PAQUETE DIDÁCTICO DE MATEMÁTICAS I

LIDIA TORRES HERNÁDEZ
RAFAEL GUTIÉRREZ ESTRADA
JORGE ZARZA PLATA
JOAQUIN CRUZ GARCÍA
CARLOS LORENZO CUERVO
LUIS NÚÑEZ RODRÍGUEZ

PRESENTACIÓN

Este paquete didáctico se incluyen aspectos teóricos, un conjunto de actividades y ejercicios, que fue realizado con el propósito de proporcionar un apoyo a los estudiantes en la adquisición de los conocimientos que se exponen en el programa de estudio de Matemáticas I del plan de estudios vigente en el Colegio, mediante la metodología didáctica indicada en el programa de estudio. En este producto se refleja nuestra idea acerca de que un texto de matemáticas para el nivel medio superior debe ser directo, legible y contar con contenidos matemáticos simples de comprender, para motivar a los estudiantes para que logren aprender matemáticas, solo haciendo matemáticas, enfocándonos en la solución de problemas. Las actividades están propuestas para formar y guiar a los estudiantes en la obtención de los aprendizajes del programa de estudio para Matemáticas I; facilitando a los alumnos la oportunidad de desafiar su entendimiento, de demostrar su comprensión y de emplear su conocimiento a situaciones más reales.

El paquete didáctico se encuentra constituido, con base en la metodología didáctica propuesta en el programa de estudios, con el siguiente formato:

- En cada una de las unidades se brinda información precisa acerca de los conceptos necesarios para resolver las actividades propuestas.
- Los aprendizajes son orientadores de los temas o secciones de cada unidad del paquete didáctico, resaltando cada aprendizaje al inicio de cada tema o sección.
- Las actividades y ejercicios están enfocados para lograr aprendizajes y desarrollar habilidades esenciales sobre el contenido en cuestión. Se caracterizan porque van de casos sencillos a más complejos para favorecer la reflexión, así como la adquisición de técnicas y procedimientos.
- Al final de cada unidad se muestran una serie de ejercicios para reafirmar los conocimientos adquiridos.
- Para cada una de las unidades del paquete didáctico se propone la bibliografía que se utilizó en el desarrollo de este trabajo.

Indicaciones de uso

El paquete didáctico está diseñado para ser utilizado en el salón de clase de manera individual o en equipo, o como apoyo para realizar actividades extraclase, para consolidar los aprendizajes adquiridos en el aula. De modo que, cuando uses el paquete de didáctico, te serán útiles las siguientes recomendaciones:

- Estudia y analiza con detenimiento la información proporcionada e intenta relacionar los conceptos mostrados con los anteriores. La discusión con tus compañeros y la orientación del profesor puede resultar muy provechosa.
- Examina los ejemplos e intenta justificar cada paso y trata de encontrar otra forma de resolverlos.
- Resuelve los ejercicios propuestos en el orden que se presentan.
- Analiza y compara las soluciones de los ejercicios que obtuviste con las de tus compañeros, para que haya retroalimentación y puedas corregirlos en caso necesario.

INTRODUCCIÓN

El propósito fundamental de este paquete didáctico es proporcionar el curso completo de la asignatura de Matemáticas I, donde se muestran actividades sencillas y fáciles de comprender por los alumnos, para que adquieran los aprendizajes indicados y desarrollen habilidades en la resolución de problemas. Este material didáctico es idóneo para un curso de Matemáticas I, del plan de estudios del área de Matemáticas, del Colegio de Ciencias y Humanidades que forma parte de la Universidad Nacional Autónoma de México. Para su elaboración, se consideraron los propósitos de cada unidad, así como los aprendizajes respectivos y la metodología de resolución de problemas. En el desarrollo de cada unidad, los conceptos importantes se encuentran resaltados mediante un cuadro y enseguida se muestran ejemplos o actividades para su mejor comprensión. Al finalizar cada tema, se presentan actividades complementarias (ejercicios). Al terminar cada unidad encontraras la bibliografía correspondiente y una propuesta de evaluación. Procuramos que las actividades o ejemplos sean presentados de manera sencilla y clara, algunas con una serie de preguntas o indicaciones para llevar a buen término la actividad.

Reconocemos la participación activa de todos los profesores que forman parte de este grupo de trabajo, por el compromiso adquirido y por el trabajo realizado en la construcción del paquete didáctico, porque con su gran apoyo fue posible obtener un producto de calidad y esperamos que cumpla con las expectativas por el que fue elaborado. Reiteramos nuestro agradecimiento a los profesores:

Andrés Gómez Valle

Jesús García López

Pedro Mendoza Álvarez

ÍNDICE

UNIDAD 1

EL SIGNIFICADO DE LOS NÚMEROS
Y SUS OPERACIONES BÁSICAS

Propósitos

Al finalizar la unidad, el alumno será capaz de operar con los números racionales y resolver problemas aritméticos, aplicando algunas heurísticas para facilitar la comprensión, la búsqueda de un plan de resolución y su ejecución, con la finalidad de que haga suyos los recursos básicos para iniciarse en el uso del lenguaje algebraico para expresar la generalidad.

Aprendizajes

Significado de los números reales y su simbolización

- Comprende el significado de los números reales.
- Usa correctamente las diversas simbolizaciones de un número racional, transitando entre sus equivalencias (cuando sea necesario) en problemas puramente aritméticos y en contexto.
- Compara dos cantidades haciendo uso de las representaciones de un número racional.

Operaciones con números racionales

- Opera correctamente con los números racionales (enteros y no enteros), en los casos de una sola operación y una secuencia de operaciones.

Potencias y radicales

- Opera correctamente con potencias y radicales con la misma base.

Significado contextual de las operaciones

- Resuelve problemas aritméticos que involucren una secuencia de relaciones contextuales, auxiliándose de estrategias heurísticas en las etapas de comprensión, elaboración de un plan y su ejecución.
- Reconoce patrones numéricos y geométricos en situaciones problemáticas y modelará su comportamiento.

Introducción

Para la extensión del concepto de número como número natural se da mediante la creación del instrumento poderoso que sirve a las necesidades de la práctica y la teoría. A través de una evolución larga e indecisa, el cero, los enteros negativos y las fracciones gradualmente aceptados. Hoy las reglas de las operaciones con estos números son dominadas por los estudiantes promedio[1]. Sin embargo, para completar la totalidad del sistema numérico se deben de incluir cantidades irracionales. Por qué es importante aprender los números y sus operaciones, existe la creencia de que son monótonos y aburridos, pero se justifica su atención no solo porque es la base de las matemáticas. También, porque contiene ideas de importancia y hermosas que se fecundan, algunas veces en las aplicaciones[2].

1.1 Significado de los números reales y su simbolización

Aprendizaje: *Comprende el significado de los números reales.*

Actividad 1: Contesta las preguntas siguientes

¿Qué es medir?

¿Qué tipos de números conoces y que podrías medir con cada tipo?

¿Qué significado tiene un número, como expresión de la medida de una magnitud?

