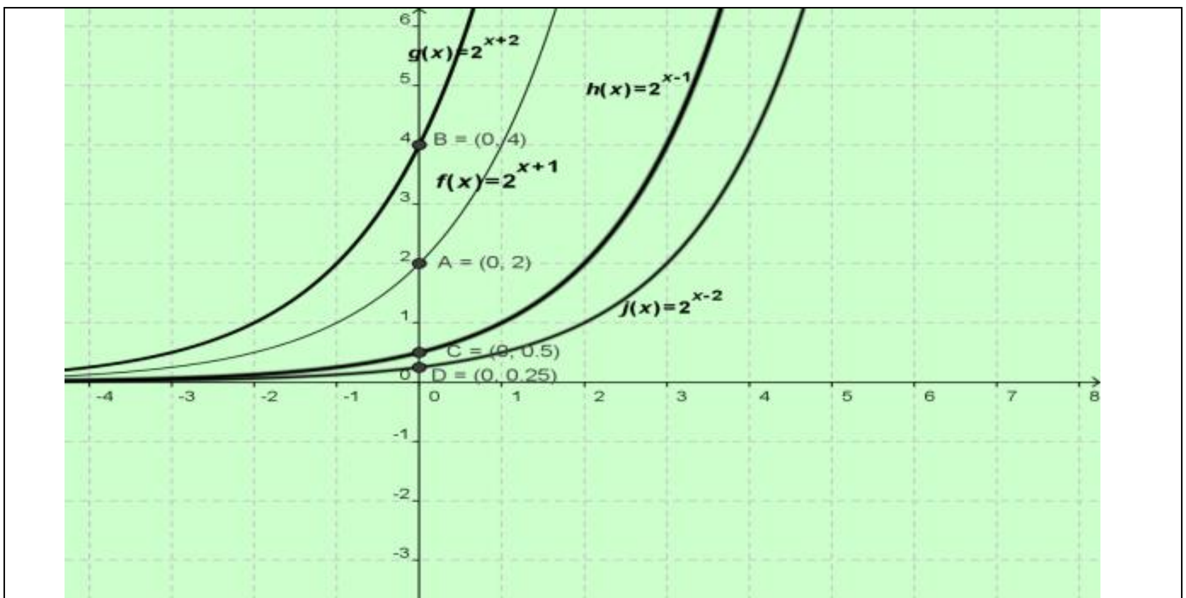
5. Completa el registro aritmético de las siguientes funciones. Determinado su dominio y su rango.

| $x$ | $-3$ | $-2.5$ | $-2$ | $-1.5$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $1.5$ | $2$ | $2.5$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) = 2^{x+1}$ | | | $\frac{1}{2}$ | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x) = 2^{x+2}$ | | | | | | | | | | | 32 |
| $h(x) = 2^{x-1}$ | | | | | $\frac{1}{4}$ | | | | | | |
| $j(x) = 2^{x-2}$ | $\frac{1}{32}$ | | | | | | | | 1 | | |

6. Los alumnos (de forma individual o por equipos) grafican con colores y hojas milimétricas las 4 funciones exponenciales del registro aritmético y en plenaria se contrastan con lo obtenido utilizando GeoGebra, como se muestra en la pregunta 7.

7. Con base en el registro gráfico de las cuatro funciones exponenciales elaboradas con GeoGebra, contesta la pregunta 8.




***Gráfica de la función $f(x) = b^{x+c} + k$ con $k = 0$.***

8. Describe brevemente, el comportamiento del registro geométrico (gráfica) cuando se hace variar el parámetro $c$, con $k = 0$, de la función $f(x) = 2^{x+c} + k$.

***Estrategia didáctica 4. Problemas de aplicación de las funciones exponenciales. (Cierre).***

***Aprendizajes:*** Los alumnos resuelven problemas en diferentes contextos, que se modelen con funciones exponenciales.

***Actividad 1.* Interés compuesto.**

El interés compuesto es buen ejemplo del crecimiento exponencial. La cantidad de un préstamo o de un depósito se conoce como capital[2], el interés se calcula usualmente como un porcentaje del capital. A este porcentaje se le conoce como tasa de interés o simplemente tasa $(r)$. La tasa de interés siempre se considera una *tasa anual,* a menos que se establezca otra cosa. Al interés que se calcula sólo sobre el capital se le conoce como *interés simple.* El interés que se calcula sobre el capital más cualquier interés generado previamente se denomina *interés compuesto.* Por lo general, el interés simple se utiliza para préstamos a un año o menos, mientras que el interés compuesto se emplea para préstamos más largos. Los bancos siempre pagan interés compuesto sobre el dinero depositado en ellos.

**I. Cálculo del *interés compuesto* en diferentes periodos de composición.**

***i. Interés compuesto, en periodos de composición anuales.***

***Problema 1.*** Supongamos que se depositan \$100.00 en un banco que paga una tasa anual de interés del 6%, *compuesto anualmente.* Determinar el capital acumulado[3] al cabo de $t = 1, 2, 3, 4, 5 \ldots 20$ años.


***Solución:*** Para resolver este problema consideremos que, el *capital acumulado* $A$, es el *capital inicial* $P$ más el *interés acumulado* por cada periodo de composición, si calculamos el capital acumulado para los tres primeros años.

1. Para $t = 1$ *año,* el capital acumulado $A$ será:

***Capital Acumulado = Capital Inicial + Capital Inicial*tasa de interés anual.***

***Aritméticamente podemos expresar lo anterior como:***

$A = \$100 + \$100 * 0.06$, factorizando tendremos.

$$A = \$100(1 + 0.06) = \$106.00$$

[2] También se conoce como *principal* en otras regiones del mundo.
[3] También se conoce como *Valor Futuro* al Capital Acumulado.

***De forma algebraica:*** $A = P + P * r$, factorizando tendremos:

$$A = \boldsymbol{P}(1 + \boldsymbol{r}) \quad \text{.........................................................} \; (1)$$

2. Para $t = 2$ *años*, el capital acumulado será:

***Capital Acumulado = Capital Acumulado en un año+ Capital Acumulado en un año*tasa de interés anual.***

***Aritméticamente podemos expresar lo anterior como:***

$A = \$100(1 + 0.06) + \$100(1 + 0.06) * 0.06$, factorizando tendremos

$$A = \$100(1 + 0.06)(1 + 0.06)$$

$$A = \$100(1 + 0.06)^2 = \$112.36$$

***De forma algebraica:*** $A = P(1 + r) + P(1 + r) * r$, factorizando tendremos

$$A = \boldsymbol{P}(1 + \boldsymbol{r})(1 + \boldsymbol{r})$$

$$A = \boldsymbol{P}(1 + \boldsymbol{r})^2 \quad \text{.........................................................} \; (2)$$

3. Para $t = 3$ *años*, el capital acumulado será:

   ***Capital Acumulado = Capital Acumulado en dos años+ Capital Acumulado en dos años*tasa de interés anual.***

   ***Aritméticamente podemos expresar lo anterior como:***

   $A = \$100(1 + 0.06)^2 + \$100(1 + 0.06)^2 * 0.06$, factorizando tendremos

$$A = \$100(1 + 0.06)^2(1 + 0.06)$$

$$A = \$100(1 + 0.06)^3 = \$119.10$$

***De forma algebraica:*** $A = P(1 + r)^2 + P(1 + r)^2 * r$, factorizando tendremos

$$A = P(1 + r)^2(1 + r)$$

$$A = \boldsymbol{P}(1 + \boldsymbol{r})^3 \quad \text{.......................................} \; (3)$$

En general al cabo de $t$ *años*, el capital acumulado o monto total se puede determinar por la fórmula:

$$A = P(1 + r)^t \quad \text{.......................................} \; (4)$$

4. Con la expresión (4) completa lo siguiente:

   a. Calcula el capital acumulado en los siguientes periodos.

| ***t (años)*** | ***A (capital acumulado en pesos)*** | $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{A})$ |
|---|---|---|
| 1 | $A = 100(1 + 0.06)^1 = 106.00$ | $(1{,}106)$ |
| 2 | $A = 100(1 + 0.06)^2 = 112.36$ | $(2{,}112.36)$ |
| 3 | $A = 100(1 + 0.06)^3 = 119.10$ | $(3{,}119.10)$ |
| 4 | | |

| | | |
| --- | --- | --- |
| 5 | $A = 100(1 + 0.06)^5 =$ | |
| 6 | | |
| 7 | | |
| 8 | | |
| 9 | | |
| 10 | | |
| 11 | | |
| 12 | | |
| 13 | | |
| 14 | | |
| 15 | | |
| 16 | | |
| 17 | | |
| 18 | | |
| 19 | | |
| 20 | $A = 100(1 + 0.06)^{20} =$ | |

b. Utilizando Excel o GeoGebra, haz una gráfica de los puntos de la tabla anterior.

c. ¿Cuál es la función exponencial que representa el problema?

Cuando se usa el término *"interés"* sin ningún adjetivo, se sobreentiende que se trata de un interés compuesto. Si el interés se devenga o compone "$n$" veces al año, entonces, la tasa anual debe dividirse entre "$n$" para determinar el interés de cada periodo.

En forma más general, se puede enunciar lo siguiente:

Si se invierte una suma $P$ a una tasa de interés anual de $100i\%$ compuesto "$n$" veces por año, y si $A$ es el monto de la inversión al final de "$n$" periodos de inversión entonces:

| | |
|---|---|
| $$\boldsymbol{A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}}$$ | *Dónde:* |
| | *C o P = capital inicial o monto principal.* |
| | *r = tasa de interés anual expresada como decimal.* |
| | *n = número de periodos de interés por año* |
| | *t = número de años en los que se invierte C o P.* |
| | *A = Cantidad acumulada después de **t** años* |

***Problema 2. Interés compuesto, con periodos de composición semestrales.***

a) Completa la siguiente tabla, en donde se asume que el capital inicial es de \$100.00, con un interés anual del 6%, pero con periodos de *composición semestrales.*

| $t$ *(años)* | *A (capital acumulado en pesos)* | $(t, A)$ |
|---|---|---|
| 1/2 año = 1 semestre | $A = 100 * \left(1+\frac{0.06}{2}\right)^{2*0.5} = 103$ | $(0.5{,}103)$ |
| 1 año = 2 semestres | $A = 100 * \left(1+\frac{0.06}{2}\right)^{2(\ \ )} =$ | $(\qquad)$ |
| 2 años = 4 semestres | $A = 100 * \left(1+\frac{0.06}{2}\right)^{2(\ \ )} =$ | $(\qquad)$ |
| 3 años = 6 semestres | $A = 100 * \left(1+\frac{0.06}{2}\right)^{2(\ \ )} =$ | $(\qquad)$ |
| 5 = 10 semestres | $A = 100 * \left(1+\frac{0.06}{2}\right)^{2(\ \ )} =$ | $(\qquad)$ |
| 20 = 40 semestres | $A = 100 * \left(1+\frac{0.06}{2}\right)^{2(\ \ )} =$ | $(\qquad)$ |

b) Utilizando Excel o GeoGebra, haz una gráfica de los puntos de la tabla anterior.

c) ¿Cuál es la función exponencial que representa el problema?

***Problema 3. Interés compuesto, con periodos de composición mensuales.***

Supón que se invierten **$1000** a una tasa de interés de **9%** compuesto mensualmente. Encuentra la cantidad acumulada después de ***5, 7, 10, 12, 15, 17 y 20*** *años.*

a) ¿Cuál es el modelo matemático que representa el problema?

b) Completa la siguiente tabla.

| Números de Años | Cantidad acumulada |
|---|---|
| *5* | $A = \$1000(1.0075)^{60} = \$1565.68$ |
| *7* | |
| *10* | |
| *12* | |
| *15* | |
| *17* | |
| *20* | |

c) Utilizando Excel o GeoGebra, haz una gráfica de los puntos de la tabla anterior.

***Actividad 2.*** **Fenómenos de crecimiento o decrecimiento.**

En general hay fenómenos de crecimiento o decrecimiento cuyo comportamiento se puede modelar en forma exponencial a través de los siguientes problemas. Un modelo matemático que describe el crecimiento o decrecimiento de una población está dada por:

$$N(t) = N_0 e^{k*t}$$

Donde:

$N(t)$ =Número de elementos de la población al cabo de cierto tiempo $t$.
$N_0 =$ Cantidad inicial de elementos de la población.
$k$ =Constante que puede ser positiva o negativa.
Si $k > 0$, habrá un crecimiento de la población.
Si $k < 0$, habrá un decrecimiento de la población.

Se te sugiere visitar los tres códigos QR de la columna de la derecha para que puedas conocer más acerca de la aplicación de las funciones exponenciales en problemas de crecimiento y decaimiento exponencial.

QR-4. Problemas de crecimiento o decaimiento

QR-5. Problemas de bacterias.

QR-6. Función exponencial. Problema de crecimiento de bacterias

**Problema 1. La población mundial.** Si en 1982 la población mundial era de 4.5 miles de millones de habitantes y dicha población crecía al 2.03% anual, suponiendo que continuara creciendo al mismo ritmo, ¿cuántos habitantes habrá en 1985, 1990, 1995, 2000, 2007, 2010 y 2015?

***Solución:*** Si los datos iniciales se sitúan en 1985, cuando había 4.5 miles de millones de habitantes en el mundo, estos 4.5 miles de millones representa $N_0$ y $k$ tiene un valor de $0.0203$, la tasa de crecimiento anual.

a) ¿Cuál es el modelo matemático que representa el problema?

b) Considerando que han transcurrido 3 años desde la fecha inicial (1982), ¿cuántos habitantes habrá en 1985?

$N(3) =$ ________________________________ millones de habitantes.

c) Calcula la población mundial en 1990, 1995, 2000, 2007, 2010 y 2015.

$N(\quad) =$ ________________________________ millones de habitantes.

$N(\quad) =$ ________________________________ millones de habitantes.

$N(\quad) =$ ________________________________ millones de habitantes.

$N(\quad) =$ ________________________________ millones de habitantes.

$N(\quad) =$ ________________________________ millones de habitantes.

$N(\quad) =$ ________________________________ millones de habitantes.

d) Compara tus resultados con la población mundial actual.

________________________________________________________________

________________________________________________________________.

**Problema 2. Las bacterias.** Una población de bacterias contiene inicialmente 500 y crece a razón de 40.55% diariamente ($k = 0.4055$).

El problema también se puede modelar mediante la expresión: $N(t) = N_0 e^{k*t}$.

a) ¿Cuál es el modelo matemático que representa el problema?

| |
|---|
| |

b) Calcula el número de bacterias cuando $t = 1, 2, 3, 4, 5, 10, 15\ y\ 20$ días.

$N(0) =$______________________. $N(5) =$______________________.

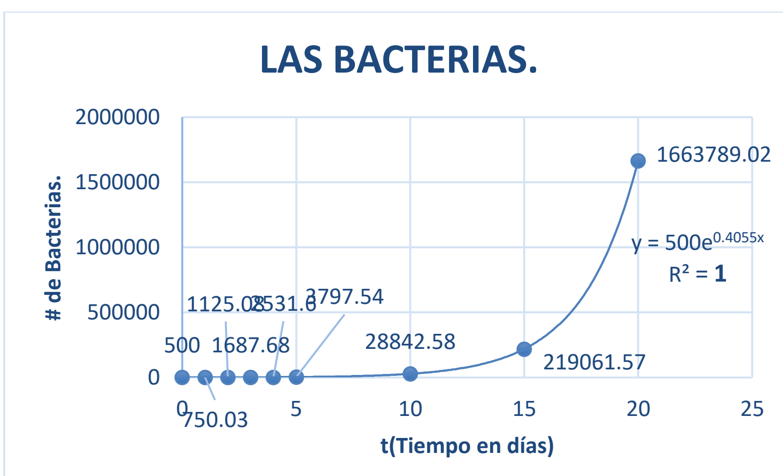
$N(1) =$______________________. $N(10) =$______________________.

$N(2) =$______________________. $N(15) =$______________________.

$N(3) =$______________________. $N(20) =$______________________.

$N(4) =$ _____________________.

c) Utilizando los datos del inciso anterior, la gráfica del problema utilizando los puntos $(t, N(t))$ con Excel.



**Problema 3. Valor de un Hyundai Creta.** El señor Morales pago \$365,000 por un Hyundai Creta nueva. Suponga que el valor del Hyundai se deprecia a una tasa de 20% al año.


Dentro de 1 año el valor del Hyundai será 80% de su valor actual, es decir su valor será \$365,000(0.80); dentro de dos años, su valor será $\$365{,}000(0.80)(0.80) = \$365{,}000(0.80)^2$, y así sucesivamente.

a) Determina la fórmula para obtener el valor del Hyundai en un momento dado.

Determina el valor del Hyundai Creta:

b) Dentro de 1 año.

c) Dentro de 5 años.

## *SECCIÓN 2. Funciones Logarítmicas.*

***Para el alumno:*** Actividad de exploración para anclar conocimientos sobre las funciones logarítmicas. ***Inicio.***

QR-7. Conceptos básicos de la función logarítmica.

***Actividad 1. (Extraclase):*** Visita los dos códigos QR, para conocer acerca de los conceptos básicos de la función logarítmica, además sobre las propiedades de los logaritmos. Una vez que hayas entrado saca una copia con la información relativa al tema y cópiala en tu cuaderno ya que ésta la vas a usar en las siguientes actividades.

QR-7-1. Propiedades de los logarítmicas.

Los logaritmos son una herramienta matemática, para resolver fácilmente gran cantidad de problemas de fenómenos naturales y problemas matemáticos como el simplificar los cálculos aritméticos y trigonométricos. Por medio de los logaritmos se pueden hacer representaciones gráficas, que permiten analizar mejor la información cuantitativa y cualitativa que presentan ciertos problemas. De acuerdo con lo considerado con las potencias de los números reales, se sabe que:

$$3^2 = 9 \qquad 2^3 = 8 \qquad 5^2 = 25 \qquad 7^2 = 49 \qquad 3^3 = 27 \qquad 2^5 = 32$$

En las igualdades anteriores, los números colocados como **potencia** se les reconoce como **exponentes** $(^{\mathbf{2,3,2,2,3}\ \boldsymbol{y}\ \mathbf{5}})$ respectivamente y los números que están elevados a dichos exponentes se les llama **BASE** $(\mathbf{3},\ \mathbf{2},\ \mathbf{5},\ \mathbf{7},\ \mathbf{3}\ \boldsymbol{y}\ \mathbf{2})$.
En forma general, si se representa a la base con la letra "$b$", al exponente con la letra "$\boldsymbol{y}$" y al resultado de esta operación se le denota como "$x$", se tiene la expresión: $b^y = x$.

Usando esta notación, ahora se le llamará al exponente "$y$" **LOGARITMO**. El número "$y$" es el logaritmo de la cantidad "$x$" en la base "$b$".

***Estrategia didáctica 5. Conceptos básicos de la función logarítmica (Inicio).***

***Aprendizajes:*** Los alumnos comprenden el concepto de logaritmo de un número de base "$b$", y las relaciones $b^y = x \iff y = log_b x$.

***Aprendizajes:*** Los alumnos operan con logaritmos de distintas bases y aplicará sus propiedades.

***Actividad 2.* Convertir expresiones de forma exponencial a la forma logarítmica.**

En la sección *I*, se estableció la función exponencial: $f(x) = a * b^x, \quad para \quad b > 0,$ $0 < b < 1 \; y \; a \neq 0$. Ahora estableceremos a la *función logarítmica con base* $b$, la cual se representa mediante $log_b$. Sus valores se escriben $log_b(x)$, y se lee "logaritmo de $x$ base $b$ o logaritmo base $b$ de $x$. Por consiguiente tenemos que:

$$y = log_b x \quad si \; y \; sólo \; si \quad x = b^y \; o \; b^y = x \; ... Exp. 1.$$

El dominio de la función exponencial de base $b$ es el conjunto de los números reales $(-\infty, +\infty,)$ y el rango es el conjunto de los números positivos $(0, +\infty)$, como ya se había mencionado en la sección anterior. Ahora el dominio de $log_b$ es el conjunto de números positivos $(0, +\infty)$ y su rango es el conjunto de números positivos $(-\infty, +\infty)$.

- Considera la expresión 1, y resuelve lo que se pide en los siguientes ejercicios tomando como base el ejemplo previo.

***Ejemplo 1.*** **Indica el logaritmo, la base y la cantidad: $\mathbf{3^2 = 9}$.**

$\boldsymbol{y = 2}, \quad \boldsymbol{b = 3} \quad \boldsymbol{y} \quad \boldsymbol{x = 9}$; 2 es logaritmo de 9 en la base 3.

***Ejercicio 1.*** **Indique el logaritmo, la base y la cantidad de las siguientes expresiones:**

$2^3 = 8 \quad y = \_, \quad b = \_ \quad y \quad x = \_$ ____ es logaritmo de ____ en la base____.

$5^2 = 25 \quad y = \_, \quad b = \_ \quad y \quad x = \_$ ____ es logaritmo de ____ en la base____.

$7^2 = 49 \quad y = \_, \quad b = \_ \quad y \quad x = \_$ ____ es logaritmo de ____ en la base____.

***Ejemplo 2.*** $3^3 = 27$. *Tres es el logaritmo de veintisiete en la base tres.*

***Ejercicio 2.*** **Indique con letra el logaritmo, cantidad y base de las siguientes expresiones:**

$2^5 = 32$

________________________________________________________________

$2^4 = 16$

________________________________________________________________

$4^2 = 16$

______________________________________________

$8^2 = 64$

______________________________________________

***Para el profesor:*** Actividad donde se reafirma conceptualmente la expresión 1, como notación exponencial y logarítmica, así como la transición de una a otra. ***Desarrollo.***

## ➢ *Conceptos*

El valor de la base en la expresión $b^4 = 10000$. Despejando "$b$", se tiene:

$$b = \sqrt[4]{10000} = \sqrt[4]{10^4} = 10$$

El valor del logaritmo de la siguiente expresión $6^y = \frac{1}{36}$; $6^y = \frac{1}{6^2}$; $6^y = 6^{-2}$ $\therefore$

$$y = -2.$$

El logaritmo $y$, en este caso es igual a menos dos $(y = -2)$.

> Por lo cual el logaritmo $y$, de una cantidad $x$, es el exponente al que se eleva la base $b$, para obtener la cantidad $x$, matemáticamente se simboliza como: $y = log_b\, x$.

De la expresión 1, podemos deducir lo siguiente:

La notación exponencial ***(N.E)*** de un logaritmo se simboliza como: $b^y = x$.
La notación logarítmica ***(N.L)*** del logaritmo se simboliza como: $y = log_b\, x$.

***Ejemplo 3.*** Representa en forma logarítmica las siguientes expresiones:

- $10^3 = 1000$ *primero* $b = 10$, $l = 3$ $x = 1000$ después:

$$log_{10}1000 = 3$$

- $4^{-2} = \frac{1}{16}$ *primero* $b = 4$, $x = \frac{1}{16}$, $l = -2$ después:

$$log_4 \frac{1}{16} = -2$$

***Ejemplo 4.*** Resuelve cada una las siguientes ecuaciones en términos de $x, b\ o\ y$.

a) $log_6 x = 2 \iff 6^2 = x$; $x = 36.$

b) $Log_b 4 = \frac{1}{3} \iff b^{\frac{1}{3}} = 4;\ \left(b^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 4^3;\ b = 64.$

c) $Log_{27} x = \frac{2}{3} \iff 27^{\frac{2}{3}} = x;\ x = \sqrt[3]{27^2};\ x = \sqrt[3]{729};\ x = 9.$

- ***Propiedades de los logaritmos*** *(visita el código QR-7-1 para complementar estas propiedades).*

Si $b > 0, b \neq 1,$ y $u\ y\ v$ son números positivos, entonces:

- ✓ $log_b u * v = log_b u + log_b v.$
- ✓ $log_b \frac{u}{v} = log_b u - log_b v.$
- ✓ $log_b u^n = n * log_b u.$

Estas tres expresiones se conocen como reglas o propiedades de los logaritmos.

- ***Cambio de base.***

QR-8. Ecuaciones logarítmicas con diferente base.

*Actividad (extraclase):* Visita el código QR, para conocer acerca de las operaciones con logaritmos de distinta base. Una vez que hayas entrado saca una copia con la información relativa al tema y cópiala en tu cuaderno ya que ésta la vas a usar en los siguientes ejercicios.