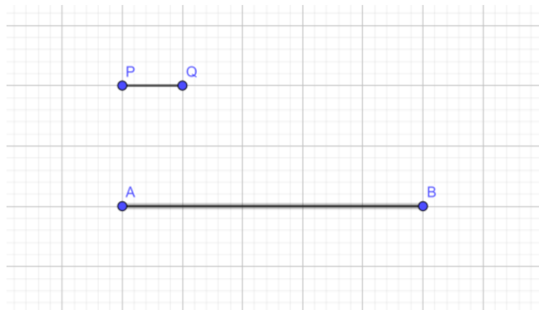
¿Es posible medir cualquier objeto?

Actividad 2: En cada caso, tomando como unidad de medida (PQ) al segmento de extremos P y Q.

Caso 1: ¿Cuántas veces cabe el segmento de medida PQ en el segmento de medida AB?

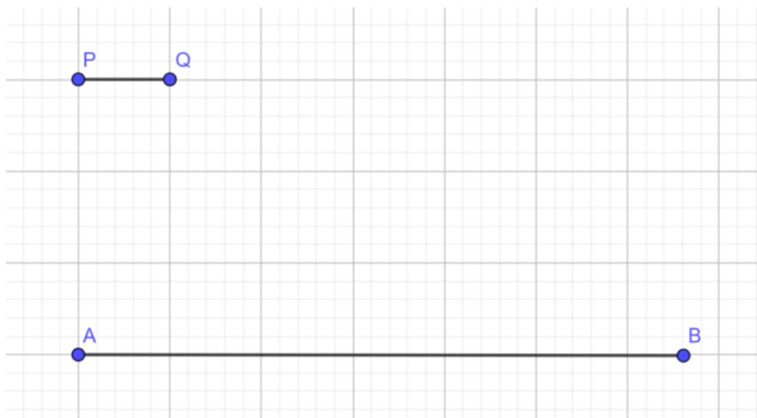
[1] Courant, R., Robbins, H. (2002), ¿Qué son las matemáticas? Conceptos y métodos fundamentales, México, Fondo de cultura económica.

[2] Klein, Morris, (2001), Matemáticas para los estudiantes de humanidades, 3ed., México, Fondo de Cultura Económica.



¿La medida de AB en términos de PQ es?

Caso 2: ¿Cuántas veces cabe el segmento PQ en el segmento AB?



Es claro que $6 * PQ < AB$

Si llevamos sobre la recta que contiene a AB siete veces a PQ, es claro que la medida de AB se supera. De tal forma que AB encuentra entre $6 * PQ$ y $7 * PQ$, es decir

$$6 * PQ < AB < 7 * PQ$$

Volvamos al caso 1, donde la medida PQ cabe exactamente un número entero de veces en AB. Si consideramos a la medida PQ = 1, ¿cuánto mide AB?

Discute en clase lo siguiente:

Para el caso 2, tomando a PQ = 1, ¿entre qué números se encuentra la medida AB?

Por qué ahora, para el caso 2, la medida AB se encuentra entre

$$1 < AB < \frac{7}{6}$$

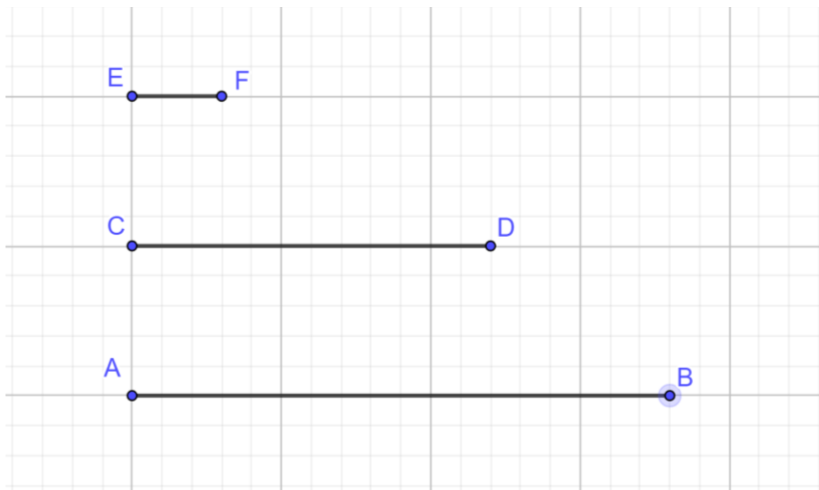
¿Podríamos encontrar una medida en común de PQ y AB, para el caso 2?, es decir podríamos medir AB, ¿cuál sería esa medida en común de PQ y AB?

Usando la medida en común de los segmentos, ¿cuál es la medida de cada uno?

Es momento de definir cuando un segmento es medible (conmensurable).

Definición 1.1. *A dos segmentos que tienen una medida común les denominamos conmensurables*[3].

Por ejemplo, los segmentos de la figura siguiente son conmensurables porque tienen como medida común a $EF = \frac{3}{5}$



Se observa que el segmento CD es 4 veces el segmento EF y el segmento AB es 6 veces el segmento EF.

$$CD = 4 * EF \ y \ AB = 6 * EF$$

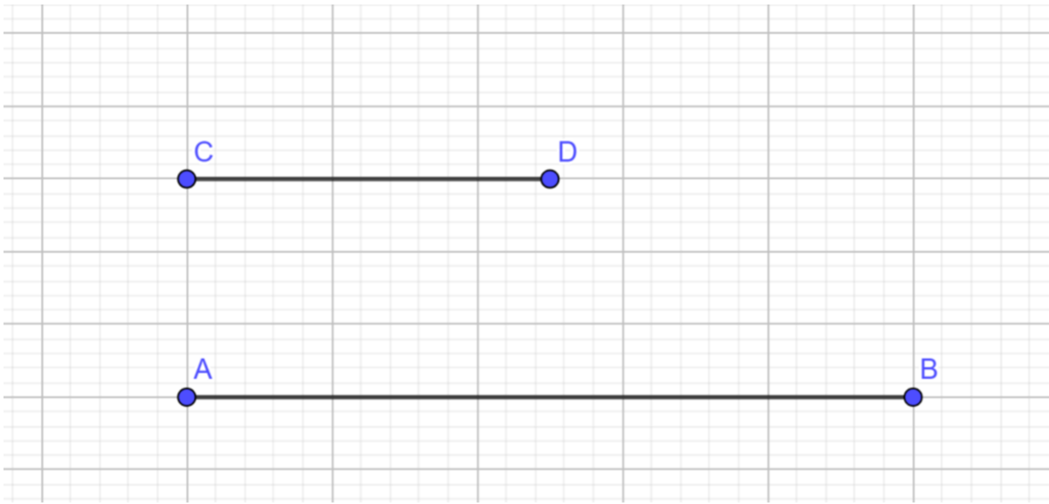
Si el segmento EF fuera la unidad entonces los segmentos CD y AB medirían 4u. y 6u., respectivamente.

Pero la unidad que tenemos en nuestro sistema de numeración es 1, en tal caso, ¿cuál es la medida de los segmentos?

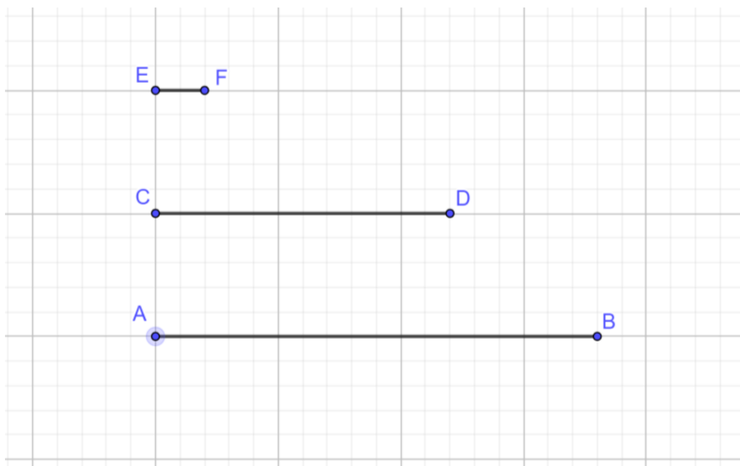
Actividad 3:

1. En la figura los segmentos AB y CD son conmensurables, determina la medida común entre ellos.

[3] Kalnin, R. A., (1988), Álgebra y funciones elementales, 3ed., Moscu, Editorial Mir.



2. Siguiendo la misma idea, Determina la razón $\frac{AB}{CD}$ para los segmentos AB y CD, mostrados en la figura, con medida común EF



En los dos casos anteriores trabajamos con segmentos que son conmensurables, pero *¿todo segmento será conmensurable?*

Actividad 4: Para responder a la pregunta, analiza con tus compañeros y profesor lo siguiente:

¿La diagonal de un cuadrado es conmensurable?

Para dar respuesta simplifiquemos la situación y trabajemos con el cuadrado con una longitud de sus lados igual a uno. Suponiendo que su diagonal (d) es conmensurable con su lado, es decir la diagonal y su lado tienen una medida común r. Esto es la diagonal es m veces r y su lado es n veces r,

$$d = m * r \,; \quad a = n * r.$$

Entonces $\frac{d}{1}=\frac{m*r}{n*r}=\frac{m}{n}$ y $d=\frac{m}{n}$. El suponer que la diagonal es conmensurable nos conduce a que la diagonal es un número racional. Además, como la diagonal es mayor que su lado y menor que la suma de dos lados

$$1<\frac{m}{n}<2$$

Por lo anterior podemos suponer que los enteros m y n no tienen factores comunes (la fracción no se puede simplificar)

Por el teorema de Pitágoras $d^2=2$, lo cual implica que $\left(\frac{m}{n}\right)^2=2$

$$\frac{m^2}{n^2}=2$$

Con lo cual $m^2=2*n^2$, esto indica que m^2 es un número par, entonces m también es par porque si no fuera par sería impar y el cuadrado de un impar es impares, decir m= $2k$,

$$(2k)^2=2n^2$$

$$4k^2=2n^2$$

$$2k^2=n^2$$

Lo último indica, bajo el mismo argumento usado para m, que n es par, $n=2s$. Sin embargo, antes habíamos dicho que $d=\frac{m}{n}$ no se puede simplificar, pero $d=\frac{m}{n}=\frac{2k}{2s}=\frac{k}{s}$.

Lo anterior se contradice. Por lo tanto, la diagonal no puede ser un número racional, en consecuencia, no puede ser conmensurable. Por lo tanto, la medida de la diagonal del cuadrado no puede ser un número racional, en consecuencia, no puede ser conmensurable. Y el número d es la raíz cuadrada de 2, $d=\sqrt{2}$.

Del número $\sqrt{2}$ los últimos griegos, en la Grecia antigua, sabían que no es un número entero ni fracción pero también sabían que hay un conjunto indefinidamente grande de números que ni son enteros ni fracciones. Por ejemplo, $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7},$ en general la raíz cuadrada de cualquier número que no sea cuadrado perfecto, la raíz cúbica de cualquier número que no sea cubo perfecto, y así sucesivamente. Todos estos nuevos números se llaman irracionales, entre estos se encuentra π.

Actividad 5: Menciona al menos otros dos ejemplos de segmentos que no sean conmensurables. [Idea: Piensa en un circulo o en las diagonales de algún rectángulo].

Racionales Negativos

En la interpretación geométrica de los números racionales se considera a la longitud del segmento de 0 a 1 como la longitud unitaria. Los enteros positivos y negativos son representados por puntos equidistantes en la recta numérica, los positivos a la derecha del 0 y los negativos a la izquierda. Las fracciones con denominador n se representan al dividir cada segmento de longitud unitaria en n partes iguales, los puntos de subdivisión en la recta numérica representan a números racionales de denominador n. Por ejemplo, para n = 2 tendríamos los números racionales

$$. \dots, -\frac{6}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{4}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{2}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \dots.$$

Para n = 7

$$. \dots -\frac{10}{7}, -\frac{9}{7}, -\frac{8}{7}, -\frac{7}{7}, -\frac{6}{7}, -\frac{5}{7}, -\frac{4}{7}, -\frac{3}{7}, -\frac{2}{7}, -\frac{1}{7}, 0, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}, \frac{7}{7}, \frac{8}{7}, \frac{9}{7}, \frac{10}{7}, \frac{11}{7}, \dots.$$

Otra aportación al sistema de los números y que dio más poder a las matemáticas procede de la India. Son los números negativos, comúnmente usados para representar cantidades, en particular dinero que se debe o montos de las deudas. Los hindúes inventaron los números que ahora se conocen como números negativos. En bancos o empresas a los números que representan adeudos o perdidas los representan en color rojo (números negativos) y las ganancias o ingresos con números en color negros (números positivos). En el caso de nosotros si usaremos el signo de menos para indicar que el número es negativo.

Actividad 6: Menciona al menos otros dos ejemplos donde se puede emplear los números negativos, que no se refiera a dinero (egresos, cargos).

Actividad 7*: Resuelve los problemas siguientes*[4]

1. Suponemos que un hombre cuenta con $3 y contrae una deuda de $5. ¿Cuál es su capital neto?
2. Si una persona que debe $500 adquiere una nueva deuda de $800. Usa números negativos para representar la situación financiera de la persona.

[4] Kline, M. (2001). Matemáticas para los estudiantes de humanidades, México, Fondo de Cultura Económica

3. Imaginemos a una persona en la situación siguiente, adquirió anteriormente una deuda de $500 y gana $800. Utiliza números positivos y negativos para calcular su capital neto.
4. Suponiendo que una persona debe $130 y que paga una deuda de $80. Usa números negativos y positivos para determinar su haber neto (importe neto a la cantidad obtenida, tras haber aplicado todos los impuestos vigentes).
5. Una persona pierde dinero en un negocio a razón de $100 por semana. Indiquemos este cambio de capital con el número negativo correspondiente, el tiempo futuro con números positivos y el tiempo pasado con números negativos. ¿Cuánto perderá esta persona en 5 semanas? ¿Cuánto más tenía hace 5 semanas?