- ➢ ***Ejemplo 5.*** Cambio de base:

Cambio de base

Número

$$log_8 x = \frac{log_2 x}{log_2 8} = \frac{log_2 x}{log_2 2^3} = \frac{log_2 x}{3} = \frac{1}{3} log_2 x$$

Base

Considera ahora este otro procedimiento para calcular el cambio de base de: $log_8 x$.

$$log_8 x = log_{2^3} x = \frac{1}{3} log_2 x$$

- Con lo expuesto en la sección de conceptos, realiza lo siguiente:

***Ejercicio 3.*** Expresa la relación de la ecuación usando *notación logarítmica.*

| | |
|---|---|
| $3^2 = 9$ | |
| $2^3 = 8$ | |
| $\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$ | |
| $5^{-2} = \frac{1}{25}$ | |
| $8^{\frac{2}{3}} = 4$ | |

***Ejercicio 4.*** Expresa la relación de la ecuación mediante *notación exponencial.*

| | |
|---|---|
| $log_8 2 = \frac{1}{3}$ | |
| $log_6 1 = 0$ | |
| $log_9 \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$ | |
| $log_3 81 = 4$ | |

***Ejercicio 5.*** Obtén el valor de las siguientes ecuaciones en términos de $(x, b\ o\ y)$.

| | |
|---|---|
| $y = log_7 49$ | |
| $y = log_6 \frac{1}{6}$ | |
| $log_b 81 = -2$ | |
| $log_{\frac{1}{4}} x = \frac{7}{2}$ | |

***Ejercicio 6.*** Obtén un cambio de base apropiado para los siguientes logaritmos.

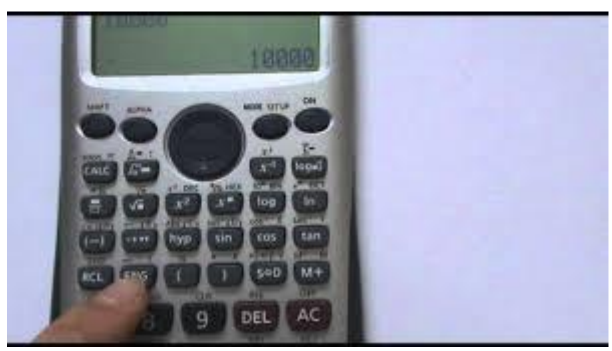
| | |
|---|---|
| $log_9 x =$ | $log_{100} n =$ |
| $log_8 y =$ | $log_{32} 3 =$ |
| $log_{16} C =$ | $log_{27} 2 =$ |
| $log_{64} z =$ | $log_{125} y =$ |
| $log_{144} A =$ | $log_{121} D =$ |
| $log_{25} m =$ | $log_{81} y =$ |

***Actividad 3.*** **Ecuaciones exponenciales y logarítmicas.**

Los logaritmos sirven para resolver *ecuaciones exponenciales*; esto es, una ecuación que tiene una variable como exponente. Puesto que los números usuales se expresan con la notación decimal, conviene aplicar los logaritmos de base 10, a los que se conocen como *logaritmos comunes o decimales*, son de uso frecuente para este propósito. Al escribir logaritmos comunes, se ha hecho costumbre en vez de la notación $log_{10}$ omitir el subíndice 10. Por tanto, se entiende que el número $logx$ representa al número $log_{10}x$, y la función "$log$" denota la función logarítmica de base 10. De esta manera:

$$logx = y \quad \Leftrightarrow \quad 10^y = x$$

***Ejemplo 5.*** Obtén el valor de $x$ en las siguientes ecuaciones, utilizando tu calculadora científica.




a. $3^x = 16$

***Solución:*** Aplicando las propiedades de los logaritmos y utilizando en ambos miembros de la ecuación $log$ o $ln$[4] podemos encontrar el valor pedido.

$$log3^x = log16$$

[4] Abreviatura del logaritmo natural de base "$e$", visto en la *sección I*.

$$x * log3 = log16$$

$$x = \frac{log16}{log3} = \frac{1.2041}{0.4771} = 2.5237$$

b. $7^x = 3^{x+1}$

$$log7^x = log3^{x+1}$$

$$x * log7 = (x+1)log3$$

$$x * log7 = x * log3 + log3$$

$$x * log7 - x * log3 = log3; \quad x(log7 - log3) = log3$$

$$x = \frac{log3}{log7 - log3} = \frac{0.4771}{0.8451 - 0.4771} = \frac{0.4771}{0.3680}$$

$$x = 1.296$$

c. $log_2(x+4) - log_2(x-3) = 3$

***Solución:*** Aplicamos la propiedad: $log_b \frac{u}{v} = log_b u - log_b v$. De derecha a izquierda para lograr tener un solo logaritmo.

$$log_2 \frac{(x+4)}{(x-3)} = 3$$

Escribiendo esta ecuación en la forma exponencial equivalente se obtiene:

$$\frac{(x+4)}{(x-3)} = 2^3$$

$$(x+4) = 8(x-3)$$

$$x + 4 = 8x - 24$$

$$x - 8x = -24 - 4$$

$$x = \frac{-28}{-7} = 4.$$

d. $log_4 x + log_8 x = \frac{5}{6}$

***Solución:*** Primeramente, ponemos ambos logaritmos en la misma base y procedemos de forma parecida al inciso anterior.

$$log_{2^2} x + log_{2^3}\ x = \frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{2}log_2x + \frac{1}{3}log_2x = \frac{5}{6}$$

$$\frac{3+2}{6}log_2x = \frac{5}{6};\ \frac{5}{6}log_2x = \frac{5}{6}$$

$$log_2x = 1;\ 2^1 = x;\ \ x = 2$$

***Ejercicio 7.*** Obtenga el valor de la incógnita $x$ en las siguientes *ecuaciones exponenciales.*

| | |
|---|---|
| $a.\ \ 2^{2x-3} = 5^{x-2}$ | |
| $b.\ \ 3^{2-3x} = 4^{2x+1}$ | |

***Ejercicio 8.*** Obtenga el valor de la incógnita $x$ en las siguientes *ecuaciones logarítmicas.*

| | |
|---|---|
| $a.\ \ log\,x = 1 - log(x-3)$ | |

| | |
|---|---|
| $b.\quad log_3(\,5x+1) = log_3(x-3)$ | |
| $c.\quad log_2(x^2-x-6) - log_2(x+2) = 2$ | |
| $d.\;\; 6log_9 x - log_3 x = 4$ | |
| $e.\;\; 4log_{27} x - log_9 x = \dfrac{5}{2}$ | |
| $f.\;\; 3log_4 x + log_8 x = \dfrac{13}{6}$ | |

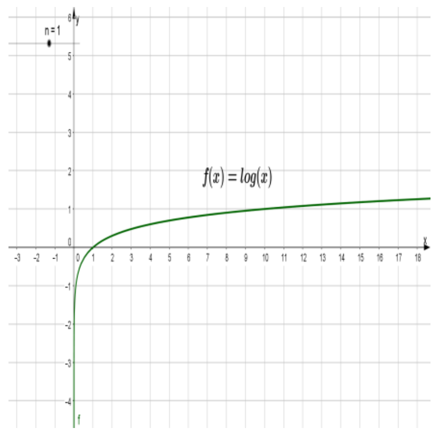
***Estrategia didáctica 6. Dominio, rango y gráfica de una función logarítmica. (Desarrollo).***

***Aprendizajes:*** El alumno grafica funciones logarítmicas e identifica su dominio y rango.
***Aprendizajes:*** El alumno verifica mediante gráficas o tablas que la función logarítmica es la función inversa de la exponencial.

***Para el alumno:*** Actividad donde se reafirma gráficamente la función logarítmica así como su dominio y rango.

QR-9. Función logarítmica Gráfica, dominio y rango.

***Actividad 1. (Extraclase):*** Visita el código QR, de la izquierda para conocer acerca de la gráfica de una función logarítmica, así como de su dominio y rango. Una vez que hayas entrado saca una copia con la información relativa al tema y cópiala en tu cuaderno ya que ésta la vas a usar en las siguientes actividades.




Como el logaritmo es un exponente, cumple con las leyes de los exponentes, de modo que podemos señalar que las propiedades de los logaritmos son válidas para logaritmos de cualquier base.

***Actividad 2.*** **Gráfica de la función logarítmica.**

***I.*** Considera la expresión logarítmica $f(x) = log\ (x)$.

a. ¿Será una función? ________________________________________.

b. Completa la siguiente tabla utilizando tu calculadora.

| $x$ | 0.1 | 0.5 | 1 | 2.5 | 5 | 10 | 25 | 50 | 100 | 500 | 1000 | 5000 | 10000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | | | | | | | |

c. ¿Se podrán considerar valores de $x$ negativos? ____ ¿Por qué? ____________________________________________________________.

d. Los alumnos (de forma individual) grafican con colores y hoja milimétrica la función: $f(x) = log\ (x)$ y en plenaria se contrastan con lo obtenido en el inciso (f).

e. El dominio y el rango de la función es: $D_f($          $)$; $R_f($          $)$.

f. Su gráfica hecha con GeoGebra se muestra en la figura 3.

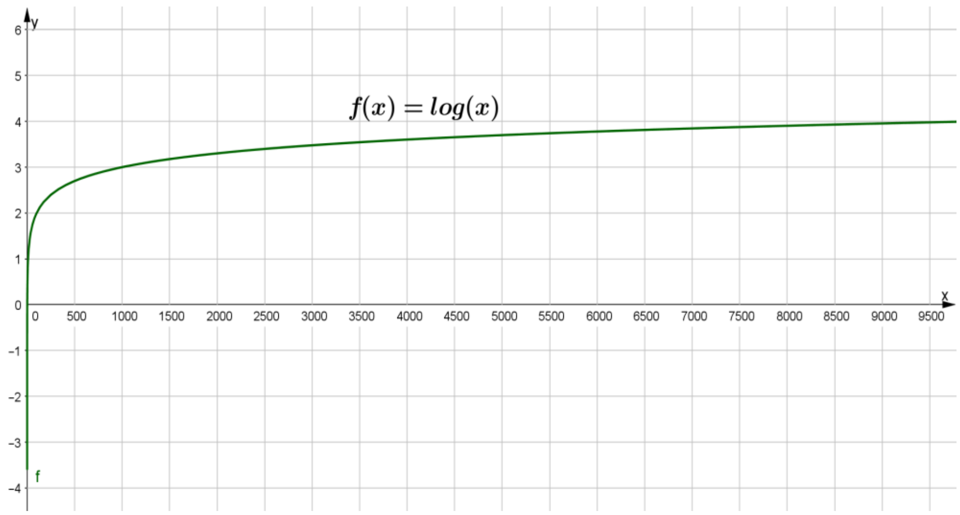



Figura 3. Función logarítmica de base 10.

***II.*** Considera la expresión logarítmica $f(x) = log_{\frac{1}{2}}(x)$.

a. ¿Será una función? ________________________________________.

b. Completa la siguiente tabla utilizando tu calculadora.

| $x$ | 0.1 | 0.5 | 1 | 2.5 | 5 | 10 | 25 | 50 | 100 | 500 | 1000 | 5000 | 10000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | | | | | | | |

c. ¿Se podrán considerar valore de $x$ negativos? ____ ¿Por qué? ______________________________________________________.

d. Los alumnos (de forma individual) grafican con colores y hoja milimétrica la función: $f(x) = log_{\frac{1}{2}}(x)$ y en plenaria se contrastan con lo obtenido en el inciso (f).

e. El dominio y el rango de la función es: $D_f($ $\qquad$ $)$; $R_f($ $\qquad$ $)$.

f. Su gráfica hecha con GeoGebra se muestra en la figura 4.

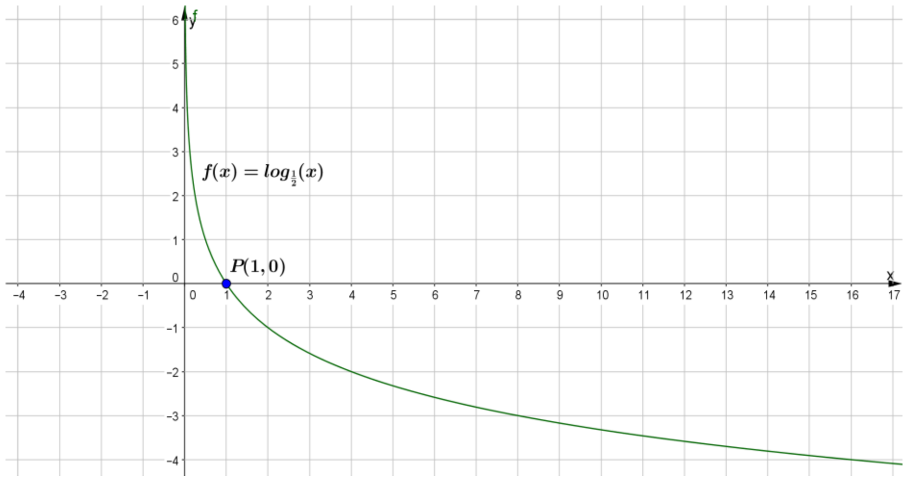



Figura 4. Función logarítmica de base $\frac{1}{2}$.

***III.*** Considera la expresión logarítmica $f(x) = log_3(2x - 4)$. Determina:

(a) Dominio y rango de la función: considerando que el valor del paréntesis no puede ser negativo, realizamos lo siguiente. $2x - 4 > 0$; $2x > 4$; $x > \frac{4}{2}$; $x > 2$. Es decir, el dominio de la función es $(2, +\infty)$ y su rango $(-\infty, +\infty)$.

(b) Los alumnos (de forma individual) grafican con colores y hoja milimétrica la función: $f(x) = log_3\,(2x - 4)$ y en plenaria se contrastan con lo obtenido en el inciso (c).

(c) Su gráfica hecha con GeoGebra se muestra en la figura 5.

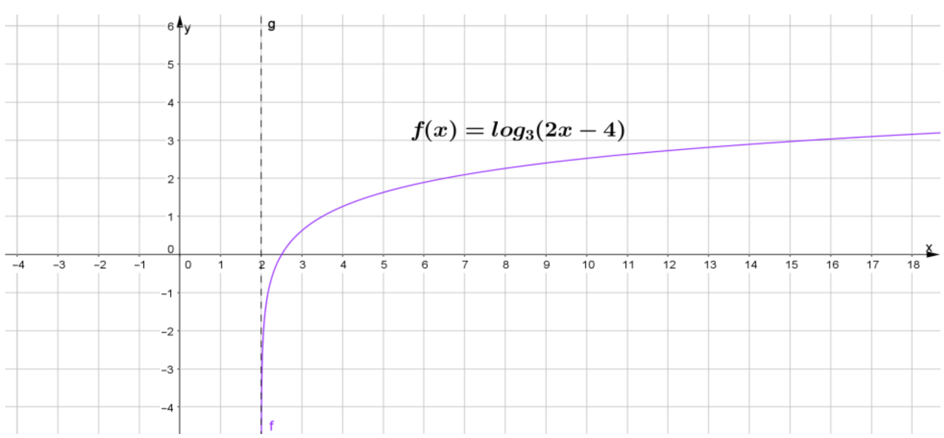



Figura 5. Función logarítmica de base 3.

***Nota:*** Recuerda que la gráfica de la figura 5, la puedes construir también a través de un registro aritmético con valores mayores a 2 en el dominio de la función. Por ejemplo:

| $x$ | $3$ | $4$ | $5$ |
|---|---|---|---|
| $f(x) = log_3(2x-4)$ | 0.63 | 1.26 | 1.63 |

$$f(3) = log_3(2(3)-4) \qquad f(x) = log_3(2(4)-4) \qquad f(x) = log_3(2(5)-4)$$

$$f(x) = log_3(2) \qquad f(x) = log_3(4) \qquad f(x) = log_3(6)$$

$$\frac{log2}{log3} = 0.63 \qquad \frac{log4}{log3} = 1.26 \qquad \frac{log6}{log3} = 1.63$$

***Conclusiones de las funciones logarítmicas.***

$$\boldsymbol{f(x) = log_b(x)\ donde\ b > 0, b \neq 1\ y\ x > 0.}$$

- El dominio de la función es $(0, \infty)$.
- El rango de la función es $(-\infty, \infty)$.
- La gráfica pasa por los puntos $\left(\frac{1}{b}, -1\right)$, $(1,0), (b, 1)$.

***Actividad 3.*** **Tomando como base la *actividad 2,* determina dominio, rango y la gráfica (con lápiz y papel y comprobadas con GeoGebra). de cada una de las siguientes funciones logarítmicas.**

a. $f(x) = logx^2$

b. $f(x) = logx^3$

c. $f(x) = log_2(2x)$

d. $f(x) = log_{\frac{1}{3}}(x)$

e. $f(x) = log_5(4x+1)$

f. $f(x) = log_2(x+3)$

g. $f(x) = log_3(3x-1)$

h. $f(x) = log_4(x-3)$

***Nota:*** Te puedes apoyar en la siguiente dirección URL, donde tendrás un escenario interactivo en GeoGebra para que puedas verificar tus gráficas.

https://drive.google.com/open?id=1Jr0WMFX2XdICiAqJp59qbK0XYk6Xsg94

***Actividad 4.*** **Comparar mediante gráficas y/o tablas que la función logarítmica es la función inversa de la exponencial.**

***Para el profesor:*** En esta actividad el profesor compara mediante tablas y gráficas (utilizando GeoGebra) que la función logarítmica es la función inversa de la exponencial y viceversa.

***Ejemplo 1.*** Considera las funciones $y = 2^x$ e $y = log_2 x$. Analiza la tabla 10 junto con el profesor para verificar que ambas funciones son inversas considerando sus tablas (registros aritméticos) y sus gráficas (registro geométrico).

Tabla 10. La función logarítmica como *inversa* de la función exponencial

**Tabla**

$y = 2^x$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $-3$ | $\frac{1}{8}$ |
| $-2$ | $\frac{1}{4}$ |
| $-1$ | $\frac{1}{2}$ |
| $0$ | $1$ |
| $1$ | $2$ |
| $2$ | $4$ |
| $3$ | $8$ |

**Gráfica**

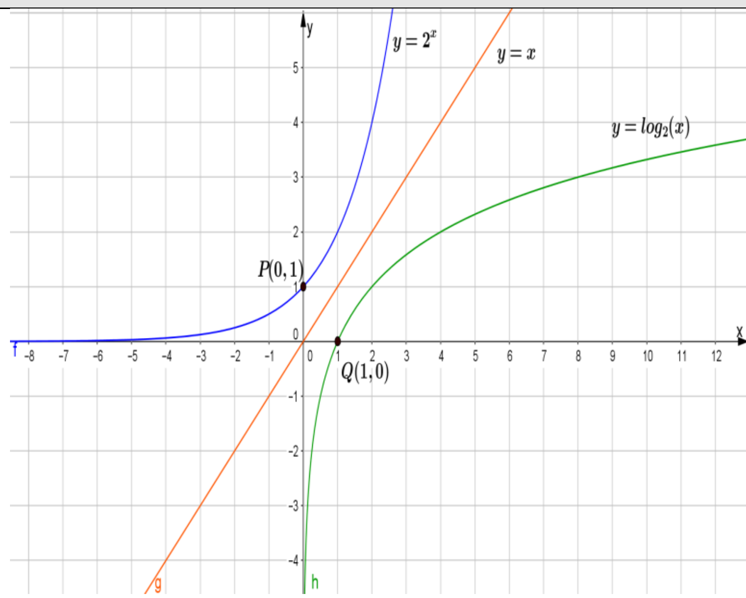



Figura 6. Gráfica de las funciones $\boldsymbol{y = 2^x}$ ***e*** $\boldsymbol{y = log_2 x}$.

**Tabla**

$y = log_2(x)$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $\frac{1}{8}$ | $-3$ |
| $\frac{1}{4}$ | $-2$ |
| $\frac{1}{2}$ | $-1$ |
| $1$ | $0$ |
| $2$ | $1$ |
| $4$ | $2$ |
| $8$ | $3$ |

***Ejemplo 2.*** Considera las funciones $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $y = log_{\frac{1}{2}} x$. Analiza la tabla 11 junto con el profesor para verificar que ambas funciones son inversas considerando sus tablas (registros aritméticos) y sus gráficas (registro geométrico).

**Tabla 11.** La función logarítmica como *inversa* de la función exponencial

**Tabla**

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $-4$ | $16$ |
| $-3$ | $8$ |
| $-2$ | $4$ |
| $-1$ | $2$ |
| $0$ | $1$ |
| $1$ | $\frac{1}{2}$ |
| $2$ | $\frac{1}{4}$ |
| $3$ | $\frac{1}{8}$ |
| $4$ | $\frac{1}{16}$ |

**Gráfica**

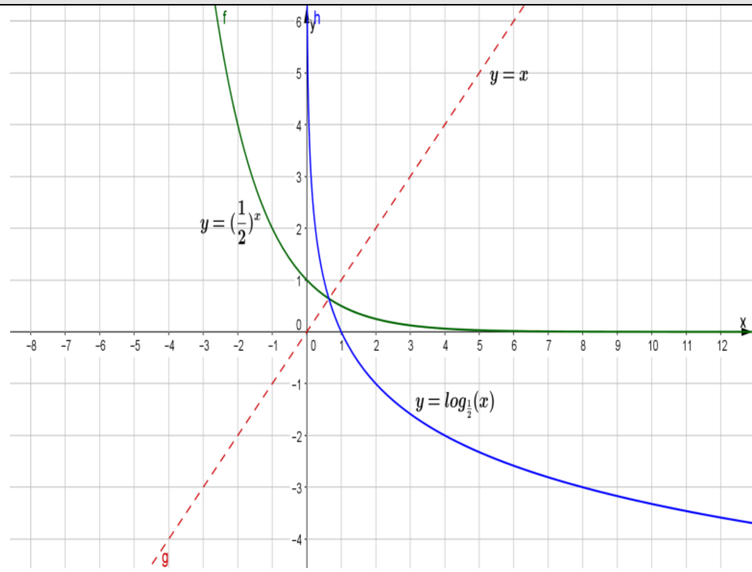



Figura 7. Gráfica de las funciones $\boldsymbol{y = \left(\frac{1}{2}\right)^x}$ $\boldsymbol{e\ y = log_{\frac{1}{2}}x}$.

**Tabla**

$$y = log_{\frac{1}{2}}(x)$$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $16$ | $-4$ |
| $8$ | $-3$ |
| $4$ | $-2$ |
| $2$ | $-1$ |
| $1$ | $0$ |
| $\frac{1}{2}$ | $1$ |
| $\frac{1}{4}$ | $2$ |
| $\frac{1}{8}$ | $3$ |
| $\frac{1}{16}$ | $4$ |

Con base en lo anterior (ejemplos 1 y 2), podemos ver que el rango de la función exponencial es el dominio de la función logarítmica, y viceversa. Además los valores de "$x$" y de "$y$" en los pares ordenados están intercambiados en las funciones exponencial y logarítmica.

Recuerda que para determinar las funciones inversas, intercambiamos "$x$" $e$ "$y$", y despejamos "$y$" en la ecuación resultante. Considera $y = b^x$. Si intercambiamos "$x$" $e$ "$y$" obtenemos $x = b^y$. De acuerdo con la definición de logaritmo, podemos reescribir esta función como $y = log_b x$, que es una ecuación donde "$y$" está despejada. Por consiguiente, $y = b^x$ $e$ $y = log_b x$ son *funciones inversas*, y podemos escribir: si $f(x) = b^x$, entonces $f^{-1}(x) = log_b x$.

Toma en consideración la información del recuadro siguiente.

| ***Características de las gráficas.*** | |
|---|---|
| **Función Exponencial** | **Función Logarítmica** |
| $\boldsymbol{y = b^x\ (b > 0, b \neq 1)}$ | $\boldsymbol{y = log_b x\ (b > 0, b \neq 1)}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $Dominio: (-\infty, \infty)$ | | | $(0, \infty)$ |
| $Rango: (0, \infty)$ | | | $(-\infty, \infty)$ |
| | $\left(-1, \frac{1}{b}\right)$ | $"x", se\ transforma\ en\ "y",$ | $\left(\frac{1}{b}, 1\right)$ |
| $Puntos\ en\ la\ gráfica$ | $(0,1)$ | $"y"\ se\ transforma\ en\ "x".$ | $(1,0)$ |
| | $(1, b)$ | | $(b, 0)$ |

En las figura 6 se ilustran las gráficas de $y = 2^x$ $e$ $y = log_2 x$. En la figura 7 se muestran las gráficas de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ $e$ $y = log_{\frac{1}{2}} x$. En cada figura, las gráficas son inversas entre sí y, por lo tanto, simétricas con respecto a la recta $y = x$.

***Actividad 5.*** **Apoyándote en los dos primeros ejemplos y organizados en equipos, obtén la inversa de la función logarítmica y su gráfica (realiza la gráfica con lápiz y papel y contrástala con GeoGebra).**

1. Considera las funciones $y = 10^x$ $e$ $y = log(x)$. Completa la tabla 12.

Tabla 12. La función logarítmica como *inversa* de la función exponencial

| Tabla | Gráfica | Tabla |
|---|---|---|
| $y =$ ______ | | $y =$ ______ |

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $-4$ | |
| $-3$ | |
| $-2$ | |
| $-1$ | |
| $0$ | |
| $1$ | |
| $2$ | |
| $3$ | |
| $4$ | |

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| | $-4$ |
| | $-3$ |
| | $-2$ |
| | $-1$ |
| | $0$ |
| | $1$ |
| | $2$ |
| | $3$ |
| | $4$ |

2. Considera las funciones $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ $e$ $y = log_{\frac{1}{3}}(x)$ y completa la tabla 13.

<table>
<tr><th colspan="3">Tabla 13. La función logarítmica como inversa de la función exponencial</th></tr>
<tr><th>Tabla</th><th>Gráfica</th><th>Tabla</th></tr>
<tr>
<td>$y =$ ______<br><table><tr><th>$x$</th><th>$y$</th></tr><tr><td>$-4$</td><td></td></tr><tr><td>$-3$</td><td></td></tr><tr><td>$-2$</td><td></td></tr><tr><td>$-1$</td><td></td></tr><tr><td>$0$</td><td></td></tr><tr><td>$1$</td><td></td></tr><tr><td>$2$</td><td></td></tr><tr><td>$3$</td><td></td></tr><tr><td>$4$</td><td></td></tr></table></td>
<td></td>
<td>$y =$ ______<br><table><tr><th>$x$</th><th>$y$</th></tr><tr><td></td><td>$-4$</td></tr><tr><td></td><td>$-3$</td></tr><tr><td></td><td>$-2$</td></tr><tr><td></td><td>$-1$</td></tr><tr><td></td><td>$0$</td></tr><tr><td></td><td>$1$</td></tr><tr><td></td><td>$2$</td></tr><tr><td></td><td>$3$</td></tr><tr><td></td><td>$4$</td></tr></table></td>
</tr>
</table>

3. Si algunos puntos en la gráfica de la función exponencial, $f(x) = b^x$ son:

$$\left(-3, \frac{1}{27}\right), \left(-2, \frac{1}{9}\right), \left(-1, \frac{1}{3}\right), (0,1), (1,3), (2,9), (3,27).$$

Lista los puntos de la gráfica de la función logarítmica $f(x) = log_b x$ y realiza las gráficas correspondientes con lápiz y papel.

***Estrategia didáctica 7. Problemas de aplicación en diferentes contextos que se modelan con funciones logarítmicas y exponenciales. (Cierre).***

***Aprendizajes:*** El alumno resuelve problemas en diferentes contextos que se modelen con funciones logarítmicas y exponenciales.
***Aprendizajes:*** El alumno resuelve problemas de aplicación empleando los conocimientos adquiridos anteriormente.

***Para el profesor:*** Actividad de aplicación y resolución de problemas que puede ser utilizada en diferentes ramas de la ciencia. ***Cierre.***

***Problema 1.*** La masa $M$ en gramos de una pastilla efervescente que calma el dolor de estómago en un determinado instante $(t)$ en segundos viene dado por:

$$M = 0.15(10^{-0.02t})$$

Si la masa se ha reducido a 0.05 gramos, ¿cuánto tiempo ha transcurrido desde que se la tomó?

***Solución:*** Considerando que la masa $M = 0.05\ grs$. La incógnita por encontrar será el tiempo $(t)$. Reemplazar en la expresión dada.

$$0.05 = 0.15(10^{-0.02t})$$

Dejamos sola la potencia y aplicamos logaritmo en ambos miembros de la ecuación.

$$log\frac{0.05}{0.15} = log(10^{-0.02t})$$

$$log\frac{1}{3} = -0.02t * log10$$

Utilizando tu calculadora: $log\frac{1}{3} = -0.4771$ y $log10 = 1$.

$$-0.4771 = -0.02t(1)$$

$$t = \frac{-0.4771}{-0.02} = 23.86\ seg.$$

***Problema 2.*** Supóngase que el 1° de enero de 2018, la población de una cierta ciudad era de 800,000 habitantes. Desde entonces y hasta el año 2030, se espera que la población aumente con una rapidez de 3.5% anual. Por consiguiente, $t$ años después del 1° de enero de 2018, se espera que la población sea:

$$P(t) = 800{,}000(1.035)^t.$$

Donde $0 \leq t \leq 12$, que son los 12 años entre los años de 2018 y 2030. ¿En qué fecha se puede predecir que la ciudad tendrá 1,000,000 de habitantes?

Solución: Deseamos tener un valor de $t$ tal que:

$$800{,}000(1.035)^t = 1{,}000{,}000$$

$$(1.035)^t = \frac{1{,}000{,}000}{800{,}000}$$

$$(1.035)^t = 1.25$$

Puesto que la variable $t$ aparece como exponente, agregamos logaritmo en ambos miembros de la ecuación.

$$log(1.035)^t = log1.25$$

$$t * log1.035 = log1.25$$

$$t = \frac{log1.25}{log1.035} = \frac{0.0969}{0.0149} = 6.5$$

Seis y medio años después del 1° de enero de 2018.

***Problema 3.*** La magnitud "$M$" de un terremoto se define mediante la fórmula:

$$\log E = 11.8 + 1.5 * M$$

Donde $M$ es la magnitud del terremoto en la escala de Richter (de 0 a 10) y $E$ es la energía liberada (expresada en ergios).

a) ¿Qué magnitud tendrá un terremoto que libera $10^{16}$ ergios?

$$log 10^{16} = 11.8 + 1.5 * M$$
$$16 - 11.8 = 1.5 * M$$
$$M = \frac{4.2}{1.5} = 2.8 \, grados \, Richter.$$

b) ¿Cuánta energía se libera en un terremoto de magnitud 7?

$$\log E = 11.8 + 1.5 * 7$$
$$\log E = 11.8 + 10.5$$
$$\log E = 22.3 \dots NL$$
$$10^{23.3} = E \dots NE$$
$$E = 1.995x10^{22} \, ergios.$$

***Para el alumno:*** Los alumnos en equipos resuelven problemas de cultivos de bacterias, de desintegración radioactiva, interés compuesto, escala de Richter, etcétera.

QR-10. Problemas de logaritmos.

***Instrucciones.*** Apóyate en el código QR de la izquierda para resolver los siguientes problemas. Una vez que hayas entrado saca una copia con la información relativa al tema y cópiala en tu cuaderno ya que ésta la vas a usar en las siguientes actividades.

***Problema 4.*** Calcula el pH del zumo de limón, sabiendo que la concentración de protones de este es de $0.01 \frac{moles}{L}$.

***Problema 5.*** Una ameba es un ser unicelular que se reproduce por bipartición (cada ameba se duplicará y se convertirá en 2 amebas idénticas). Si partimos de un cultivo de 800 amebas que se reproducen cada hora.

a) ¿Cuántas amebas tendremos a las 10 horas?

b) ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para que tengamos una población de 2 millones de amebas?

***Problema 6.*** El valor de un coche se devalúa un 10% cada año que pasa. Si su valor es de 24,000 euros.

$$1\ Euro = 24.44\ pesos\ mexicanos.$$

a) ¿Cuántos pesos mexicanos cuesta el coche considerando la equivalencia expuesta líneas arriba?

b) ¿Cuánto costara en pesos mexicanos al cabo de 12 años?

c) ¿Cuánto tiempo debe pasar para que cueste solo $244,400?

***Problema 7.*** ¿Durante cuánto tiempo hay que tener a interés compuesto 40,000 euros al 5.5% de interés anual para que se recupere un capital de 44,100 euros? Realiza la conversión a pesos mexicanos.

$$C = C_0\left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$$

***Problema 8.*** **Bacterias.** Si en un inicio hay 1000 bacterias en un cultivo, y este número se duplica cada hora, entonces el número de bacterias al cabo de $t$ horas puede calcularse mediante la fórmula $N = 100(2)^t$. ¿Cuánto tiempo tardará el cultivo en tener 30,000 bacterias?

## 4. Materiales Diversos de Apoyo.

***Problema 1.*** El modelo de *Jenss* representa la fórmula de mayor precisión obtenida empíricamente para predecir la estatura $h$ (en centímetros) en términos de la edad $t$ (en años) para un niño en edad preescolar (de 3 meses a 6 años).

$$h = 79.04 + 6.39t - e^{3.26-0.99t}$$

a) ¿Qué estatura predice este modelo para un niño de 2 años?

***Solución:***

$$h = 79.04 + 6.39(2) - e^{3.26-0.99*2} = 79.04 + 12.78 - e^{1.28} = 91.82 - 3.60 = 88.22cm.$$

***Problema 2.*** Si se depositan $1,500.00 en una cuenta de ahorros que devenga un interés anual del 6% compuesto continuamente y no se efectúan depósitos ni retiros adicionales. ¿Cuánto tiempo se necesitará para contar con $2,000.00 en la cuenta? Sabiendo que la fórmula que describe este problema es: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P} * \boldsymbol{e}^{i*t}$, donde $\boldsymbol{A}$ representa el monto final con todo e intereses, $\boldsymbol{P}$ el capital inicial e $\boldsymbol{i}$ el interés anual.

***Solución:***

$$2000 = 1500 * e^{0.06*t}; \quad ln\,2\,000 = ln\,1\,500 * e^{0.06*t}; \quad \frac{ln\,2\,000}{ln\,1\,500} = 0.06 * t * ln\,e\,, ln\,e = 1$$

$$\frac{7.6009}{7.3132} = 0.06 * t * 1; \quad \frac{1.04}{0.06} = t; \quad t = 17.33años.$$

***Problema 3.*** Para una población de elefantes, el peso $w$ (en kilogramos) a la edad $t$ (años) está dada por:

$$w(t) = 2600[1 - 0.51e^{-0.075*t}]^3$$

a. Calcula el peso de un elefante de 18 meses de edad.

***Solución:*** Considerando que el tiempo $t$ se expresa en años, tendremos 1.5 años=18 meses.

$$w(1.5) = 2600[1 - 0.51e^{-0.075*1.5}]^3 = 2600[1 - 0.51 * e^{-0.1125}]^3 = 2600[1 - 0.51 * 0.89]^3;$$

$$w(1.5) = 2600[1 - 0.4539]^3 = 2600[0.5461]^3 = 2600[0.1629];$$

$$w(1.5) = 423.54\ ki\,log\,r\,amos.$$

b. Una elefanta adulta pesa 1600 kilogramos, determina su edad.

$$1600 = 2600[1 - 0.51e^{0.075*t}]^3; \quad \sqrt[3]{\frac{1600}{2600}} = \sqrt[3]{[1 - 0.51 * e^{0.075*t}]^3}; \quad \sqrt[3]{\frac{1600}{2600}} = 1 - 0.51e^{0.075*t};$$

$$0.51e^{-0.075*t} = 1 - \sqrt[3]{\frac{1600}{2600}}; \quad e^{-0.075*t} = \frac{1-\sqrt[3]{\frac{1600}{2600}}}{0.51} \quad ln\,e^{-0,075*t} = ln\frac{1-\sqrt[3]{\frac{1600}{2600}}}{0.51}$$

$$-0.075 * t = ln\frac{1-\sqrt[3]{0.615}}{0.51}; \quad -0.075 * t = ln\frac{1-0.850}{0.51}; \quad -0,075 * t = ln\frac{0.149}{0.51}$$

$$-0.075 * t = ln\,0.292; \quad t = \frac{-1.230}{-0.075} = 16.4\ años.$$

| **PROBLEMAS DE LA FORMA**: $f(x) = a * b^x$, para $b > 1$ y $a \neq 0$. | |
|---|---|
| ***P4.*** En un pueblo, de 9000 habitantes se propaga un rumor de la llegada de un virus de influenza. Se propaga de modo que cada hora se duplica la cantidad de personas que se enteran del mismo. ¿Cuántas personas conocerán el rumor al cabo de 12 horas?<br><br>Formula.<br>$N(t) = 2^t$<br>$N(t) = 2^{nt}$<br><br>$N(t)$: Número de personas.<br>$t, nt$: Número de horas. | $N(t) = 2^t$<br><br>$N(t) = 2^{12}$<br><br>$N(t) = 4\,096\ personas$ |
| ***P5.*** Una colonia particular de bacterias duplica su población cada 15 horas. Un científico haciendo un experimento empieza con 100 células de bacteria. Él sabe que el número de células sea dado por la fórmula $C = 100(2)^{\frac{t}{15}}$, donde $t$ es el número de horas desde el inicio del experimento.<br>¿Después de cuántas horas puede esperar el científico tener 300 bacterias? Proporciona la respuesta a la hora más cercana. | El tiempo para tener una colonia de 300 células de bacteria es.<br><br>$300 = 100(2)^{\frac{t}{15}}$<br><br>$\frac{300}{100} = 3 = (2)^{\frac{t}{15}}$<br><br>$\log(3) = \frac{t}{15}\log(2)$<br><br>$t = \frac{15\log(3)}{\log(2)}$<br><br>$t = 23.77\ horas \approx 24\ horas.$ |

| | |
|---|---|
| ***P6.*** Una persona invierte en el banco \$ 10,000 a una tasa de interés del 5 %, en una cuenta que se capitaliza trimestralmente durante 6 años. Determine el saldo o el capital acumulado en la cuenta al cabo de 6 años.<br><br>Formula:<br>$$A = C\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$<br>Donde:<br><br>$A$: capital acumulado.<br>$C$: capital inicial.<br>$r$: interés.<br>$n$: es el número de periodos de capitalización al año.<br>$t$: número de años. | $C = \$10{,}000$<br>$r = 0.05\%$<br>$n = 4\ (trimestral)$<br>$t = 6\ años.$<br><br>$$A = 10\,000\left(1 + \frac{0.05}{4}\right)^{4x6}$$<br>$$A = \$\ 13\,473.5$$<br>Después de 6 años, los \$10,000 originales habrán crecido \$13,473.5 |
| ***P7.*** En medicina se usa un isótopo de yodo para diagnosticar ciertos desordenes de la glándula tiroides. Para este particular isótopo de yodo, la masa que permanece después de $t$ horas es $M(t)$, decrece según la fórmula: $M(t) = M_0\left(2^{-\frac{t}{13.2}}\right)$, donde $M_0$ es la masa inicial. ¿Cuántos gramos de una dosis inicial de 3.2 gramos de este isótopo permanecerán después de 16 horas? (redondea a la centésima más cercana). | $$M(t) = 3.2(2)^{\left(-\frac{t}{13.2}\right)}$$<br>$$M(t) = 3.2\left(2^{-16/13.2}\right)$$<br>$$M(t) = 1.38\ gramos$$ |
| ***P8.*** En una muestra de un fósil se detectó que el 0.003% del Carbono contenido es Carbono $14\left({}^{14}C\right)$. Si se sabe que el ${}^{14}C$ representa el 1% del Carbono presente en un ser vivo y que la vida media del $^{14}$C es de 5730 años, ¿Qué tan antiguo es el fósil?<br><br>*Fórmula.*<br>Para el decaimiento radiactivo se cumple la siguiente función:<br>$$C(t) = C_0 * 2^{-\frac{t}{n}}$$ | $$C(t) = C_0(2)^{-\frac{t}{n}}$$<br>$$(2)^{-\frac{t}{n}} = \frac{C(t)}{C_0}$$<br>$$-\frac{t}{n}\log(2) = log\left(\frac{C(t)}{C_0}\right)$$<br>$$t = -\frac{nlog\left(\frac{C(t)}{C_0}\right)}{\log(2)}$$ |

| | |
|---|---|
| $C(t)$: es la cantidad del isotopo radiactivo al tiempo $(t)$.<br>$C_0$: es la cantidad inicial de $^{14}C$ en la muestra.<br>$n$: es la vida media del isotopo radiactivo en años.<br>$t$: es el tiempo transcurrido en años.<br><br>Datos:<br><br>$C(t) = 0.003\% = 0.00003\%$<br><br>$C_0 = 1\% = 0.01\%$.<br><br>$n = 5730 \text{ años}$. | $t = -\dfrac{5730 \cdot log\left(\frac{0.00003}{0.01}\right)}{\log(2)}$<br><br>$t = 67\ 063.4 \text{ años}$ |
| ***P9.*** La temperatura corporal de una persona es de 37ºC. Se sabe que cuando una persona fallece, en promedio tarda 20 horas para que su temperatura corporal llegue a 27ºC si la temperatura del medio ambiente permanece a 25ºC. Si el cuerpo humano cumple con la Ley de enfriamiento de Newton:<br><br>Un médico forense observa que la temperatura de una persona que falleció es de 29ºC y la temperatura ambiente se mantuvo a 25ºC desde el fallecimiento. Si el reloj del médico marca las 7:00pm, ¿A qué hora se estima el fallecimiento? El cuerpo humano cumple con la ley de enfriamiento de Newton:<br><br>$\rightarrow \quad T = T' + 12 * e^{-0.0896*t}$<br><br>$T$: temperatura corporal.<br><br>$T'$: temperatura ambiente.<br><br>$T - T' = 12 * e^{-k*t}$ | $T - T' = 12 \cdot e^{-0.0896t}$<br><br>$Ln\left(\dfrac{(T-T')}{12}\right) = Ln(e^{-0.0896t})$<br><br>$t = -\dfrac{Ln\left(\frac{(T-T')}{12}\right)}{0.0896}$<br><br>$t = -\dfrac{Ln\left(\frac{(29^\circ - 25^\circ)}{12}\right)}{0.0896}$<br><br>$t = 12.26$ horas han pasado. La persona falleció un poco antes de las 7:00 P: M. |

| $PROBLEMAS\ DE\ LA\ FORMA: f(x) = a \cdot b^x, para, Base\ b < 1\ y\ \ a\ \neq 0$ | |
|---|---|
| ***P10.*** Aluminio reciclado. Actualmente, cada año reciclan $\frac{2}{3}$ de todas las latas de aluminio que se consumen, mientras que $\frac{1}{3}$ se envía a depósitos de basura. El aluminio reciclado se utiliza para fabricar nuevas latas. En estados Unidos, en 2004, se usaron alrededor de $190{,}000{,}000$ de latas de aluminio. Con la fórmula: $A = 190\ 000\ 000 \left(\frac{2}{3}\right)^n$ , puede calcularse el número de latas fabricadas con aluminio reciclado, n es el número de años a partir del 2004.<br><br>a) ¿Explique porque la fórmula puede usarse para calcular el número de latas, "$n$" años a partir del 2004, fabricadas con aluminio reciclado?<br><br>b) ¿Cuántas latas fabricaran en el 2011 con el aluminio reciclado del 2004? | a) Cada año se reciclan $\frac{2}{3}$ del aluminio que se consume a partir de 190 000 000, por lo que,<br><br>En dos años: $190{,}000{,}000 \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)$<br><br>En tres años: $190{,}000{,}000 \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)$<br><br>En n años:<br>$190{,}000{,}000 \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) \ldots\ldots\ldots.. \left(\frac{2}{3}\right) =$<br>$190{,}000{,}000 \left(\frac{2}{3}\right)^n$, se comporta como una función exponencial.<br><br>b)<br>$n = 7\ años.$<br>$A = 190\ 000\ 000 \left(\frac{2}{3}\right)^7$<br>$A = 11\ 120\ 256\ latas$ |
| ***P11.*** En enero 2000 adquiriste un auto en \$100 000. Si cada año disminuye el 13 % de su valor inicial. ¿Cuánto valdrá en el año 2020?<br><br>*Fórmula:*<br>$V(t) = 100\ 000 \cdot (0.87)^t$<br><br>$V(t)$ valor del carro en función del tiempo<br>$t = 20$: tiempo trascurrido.<br>Valor del coche al año:<br><br>$100\% - 13\% = 87\%.$ | $V(20) = 100\ 000 \cdot (0.87)^{20}$<br><br>$= \$\ 6\ 171.4$ |

| | |
|---|---|
| ***P12.*** Un almacén de aparatos electrodomésticos liquida mercancía en exhibición con ligeros deterioros. Mediante el sistema de reducir cada año de 35% el precio de esta mercancía que va quedando almacenada. Si compras un refrigerador almacenado tres años, con un precio inicial de $\$12{,}455$, ¿Cuánto pagaras por él?<br><br>*Fórmula.* $V(t) = C_0 \cdot (1-i)^t$<br>$V(t)$: valor de producto en función del tiempo.<br>$C_0$: valor inicial de la mercancía.<br>$i = 35\% = 0.35$: interés por año.<br>$t = 3$: tiempo en años. | $V(3) = 12\,455 \cdot (1-0.35)^3$<br><br>$V(3) = \$3{,}420.45$ |
| ***P13.*** La relación entre el número de decibeles "$\beta$" y la intensidad del sonido $I$ en $\left(\frac{watts}{m^2}\right)$ está dada por la función:<br><br>$\boldsymbol{\beta(I) = 10log\left(\frac{I}{10^{-2}}\right)}$<br><br>a. ¿Cuál es el número de decibeles cuando la intensidad es de $0.02\ \frac{w}{m^2}$?<br>b. Calcula la intensidad para $5\ dB$. | a. Número de $dB$ para: $I = 0.02\ \frac{w}{m^2}$.<br><br>$\beta(0.02) = 10log\left(\frac{0.02}{10^{-2}}\right)$<br>$\beta(0.02) = 3.01\ dB$<br><br>b. Intensidad $I$, para $5\ dB$.<br><br>$5 = 10\ log\left(\frac{I}{10^{-2}}\right)$<br>$\frac{5}{10} = log\left(\frac{I}{10^{-2}}\right)$<br>$\frac{1}{2} = log\left(\frac{I}{10^{-2}}\right) \dots NL$<br>$10^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{I}{10^{-2}}\right) \dots NE$<br>$10^{\frac{1}{2}} * 10^{-\frac{4}{2}} = I$<br>$I = 10^{-\frac{3}{2}}\ \frac{w}{m^2}$<br>También: $I = 0.031\ \frac{w}{m^2}$ |

## 5. Formas e Instrumentos de Evaluación.

Sin duda, una de las cuestiones más importantes de la enseñanza, es la evaluación de lo aprendido por los estudiantes. En nuestro caso, esta evaluación debe ser continua y en estrecha observancia de los dos principios básicos del constructivismo, a saber, la *diferenciación progresiva* y la *reconciliación integradora* de los nuevos contenidos con los que ya traía el aprendiz. Por ello es por lo que, a lo largo del desarrollo de esta estrategia didáctica, se deberá ir determinando la adecuación y pertinencia de las construcciones conceptuales de los alumnos. Al final de la autoevaluación, encontraras las respuestas a cada sección con la finalidad de que te puedas autoevaluar.

## Autoevaluación.

### *Sección I. Funciones exponenciales.*

1. Al simplificar La expresión $2^{\sqrt{3}} * 2^{\sqrt{12}}$ aplicando las leyes de los exponentes obtenemos.

a) $2^{3\sqrt{3}}$ b) $4^{\sqrt{3}\sqrt{12}}$ c) $2^{15}$ d) $2^{\sqrt{3}-\sqrt{12}}$

2. Al simplificar La expresión $(7^{\sqrt{5}})^{\sqrt{20}}$ aplicando las leyes de los exponentes obtenemos.

a) $7^{100}$ b) $7^{10}$ c) $7^{15}$ d) $7^{\sqrt{5}+\sqrt{20}}$

3. Se toma un préstamo de $5,000 por un periodo de tres meses con un interés simple de 32% anual. Determina la cantidad que debe pagarse al final de los 90 días (considerando que cada mes tiene 30 días).

a) $\$5,200$ b) $\$5,800$ c) $\$5,600$ d) $\$5,400$

4. Supóngase que en una cuenta de ahorros se depositan $40,000 y que se paga un interés compuesto del 3% devengado semestralmente. Si no se hacen retiros ni depósitos adicionales, ¿cuál es el monto del depósito al cabo de 3 años?

a) $\$47,762.09$ b) $\$56,740.76$ c) $\$43,737.73$ d) $\$41,827.14$

5. En un cultivo bacteriano existen inicialmente 1500 bacterias presentes a los $(t)$ minutos, representado por la expresión $f(t) = Be^{0.04*t}$, donde $B$ es una constante. Si hay 1500 bacterias inicialmente. ¿Cuántas bacterias habrá después de 1 hora?

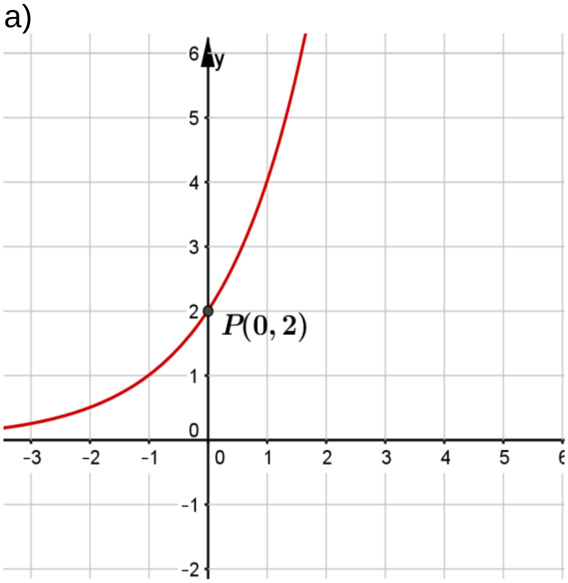
a) $4{,}980\ bacterias.$ b) $16{,}534\ bacterias.$ c) $\$18{,}500\ bacterias.$
d) $22{,}540\ bacterias.$

6. Si el valor de un equipo de laboratorio es $V(t)$ unidades monetarias al cabo de $t$ años de su compra, representado por la expresión $V(t) = Be^{-0.20t}$, donde $B$ es una constante. Si el costo inicial del equipo fue de $\$18{,}000$, ¿cuál será su valor después de 2 años?

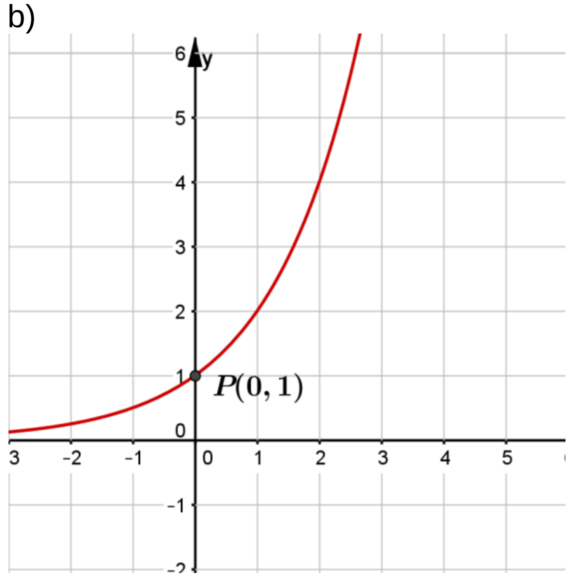
a) $\$12{,}065.76$ b) $\$10{,}917.55$ c) $\$9{,}878.61$ d) $\$15{,}400.71$

7. La gráfica de la función exponencial $f(x) = 2^{x-1}$ es.

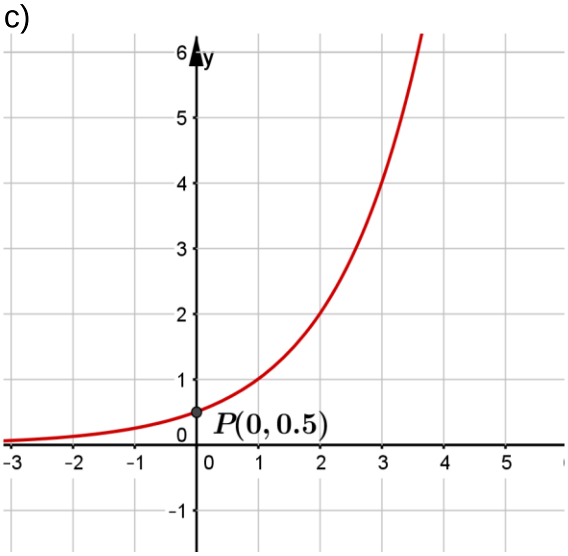
a)



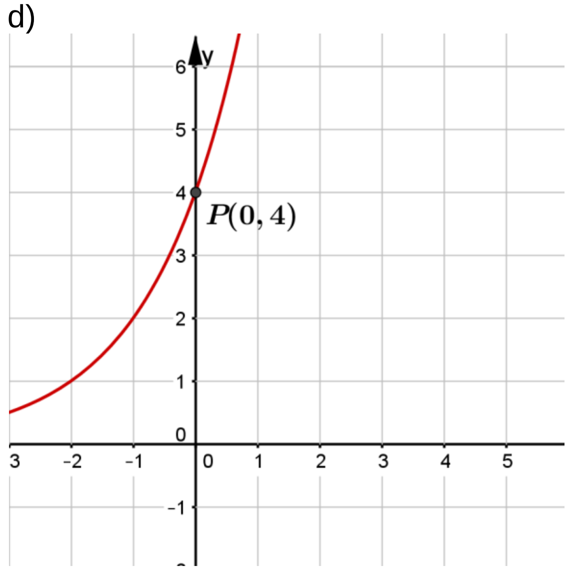

b)




c)

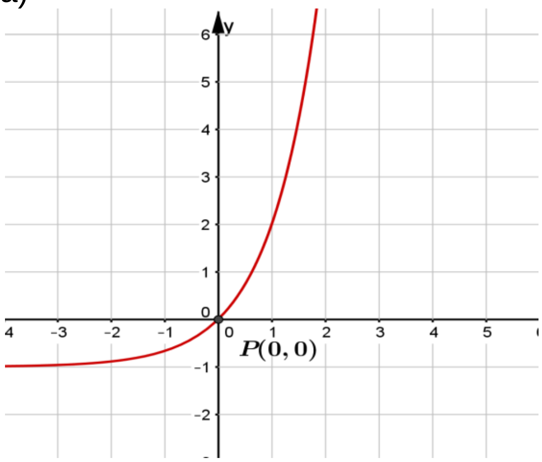



d)

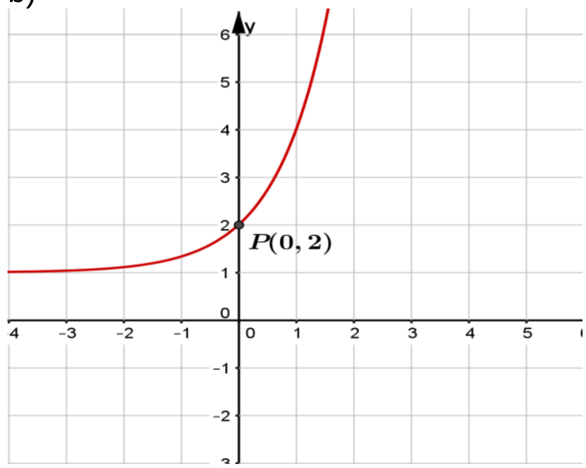


8. La gráfica de la función exponencial $f(x) = 3^x + 2$ es.

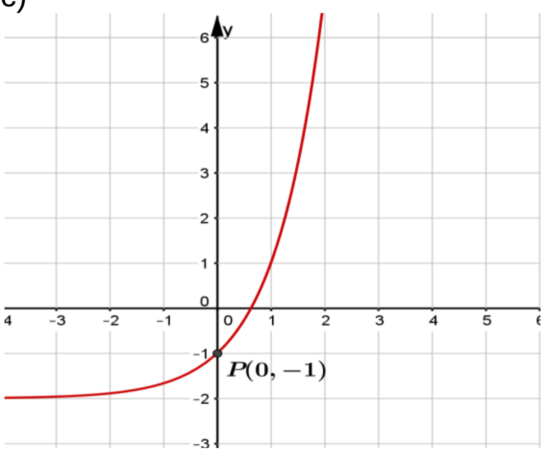
a)