Aprendizaje: *Usa correctamente las diversas simbolizaciones de un número racional, transitando entre sus equivalencias (cuando sea necesario) en problemas puramente aritméticos y en contexto.*

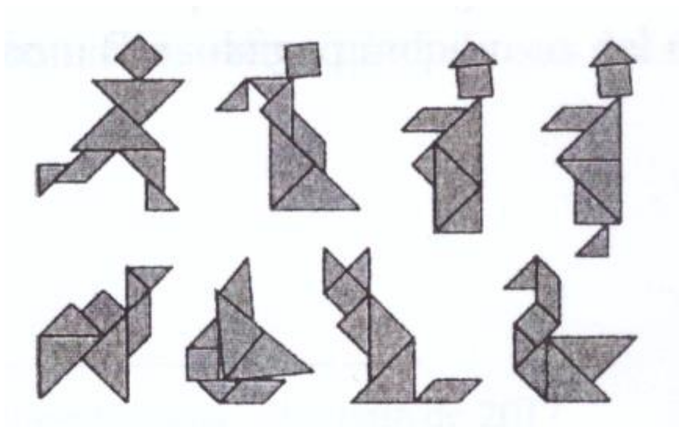
Actividad 8: *Tangrama*[5]

El tangram es un rompecabezas de origen chino que probablemente apareció hace tan sólo 200 ó 300 años. Los chinos lo llamaron "tabla de sabiduría" y "tabla de sagacidad" haciendo referencia a las cualidades que el juego requiere. La misma palabra "tangram" es un invento occidental: Se supone que fue creada por un norteamericano aficionado a los rompecabezas, quien habría combinado *tang*, una palabra cantonesa que significa "chino", con el sufijo inglés *gram* (-grama) que significa "escrito" o "gráfico" (como en cardiograma). Los primeros libros sobre el tangram aparecieron en Europa a principios del siglo XIX y presentaban tanto figuras como soluciones. Se trataba de unos cuantos cientos de imágenes en su mayor parte figurativas como animales, casas y flores, junto a una escasa representación de formas abstractas. A lo largo del siglo XIX aparecieron diversos libros de tangram chinos, que fueron copiados por las editoriales europeas, buena prueba de la popularidad que había adquirido el juego. A partir de 1818 se publicaron libros de tangram en EE. UU., Inglaterra, Francia, Alemania, Austria e Italia. Una parte de las matemáticas recreativas se ocupa de los problemas de rompecabezas, en los que se corta en varias piezas una figura plana o un sólido y hay que hacer encajar las piezas

[5] Peralta, G., *et. al*. (2017). *Guía para el profesor: Matemáticas I*. UNAM, CCH-Sur, México.

entre sí para recomponer la figura original. Entre los pasatiempos recreativos de esta especie destacan, desde el Renacimiento, los rompecabezas chinos conocidos como *“tangrams”*. El juego consta de siete piezas o *“tans”* con los que es posible construir un cuadrado. En un principio, el juego se ha utilizado popularmente para reproducir figuras de animales, siluetas humanas u otros objetos conocidos. Resulta realmente sorprendente la cantidad de figuras que se pueden llegar a hacer. El interés de los matemáticos por el tangram nació a partir del hecho de que este rompecabezas da lugar a un gran número de interesantes problemas geométricos combinatorios.

Las imágenes que se presentan son respuestas a problemas dados.



Parte I: Justifica cada respuesta.

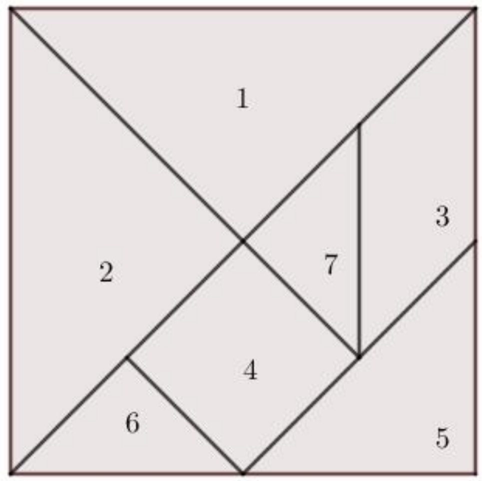
Con base en la figura siguiente, que presenta una disposición de un tangram de 7 piezas.

a). ¿Qué tipo de figuras geométricas conforman el tangrama?

b). ¿Cuáles son las figuras geométricas que tienen el mismo valor de área en el tangrama?

c). ¿Cuál es la expresión como fracción del total del área de la figura geométrica número 7?

d). ¿Cuál es la expresión como fracción del total del área de la figura geométrica número 4?



<u>Parte II:</u>

a). Anota el procedimiento que seguiste para dar la respuesta del inciso *c)* de la parte I.

b). Anota el procedimiento que seguiste para obtener la respuesta del inciso d*)* de la parte I.

c). Ahora llena la siguiente tabla expresando como fracción el área de cada figura geométricas respecto del área total del tangrama.

Polígono	Área como fracción del total
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

<u>Parte III</u>:

a). ¿Qué expresión decimal corresponde a la fracción del área de la figura geométrica número 7?

b). ¿Cuál es la expresión decimal de la fracción del área correspondiente a la figura geométrica número 4?

c). Determinar las expresiones decimales de las áreas de las figuras geométricas restantes.

<u>Parte IV</u>:

a). ¿Qué porcentaje de área corresponde a la figura geométrica número 7 del área total?

b). ¿Qué porcentaje de área corresponde a la figura geométrica número 4 del área total?

c). Determinar el porcentaje de área que le corresponde a cada una de las figuras geométricas restantes respecto del área total.

<u>Parte V</u>: Justifica cada respuesta

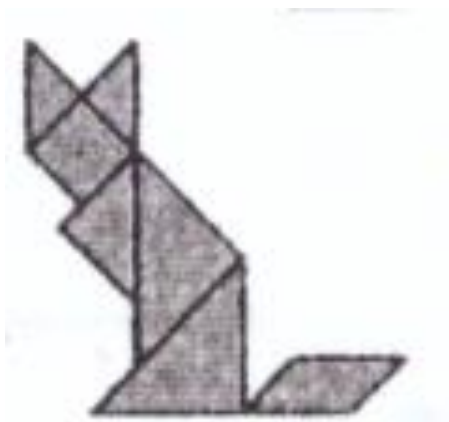
a). ¿Cuál es la expresión decimal de la fracción del área total que le corresponde a la figura geométrica número 1?

b). ¿Qué porcentaje del área total le corresponde a la figura geométrica número 2?

c). ¿Existe alguna relación entre los resultados obtenidos en los dos incisos anteriores?

<u>Parte VI</u>: Justifica cada respuesta

En la figura se presenta la imagen de un gato formado con el tangram.



Determina:

a). ¿Qué figuras geométricas componen el cuerpo del gato? ¿Tienen alguna *relación*?

b). ¿Qué porcentaje del área total del cuerpo del gato corresponde al área de una oreja?

c). ¿Cuál es la fracción del área total del cuerpo del gato correspondiente al área de la cola?

d). ¿Cuál es la expresión decimal del porcentaje del área total del cuerpo del gato correspondiente al área de la cara?

e). ¿Cuál es la expresión decimal de la fracción del área total del cuerpo del gato correspondiente al área de la cola?

Actividad 9: Resuelve los siguientes problemas

1. a) ¿Quién es mayor, 0.67 de 76 o el 0.76 de 67?

   b) ¿Quién es mayor, $\frac{5}{7}$ de 44 o el $\frac{11}{7}$ de 20?

   c) ¿Quién es menor, el 48% de 84 o el 84% de 48?

2. Quién es mayor

a). 0.23 de 32 o 0.32 de 23

b). 8/25 de 23 o 23/100 de 32

c). 23% de 32 o 32% de 23

Aprendizaje: *Compara dos cantidades haciendo uso de las representaciones de un número racional.*

En los números naturales, al igual que en los números enteros, en los racionales y los irracionales, el orden de los números se establece por su posición en la recta numérica. Mientras más a la derecha se encuentre el número real en la recta numérica, mayor es. Para distinguir entre dos números reales cuál de ellos es el mayor se pueden localizar los dos números en la recta numérica y el número que se encuentre más a la derecha será el mayor.

Actividad 10: Resuelve el siguiente problema, individual y posteriormente discute en clase las soluciones.

1. Dos amigas, Mirna y Estela, se reunieron en casa de Estela para compartir una pizza. Si Estela comió 2/6 partes de la pizza, ¿quién comió más Mirna o Estela?, si al final de la reunión entre ellas quedo de la pizza 1/6 parte del total.

2. Nuevamente, Estela y Mirna se reunieron, pero ahora en casa de Mirna. En está ocasión compraron un pastel que acompañaron con un café. Si Mirna comió 3/8 y Estela 5/12 del pastel total. ¿Cuál de las dos amigas comió menos pastel?

3. Dos hermanos, Juan y José ayudan en la biblioteca escolar de su comunidad a clasificar los libros, al final del día, el bibliotecario les informa que José ha clasificado 3/5 partes en la sección de literatura y Juan ha clasificado 2/5 partes en la sección de Biología. Nuevamente, el fin de semana, asisten a la biblioteca para continuar clasificando libros, al final de esa jornada se les informan que José ha terminado de clasificar la sección de literatura y Juan le ha tocado clasificar 7/10 de la sección de Matemáticas. ¿Quién clasifico más libros en la primera jornada?, ¿cuál de los dos clasificó más libros el fin de semana?[6]

Actividad 11: Ordena los siguientes números desde el menor hasta el mayor

1. Escribe de menor a mayor los números siguientes: $\frac{17}{6}$, $\frac{10}{6}$, $\frac{7}{6}$ y $\frac{13}{6}$.

2. a). Indica cuál de los dos números es mayor, ¾ o $\frac{5}{6}$ [7].

   b). De entre el par de números $\frac{1}{6}$ y $\frac{2}{10}$ indica cual es menor.

3. Ordena de mayor a menor los números siguientes, $\frac{4}{11}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{13}{33}$ y $\frac{7}{12}$.

4. Ordena de mayor a menor los números siguientes, $\frac{20}{27}$, $\frac{11}{14}$, $\frac{7}{9}$ y $\frac{5}{7}$.

5. a). ¿Cuál de los números $\frac{2}{3}$, $\frac{8}{12}$ y $\frac{16}{24}$ es el mayor?[8]

   b). ¿Cuál de los números $\frac{3}{15}$, $\frac{27}{135}$, $\frac{6}{30}$ y $\frac{1}{5}$ es el menor?

1.2 Operaciones con números racionales

Aprendizaje: *Opera correctamente con los números racionales (enteros y no enteros), en los casos de una sola operación y una secuencia de operaciones.*

Suma

---

[6] Seminario de Matemáticas, (2016), *Guía para el profesor de Matemáticas I*. UNAM, CCH-Oriente, México.
[7] Becerril, P., *et. al*. (2016). *Guía para el profesor de Matemáticas I*. UNAM, CCH-Azcapotzalco, México.
[8] Baldor, A. (2007). Aritmética (2 ed.). México: Patria.

Ejemplo, sumar 2/5 más ¾.

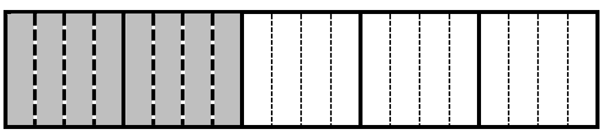
Para realizar esta suma nos auxiliaremos de un esquema de tres rectángulos, uno representará a ${}^{2}/{}_{5}$, otro para ¾ y el tercer rectángulo para representar a la suma. Iniciamos obteniendo fracciones equivalentes a ${}^{2}/{}_{5}$ y ¾.

$$\frac{2}{5} = \left\{\frac{4}{10}, \frac{6}{15}, \frac{8}{20}, \frac{10}{25}, \frac{12}{30}, \frac{14}{35}, \frac{16}{40}, \dots\right\}$$

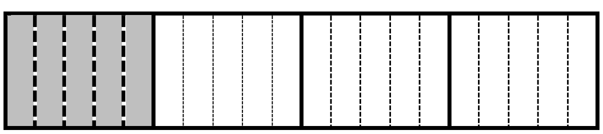
$$\frac{1}{4} = \left\{\frac{2}{8}, \frac{3}{12}, \frac{4}{16}, \frac{5}{20}, \frac{6}{24}, \frac{7}{28}, \frac{8}{32}, \frac{9}{36}, \frac{10}{40}, \dots\right\}$$

Primer denominador común 20, dividimos en veinte los rectángulos que representan a las fracciones $\frac{2}{5}$ y $\frac{1}{4}$. Cada porción de $\frac{1}{5}$ se divide en 4 $\left(\frac{4}{4} * \frac{1}{5}\right)$ partes iguales y cada porción de ¼ se divide en 5 partes iguales.

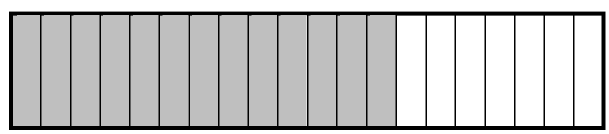
$$\frac{2}{5} = \frac{4}{4} * \frac{2}{5} = \frac{8}{20}$$



$$\frac{1}{4} = \frac{5}{5} * \frac{1}{4} = \frac{5}{20}$$



$$\frac{8}{20} + \frac{5}{20} = \frac{8+5}{20} = \frac{13}{20}$$



Actividad 12: Resuelve los problemas siguientes.