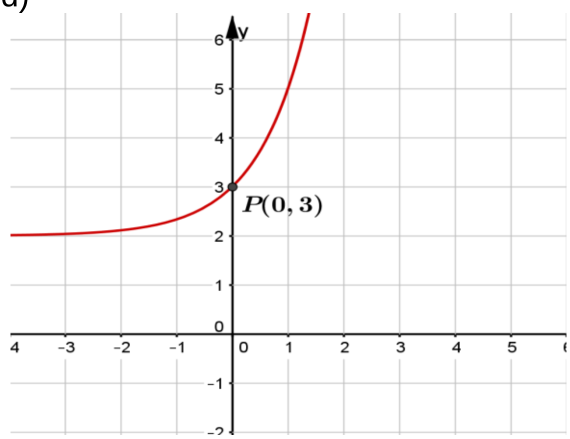

b)




c)

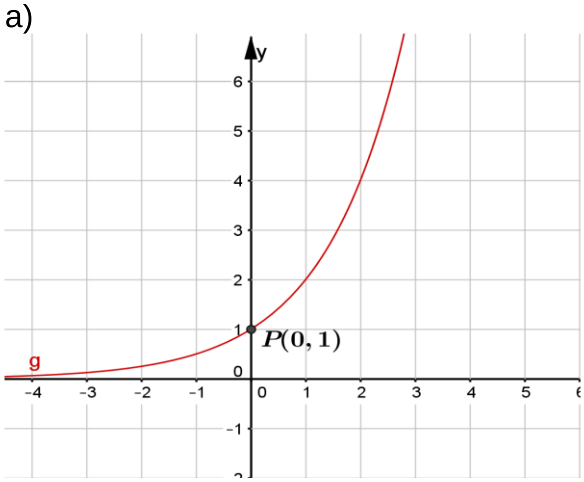



d)

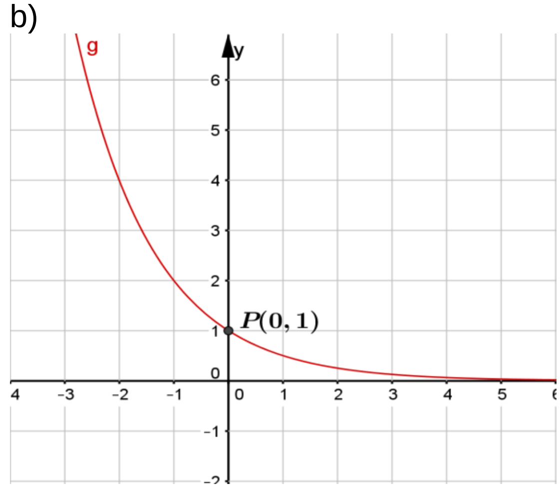



9. La gráfica de la función exponencial $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ es.

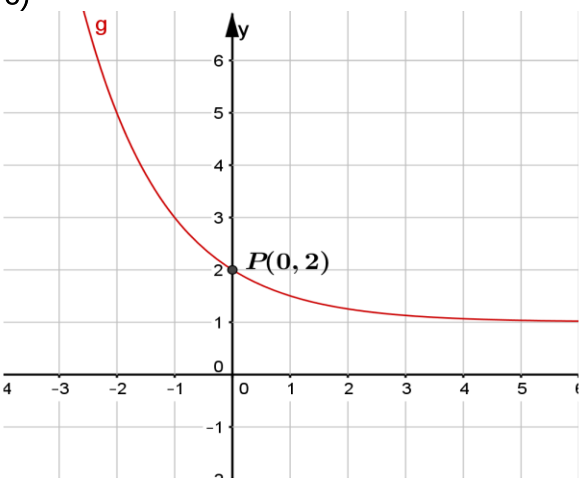
a)



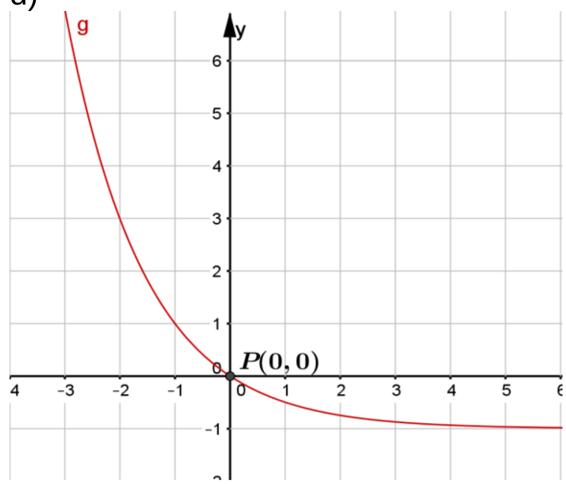

b)



c)




d)




10. La población de un municipio aumenta de forma proporcional a su tamaño. La tasa de crecimiento es 6% y la población después de $t$ años es $P(t)$, con $P(t) = k * e^{0.06t}$, donde $k$ es una constante. Si la población actual es de 10,000 habitantes. ¿Cuál será la población esperada después de 10 años?

a) $15{,}322\ hab.$ b) $21365\ hab.$ c) $20{,}000\ hab.$ d) $18{,}221\ hab.$

## *Sección II. Funciones logarítmicas.*

11. Al usar la notación exponencial en la relación $log_9 \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$ obtenemos:

a) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = 9$ b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{9} = -\frac{1}{2}$ c) $(9)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$ d) $(9)^{\frac{1}{3}} = -\frac{1}{2}$

12. Al resolver la ecuación $log_b 4 = \frac{1}{3}$ en términos de $b$ obtenemos:

a) $b = 16$ b) $b = 36$ c) $b = 100$ d) $b = 64$

13. Al escribir la expresión $log\, x + 2\, log\, y - 3\, log\, z$ como un solo logaritmo obtenemos la expresión:

a) $log\, x\, y^2 z^3$ b) $log \frac{xy^2}{z^3}$ c) $log \frac{2xy}{3z}$ d) $log \frac{(xy)^2}{z^3}$

14. El conjunto solución de la ecuación $7^x = 3^{x+1}$ es:

a) $x = 3.59$ b) $x = 1.52$ c) $x = 1.29$ d) $x = 4.25$

15. El conjunto solución de la ecuación $log_2(x + 4) - log_2(x - 3) = 3$ es:

a) $x = 9$ b) $x = 12$ c) $x = 16$ d) $x = 4$

16. El dominio $(D)$ y contradominio $(R)$ de la función $f(x) = 2^x$ es:

a) $D(-\infty, \infty),\ R(0, \infty)$ b) $D(-\infty, \infty),\ R(-\infty, \infty)$ c) $D(0, \infty],\ R(-\infty, \infty)$
d) $D(-\infty, \infty),\ R(0, \infty)$

17. El dominio $(D)$ y contradominio $(R)$ de la función $f(x) = log_2 x$ es:

a) $D(-\infty, \infty),\ R(0, \infty)$ b) $D(-\infty, \infty),\ R(-\infty, \infty)$ c) $D(0, \infty),\ R(-\infty, \infty)$
d) $D(0, \infty),\ R(-\infty, \infty)$

18. El dominio $(D)$ y contradominio $(R)$ de la función $f(x) = log_3(2x - 4)$ es:

a) $D(-2, \infty),\ R(0, \infty)$ b) $D(-\infty, \infty),\ R(-\infty, \infty)$ c) $D(2, \infty),\ R(-\infty, \infty)$
d) $D(0, \infty),\ R(-\infty, \infty)$

19. En un circuito eléctrico en particular, la intensidad de la corriente está dada por: $I = 20 * e^{\frac{-Rt}{L}}$. Al despejar $t$, obtenemos.

a) $t = \frac{R}{L} * ln\left|\frac{20}{I}\right|$ b) $t = -\frac{L}{R} * ln\left|\frac{I}{20}\right|$ c) $t = \frac{I}{20} * ln\left|\frac{L}{R}\right|$ d) $t = -\frac{20}{I} * ln\left|\frac{L}{R}\right|$

20. En cierta empresa, el costo unitario al producir "$q$" unidades de cierto artículo está dado por la función $C(q) = log_2(3q - 16)$. ¿Cuántas unidades se deben producir para que el costo unitario de $5?

a) $x = 12\ u$. b) $x = 8\ u$. c) $x = 16\ u$. d) $x = 24\ u$.

| **Tabla de respuestas de la autoevaluación.** | | | | | | | | | |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Sección I. Funciones exponenciales.* | | | | | | | | | |
| 1. a | 2. b | 3. d | 4. c | 5. b | 6. a | 7. c | 8. d | 9. b | 10. d |
| *Sección II. Funciones logarítmicas.* | | | | | | | | | |
| 11. c | 12. d | 13. b | 14. c | 15. d | 16. a | 17. d | 18. c | 19. b | 20. c |

### 6. Valoración del profesor de los resultados obtenidos.

En esta sección se incluye una lista de cotejo para que todos podamos aplicarla al final de su puesta en escena par ser llenada por los alumnos.

| **MATERIA: MATEMÁTICAS IV.<br>NIVEL: BACHILLERATO.<br>UNIDAD 3: FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS.<br>MATERIAL: CUADERNO DE TRABAJO.<br>Nombre: ____________________________________. Grupo: __________.** | | |
|---|---|---|
| **Lista de cotejo para evaluar los resultados obtenidos en la puesta en escena de la Unidad 3. Funciones exponenciales y logarítmicas.** | | |
| INDICADORES DE LOS APRENDIZAJES (COMPETENCIAS). | **SI** | **NO** |
| 1. Se exploran situaciones o fenómenos que corresponden a crecimiento o decaimiento exponencial. | | |
| 2. Se identifican patrones de cambio involucrados en el crecimiento o decrecimiento de una función exponencial. | | |
| 3. Se bosqueja la gráfica de una función exponencial. | | |
| 4. Se identifica el dominio y rango de una función exponencial | | |
| 5. Se traza la gráfica de la función exponencial | | |
| 6. Se analiza la relación entre las gráficas de funciones exponenciales con diferentes bases incluyendo el número $e$. | | |
| 7. Se resuelven problemas en diferentes contextos que se modelen con funciones exponenciales. | | |
| | | |
| 8. Se aborda el logaritmo de un número base "$b$" y las relaciones: $b^y = x \iff y = log_b x$. | | |
| 9. Se opera con logaritmos de distintas bases aplicando sus distintas propiedades. | | |
| 10. Se grafican funciones logarítmicas e identifica su dominio y rango. | | |
| 11. Se verifica mediante gráficas o tablas que la función logarítmica es la función inversa de la exponencial. | | |
| 12. Se resuelven problemas en diferentes contextos que se modelen con funciones logarítmicas y exponenciales. | | |
| 13. Se resuelven problemas de aplicación empleando los conocimientos adquiridos sobre la función exponencial. | | |
| **INDICADOR** | **A** | **R** |
| AUTOEVALUACIÓN. | | |

## 7. Bibliografía y Fuentes Consultadas.

Allen R, A. (2008). *Álgebra Intermedia.* (7ª ed.) México: PEARSON Prentice-Hall.

Bosco, M.D. (2003). *Selección de lecturas Didáctica general I.* UNAM: Facultad de Filosofía y Letras,

Johnson, L., Steffensen, Arnold R. (2009). *Álgebra y Trigonometría con Aplicaciones.* México: Trillas.

Lehmann, Ch. (2001). *Álgebra*. México: Limusa, Grupo Noriega Editores.

Leithold, L. (1999). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. México: Oxford University Press.

Ramírez, C. *et al.* (2010). *Matemáticas IV. Cuaderno de trabajo.* México: Trillas.

Novack, J. (1988). *Constructivismo humano: un consenso emergente.* Enseñanza de las Ciencias.

Swokowsky, E. W. y Cole, J. A. (2011). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica.* (13ª ed.) México: CENGACE Learning.

## 8. Bibliografía Virtual. Sitios WEB y Fuentes Relevantes.

El portal académico del CCH. (2020). Recuperado de:
http://portalacademico.cch.unam.mx/. Contiene guías para el profesor, material interactivo, así como textos de interés pedagógico.

Dirección General Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades. (2016). *Programas de Estudio, Mapa curricular del Plan de estudios. Recuperado de* https://www.cch.unam.mx/programasestudio

**SITIOS WEB.**

QR-1. DrGasgaMath. (8 de febrero de 2021). *Leyes de los exponentes+explicación y ejemplos.* YouTube. https://youtu.be/ds3wZK6R5J0.

QR-2. Profesor Particular Puebla. (8 de febrero de 2021). *Leyes de los exponentes|Álgebra.* YouTube. https://youtu.be/VKT6cqKCrqg

QR-3. Muy Matemática. (10 de febrero de 2021). *Coronavirus crecimiento exponencial.* YouTube. https://youtu.be/zpxLnijqEfg

QR-4. KhanAcademyEspañol. (12 de marzo de 2021). *Resolviendo problemas de aplicación: crecimiento y decaimiento exponencial.* YouTube. https://youtu.be/GtSshE1fNiY

QR-5. Juliana la profe. (12 de marzo de 2021). *Problemas de función exponencial.* YouTube. https://youtu.be/1G54NnLOATs

QR-6. TuCiencia 2. (12 de marzo de 2021). *Función exponencial problema de crecimiento de bacterias.* YouTube. https://youtu.be/DeKNFwzWEv8

QR-7. Profe en c@sa. (15 de marzo de 2021). *Conceptos básicos de la función logarítmica.* YouTube. https://youtu.be/4swvml8DkxM

QR-7-1. math2me. (15 de marzo de 2021). Propiedades de los logaritmos. YouTube. https://youtu.be/tWLWNinCNow

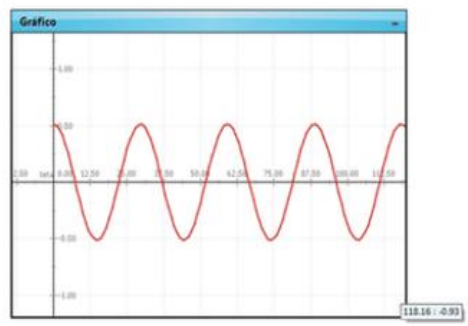
QR-8. Grillo, C. (15 de marzo de 2021). *Ecuaciones logarítmicas con diferente base.* YouTube. https://youtu.be/6d6T8uxj3CM

QR-9. Matemáticas profe Alex. (15 de marzo de 2021). *Función logarítmica Gráfica, dominio y rango.* YouTube. https://youtu.be/C0vUje9Uduc

QR-10. Píldoras matemáticas. (15 de marzo de 2021). Problemas de logaritmos. YouTube. https://youtu.be/veb0EQbwPuo

MATEMÁTICAS IV

# Unidad 4. Funciones Trigonométricas.




**CUADERNO DE TRABAJO.**

**Propósitos de la unidad.**

Al finalizar, el alumno:
Comprenderá la extensión del concepto de razón trigonométrica a función trigonométrica. Estudiará las funciones seno y coseno en su forma característica de variación y el análisis de sus parámetros. Modelará situaciones de comportamiento periódico para resolver problemas.

## 1. Presentación de la unidad 4.

Las funciones trigonométricas surgen de la relación entre los lados de los triángulos rectángulos, así como de analizar los fenómenos circulares. El movimiento circular derivó en el movimiento armónico y en consecuencia en el movimiento armónico y la trigonometría fue la herramienta básica utilizada para modelar los fenómenos antes señalados. Por otra parte, gran diversidad de fenómenos físicos presentes en la vida real se comporta periódicamente, con respecto al tiempo.

Las relaciones trigonométricas tratadas en la unidad se pueden considerar como funciones de números reales, para ello utilizaremos ángulos medidos en radianes, dado que este tipo de medidas son lineales.

Por otra parte, el círculo unitario es el puente de enlace entre las relaciones trigonométricas (definidas en base a un triángulo rectángulo) y las funciones trigonométricas. Dado que la longitud de un arco de un círculo unitario corresponde a la medida del ángulo central, en radianes, que lo subtiende, se utiliza un círculo unitario como el equivalente a una "especie de recta numérica" para establecer el dominio de las funciones trigonométricas.

Trabajaremos las técnicas para trazar las curvas asociadas a funciones cuya regla de correspondencia presenta una de las formas $f(x) = D + Asen\,(Bx + C)$ y $g(x) = D + Acos\,(Bx + C)$, mismas que denominaremos funciones senoidales.

Concluiremos la unidad, presentando situaciones cuyo estudio requiere del empleo de las funciones trigonométricas, cabe resaltar que los movimientos periódicos (bajo ciertas suposiciones) pueden expresarse analíticamente por medio de alguna de las funciones que se trabajarán en la unidad.

## 2. Actividades de aprendizaje.

Estas se llevarán a cabo tomando como base los aprendizajes de la unidad 4, a través de *estrategias didácticas*, utilizando diversas actividades y recursos mismas que incluyen los aprendizajes, códigos QR, actividades diversas y el uso de GeoGebra, con el fin de alcanzar los propósitos de esta unidad.

### 3. Puesta en escena de la unidad IV. Funciones trigonométricas.

Las estrategias didácticas que se presenta a continuación han sido diseñadas para que los estudiantes logren un aprendizaje significativo de los contenidos actitudinales, conceptuales y procedimentales de la *Unidad Temática 4*, del curso de Matemáticas IV, con vistas a lograr los aprendizajes de esta. La unidad didáctica se ha estructurado conforme a las siguientes *estrategias didácticas.*

***Estrategia didáctica 1. Situaciones o fenómenos de variación periódica. (Inicio).***

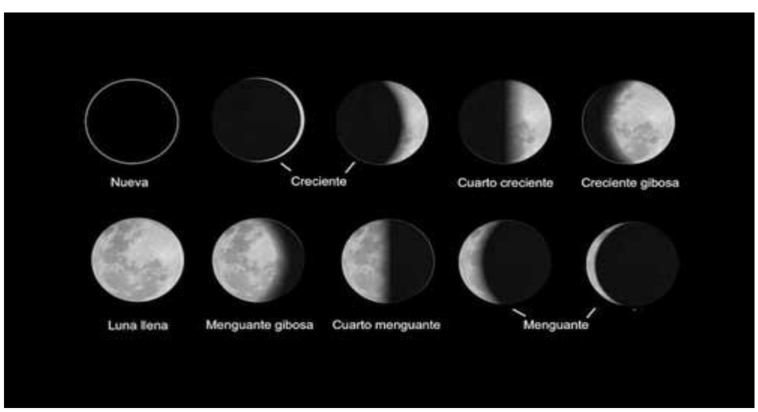
***Aprendizajes:*** El alumno Explora situaciones o fenómenos de variación periódica.

***Para el profesor:*** Exposición en plenaria.

***Actividad 1:***

El profesor expone a los alumnos algunas situaciones que dan lugar a fenómenos periódicos tales como:

***Fases lunares.***
Las fases lunares (también fases de la Luna) son los cambios aparentes de la porción visible iluminada del satélite, debido a su cambio de posición respecto a la Tierra y al Sol. El ciclo completo, denominado lunación, es de 29,53 días, durante el cual la Luna pasa el novilunio, su porción iluminada visible vuelve a aumentar gradualmente, y dos semanas después, ocurre el plenilunio y, alrededor de las dos semanas siguientes, vuelve de nuevo a disminuir y el satélite entra otra vez en la nueva fase[1].

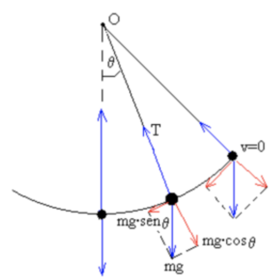



[1] Fase lunar. (s.f.). En *Wikipedia*. Recuperado el 16 de enero de 2021 de https://es.wikipedia.org/wiki/Fase_lunar.

*Péndulo simple.*

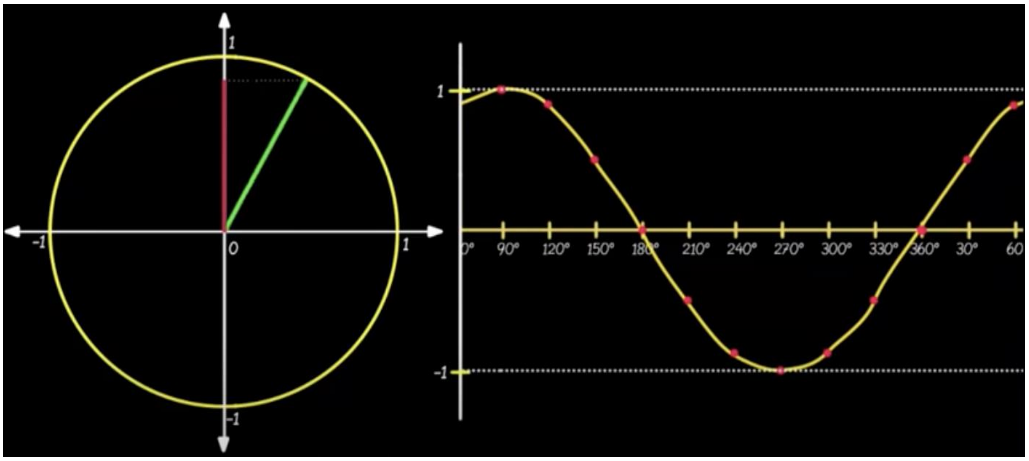
Un péndulo simple se define como una partícula de masa m suspendida del punto O por un hilo inextensible de longitud l y de masa despreciable.

Si la partícula se desplaza a una posición $q_0$ (ángulo que hace el hilo con la vertical) y luego se suelta, el péndulo comienza a oscilar. El péndulo describe una trayectoria circular, un arco de una circunferencia de radio l[2].




*Movimiento circular uniforme.*

El movimiento circular uniforme es un movimiento que describe una trayectoria circular en el que la velocidad angular es constante. Esto implica que describe ángulos iguales en tiempos iguales. El vector velocidad no cambia de módulo, pero sí de dirección. Esto quiere decir que no tiene aceleración tangencial ni aceleración angular, aunque sí aceleración normal[3].




[2] Franco, A. F. G. (s. f.). El péndulo simple. Física con ordenador Curso Interactivo de Física en Internet. Recuperado el 16 de enero de 2021.

[3] http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/dinamica/trabajo/pendulo/pendulo.htm#:~:text=Un%20p%C3%A9ndulo%20simple%20se%20define,el%20p%C3%A9ndulo%20comienza%20a%20oscilar.

***El alumno:***

Contesta el siguiente cuestionario.

De acuerdo con los ejemplos proporcionados, qué entiendes por:

*Movimiento periódico.*

*Periodo.*

*Amplitud.*

***Actividad 2. (Extra clase).*** Visita el sitio del siguiente código QR. Ve el siguiente video respecto al movimiento periódico y realiza lo que se pide a continuación.

QR-1: Movimiento periódico.

***Define:***

- *Movimiento periódico.*

- Los dos movimientos en que se divide el movimiento periódico.

- Menciona los elementos del movimiento periódico.

- Periodo.

______________________________________________________________________
_____________________________________________________________________.

- Frecuencia.

______________________________________________________________________
_____________________________________________________________________.

- Amplitud.

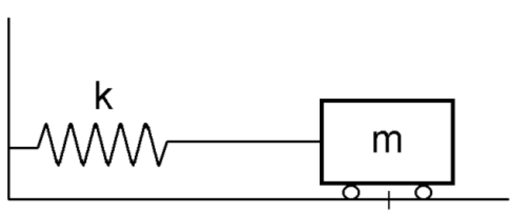
______________________________________________________________________
_____________________________________________________________________.

- Diferencia de fase.

______________________________________________________________________
_____________________________________________________________________.

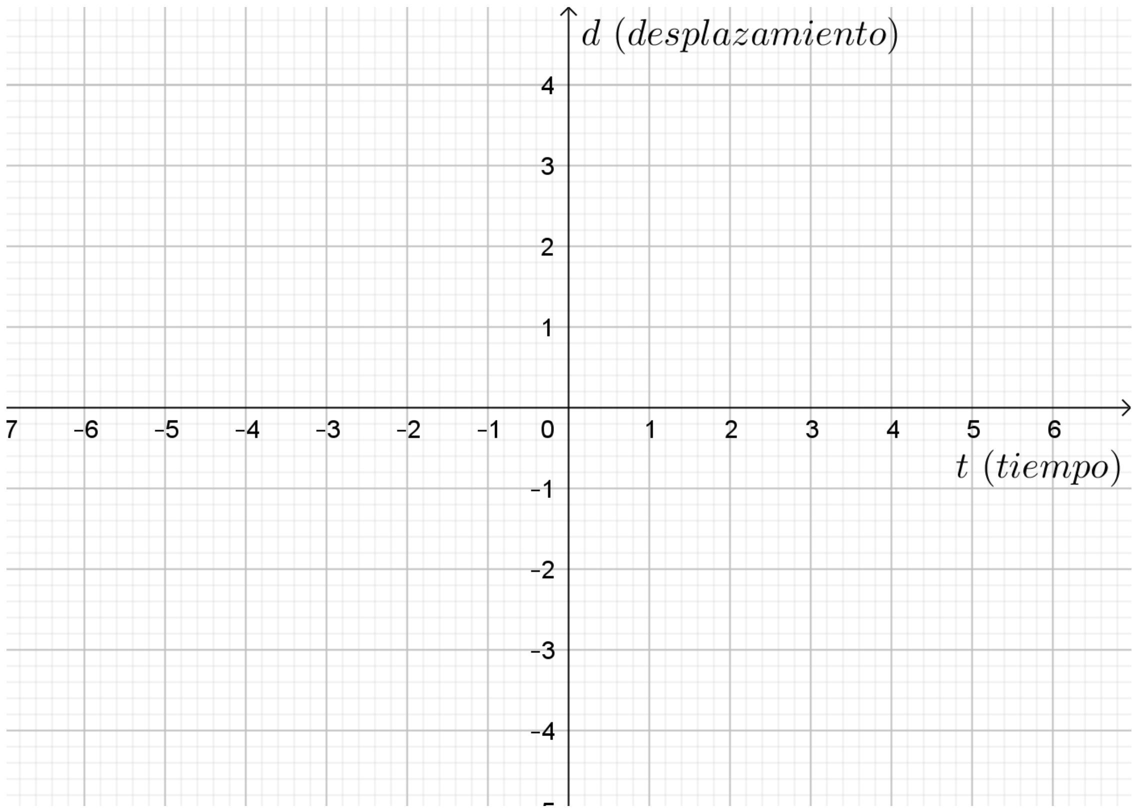
*Gráfica.*

La siguiente tabla de pares ordenados representa el movimiento del siguiente sistema masa resorte, donde "$t$" representa el tiempo en segundos y "$d$" la posición de la masa respecto a la posición de equilibrio.




| $t\ (seg.)$ | $d\ (cm.)$ |
|---|---|
| 0 | 2 |
| 1 | 1 |
| 2 | -1 |
| 3 | -2 |
| 4 | -1 |
| 5 | 1 |

Incluir puntos medios.




*Responde.*

¿Qué ocurre con el movimiento de la masa antes del tiempo 0?

______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________
_____________________________________________________________________________.

¿Cuál es el desplazamiento máximo de la masa?

______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________
_____________________________________________________________________________.

***Actividad 3. (Extra clase).*** Visita el sitio del siguiente código QR, lee el artículo y contesta las preguntas planteadas en la siguiente actividad, con ayuda del simulador de un sistema masa resorte, mostrado en la página de la consulta.

QR-2: Simulador de movimiento periódico

a) Si el desplazamiento inicial es de $2\,m$ y $k = 2\,N/m$.
¿Cuál es el valor del periodo?

Compare el movimiento considerando estos dos casos:
Si el desplazamiento inicial es de $20\,m$ y $k = 2\,N/m$ y si el desplazamiento inicial es de $10\,m$ y $k = 2\,N/m$.

b) ¿Cuál es la principal diferencia en el comportamiento de los cuerpos de los dos casos anteriores?

c) ¿Cómo es la amplitud del movimiento de un cuerpo respecto al otro?

d) ¿Cuál parámetro se tiene que modificar para que cambie la frecuencia? ¿por qué?

***Estrategia didáctica 2. Equivalencia de unidades angulares.***

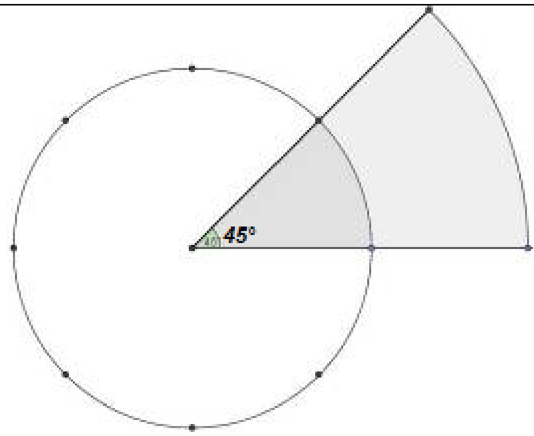
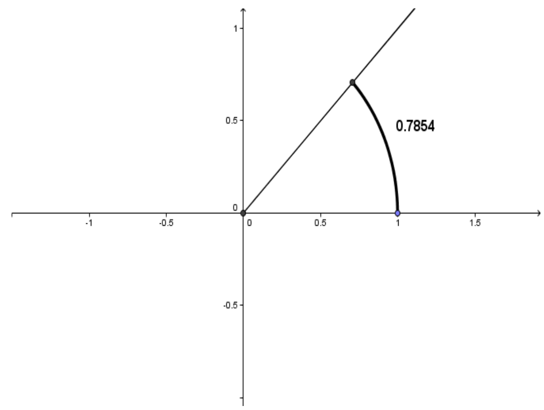
***Aprendizajes:*** El alumno convierte medidas angulares de grados a radianes y viceversa.

***Actividad 1. (Extra clase).*** Visita el código QR, para conocer qué es un radián, para participar en la plenaria que se realizará en clase.

QR-3: Radianes.

### ***Medida angular en radianes.***

Los babilonios medían los ángulos en grados, esto es, dividían la circunferencia en 360°, cada grado en minutos y cada minuto en segundos. Sin embargo, en la época moderna esta medición angular resultó ser poco eficiente por lo que los matemáticos modernos cambiaron la forma de medir ángulos llevando esta medida a la recta real.

|  |  |
|---|---|
| Babilonios: medición angular (grados). | Época moderna: medición angular (radianes). |





Para llevar a cabo tal transformación, los matemáticos cambiaron la idea babilonia de medir "aberturas" por la de medir longitudes, en particular, para cada "abertura" se le hace corresponder la longitud del segmento circular que genera en una circunferencia de radio 1. A esta longitud se le llama la medida del ángulo ("abertura") en radianes.

***Actividad 2.*** Conversión de medidas angulares.

*En clase*: Anota las conclusiones respecto a la plenaria en que se discuten las siguientes cuestiones:

| |
|---|
| ¿Qué es un radián?<br>______________________________________________<br>______________________________________________ |
| ¿Cuántos radianes caben en una circunferencia?<br>______________________________________________ |
| ¿Cuántos grados tiene la amplitud del ángulo interior de un círculo?<br>______________________________________________ |

¿Cuántos radianes hay en media circunferencia y a cuántos grados equivalen?

______________________________________________

______________________________________________

Con las conclusiones de las preguntas anteriores, contesta las siguientes preguntas.

¿Cuál es el factor de conversión y/o equivalencia entre grados y radianes?

______________________________________________

Realiza las siguientes equivalencias

a) $240° \ a \ rad$:

b) $7.52 \, rad \quad a \ °$:

c) $\frac{\pi}{2} \, rad \quad a \ °$:

d) $17°52'15'' \quad a \ rad$

***Estrategia didáctica 3. Razones trigonométricas para cualquier ángulo. (Desarrollo).***

***Aprendizajes:*** El alumno comprende la forma en que se extienden o generalizan las razones trigonométricas para ángulos arbitrarios.

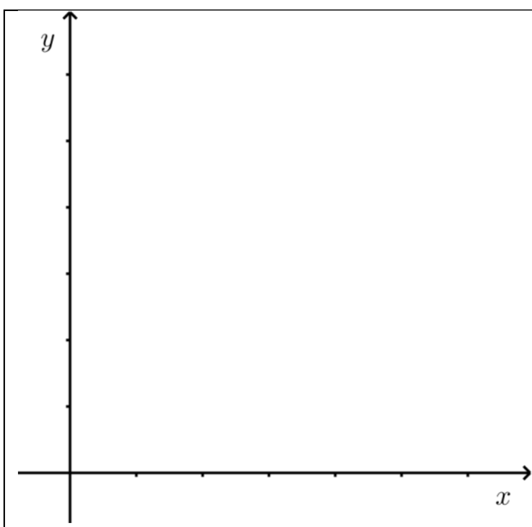
QR-4: Razones trigonométricas.

***Actividad 1. (Extra clase):*** Visita cualquiera de los dos códigos QR, para recordar las principales razones trigonométricas de un triángulo rectángulo. Una vez que hayas visto el video, escribe la información relativa al tema y cópiala en tu cuaderno, ya que ésta la vas a utilizar en las siguientes actividades.

QR-5: Razones trigonométricas.

***Actividad 2. Razones trigonométricas en el plano cartesiano.***

1. Con base en la actividad anterior, desarrolla y contesta las preguntas, en el siguiente sistema de coordenada, marca un punto cualquiera $P(x, y)$, en el primer cuadrante y anota sus coordenadas. Traza un segmento de recta desde el origen $O$, hasta el punto $P$ (lado terminal), con lo cual se formará el ángulo $\theta$ (medido en radianes). A partir del punto $P$, traza un segmento de recta perpendicular al eje de las abscisas (punto $Q$).




¿Qué tipo de triángulo se forma?

______________________________

¿Cuánto miden los catetos?

______________________________

Calcula la medida de la hipotenusa $r$.

Determina el valor de las razones seno, coseno y tangente del ángulo $\theta$,

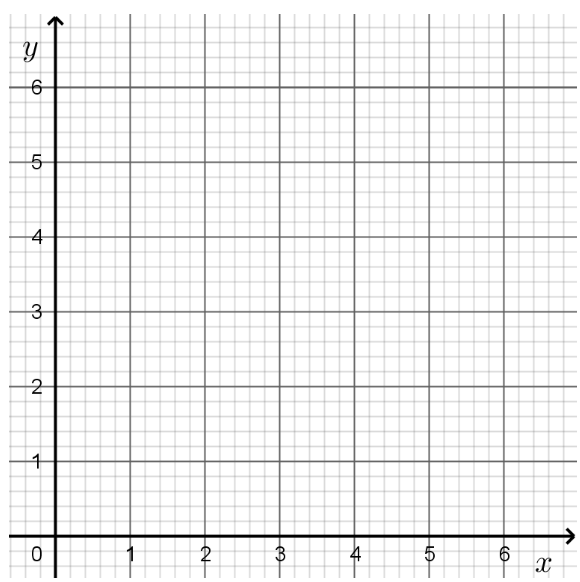
Ejercicio.

Determina las razones trigonométricas sen, cos, tan, para el ángulo $\theta$, cuyo lado terminal pasa por el punto $P(3, 5)$.

$$sen\,\theta = —$$

$$cos\,\theta = —$$

$$tan\,\theta = —$$

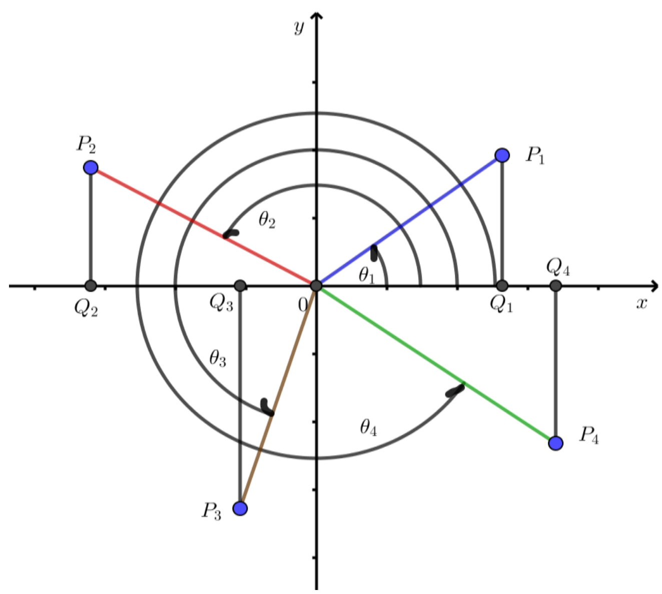


| | |
|---|---|
| en términos de las longitudes de la abscisa, la ordenada y la hipotenusa.<br><br>$sen\ \theta = —$<br><br>$cos\ \theta = —$<br><br>$tan\ \theta = —$ | |

En la actividad anterior, en el sistema de coordenadas, desde un punto $P$ de un lado terminal con origen en $O$, se proyectó un segmento perpendicular$\overline{PQ}$, al eje de las abscisas, con lo que se formó un triángulo rectángulo.

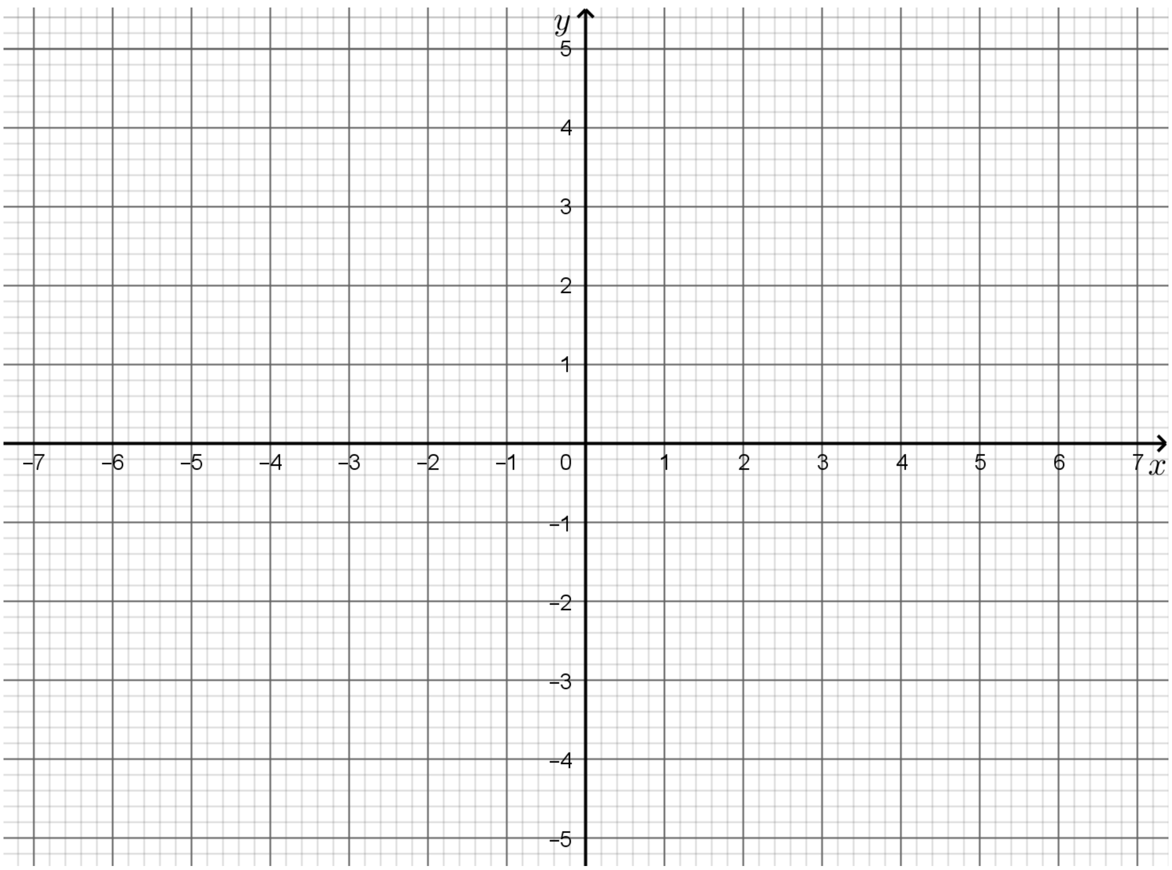
La amplitud de un ángulo puede definirse en términos de una circunferencia centrada en el eje de coordenadas del plano cartesiano. El vértice del ángulo que se desea medir se ubica en el centro de la circunferencia de manera que su lado inicial coincida con la parte positiva del eje de las abscisas; los ángulos se consideran positivos si se miden en sentido inverso al movimiento de las manecillas de un reloj, y negativos en el mismo sentido de dicho movimiento

Una forma de obtener las razones trigonométricas de ángulos mayores a 90°, en términos de ángulos agudos ubicados en cualquier cuadrante del sistema de coordenadas cartesiano, es construir los triángulos rectángulos que se forman cuando el lado terminal de un ángulo tiene su lado terminal en el cuadrante II, III o IV. Véase la siguiente figura.




2. En el siguiente plano cartesiano, dibuja el triángulo que se forma con la proyección al eje de las abscisas y determina las razones trigonométricas $sen, cos, tan,$ para el ángulo $\theta$, cuyo extremo del lado terminal está en el punto dado.

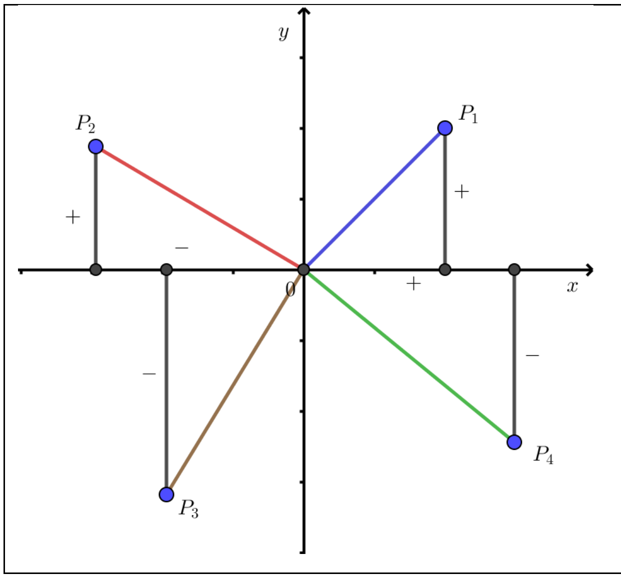
| a. $A(-4,3)$. | b. $B(-2,-5)$. | c. $C(5,-3)$. |
|---|---|---|
| $sen\,\theta = —$<br>$cos\,\theta = —$<br>$tan\,\theta = —$ | $sen\,\theta = —$<br>$cos\,\theta = —$<br>$\tan\theta = —$ | $sen\,\theta = —$<br>$cos\,\theta = —$<br>$tan\,\theta = —$ |




***Actividad 3. Signos de las razones trigonométricas de cualquier ángulo.***

1. Considerando que la distancia de cualquier punto $P(x,y)$ al origen $O$, será la hipotenusa de cualquier triángulo rectángulo que se genera con la proyección vertical del punto al eje $x$, en cualquier cuadrante del sistema de coordenadas cartesiano, entonces su signo siempre será positivo.

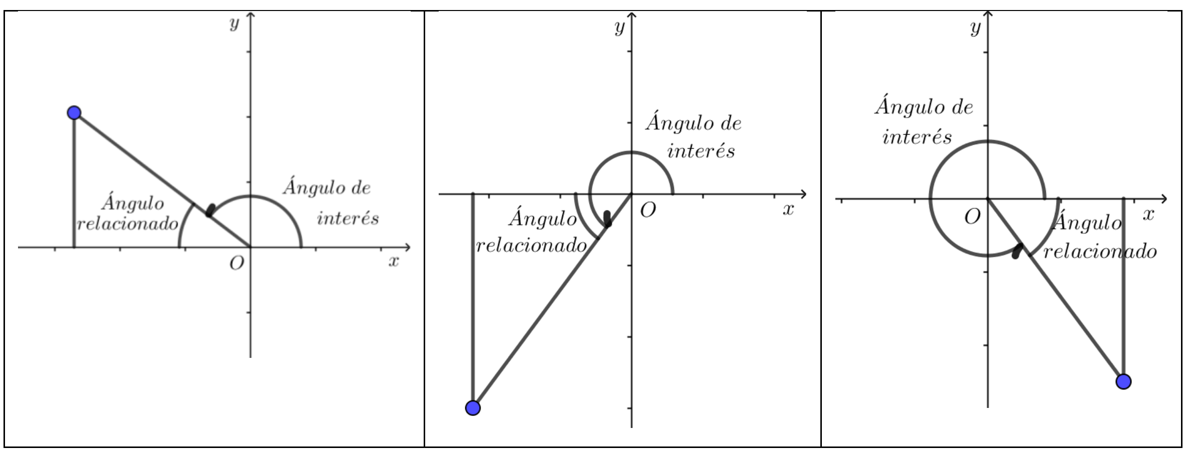
Con ayuda de la figura que se muestra, completa la tabla con los signos de las razones trigonométricas para los distintos cuadrantes.




| | $I$ | $II$ | $III$ | $IV$ |
|---|---|---|---|---|
| $sen$ | $+$ | | | |
| $cos$ | | $-$ | | |
| $tan$ | | | | $-$ |

2. Reducción al primer cuadrante.

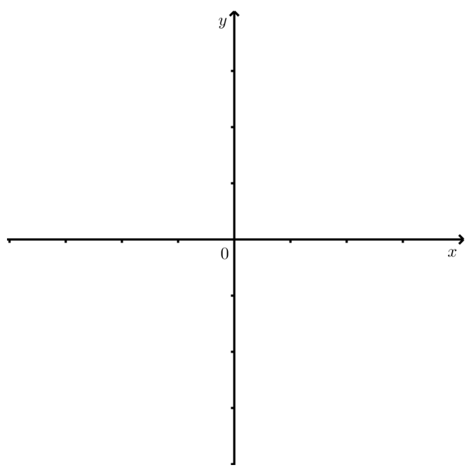
Cuando se quiere conocer los valores de razones trigonométricas de ángulos mayores a $\frac{\pi}{2}$ $o$ $90°$, que pertenecen al cuadrante $II, III$ $o$ $IV$, se hace una conversión a ángulos equivalentes del primer cuadrante, es decir se relaciona con un ángulo del primer cuadrante y se toma en cuenta el signo de la razón correspondiente para el cuadrante en el que esté ubicado el ángulo de interés.
Véase las figuras siguientes.



***Para el alumno:*** Se le propone al alumno los siguientes ejercicios, basándose en la actividad anterior, para lograr al aprendizaje.

Para cada ángulo, determine:

a. Ubicación en el plano cartesiano.
b. El ángulo relacionado.
c. La razón trigonométrica correspondiente al primer cuadrante con su signo correspondiente.




i. $\theta = \frac{3}{4}\pi$

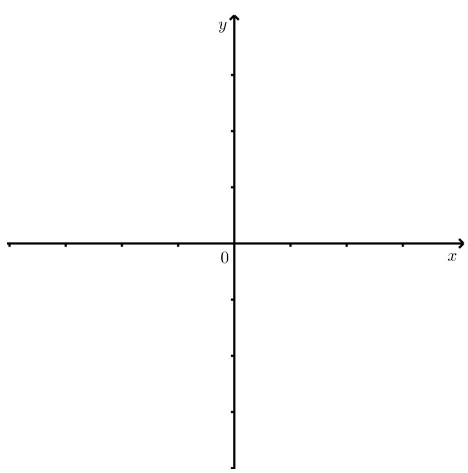
Cuadrante: ___ Angulo relacionado: ___

| Signo | $sen$: ____ | $cos$: ____ | $tan$: ____ |
|---|---|---|---|

$$sen\ \frac{3}{4}\pi =$$

$$cos\ \frac{3}{4}\pi =$$

$$tan\frac{3}{4}\pi =$$




ii. $\theta = \frac{4}{3}\pi$

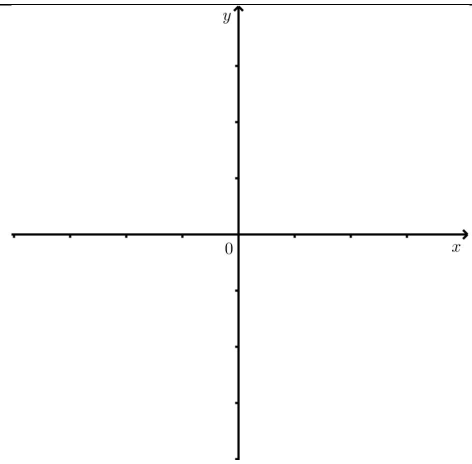
Cuadrante: ___ Angulo relacionado: ___

| Signo | $sen$: ____ | $cos$: ____ | $tan$: ____ |
|---|---|---|---|

$$sen\ \frac{4}{3}\pi =$$

$$cos\ \frac{4}{3}\pi =$$

$$tan\frac{4}{3}\pi =$$




iii. $\theta = \frac{11}{6}\pi$

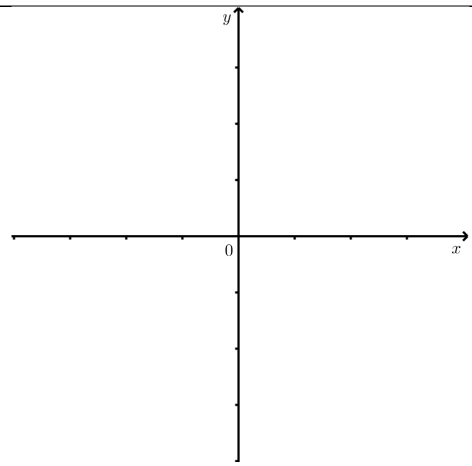
Cuadrante: ___ Angulo relacionado: ___

| Signo | $sen$: ____ | $cos$: ____ | $tan$: ____ |
|---|---|---|---|

$$sen\ \frac{11}{6}\pi =$$

$$cos\ \frac{11}{6}\pi =$$

$$tan\frac{11}{6}\pi =$$




iv. $\theta = \frac{13}{5}\pi$

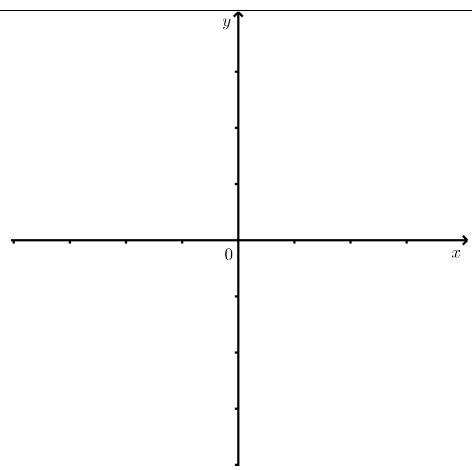
Cuadrante: ___ Angulo relacionado: ___

| Signo | $sen$: ____ | $cos$: ____ | $tan$: ____ |
|---|---|---|---|

$$sen\ \frac{13}{5}\pi =$$

$$cos\ \frac{13}{5}\pi =$$

$$tan\frac{13}{5}\pi =$$




v. $\theta = -\frac{7}{9}\pi$

Cuadrante: ___ Angulo relacionado: ___

| Signo | $sen$: ____ | $cos$: ____ | $tan$: ____ |
|---|---|---|---|

$$sen\ -\frac{7}{9}\pi =$$

$$cos\ -\frac{7}{9}\pi =$$

$$tan-\frac{7}{9}\pi =$$

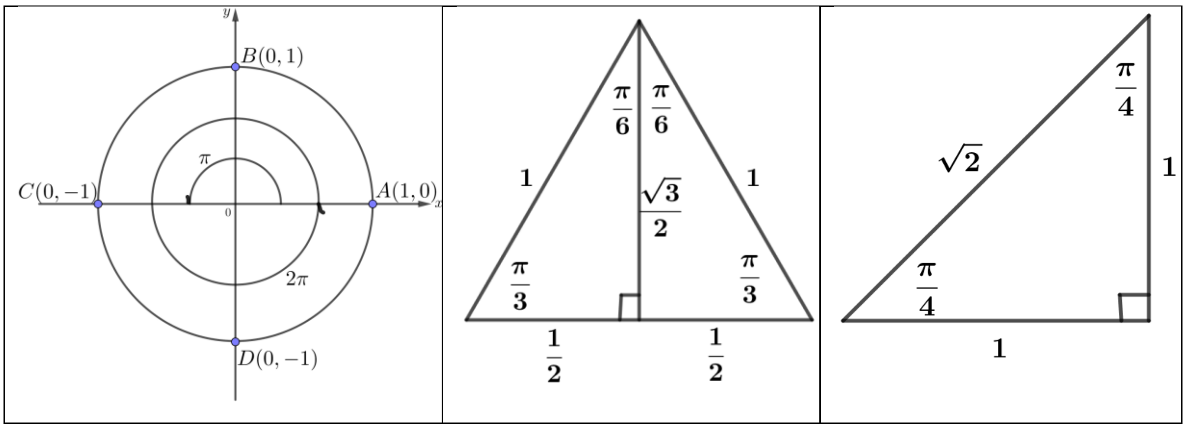
***Actividad 4: Extraclase.***

Visita el sitio del siguiente código QR, que hace referencia al círculo unitario y generación de ángulos en radianes, lo cual te ayudará a comprender fácilmente la siguiente actividad.

QR-6: Círculo unitario.

***Actividad 5. Razones trigonométricas de ángulos comunes de 0 a $2\pi\ rad$.***

Empleando el círculo unitario y los triángulos rectángulos que tienen ángulos de 30° y 45°, mostrados en las figuras, elabora una tabla para obtener el seno, coseno y tangente de los ángulos que se indican.




| $\acute{A}ngulo\ \theta$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $sen\theta$ | | | | | | | | |
| $cos\theta$ | | | | | | | | |
| $tan\theta$ | | | | | | | | |

En las actividades anteriores observamos que: el ángulo $\theta$ es variable, tiene amplitud variable $\theta$ y que es posible asignarle valores, entonces:

$$f(\theta) = sen\theta \ \text{ y } \ g(\theta) = cos\theta$$

son relaciones entre dos variables, por tanto, tienen asociados un dominio y un rango y también satisfacen la definición de función, es decir, $f(\theta) = sen\ \theta$ y $g(\theta) = cos\ \theta$, son funciones.