1. Si tienes en una botella 2/5 partes de aceite de cártamo y en otra botella 1/5 parte de aceite de soya, ¿qué porción de aceite tienes al vaciar el aceite de una en la otra?

2. En caso de que, en una botella tengas ¾ partes de aceite de soya y en otra botella una sexta parte del mismo aceite, ¿qué porción de aceite tienes al vaciar la de menor cantidad en la otra?

3. Resuelve las operaciones

a). $\frac{2}{15} + \frac{7}{15}$

b). $\frac{2}{3} + \frac{3}{5}$

c). $\frac{2}{7} + \frac{7}{5} + \frac{9}{10}$

Resta

Actividad 13: Resuelve los problemas siguientes.

1. La rapidez de un automóvil pasa de 13/7 a 16/9 kilómetros por minuto. ¿En cuánto disminuyó su rapidez?

2. Una pipa llena una alberca (originalmente vacía) a 3/7 de su capacidad. Posteriormente se abre el desagüe para vaciar 2/5 de su capacidad. ¿Qué parte de la capacidad queda?

3. La distancia a la que se encuentra cada número racional a partir del 0, considerada como positiva, es llamada *valor absoluto* del número. Por ejemplo, la distancia a la que se encuentra el 21 del origen es $|21| = 21$; para el número – *16* su distancia al origen es $|-16| = -(-16) = 16$.

Ahora si quisiera conocer la distancia entre dos números cualesquiera en la recta numérica a y b tendríamos que obtener el valor absoluto de la diferencia entre el número mayor menos el menor,

$$|b - a| \;\; con\; a < b$$

Por ejemplo, si a = - 6 y b = 3, la distancia entre ellos es

$$|3 - (-6)| = |3 + 6| = 9$$

Determina las distancias entre los números

a). 15 y 37.

b). 7 y – 8.

c). $\frac{3}{5}\; y\; \frac{5}{9}$.

d). $-\frac{7}{5}\; y\; \frac{18}{7}$.

e). $-\frac{20}{7}\; y - \frac{15}{8}$

5. Investiga qué es y cómo se obtiene,

a). el error absoluto

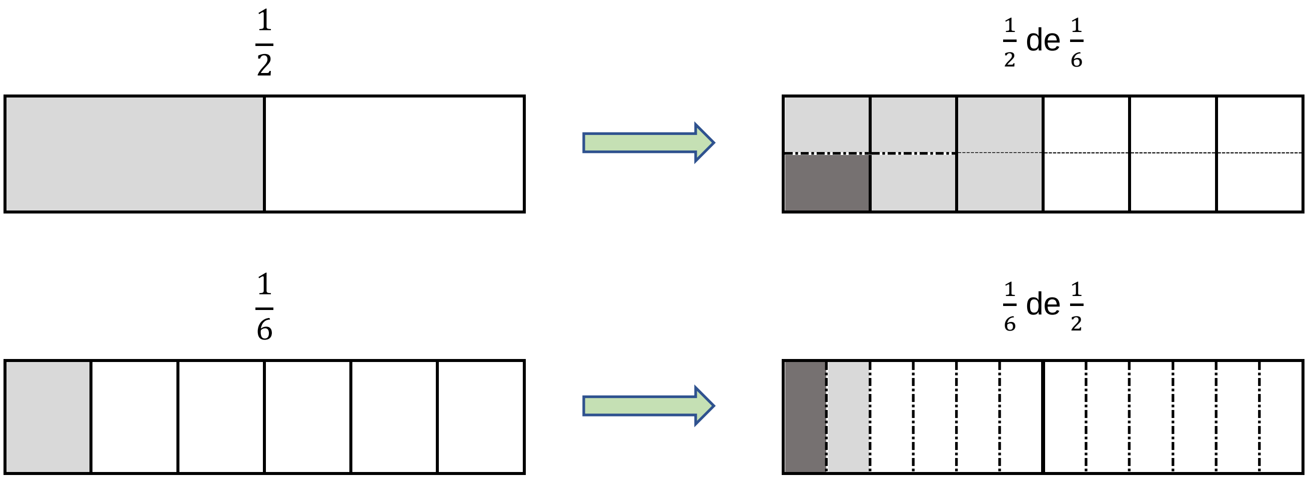
b). el error relativo

Multiplicación

Por ejemplo, multiplicar ½ por $\frac{1}{6}$ [9].

[9] Mendoza, C. F., et. al. (2019). Guía para el profesor: Curso de Matemáticas I con enfoque en la resolución de problemas, UNAM, CCH-Naucalpan, México.

La figura del rectángulo se divide verticalmente por la mitad, se puede sombrear o colorear ½ del rectángulo. Posteriormente se divide el mismo rectángulo horizontalmente en seis partes iguales, sombreando o coloreando $\frac{1}{6}$ de manera diferente. El resultado será uno de los doce rectángulos sombreado o coloreado de ambas maneras.



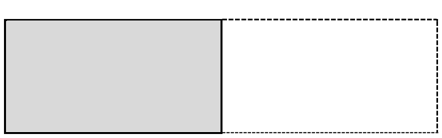
Actividad 14: Resuelve los siguientes problemas.

1. Un pedazo rectangular de cartulina ilustración tiene dimensiones 2/3 de m. por 3/5 de m. ¿Cuál es su área?
2. Un móvil se mueve con una rapidez de 120 Km/h durante 5.5 horas. ¿Qué distancia recorrerá en ese tiempo?
3. Un móvil se mueve con rapidez uniforme de 27/5 Km/h durante 25/6 horas. ¿Qué distancia recorrerá en ese tiempo?

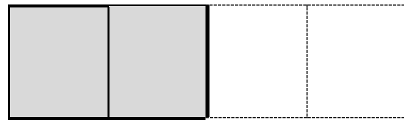
<u>División</u>

Al dividir un número racional entre otro, se cuestiona, ¿cuántas veces puede el divisor estar presente en el dividendo? Por ejemplo, ¿cuál es el resultado de dividir ½ entre ¼? La respuesta se observa al dividir un rectángulo en dos ½ y posteriormente ese mismo rectángulo en cuatro ¼. Veremos que en ½ caben dos partes de ¼. Lo mismo se observa si se hace transformando ½ en $\frac{2}{4}$, caben dos de ¼.

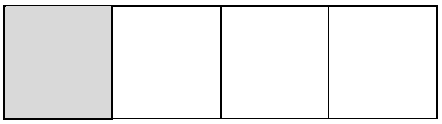
½.



2 de ¼.



¼.



Entonces el resultado es:

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2$$

Es decir

$$2 * \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Actividad 15: Resuelve los problemas siguientes

1.- Una varilla que mide 234 cm es medida con otra que mide 32 cm. ¿Cuál es la medida de la primera varilla cuando se mide con la segunda?

2.- Una varilla que mide 3/8 de metro es medida por otra que mide 2/5 de metro, ¿cuál es su nueva medida?

3.- Un móvil se mueve a velocidad constante de 61/3 Km/h. Si recorre una distancia de 122/5 Km, ¿cuánto tiempo le lleva recorrer esta distancia?