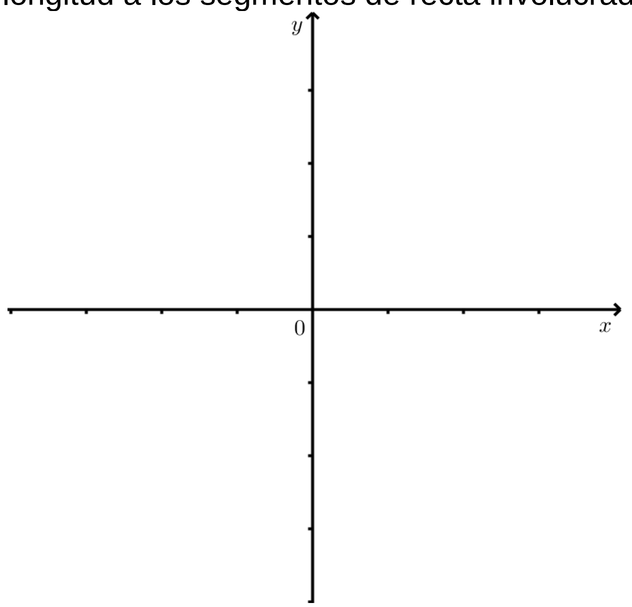
***Estrategia didáctica 4. Funciones trigonométricas.***

**Aprendizajes*:*** Extenderá el concepto de razón trigonométrica a función, mediante la elaboración de una tabla o gráfica de: $f(x) = sen\, x$ , $g(x) = \ cos\, x$.

***Actividad 1. Definición de la función seno y función coseno.***

En el siguiente plano, dibuja un círculo unitario con los elementos que se indican y contesta las preguntas que se plantean.

a. El origen del plano cartesiano $O$ es el centro de una circunferencia de radio de longitud 1.
b. En el cuadrante I, marca el punto $P$, que pertenece a la circunferencia y el punto $Q$, que es la intersección de la proyección (perpendicular) del punto $P$ en el eje $x$.
c. Estos tres puntos definen el triángulo $OPQ$.
d. El ángulo $t$, estará formado por los segmentos $OP$ y $OQ$.
e. Así, $PQ = sen\, t$ y $OQ = \cos t$ (dependiendo del cuadrante, es posible asignarle signo negativo a la longitud a los segmentos de recta involucrados).




Si $PQ$ y $OQ$ dependen (son función) de la amplitud del ángulo t, es decir, $PQ(t) =$ ________________ y $OQ(t) =$ __________________

¿Cómo quedan representadas las expresiones anteriores, en términos de notación funcional?

$f(t) =$ ___________ y $g(t) =$ _____________

En las funciones anteriores, ¿Qué elemento de la figura es la variable independiente? ____________________________________________________________.

¿Qué elemento de la figura es la variable dependiente en la función $f$? ___________.

¿Qué elemento de la figura es la variable dependiente en la función $g$? ___________.

Si el segmento $OP$ puede rotar tantas veces como se desee, en ambos sentidos, ¿cuál será el dominio y rango de cada función).

Función: ____________________ Función: ____________________

Dominio: ____________________ Dominio: ____________________

Rango: _______________________ Rango: _______________________

Con las observaciones hechas anteriormente completa una definición para la función seno y función coseno.
Sea $t$ un número real y $P(x\ ,y)$ el punto terminal del radio correspondiente al ángulo $\angle t$ en la circunferencia unitaria, entonces:

**a.** La función seno es____________________________________________________.

**b.** La función coseno es__________________________________________________.

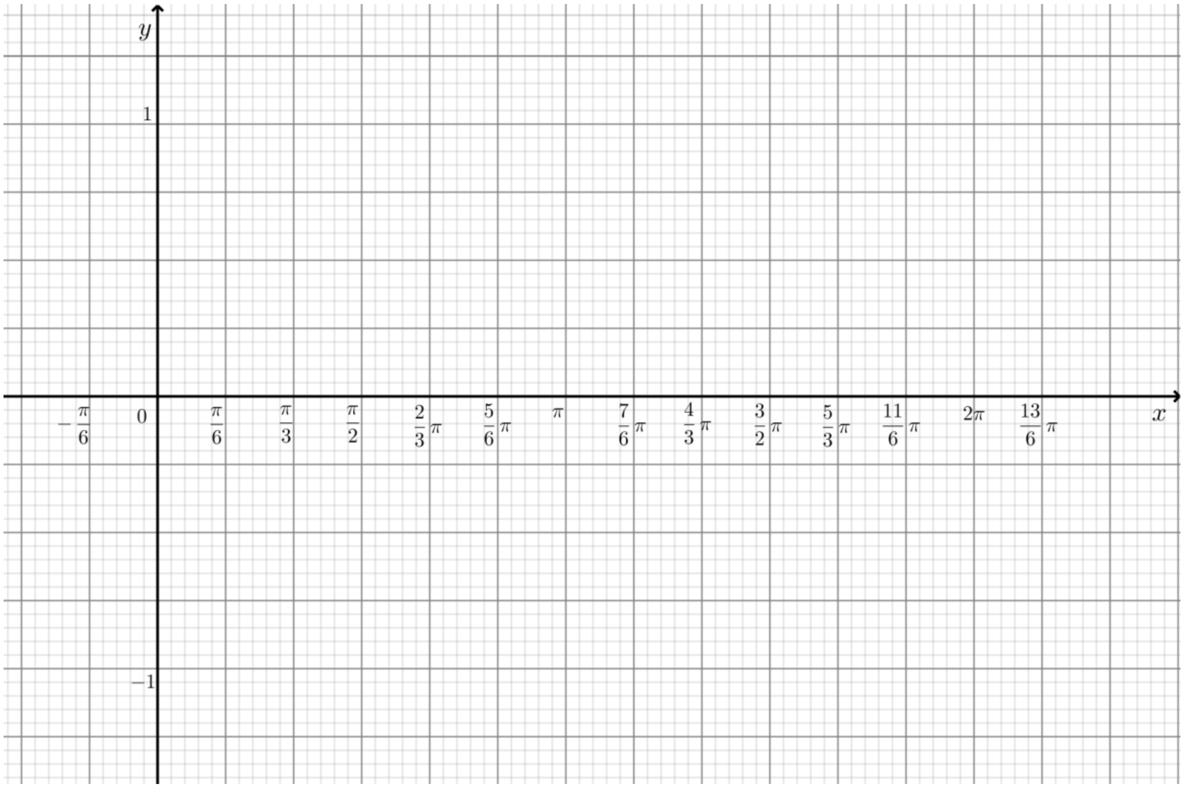
Para representar gráficamente las funciones trigonométricas $f(x) = sen\ x$ y $g(x) = \cos x$, tomamos la variable independiente $x$, es decir los distintos valores del ángulo, como abscisas y los valores de las funciones $f(x)$ y $g(x)$, como ordenadas.

***Actividad 2. Gráficas de la función seno y función coseno.***

Completa las siguientes tablas y dibuja la gráfica de cada función. Toma como base el círculo unitario construido en la actividad anterior y la tabla de la ***Actividad 5. Razones trigonométricas de ángulos comunes de 0 a $2\pi\ rad$***.

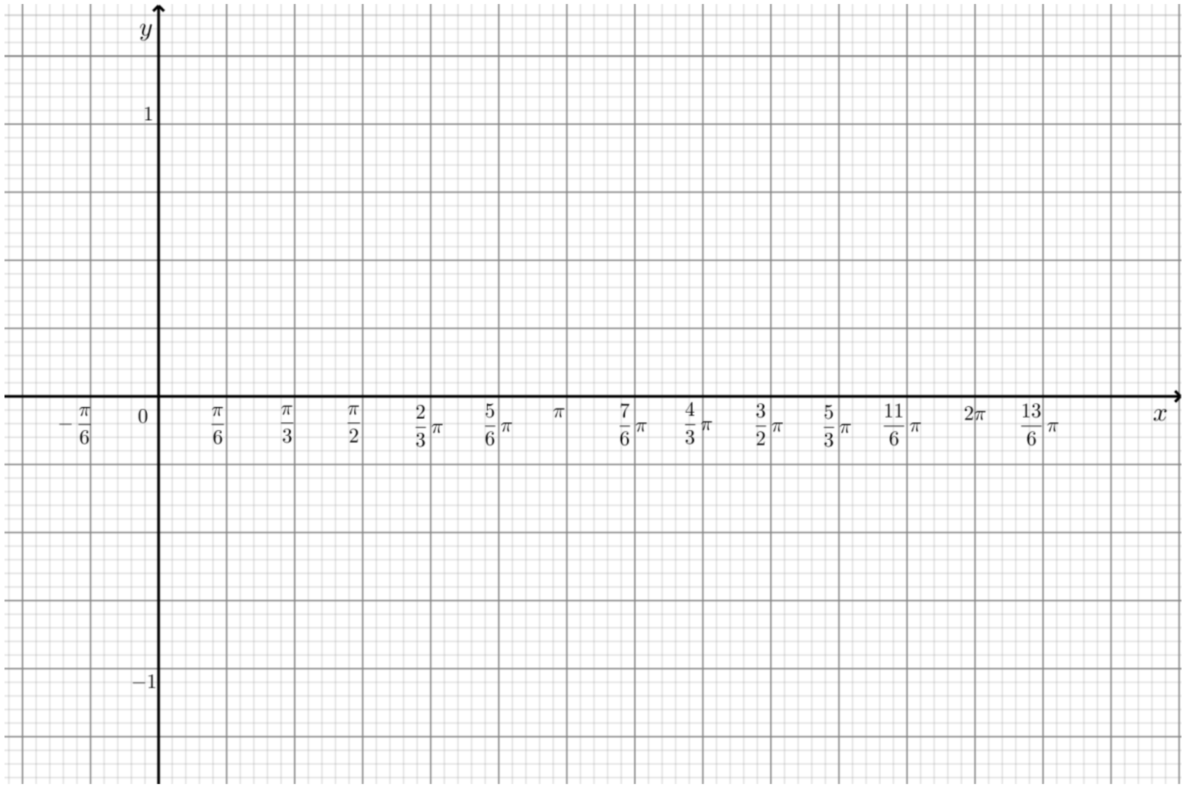
Función: $f(x) = sen\ x$.

| $x$ $gra$ | 0 | 30 | 60 | 90 | 120 | 150 | 180 | 210 | 240 | 270 | 300 | 330 | 360 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ $rad$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2}{3}\pi$ | $\frac{5}{6}\pi$ | $\pi$ | $\frac{7}{6}\pi$ | $\frac{4}{3}\pi$ | $\frac{3}{2}\pi$ | $\frac{5}{3}\pi$ | $\frac{11}{6}\pi$ | $2\pi$ |
| $f(x)$ | | | | | | | | | | | | | |




Función: $g(x) = cos\ x$.

| $x$ $gra$ | 0 | 30 | 60 | 90 | 120 | 150 | 180 | 210 | 240 | 270 | 300 | 330 | 360 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ $rad$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2}{3}\pi$ | $\frac{5}{6}\pi$ | $\pi$ | $\frac{7}{6}\pi$ | $\frac{4}{3}\pi$ | $\frac{3}{2}\pi$ | $\frac{5}{3}\pi$ | $\frac{11}{6}\pi$ | $2\pi$ |
| $g(x)$ | | | | | | | | | | | | | |




Con los comportamientos que se observan en las gráficas realizada, completa las siguientes tablas.

| Función | Valor máximo | Valor mínimo | Ceros de la función |
|---|---|---|---|
| $f(x) = sen\ x$ | $y =$ ___, para $x =$ ___ | $y =$ ___, para $x =$ ___ | |
| $g(x) = cos\ x$ | $y =$ ___, para $x =$ ___ | $y =$ ___, para $x =$ ___ | |

| Valores del ángulo<br>$x$ | Variación de la función (crece o decrece)<br>$sen\ x$ | Variación de la función (crece o decrece)<br>$\cos x$ |
|---|---|---|
| De 0 a $\frac{\pi}{2}$ | ________________de____a____ | ________________de____a____ |
| De $\frac{\pi}{2}$ a $\pi$ | ________________de____a____ | ________________de____a____ |
| De $\pi$ a $\frac{3}{2}\pi$ | ________________de____a____ | ________________de____a____ |
| De $\frac{3}{2}\pi$ a $2\pi$ | ________________de____a____ | ________________de____a____ |

Al analizar el círculo unitario y las gráficas, tras una vuelta completa del punto $P$, observamos que el punto vuelve a tener la misma abscisa y ordenada que al comienzo, por lo que para valores de $x$ mayores $2\pi$ o menores de 0, los valores de las funciones se repiten, es decir

$$f(x \pm n2\pi) = f(x)$$

Donde $n$ es un número entero positivo.

Por lo anterior, podemos decir que las funciones $f(x) = sen\, x$ y $g(x) = cos\, x$, son funciones periódicas, puesto que sus reglas de correspondencia cumplen que $f(x) = f(x \pm T)$ para cualquier número $x$ de su dominio y para cualquier número real positivo $T$, el cual se conoce como periodo.

La amplitud de una función periódica es la semidiferencia del valor máximo y el valor mínimo de la función.

La condición de periodicidad de una función periódica se observa en el dibujo de la gráfica de una función en un plano cartesiano por medio de una curva que se repite en cada intervalo de longitud $T$.

Las observaciones anteriores sugieren que las funciones

$f(x) = sen\, x$ y $g(x) = cos\, x$ son periódicas y tienen un periodo $T = 2\pi$,

por tanto,

$f(x) = sen\, x = sen(x \pm n2\pi)$ y $g(x) = cos\, x = \cos\,(x \pm n2\pi)$.

El dominio de las funciones $f(x) = sen\, x$ y $g(x) = cos\, x$ es el intervalo $(-\infty, \infty)$ y el rango es el intervalo $[-1, 1]$.

***Estrategia didáctica 5. Gráfica de Funciones trigonométricas.***

***Aprendizajes:*** Analizará e identifica los parámetros que aparecen en las funciones:

$$f(x) = D + Asen\,(Bx + C)\ ^{4}$$
$$g(x) = D + Acos\,(Bx + C)\ ^{5}$$

$D$ desplazamiento vertical, $A$ amplitud, $B$ frecuencia, y desfasamiento $C$.

[4] También la puedes encontrar en textos como: $f(x) = A\, sen(Bx + C) + D$
[5] También la puedes encontrar en textos como: $f(x) = A\cos(Bx + C) + D$

***Actividad 1: Extra clase.***

Visita el sitio del siguiente código QR, que hace referencia a las funciones periódicas, lo que te ayudará a comprender fácilmente la siguiente actividad.

QR-7: Funciones periódicas.

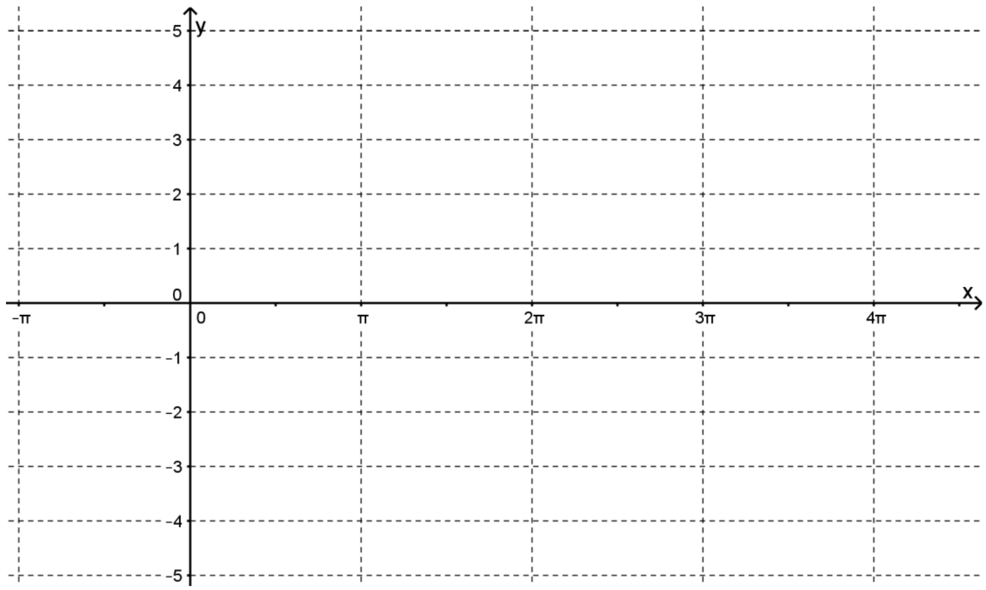
En las siguientes actividades realizaremos gráficas de las funciones seno y coseno para analizar el efecto en el dibujo de la gráfica al agregarles los parámetros $A, B, C$ y $D$ (también se pueden utilizar letras minúsculas), observando el cambio, con uno, con dos, con tres y con todos los parámetros, es decir, analizaremos las diferencias de los dibujos de las gráficas de las funciones $f(x) = D + Asen\,(Bx + C)$ y $g(x) = D + Acos\,(Bx + C)$, llamadas funciones senoidales y cosenoidales, respectivamente, con los dibujos de las gráficas de $f(x) = sen\,x$ y $g(x) = cos\,x$, respectivamente.

***Actividad 2. Parámetro $A$.***

***Forma:*** $f(x) = A\,sen\,x$

Emplee GeoGebra para dibujar los bosquejos las gráficas correspondientes a las funciones que se proporcionan y trácelas con colores distintos en el sistema de coordenadas anexo. La gráfica de $f(x) = sen\,x$ tómela como referencia para el trazo de las otras funciones.

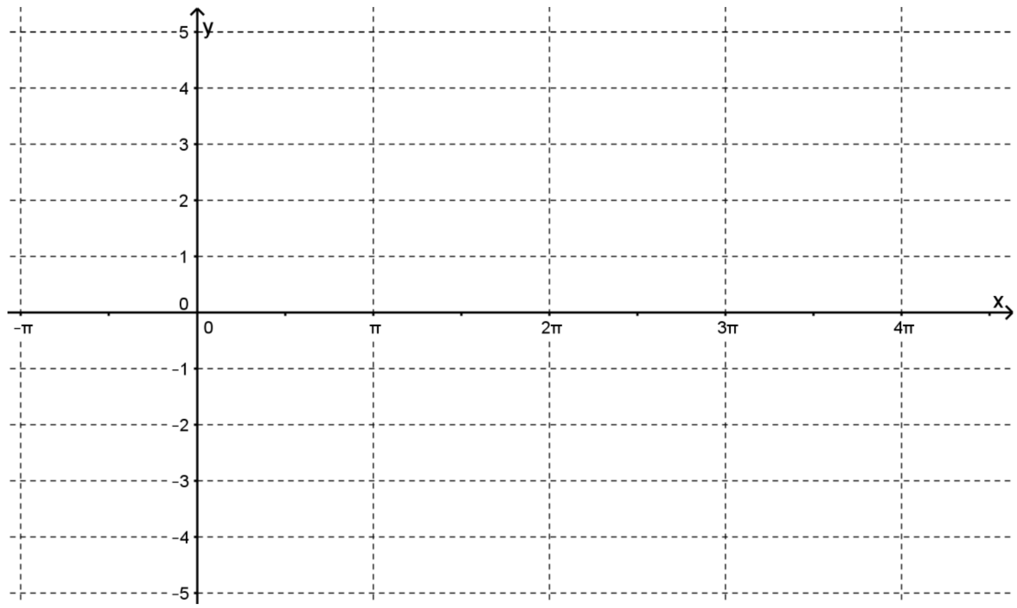
| $A$ | ***Función (representación algebraica)*** | ***Rango de la función*** |
|---|---|---|
| | $f(x) = sen\,x$ ***(función de referencia usa color rojo)*** | |
| | $f(x) = 2\,sen\,x$ | |
| | $f(x) = -3\,sen\,x$ | |
| | $f(x) = \frac{1}{2}\,sen\,x$ | |




***Forma:*** $\boldsymbol{f(x) = A \cos x.}$

Emplee GeoGebra para dibujar los bosquejos de las gráficas correspondientes a las funciones que se proporcionan y trácelas con colores distintos en el sistema de coordenadas anexo. La gráfica de $f(x) = \cos x$ tómela como referencia para el trazo de las otras funciones.

| $A$ | ***Función (representación algebraica)*** | ***Rango de la función*** |
|---|---|---|
| | $f(x) = \cos x$ ***(función de referencia usa color rojo)*** | |
| | $f(x) = -2 \cos x$ | |
| | $f(x) = 3 \cos x$ | |
| | $f(x) = -\frac{5}{2} \cos x$ | |




| |
|---|
| 1. Ahora, describe el efecto que observaste en la gráfica de referencia al variar el *parámetro* $A$. |
| |
| 2. Al parámetro $A$ lo puedes determinar directamente de la gráfica ¿Cuál sería una expresión algebraica para calcularla? |
| |
| 3. ¿Qué puedes decir acerca de la gráfica de la función cuando el parámetro "$A$" es negativo? Observa las gráficas que obtuviste para los valores de $A$ negativos. |
| |
| 4. ¿Qué puedes decir sobre el *dominio y rango* de las funciones? ¿cambian o se mantienen constantes? |
| |
| 5. ¿Qué observas sobre la frecuencia de la función, cambio o se mantiene constante? Explica tu respuesta. |
| |

| |
|---|
| 6. ¿Qué puedes decir acerca de los valores máximos y mínimos de la función de la gráfica? Explica tu respuesta. |
| |
| 7. ¿Cuáles son los ceros de la función (intersecciones con el eje "$x$" en la gráfica) de la forma:<br>$f(x) = A\ sen\ x$? ________________________________________<br>$f(x) = A\ cos\ x$? ________________________________________ |
| 8. ¿Qué tomarías en cuenta para dibujar la gráfica de $q(x) = \frac{3}{2} cos\ x$? |

Al **parámetro $\boldsymbol{A}$** se le conoce como **amplitud** y es el valor más grande que alcanzan estas funciones, su valor se determina por: $Amplitud = |A|$.

En el caso de las funciones $f(x) = sen\ x$ y $g(x) = cos\ x$, se puede obtener fácilmente su amplitud, ya que el valor máximo es 1 y el valor mínimo es –1 en ambas funciones, de forma que tenemos:

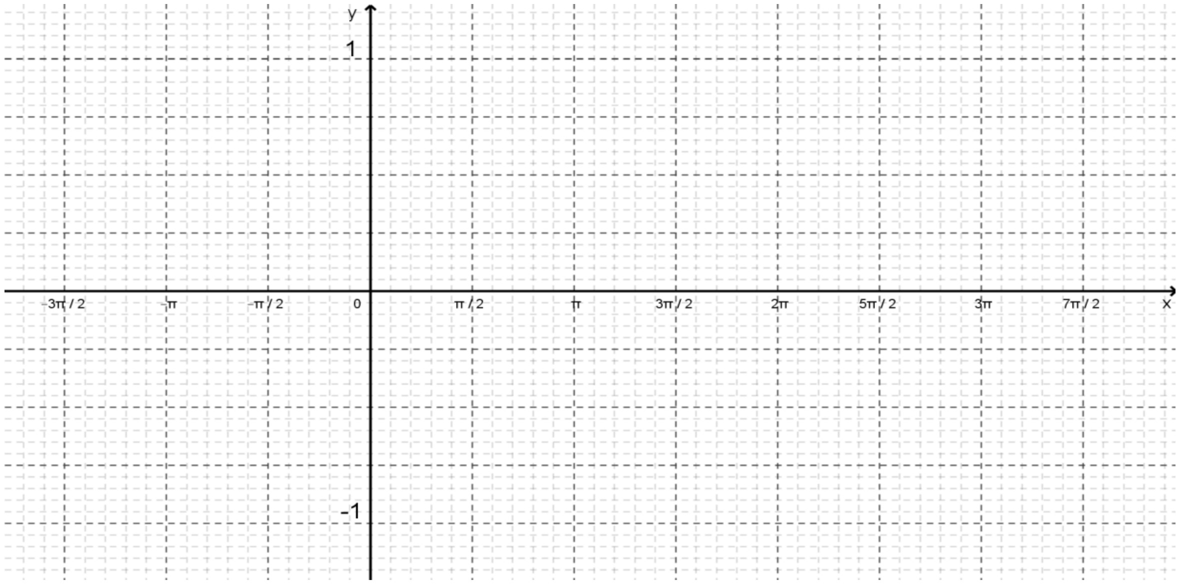
$A = \frac{1-(-1)}{2} = 1$, o bien $A = |1| = |-1|$.

***Actividad 3. Parámetro $\boldsymbol{B}$.***

***Forma:*** $f(x) = sen\ (Bx)$.

Emplee GeoGebra para dibujar los bosquejos las gráficas correspondientes a las funciones que se proporcionan y trácelas con colores distintos en el sistema de coordenadas anexo. La gráfica de $f(x) = sen\ x$, tómela como referencia para el trazo de las otras funciones.

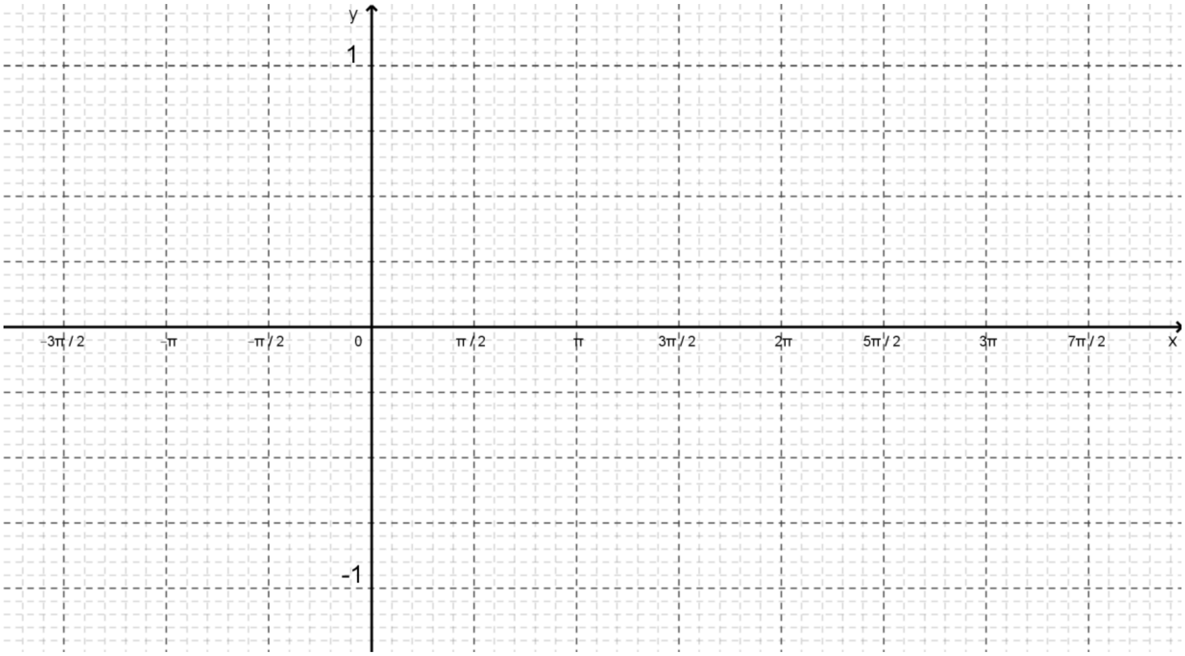
| $B$ | ***Función (representación algebraica)*** | $T = \frac{2\pi}{B}$ |
|---|---|---|
| | $f(x) = sen\ x$ ***(función de referencia usa color rojo)*** | |
| | $f(x) = sen\ (2x)$ | |
| | $f(x) = sen\ (3x)$ | |
| | $f(x) = sen\left(\frac{1}{2}x\right)$ | |




***Forma:*** $f(x) = cos\ (Bx)$

Emplee GeoGebra para dibujar los bosquejos de las gráficas correspondientes a las funciones que se proporcionan y trácelas con colores distintos en el sistema de coordenadas anexo. La gráfica de $f(x) = cos\ x$, dibújela con línea punteada y tómela de referencia para el trazo de las otras funciones.

| $B$ | ***Función (representación algebraica)*** | $T = \frac{2\pi}{B}$ |
|---|---|---|
| | $f(x) = cos\ x$ ***(función de referencia usa color rojo)*** | |
| | $f(x) = cos\ (2x)$ | |
| | $f(x) = cos\ (3x)$ | |
| | $f(x) = cos\left(\frac{1}{2}x\right)$ | |




| |
| --- |
| 1. ¿Qué observas en la gráfica al variar el parámetro $B$? ¿Qué efectos tiene sobre la función de referencia? ¿Hay cambio en el *periodo*? |
| |
| 2. ¿Observas algún cambio en la *amplitud*? Explica tu respuesta. |
| |
| 3. ¿Qué puedes decir acerca del *dominio y rango* de las funciones? ¿Cambian o mantienen constantes? |
| |
| 4. ¿Qué puedes decir de los valores máximos y mínimos, cambian o se mantienen constantes? |
| |
| 5. Haz una conjetura acerca del comportamiento de la gráfica de $f(x) = sen\ (Bx)$, *si* $B < 0$. |
| |

Al **parámetro $\boldsymbol{B}$** se le conoce como **frecuencia**.

Las funciones $f(x) = sen\ x$ y $g(x) = cos\ x$, tienen un periodo $T = 2\pi$, que ocurre en el intervalo $[0, 2\pi]$, en ambos casos, en las formas $f(x) = sen\ Bx$ y $g(x) = cos\ Bx$ , el parámetro $B$ es 1, lo que significa que en el intervalo $[0, 2\pi]$, ocurre un periodo.

De lo anterior tenemos que:

a. La **frecuencia** $B$ es el número de periodos contenidos en el intervalo $[0, 2\pi]$.

b. El **periodo** es el número $T = \frac{2\pi}{B}$, que nos proporciona la longitud de un periodo, en términos de $\pi$.

c. Un periodo ocurre en el intervalo $\left[0, \frac{2\pi}{B}\right]$.

Ahora aplica la siguiente fórmula para determinar el *periodo (frecuencia)* para cada función que obtuviste en el ejercicio anterior. En la tabla escribe las respuestas en la columna correspondiente. (ayúdate con la gráfica que obtuviste)

***Periodo (T):*** $x_{inicio} = 0$ a $x_{final} = \frac{2\pi}{B}$

***Tabla. Periodo y frecuencia.***

| ***Función*** | ***Valor B*** | $\boldsymbol{x_{inicio}}$ ***(rad)*** | $\boldsymbol{x_{final}}$ ***(rad)*** | ***No. ciclos (Ondas completas)*** | ***Periodo*** $(\boldsymbol{T})$ | ***Frecuencia*** $(\boldsymbol{1/T})$ |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $\boldsymbol{f(x)}$ | | | | | | |
| $\boldsymbol{g(x)}$ | | | | | | |
| $\boldsymbol{h(x)}$ | | | | | | |
| $\boldsymbol{p(x)}$ | | | | | | |

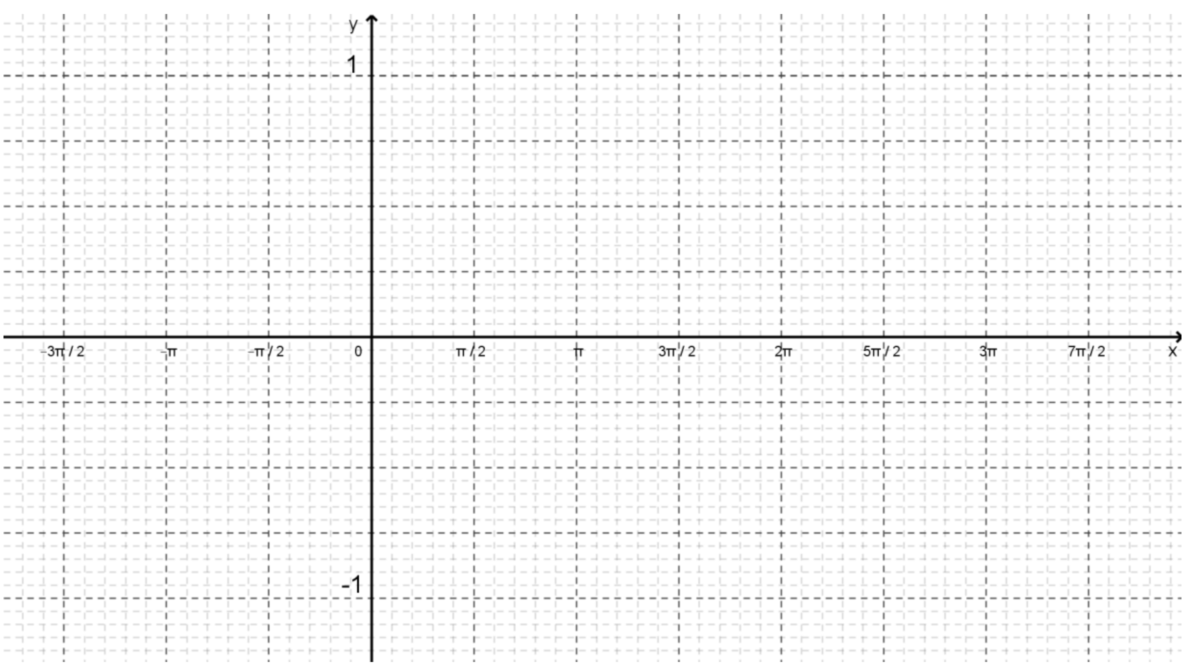
¿Qué tomarías en cuenta para dibujar la gráfica de $q(x) = cos\ (\frac{2}{3}x)$?

### *Actividad 4. Parámetro $C$.*

***Forma:*** $f(x) = sen\ (x - C)$.

Emplee GeoGebra para dibujar los bosquejos de las gráficas correspondientes a las funciones que se proporcionan y trácelas con colores distintos en el sistema de coordenadas anexo. La gráfica de $f(x) = sen\ x$ tómela como referencia para el trazo de las otras funciones.

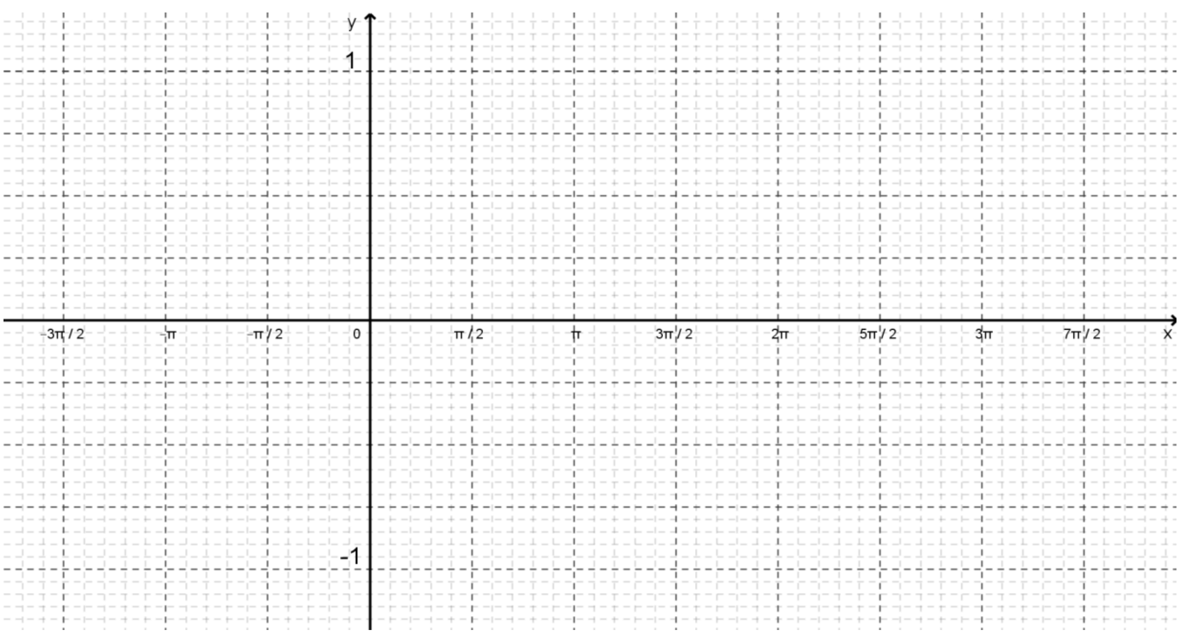
| ***$C$ (corrimiento de fase)*** | ***función (representación algebraica)*** |
|---|---|
| | $f(x) = sen\ x$ ***(función de referencia usa color rojo)*** |
| | $g(x) = sen\ (x + \pi)$ |
| | $h(x) = sen\ \left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$ |
| | $i(x) = sen\ \left(x - \frac{1}{2}\pi\right)$ |



***Forma:*** $f(x) = cos\ (x - C)$.

Emplee GeoGebra para dibujar los bosquejos de las gráficas correspondientes a las funciones que se proporcionan y trácelas con colores distintos en el sistema de coordenadas anexo. La gráfica de $f(x) = cos\ x$ tómela como referencia para el trazo de las otras funciones.

| ***$C$ (corrimiento de fase)*** | ***función (representación algebraica)*** |
|---|---|
| | $f(x) = cos\ x$ ***(función de referencia usa color rojo)*** |
| | $g(x) = cos\ (x - \pi)$ |
| | $h(x) = sen\ \left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$ |
| | $i(x) = sen\ \left(x - \frac{3}{2}\pi\right)$ |

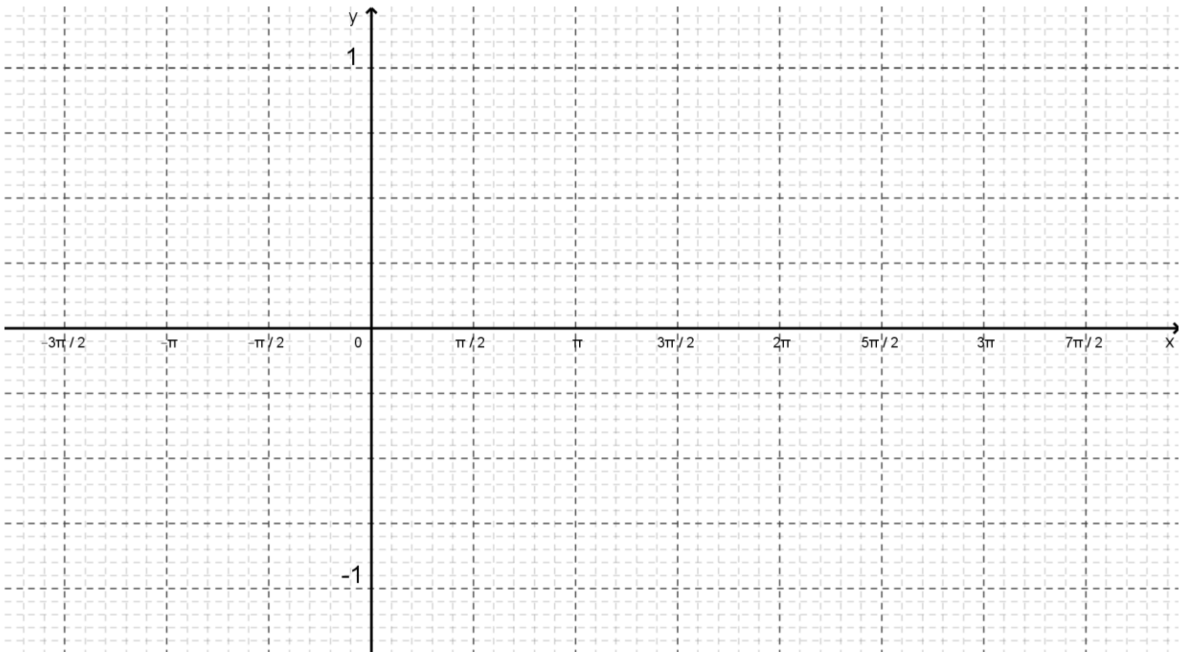



Observa las gráficas en el intervalo de (0, 2π) de su dominio. Anota en la tabla el valor de $x$ a partir de qué inicia el periodo de cada curva.

| Forma $f(x) = sen\ (x - C)$. | Forma $f(x) = cos\ (x - C)$. |
|---|---|
| $f(x)$ inicia en $x =$ _____ | $f(x)$ inicia en $x =$ _____ |
| $g(x)$ inicia en $x =$ _____ | $g(x)$ inicia en $x =$ _____ |
| $h(x)$ inicia en $x =$ _____ | $h(x)$ inicia en $x =$ _____ |
| $p(x)$ inicia en $x =$ _____ | $p(x)$ inicia en $x =$ _____ |

| |
|---|
| 1. Describe lo que ocurre al variar el parámetro $C$, con las gráficas de las funciones obtenidas. |
| |
| 2. ¿Qué sucede con la *amplitud* de la onda? ¿cambia su tamaño? Explica tu respuesta |
| |
| 3. ¿Cambia el *periodo* con la variación del parámetro $C$? Explica tu respuesta |
| |
| 4. ¿Qué puedes decir acerca de los ceros de las funciones? Determínalos. |
| |

Emplee GeoGebra para dibujar en el sistema de coordenadas anexo la gráfica correspondiente a la función $q(x) = sen\ (2x - \pi)$. La gráfica de $f(x) = sen\ x$, dibújela con línea punteada y tómela como referencia para el trazo de la función.




| |
|---|
| 6. ¿Qué cambia en la función respecto a las funciones que graficaste al inicio de la actividad? |
| |
| 7. ¿En qué valor de $x$ inicia el periodo de la gráfica de la función $q(x) = sen\ (2x - \pi)$? |
| |
| 8. ¿En qué valor de $x$ iniciará el periodo de la gráfica de la función $q(x) = cos\ (3x + \pi)$? |
| |

Puesto que $f(x) = sen\ x$ y $g(x) = \cos x$ completan un periodo en el intervalo $\left[0, \frac{2\pi}{B}\right]$, entonces $f(x) = sen\ (Bx - C)$ y $g(x) = \cos(Bx - C)$ lo completarán cuando $Bx - C = 0$ y $Bx - C = 2\pi$, despejando $x$, tenemos que lo completarán en el intervalo $\left[\frac{C}{B}, \frac{C}{B} + \frac{2\pi}{B}\right]$, donde en este tiene un desplazamiento de $\frac{C}{B}$ unidades del intervalo $\left[0, \frac{2\pi}{B}\right]$.

La inclusión del parámetro $C$ en las funciones $f(x) = sen\,x$ y $g(x) = \cos x$ se manifiesta como un desplazamiento horizontal de $\frac{C}{B}$ unidades de su gráfica, a este desplazamiento horizontal se le conoce como **desfasamiento** o **corrimiento de fase**.

La siguiente expresión te permite calcular algebraicamente *el corrimiento de fase.*

***Corrimiento de fase:***

$$\boldsymbol{x_{inicio}} = \frac{C}{B} \quad a \quad \boldsymbol{x_{final}} = \frac{C}{B} + \frac{2\pi}{|B|}$$

Úsala para determinar en la siguiente tabla el corrimiento de fase para cada función y escribe el resultado en la columna correspondiente. Compara estos resultados con el corrimiento de fase obtenido directamente en las gráficas que dibujaste en el inciso anterior. Escribe el resultado en las dos últimas columnas.

***Tabla. Determinación analítica y geométrica del corrimiento de fase.***

| $\boldsymbol{C}$ ***(corrimiento de fase)*** | $\boldsymbol{x_{inicio}}$ ***(rad) (fórmula)*** | $\boldsymbol{x_{inicio}}$ ***(gra)*** | $\boldsymbol{x_{final}}$ ***(rad) (fórmula)*** | $\boldsymbol{x_{final}}$ ***(gra)*** | $\boldsymbol{x_{inicio}}$ ***(rad) (gráfica)*** | $\boldsymbol{x_{final}}$ ***(rad) (gráfica)*** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{0}$ | 0 | 0 | $\boldsymbol{2\pi}$ | 360 | 0 | $\boldsymbol{2\pi}$ |
| $\boldsymbol{1\pi}$ | $\boldsymbol{1\pi}$ | 180 | $\boldsymbol{3\pi}$ | | | |
| $\boldsymbol{-\frac{1}{2}\pi}$ | $\boldsymbol{-\frac{1}{2}\pi}$ | -45 | | | | |
| $\boldsymbol{\frac{3}{2}\pi}$ | $\boldsymbol{\frac{3}{2}\pi}$ | | | | | |

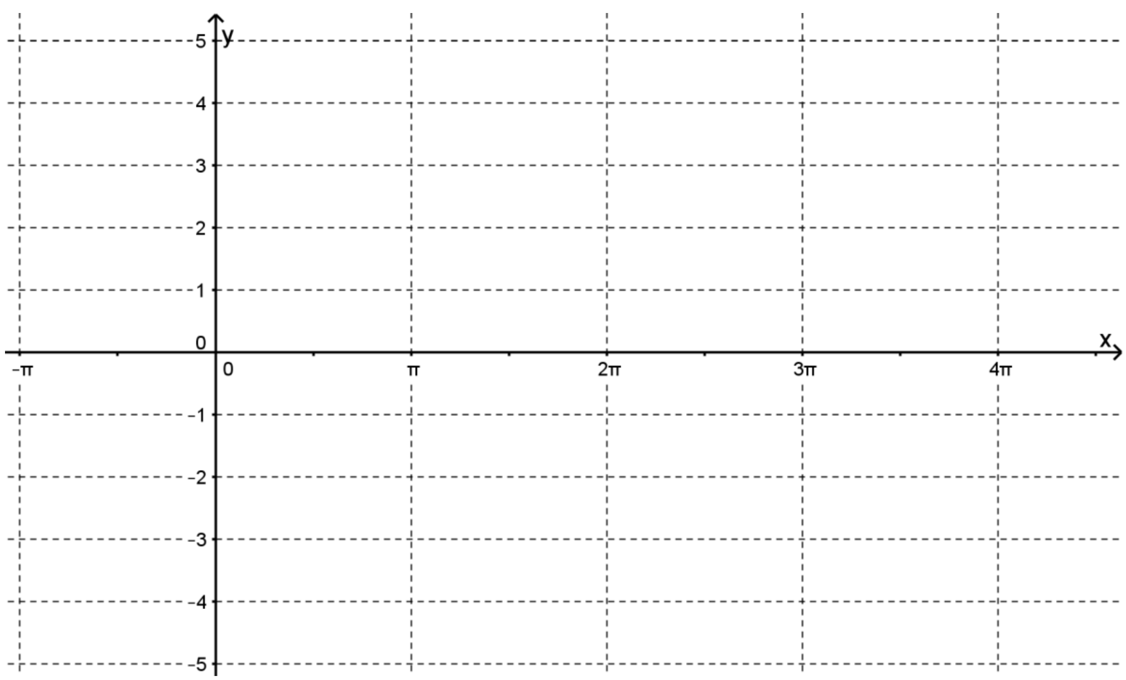
| 9. ¿Hay alguna diferencia entre el resultado algebraico con el obtenido gráficamente? |
|---|
| |
| 10. ¿Qué significado tiene el signo de la fase en la gráfica? |
| |

### *Actividad 5. Parámetro $D$.*

***Forma:*** $f(x) = D + sen\ x.$

Emplee GeoGebra para dibujar los bosquejos de las gráficas correspondientes a las funciones que se proporcionan y trácelas con colores distintos en el sistema de coordenadas anexo. La gráfica de $f(x) = sen\ x$ tómela como referencia para el trazo de las otras funciones.

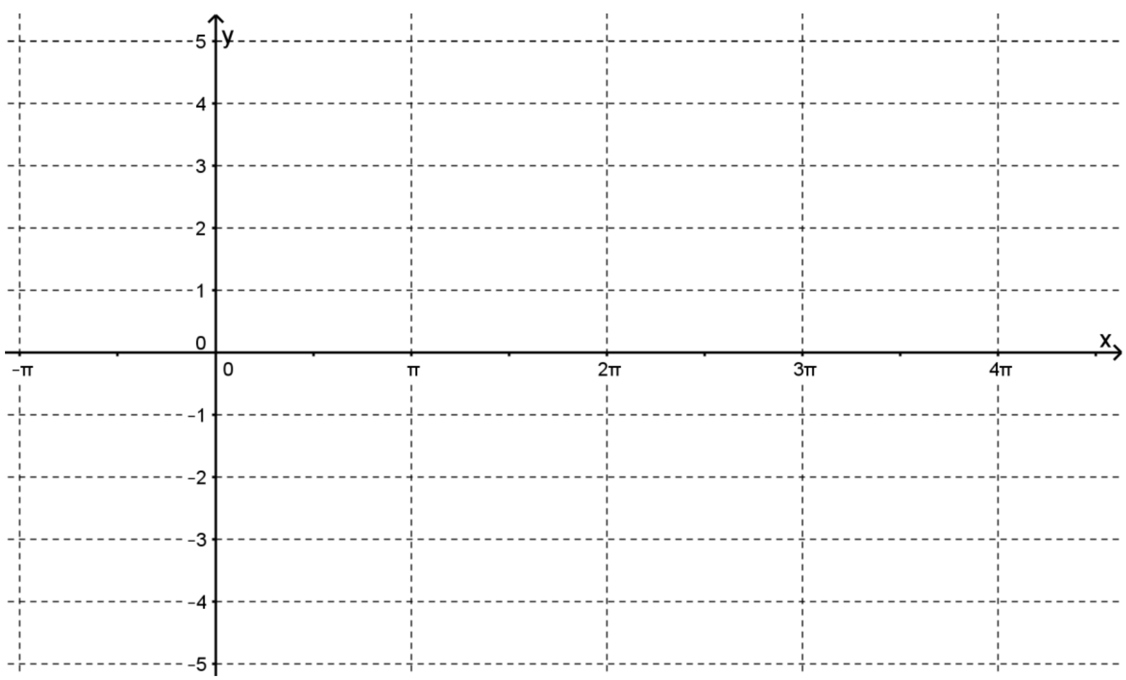
| ***Parámetro $D$*** | ***función (representación algebraica)*** |
|---|---|
| | $f(x) = sen\ x$ ***(función de referencia usa color rojo)*** |
| | $g(x) = 1 + sen\ x$ |
| | $h(x) = -2 + sen\ x$ |
| | $i(x) = \frac{1}{2} + sen\ x$ |



**Forma:** $f(x) = D + cos\ x.$

Emplee GeoGebra para dibujar los bosquejos de las gráficas correspondientes a las funciones que se proporcionan y trácelas con colores distintos en el sistema de coordenadas anexo. La gráfica de $f(x) = cos\ x$ tómela como referencia para el trazo de las otras funciones.

| ***Parámetro D*** | ***función (representación algebraica)*** |
|---|---|
| | $f(x) = cos\ x$ ***(función de referencia usa color rojo)*** |
| | $g(x) = -1 + cos\ x$ |
| | $h(x) = 2 + cos\ x$ |
| | $i(x) = -\frac{1}{2} + cos\ x$ |



| | |
|---|---|
| 1. | Describe lo que ocurre con la gráfica al variar el parámetro $D$. |
| | |
| 2. | Si $D > 0$, ¿hacia dónde es el desplazamiento de la gráfica? Explica tu respuesta |
| | |
| 3. | ¿Qué sucede en el desplazamiento de la gráfica cuando $D < 0$? Explica tu respuesta. |
| | |
| 4. | ¿Qué ocurre con el rango de las funciones comparadas con el rango de las funciones $f(x) = sen\ x$ y $f(x) = cos\ x$? |
| | |
| *5.* | ¿Qué tomarías en cuenta para dibujar la gráfica de $q(x) = -3 + sen\ x$? |
| | |

El parámetro $D$, en el dibujo de la gráfica de las funciones $f(x) = D + sen\ x$ y $f(x) = D + cos\ x$ se manifiesta como un desplazamiento vertical de los dibujos de las gráficas de las funciones $f(x) = sen\ x$ y $f(x) = cos\ x$.

El **parámetro $D$** se le conoce en las funciones mencionadas como **desplazamiento vertical.**

***Observación:*** cuando hay un desplazamiento horizontal hay un nuevo eje horizontal conocido como *línea media* se utiliza como línea de referencia o punto de equilibrio en torno al cual oscila la gráfica. Para las gráficas de $f(x) = \mathrm{D} + sen\ x$ y $f(x) = \mathrm{D} + cos\ x$, la línea media es la recta $y = D$.