4.- Una alberca, originalmente vacía, es llenada por una pipa llenando el 35% de su capacidad cada hora. ¿Cuánto tiempo le llevará llenar por completo la alberca?

1.3 Potencias y radicales

Aprendizaje: *Opera correctamente con potencias y radicales con la misma base.*

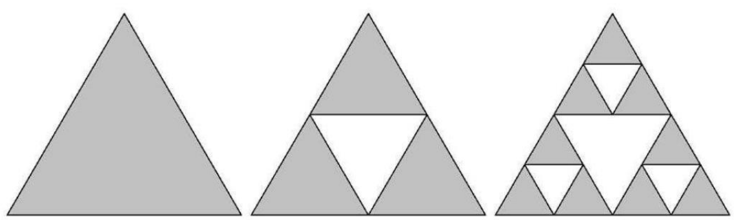
Actividad 16: Responde las preguntas siguientes en relación con un mazo de 52 cartas[10].

[10] Kine, M. (2001). Matemáticas para los estudiantes de humanidades, México, Fondo de Cultura Económica

1. Si tenemos, de una baraja de 52 cartas, un par de ases rojos y un par de reyes rojos, ¿cuántos pares diferentes, compuestos de un as y un rey, se pueden formar con las cartas indicadas?
2. Ahora si al par de reyes y ases agregamos un par de reinas rojas. ¿cuántas tercias diferentes, compuestas de un as, un rey y una reina, podrán formarse con los tres pares de cartas dadas?
3. Al agregar un par más de cartas, sotas (o jotos), rojas también. ¿Cuál sería el número de conjuntos diferentes de cartas, cada uno compuesto por 1 as, 1 rey, 1 reina y 1 sota?
4. Si tuvieras 10 diferentes pares de cartas y quieres saber cuántas combinaciones posibles de 10 cartas, una de cada par, ¿qué número sería?

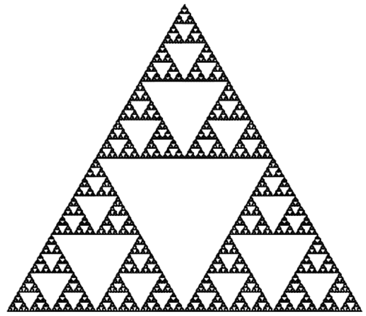
Actividad 17: Contesta lo que se pide con referencia al triángulo de Sierpinski

El triángulo de Sierpinski fue ideado por Wac law Sierpinski en 1915. Su construcción se hace mediante el proceso siguiente, se parte de un triángulo equilátero de lado 1. El primer paso consiste en dividirlo en cuatro triángulos equiláteros iguales mediante la unión de los puntos medios de los lados y eliminar el triángulo central, es decir nos quedamos con tres triángulos equiláteros en los vértices. El segundo paso de la construcción consiste en hacer lo mismo que hemos hecho en el primer paso sobre cada uno de los tres triángulos obtenidos en el paso anterior. Y se repite el proceso infinitas veces, obteniendo como resultado final el triángulo de Sierpinski. En la figura se muestran los tres primeros pasos[11].



El triángulo de Sierpinski hasta el paso 8

[11] Reyes, M., Fractales, consultado en 2021, https://www.estalmat.org/archivos/fractales.pdf



Escribe el número de triángulos sombreados en cada paso y completa la tabla siguiente

Pasos	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…	n
# Triángulos											

1. ¿Cuántos triángulos sombreados se generan en el paso 9?
2. ¿Podríamos obtener los que se generan en el paso 10 a partir de los anteriores pasos? Justifica.
3. ¿Cómo puedes obtener el número de triángulos del paso 2 con los triángulos del paso 6 y 4?
4. ¿Cómo podrías generar el número de triángulos sombreados del paso 10 con los del paso 5 y 2?
5. ¿Explica cómo podrías obtener el paso 0 a partir de cualquiera de los pasos siguientes?
6. Además, ¿qué ocurre con los exponentes negativos, escribe o explica una expresión para este caso?
7. A manera de conclusión, con las respuestas que obtuviste de las preguntas anteriores generaliza y escribe las propiedades de los exponentes con potencias enteras de una misma base.

Actividad 18: ¿Qué pasa con los exponentes de potencias racionales (fracciones), se puede aplicar las propiedades de potencias de números enteros?

Con una calculadora realiza las operaciones siguientes

a). $\sqrt{256} =$ $\quad\quad$ $16^2 =$

b). $\sqrt[3]{343} =$ $\quad\quad$ $7^3 =$

c). $\sqrt[4]{625} =$ $\quad 5^4 =$

d) $\sqrt[5]{-32} =$ $\quad (-2)^5 =$

¿Qué concluyes de la potencia y raíz?

Ahora, las siguientes expresiones escríbelas con una sola potencia, sin raíz

a). $\sqrt{16^2} =$ $\quad \left(\sqrt{16}\right)^2 =$

b). $\sqrt[3]{7^3} =$ $\quad \left(\sqrt[3]{7}\right)^3 =$

c). $\sqrt[4]{5^4} =$ $\quad \left(\sqrt[4]{5}\right)^4 =$

d) $\sqrt[5]{(-2)^5} =$ $\quad \left(\sqrt[5]{(-2)}\right)^5 =$

Generaliza este hecho, con una base a, grado de raíz n y un exponente m $\left(\sqrt[n]{a^m}\ \ o\ \ \left(\sqrt[n]{a}\right)^m\right)$.

Actividad 19:

1. Extiende las propiedades de los exponentes, pero ahora con números racionales de la forma $\frac{n}{m}$ como exponentes.

2. Efectúa las operaciones siguientes, para ejercitar las propiedades de los exponentes no uses calculadora. Simplifica tus respuestas

$$a).\ 2 * \sqrt[3]{4}\left(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{16}\right) \qquad b).\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{3}\right)^{-2} \qquad c).\frac{14}{33}\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{7}\right)^2 \qquad d).\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{5}{2\sqrt{2}}\right)^{-2}$$

$$e).\ \left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right) \quad f).\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2 \quad g).\ 3 * \sqrt{2}\left(\sqrt{2}-\sqrt{8}\right) \quad h).\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} \quad i).\sqrt{12} * \sqrt{3}$$

1.4 Significado contextual de las operaciones

Aprendizaje: *Traduce, relaciones contextuales en operaciones entre números racionales (enteros y no enteros) y las resolverá correctamente.*

Actividad 20: Resuelve los siguientes problemas empleando lo aprendido hasta ahora.

1. Si un rectángulo tiene de largo $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ y de ancho $\sqrt{3}-\sqrt{2}$, determina su área.

2**.** En una fiesta infantil asistieron 30 niños, a cada uno se le dio 2 bolsas de dulces. Si 4 de cada 10 niños deja una bolsa de dulces y la mitad de ellos olvido ambas bolsas de dulces, ¿cuántas bolsas de dulces se llevaron de la fiesta?