***Para el alumno:*** Se le propone al alumno (en equipos) los siguientes ejercicios, basándose en las actividades anteriores de la estrategia, para lograr al aprendizaje.

| **Recapitulación las funciones $f(x) = D + A\,sen(Bx - C)$ y $f(x) = D + A\,cos(Bx - C)$.** | | |
|---|---|---|
| 1. Determina el significado geométrico de cada parámetro, escríbelo en el espacio correspondiente | | |
| ***Significado del parámetro*** | ***Función generalizada*** | ***Significado del parámetro*** |
| $A > 0$: | $f(x) = D + A\,sen(Bx - C)$<br>$f(x) = D + A\,cos(Bx - C)$ | $C$ Corrimiento o desplazamiento horizontal. |
| $A < 0$: | | |
| $B > 0$: | | $D$: Desplazamiento vertica |
| $B < 0$: | | |
| 2. Determina la amplitud, el periodo, el desfasamiento (corrimiento, fase, contracción, dilatación) y el desplazamiento vertical (traslación) de cada función. Escribe el resultado en la columna correspondiente. | | |

**Tabla. Determinación de los parámetros de una función senosoidal.**

| ***Función*** | ***Amplitud*** | ***Periodo*** | ***Desp. de Fase*** | ***Desp. Vertical*** |
|---|---|---|---|---|
| a. $f(x) = 4\,cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ | | | | |
| b. $f(x) = 3\,sen\,(2x)$ | | | | |
| c. $f(x) = 1 + 2\,cos\,(\frac{1}{2}x)$ | | | | |
| d. $f(x) = -2 + \ 2\,cos\,(\frac{3}{2}x)$ | | | | |
| e. $f(x) = 2\,sen\,(x + \frac{1}{2}\pi)$ | | | | |
| f. $f(x) = 1 + 2\,sen\,(x - \frac{1}{2}\pi)$ | | | | |
| g. $f(x) = -1 + 3cos\,(2x - \pi)$ | | | | |
| h. $f(x) = 2 + 6sen\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ | | | | |
| i. $f(x) = -3 + sen\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{12}\right)$ | | | | |

3. Una vez que hayas llenado correctamente la tabla, traza la gráfica de cada función (cada una en un sistema de coordenadas) en hojas de papel milimétrico, utiliza un color diferente para cada una de ellas. Usa GeoGebra para comprobar si determinaste adecuadamente la gráfica de cada función.

4. Expresa *verbalmente* el significado de las siguientes funciones:

   *a.* $f(x) = sen\ (x)$:

   *b.* $g(x) = 4\ sen(x + 3) + 2$:

   *c.* $h(x) = 3\ sen(4x) - 5$:

   *d.* $k(x) = sen(2x) - 1$:

### *Estrategia didáctica 6. Problemas de aplicación. (Cierre).*

Aprendizajes: Utilizará las funciones trigonométricas para representar fenómenos de variación periódica.

QR-8: Funciones periódicas.

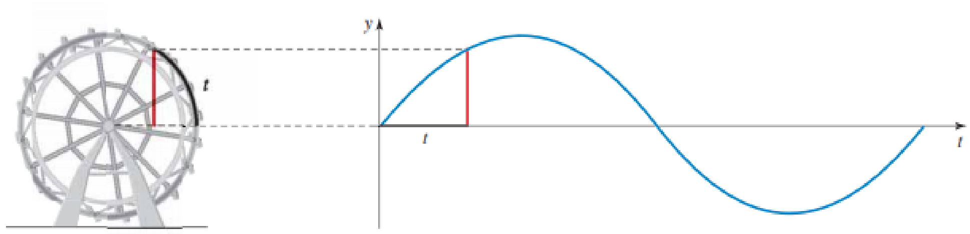
***Actividad 1. (Extra clase):*** Visita cualquiera de los dos códigos QR, para que conozcas fenómenos y ejemplos de variación periódica que pueden modelarse con funciones trigonométricas.

QR-9: Movimientos periódicos.

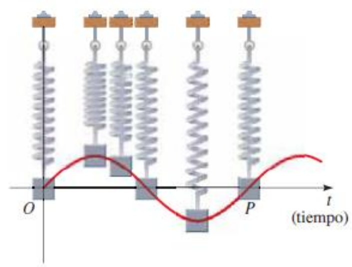
## FENÓMENOS DE VARIACIÓN PERIÓDICA

El comportamiento que se repite una y otra vez es común, lo observamos en muchos fenómenos de la naturaleza, en aparatos y máquinas de uso habitual; se conoce como comportamiento periódico. Ejemplos tales como la oscilación del péndulo, el movimiento de un pistón en un motor, el giro de una rueda de la fortuna, las vibraciones de un puente, el flujo de corriente eléctrica, las vibraciones de las cuerdas de un instrumento musical, el movimiento de un punto perteneciente a un disco que gira, las ondas de radio, las ondas de luz, etc. representan movimientos periódicos.

Los movimientos periódicos (bajo ciertas suposiciones) se modelan, por medio de una función trigonométrica.




Las funciones trigonométricas son ideales para modelar un comportamiento periódico, las funciones seno y coseno, cuando una masa o una partícula se mueve, tiene un **movimiento armónico simple** cuando regresa a su posición una y otra vez.




Su desplazamiento está dado en función de $x$, por alguna de las relaciones:

$$f(x) = a\,sen\,\omega(x-c) \text{ y } f(x) = a\cos\omega(x-c).$$

Donde:

$a$: es el desplazamiento máximo (a partir del origen) de la partícula, varía entre $-a$ y $a$ por lo que la amplitud del movimiento se define como $amplitud = |a|$.

$T$: es el periodo, es el tiempo necesario para completar un ciclo, dado que la función seno se repite cada vez que el ángulo aumenta en $2\pi$, por tanto $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

$f$: es el número de oscilaciones o ciclos completos por unidad de tiempo, así $f = \frac{1}{T}$.

$\omega$: es la frecuencia angular. se relaciona con las cantidades antes definidas por $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$.

$c$: es la posición de la masa o partícula al inicio del movimiento, es el desplazamiento horizontal de la gráfica.

***Actividad 2. Solución de problemas.***

En equipos, contestar lo que se pide y resolver los siguientes problemas, con base en la información proporcionada sobre las funciones trigonométricas y suponiendo movimiento armónico simple.

**Problemas de aplicación.**

1. El valor eficaz de la tensión o corriente alterna de los hogares es de 110 V, su variación va de +155 V a –155 V, con una frecuencia de 60Hz (ciclos por segundo). Plantee una función que describa esta variación de voltaje

¿Qué información proporciona el problema? ________________________________

______________________________________________________________________

¿Qué se desea determinar? ______________________________________________

| Calcula la amplitud $a$. | Calcula la frecuencia $\omega$. |
|---|---|
| | |

La variación de voltaje es armónica simple, ¿Cuáles formas de función podrías emplear? ______________________________________________________________

Si $t = 0$, es el tiempo cuando el voltaje es $+155\ V$, entonces ¿cómo queda la función que describe la situación descrita? ________________________________________

2. Una masa está suspendida de un resorte, el resorte se comprime 4 centímetros y luego se libera. Si la masa regresa al punto inicial después de 2 segundos. Obtener la función que describe el movimiento, suponiendo movimiento armónico simple.

¿Qué información proporciona el problema? ________________________________

______________________________________________________________________

¿Qué se desea determinar? ______________________________________________

| Calcula la amplitud $a$. | Calcula la frecuencia $\omega$. |
|---|---|
| | |

La variación de voltaje tiene un movimiento armónico simple, ¿Cuáles formas de función podrías emplear? ____________________________________________

Si la amplitud del resorte es $5$, cuando $t = 0$, entonces ¿Cuál es la función que mejor describiría la situación descrita? ________________________________________

3. Cada vez que late el corazón, la presión sanguínea aumenta, luego disminuye cuando el corazón descansa entre latidos. La presión sanguínea de una persona está modelada por la función $p(t) = 115 + 25\ sen\ (160\pi t)$. Donde $p(t)$ es la presión de mm de Hg en el tiempo $t$, en minutos.

a. Calcule la amplitud, periodo y frecuencia de $p$.

b. Haga un bosquejo de la gráfica.

c. Cuando una persona hace ejercicio, su corazón late más rápido. ¿Cómo afecta esta situación al periodo y la frecuencia de la función?

Para resolver al inciso a, compare la función que proporciona el problema con el modelo general $f(x) = a\ sen\omega(x - c)$, obtenga los datos y determine los parámetros solicitados.

Para el inciso b, emplee una escala adecuada, establezca parámetros y grafique.

Para el inciso c, observe la gráfica y conteste lo que se pide.

## 4. Materiales Diversos de Apoyo.

Martínez, F. R. Apodaca, N. P. (2013). Unidades interactivas para bachillerato. Recuperado el 3 de enero de 2021 de
http://www.objetos.unam.mx/matematicas/leccionesMatematicas/02/2_172/index.html
Martínez, F. R. (2013). Funciones trigonométricas. Análisis del dominio y rango de la funciones trigonométricas directas Recuperado el 3 de enero de 2021 de
http://www.objetos.unam.mx/matematicas/leccionesMatematicas/02/2_179/index.html (
Martínez, F. R. (2013). Funciones trigonométricas. Gráficas de las funciones seno, coseno y tangente. Recuperado el 3 de enero de 2021 de
http://www.objetos.unam.mx/matematicas/leccionesMatematicas/02/2_176/index.html
Martínez, F. R. (2013). Funciones trigonométricas. Noción de amplitud, periodo y frecuencia. Recuperado el 3 de enero de 2021 de
http://www.objetos.unam.mx/matematicas/leccionesMatematicas/02/2_181/index.html (
Martínez, F. R. (2013). Funciones trigonométricas. Análisis de la función $f(x) = a\cos(bx + c) + d$. Recuperado el 3 de enero de 2021 de
http://www.objetos.unam.mx/matematicas/leccionesMatematicas/02/2_185/index.html

Martínez, F. R. (2013). Funciones trigonométricas. Análisis de la función $f(x) = sen(bx + c) + d$. Recuperado el 3 de enero de 2021 de
http://www.objetos.unam.mx/matematicas/leccionesMatematicas/02/2_188/index.html

### 5. Formas e Instrumentos de Evaluación.

Sin duda, una de las cuestiones más importantes de la enseñanza, es la evaluación de lo aprendido por los estudiantes. En nuestro caso, esta evaluación debe ser continua y en estrecha observancia de los dos principios básicos del constructivismo, a saber, la *diferenciación progresiva* y la *reconciliación integradora* de los nuevos contenidos con los que ya traía el aprendiz. Por ello es por lo que, a lo largo del desarrollo de esta estrategia didáctica, se deberá ir determinando la adecuación y pertinencia de las construcciones conceptuales de los alumnos. Al final de la autoevaluación, encontraras las respuestas a cada sección con la finalidad de que te puedas autoevaluar.

## Autoevaluación.

1. El equivalente en radianes de un ángulo de 60°, es:

a) $\frac{\pi}{6}\ rad$ b) $\frac{60}{\pi}\ rad$ c) $\frac{\pi}{3} rad$ d) $\frac{\pi}{2}\ rad$

2. El ángulo $\frac{3}{4}\pi\ rad$, equivale en grados a:

a) 45° b) 75° c) 120° d) 135°

3. El valor de $sen^{-1}(1)$, es:

a) $\pi\ rad$ b) $\frac{\pi}{2}\ rad$ c) $\frac{\pi}{3}\ rad$ d) $\frac{\pi}{4}\ rad$

4. El valor de $sen\ \frac{\pi}{6}$, es igual al valor de:

a) $sen(\frac{2}{3}\pi)$ b) $sen(\frac{5}{6}\pi)$ c) $sen(\frac{4}{3}\pi)$ d) $sen(\frac{7}{6}\pi)$

5. La función $f(x) = 4\ sen(3x + \pi)$, tiene:

a) Frecuencia $\pi$ b) Periodo 5 c) Fase $\pi$ d) Amplitud 4

6. El periodo de la función $f(x) = -sen\ 3x$, es igual a:

a) $T = 3\pi$ b) $T = \frac{3}{2}\pi$ c) $T = \frac{2}{3}\pi$ d) $T = \pi$

7. La frecuencia de la función $f(x) = 2\ sen\ (x + \frac{\pi}{2})$, es igual a

a) $f = 1$ b) $f = \frac{\pi}{2}$ c) $f = \pi$ d) $f = 2$

8. Es la función que tiene periodo $\pi$.

a) $f(x) = 3\ sen(4x - \pi)$ b) $f(x) = 4\ cos(2x - \pi)$

c) $f(x) = sen(x + \pi) + 2$ d) $f(x) = 4\ sen(\frac{x}{2} + \pi)$

9. La fase de la función $f(x) = -2\ sen\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$, es:

a) $C = -2$ b) $C = \frac{\pi}{4}$ c) $C = 1$ d) $C = -\frac{\pi}{4}$

10. En el intervalo de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, los ceros de la función $f(x) = sen\ 2x$, son:

a) $x_1 = -\pi, x_2 = 0, x_3 = \pi$ b) $x_1 = -\frac{\pi}{4}, x_2 = 0, x_3 = \frac{\pi}{4}$

c) $x_1 = -\frac{\pi}{2}, x_2 = 0, x_3 = \frac{\pi}{2}$ d) $x_1 = -\pi, x_2 = \pi$

11. En la función $f(x) = -1 - 2\ cos\ (3x - \pi)$, ¿cuál es el dominio y rango?

a) $(-\infty, \infty)$ y $(-\infty, \infty)$ b) $(-\infty, \infty)$ y $[-3, 1\ ]$

c) $(-\infty, \infty)$ y $[-2, 2\ ]$ d) $[0, \infty)$ y $[0, 3\ ]$

12. Los ceros de la función $f(x) = sen\ x$, son los mismos que los de la función:

*a)* $f(x) = cos(x - \frac{\pi}{2})$ *b)* $f(x) = cos\ 2x$

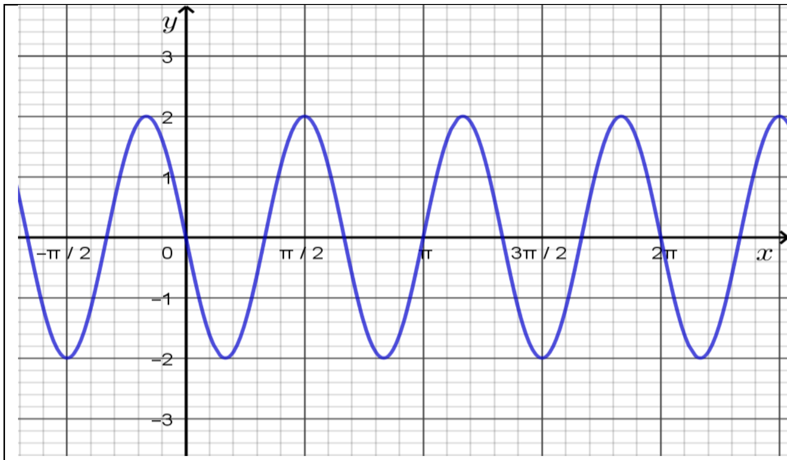
*c)* $f(x) = 2cos(x + \pi)$ *d)* $f(x) = 2 + cos\ x$

13. Los ceros de la función $f(x) = 1 + cos\ x$, son los mismos que los de la función:

*a)* $f(x) = sen\ x$ *b)* $f(x) = -1 + sen(x - \frac{\pi}{2})$

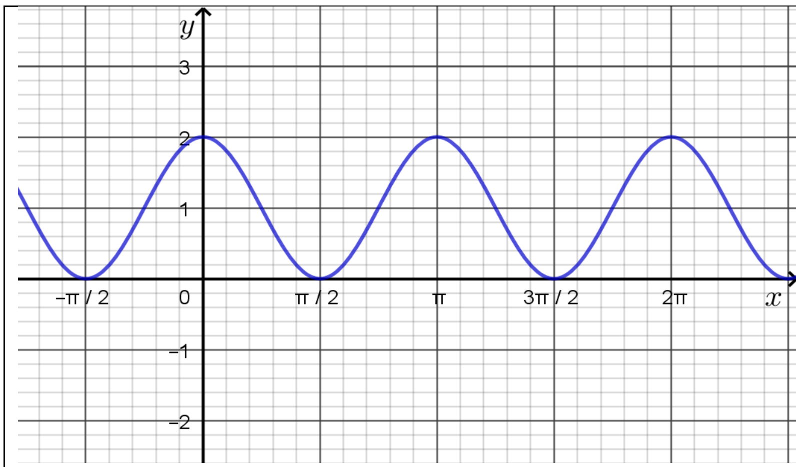
*c)* $f(x) = 1 + sen(x + \pi)$ *d)* $f(x) = 2 + sen\frac{x}{2}$

14. Es la función asociada a la siguiente gráfica.

| | |
|---|---|
|  | a) $f(x) = 2\ sen\ \frac{x}{3}$<br>b) $f(x) = -2\ sen\ x$<br>c) $f(x) = -4\ sen\ 2x$<br>d) $f(x) = -2\ sen\ 3x$ |

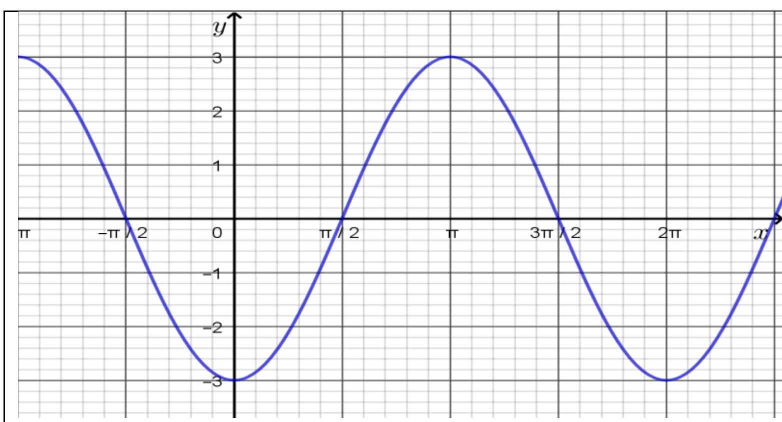


15. Es la función asociada a la siguiente gráfica.

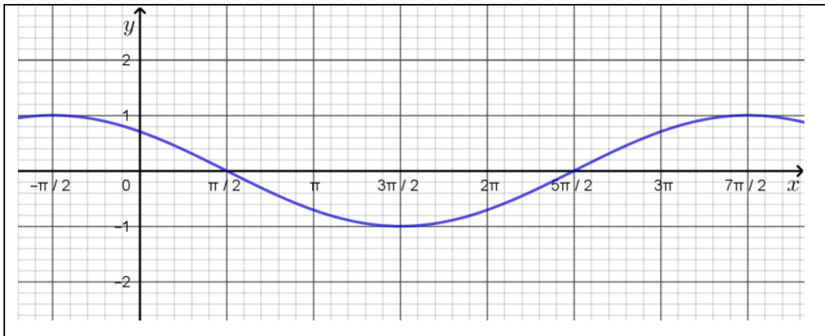
| | |
|---|---|
|  | a) $f(x) = 1 + sen\ x$<br>b) $f(x) = 1 +\ cos\ \frac{x}{2}$<br>c) $f(x) = 1 + cos\ 2x$<br>d) $f(x) = 1 -\ sen\ 2x$ |



16. Es la función asociada a la siguiente gráfica.

| | |
|---|---|
|  | a) $f(x) == -3\ cos\ x$<br>b) $f(x) = -3\ sen\ (x - \frac{\pi}{2})$<br>c) $f(x) = 3\ cos\ 2x$<br>d) $f(x) = 3\ sen\ (x + \frac{\pi}{2})$ |

17. Es la función asociada a la siguiente gráfica.



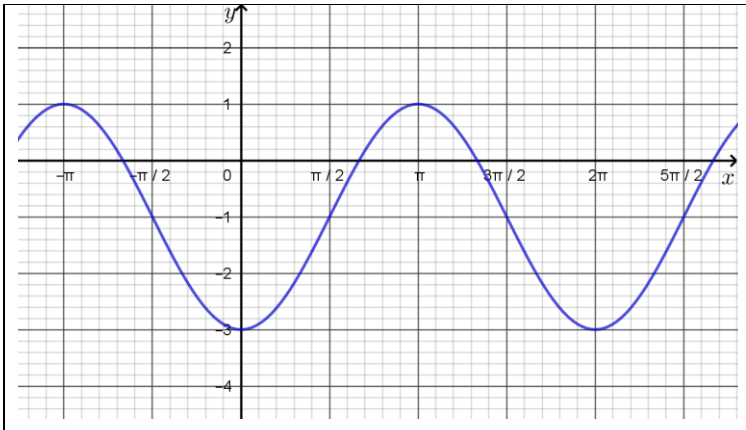

a) $f(x) = cos\ (x - \frac{\pi}{2})$

b) $f(x) = sen\ (2x - \frac{\pi}{2})$

c) $f(x) = cos\ (2x + \frac{\pi}{2})$

d) $f(x) = cos\ (\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})$

18. Es la función asociada a la siguiente gráfica.




a) $f(x) = -1 + \ sen\ (\frac{x}{2} - \pi)$

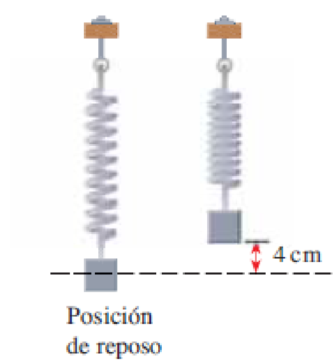
b) $f(x) = -1 + 2\ sen\ (x - \frac{\pi}{2})$

c) $f(x) = -1 + sen\ 2x$

d) $f(x) = -1 + sen\ (x + \frac{\pi}{2})$

Problema.

Una masa cuelga de un resorte, el resorte está comprimido 4 cm. Luego se suelta. Se observa que el tiempo que tarda el resorte en volver a su posición comprimida original, es de medio segundo. Véase la figura.




Suponiendo movimiento armónico simple, una función adecuada que modela la situación descrita es $f(t) = a\ cos\omega t$, por lo que:

19. El valor del parámetro $a$, es:

a) $\frac{1}{2}$ b) 2 c) 8 d) 1 e) 4

20. El valor del parámetro $\omega$, es:

a) $4\pi$ b) $3\pi$ c) $2\pi$ d) $\pi$ e) $\frac{\pi}{2}$

| **Tabla de respuestas de la autoevaluación.** | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. c | 2. d | 3. b | 4. b | 5. d | 6. c | 7. a | 8. b | 9. d | 10. c |
| | | | | | | | | | |
| 11. b | 12. a | 13. b | 14. d | 15. c | 16. a | 17. d | 18. b | 19. e | 20. a |

### 6. Valoración del profesor de los resultados obtenidos.

En esta sección se incluye una lista de cotejo para que todos podamos aplicarla al final de su puesta en escena.

| | | |
|---|---|---|
| **MATERIA: MATEMÁTICAS IV.**<br>**NIVEL: BACHILLERATO**<br>**UNIDAD 4: FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.**<br>**MATERIAL: CUADERNO DE TRABAJO.**<br>**Nombre: _________________________________________. Grupo: __________.** | | |
| **Lista de cotejo para evaluar los resultados obtenidos en la puesta en escena de la Unidad 4. Funciones trigonométricas.** | | |
| INDICADORES DE LOS APRENDIZAJES INCLUIDOS EN LA UNIDAD. | **SI** | **NO** |
| 1. Explora situaciones o fenómenos de variación periódica. | | |
| 2. Convierte medidas angulares de grados a radianes y viceversa. | | |
| 3. Comprende la forma en que se extienden o generalizan las razones trigonométricas para ángulos arbitrarios. | | |
| 4. Extiende el concepto de razón trigonométrica a función, mediante la elaboración de una tabla o gráfica de: $f(x) = senx, f(x) = cosx$. | | |
| 5. Analiza e identifica los parámetros que aparecen en las funciones: $f(x) = D + Asen(Bx + C); f(x) = D + Acos(Bx + C)$. | | |
| 6. Utiliza las funciones trigonométricas para representar fenómenos de variación periódica. | | |
| **INDICADOR** | **A** | **R** |
| AUTOEVALUACIÓN. | | |

## 7. Bibliografía y/o Fuentes Consultadas.

Gómez, P. Hernández, F. (2018). *Guía para el profesor que imparte matemáticas IV*. México: CCH Oriente.

Guzmán, A. (2013). *Geometría y trigonometría*. (4ª ed.) México: Grupo Editorial Patria.

Leithold, L. (1999). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica.* México: Oxford University Press.

Larson, R., Hostetler, R. (2008). *Precálculo*. (7ª ed.) México: Reverté.

Stewart, J., Redlin, L. Saleem, W. (2007). *Precálculo. Matemáticas para el cálculo*. (5ª ed.). México: CENGACE Learning.

Swokowsky, E. W. y Cole, J. A. (2011). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica.* (13ª ed.). México: CENGACE Learning.

## 8. Bibliografía Virtual. Sitios Web y Fuentes Relevantes.

El portal académico del CCH. (2020). Recuperado de: http://portalacademico.cch.unam.mx/. Contiene guías para el profesor, material interactivo, así como textos de interés pedagógico.

Dirección General Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades. (2016). *Programas de Estudio, Mapa curricular del Plan de estudios. Recuperado de* https://www.cch.unam.mx/programasestudio

SITIOS WEB
QR-1: https://youtu.be/YC9g8FG8QKg. Recuperado junio 2021.
QR-2: https://www.compadre.org/osp/EJSS/4418/213.htm. Recuperado enero 2021.
QR-3: https://youtu.be/85SVk39-iRI. Recuperado marzo 2021.
QR-4: https://youtu.be/FizYTLPzXZc. Recuperado marzo 2021.
QR-5: https://youtu.be/CRg5jQRj1Hg. Recuperado marzo 2021.
QR-6: https://youtu.be/rldGZ2jgr5A. Recuperado febrero 2021.
QR-7: https://youtu.be/zyxks68nJSI. Recuperado enero 2021.
QR-8: https://youtu.be/Q2nutzqgbOk. Recuperado marzo 2021.
QR-9: https://youtu.be/A1BVYbXyunc. Recuperado abril 2021.

www.matesfacil.com. Recuperado agosto de 2018.
https://www.google.com.mx/search?q=portal+academico+cch&oq=PORTAL+ACA&aqs=chrome.0.0j69i57j69i60j0l3.6191j0j7&sourceid=chrome&ie=UTF-8. Recuperado agosto de 2018.
https://www.rua.unam.mx/portal/plan/index/69806 . Recuperado enero de 2021
Martínez, F. R. Apodaca, N. P. (2013). Unidades interactivas para bachillerato. Recuperado el 3 de enero de 2021 de http://www.objetos.unam.mx/matematicas/leccionesMatematicas/02/2_172/index.html
Martínez, F. R. (2013). Funciones trigonométricas. Análisis del dominio y rango de la funciones trigonométricas directas Recuperado el 3 de enero de 2021 de http://www.objetos.unam.mx/matematicas/leccionesMatematicas/02/2_179/index.html (
Martínez, F. R. (2013). Funciones trigonométricas. Gráficas de las funciones seno, coseno y tangente. Recuperado el 3 de enero de 2021 de http://www.objetos.unam.mx/matematicas/leccionesMatematicas/02/2_176/index.html
Martínez, F. R. (2013). Funciones trigonométricas. Noción de amplitud, periodo y frecuencia. Recuperado el 3 de enero de 2021 de http://www.objetos.unam.mx/matematicas/leccionesMatematicas/02/2_181/index.html (
Martínez, F. R. (2013). Funciones trigonométricas. Análisis de la función $f(x) = a\cos(bx + c) + d$. Recuperado el 3 de enero de 2021 de http://www.objetos.unam.mx/matematicas/leccionesMatematicas/02/2_185/index.html
Martínez, F. R. (2013). Funciones trigonométricas. Análisis de la función $f(x) = sen(bx + c) + d$. Recuperado el 3 de enero de 2021 de http://www.objetos.unam.mx/matematicas/leccionesMatematicas/02/2_188/index.html