42 bolsas

3. Si el lado de un cuadrado aumenta en tres quintas partes, ¿qué porcentaje aumento su área?

4. En un yogur sabor fresa de 125 gr, aproximadamente el 0.35 del total corresponde a la fruta, ¿cuántos gramos de fresa contiene el yogur?

5. En un hospital de cada 50 camas se tienen ocupadas 24 de ellas. Si el total de camas ocupadas es 360, ¿con cuántas camas cuenta el hospital?

6. Unos padres repartes sus bienes mediante un testamento a sus 4 hijos. Estipulan en su testamento que se repartan sus bienes, desde el hijo mayor al menor, de la forma siguiente: 1/3, 2/9, 5/18 y el resto al menor, respectivamente del total de sus bienes. Ordena dichas cantidades de menor a mayor. ¿Cuál de los hijos es el que recibe la mayor parte? ¿quién es el hijo que recibe la menor herencia?

7.- Pedro dice a Juan: Si Yo te doy $15, tendremos igual cantidad de dinero. ¿En qué porcentaje excede lo que tiene Pedro a lo que tiene Juan?

8.- Una persona hereda 3/5 de un terreno y vende 1/8 de su herencia, ¿qué parte del terreno original vendió?

9.- Verónica toma 3/7 de un pastel y Guadalupe se come 2/5 de la parte de Verónica. ¿Qué parte del pastel se comió Guadalupe?

10.- De un terreno, una persona recibe 3/5 de él y vende ¼ de lo que le tocó, ¿con qué parte del terreno se quedó?

11. Una planta tiene una altura de 28/5 de metro, al transcurrir una semana su altura alcanza los 27/3 de metro. ¿cuánto creció esa semana?

12.- El saldo de una cuenta de crédito bancario es de $15000, recibiendo una amonestación del 20% mensual, sobre el saldo, por no pago del mínimo a pagar. Si la persona, al transcurrir un mes, no paga en el límite establecido por el Banco. ¿A cuánto asciende la amonestación?

13. Una tienda departamental, bastante popular entre la población de clase media, tiene una promoción de verano en todos sus departamentos con un 30% sobre el precio de etiqueta más un 20% de lo ya rebajado. Si una chamarra de piel tiene en su etiqueta un precio de $3290, ¿cuál sería su precio al pagar en cajas?

14. En cada una de cuatro bodegas hay igual cantidad de sillas. Si de cada una se sacan 90 sillas, quedan en las cuatro juntas una cantidad de sillas igual a las que había en una de ellas. ¿Cuántas sillas había en cada bodega?

15.- La azúcar blanca cuesta 5 pesos el kilo y la azúcar morena cuesta 4 pesos el kilo. En una caja ya tengo 60 kilos de azúcar morena; ¿cuántos kilos de azúcar blanca debo agregar para que pueda vender tal caja en 450 pesos?

Aprendizaje: *Resuelve problemas aritméticos que involucren una secuencia de relaciones contextuales, auxiliándose de estrategias heurísticas en las etapas de comprensión, elaboración de un plan y su ejecución.*

16. ¿Cuál es el valor de un medio de dos tercios de tres cuartos de cuatro quintos de cinco sextos de seis séptimos de siete octavos de ocho novenos de nueve decimos de 1000?

17. Una receta para pastel requiere 2½ tazas de harina y 1 $^1\!/_3$ de azúcar. ¿Cuál es la razón de harina con respecto al azúcar?

18. La temperatura diaria promedio para la primera semana de enero en Montana fue: -2, -12, 10, 5, -3, 10, 12 °C. ¿Cuál fue la temperatura promedio durante la semana?

19. Un hombre encomendó a su albacea que una vez por año distribuyera exactamente 660 monedas de plata entre los pobres de su parroquia, pero solo se debería continuar con la donación mientras hubiese una cantidad diferente de hombres y mujeres y siempre entregando 18 monedas a cada integrante de un determinado conjunto de mujeres y 30 monedas a cada integrante de un determinado conjunto de hombres. ¿Durante cuántos años se podrá realizar esta obra de caridad?[12]

20. Un comerciante compró café fresco; después de secarlo, lo vendió a $197 el kg y gano 1/5 del precio de compra del café fresco. ¿Cuál es el precio de compra del kilogramo de café fresco, sabiendo que el café al secarse; pierde 1/10 de su peso?

21. Una caja contiene cierto número de bombones, sin sobrepasar los 465. Si se hacen grupos de seis no sobra ninguno; si hacemos grupos de cinco no sobran bombones; si se forman grupos de trece tampoco sobran bombones. ¿Cuántos bombones tiene la caja?

[12] Extraído de Seminario de Matemáticas, 2016, *Guía para el profesor de Matemáticas I.* UNAM, CCH-Oriente, México.

22. Jazmín tiene 20 bombones de naranja, 32 de limón y 12 de fresa. Quiere ponerlos en bolsas de tal forma que cada una tenga el mismo número de bombones de cada clase. ¿Cuántas bolsas necesitará? ¿cuántos bombones de cada clase pondrá en cada bolsa?

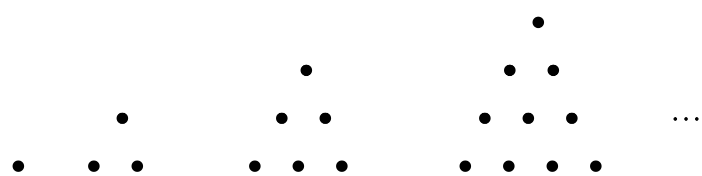
23. Si una persona te propone darte $ 1000 diarios durante 30 días a cambio de que el primer día le des un centavo, el tercer día el doble del primer día; el quinto día el doble del tercer día (4 centavos); el séptimo día 8 centavos y así sucesivamente hasta llegar a los 24 días, ¿te conviene el trato? justifica

25. ¿Qué hora es, si quedan del día la tercera parte de las horas que han pasado?

> ***Aprendizaje***: *Reconoce patrones numéricos y geométricos en situaciones problemáticas y modelará su comportamiento.*

Actividad 21: Resuelve los problemas siguientes

1. Un número triangular es el que puede representarse mediante un arreglo triangular de puntos. Por ejemplo 1, 3, 6 y 10 son los primeros cuatro números triangulares.

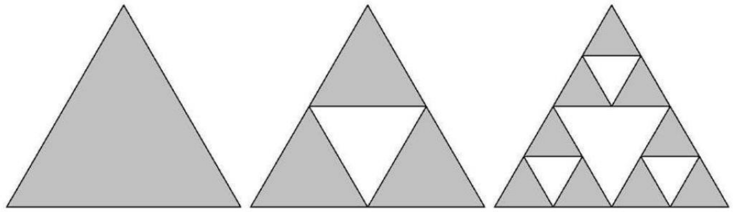


1 3 6 10

Cuente el total de puntos en cada número y complete la siguiente tabla. Determine una expresión que generalice para n-puntos de la base.

# de ptos en base	1	2	3	4	5	10	20	100	n
Total de puntos									

2. Para el triángulo de Sierpinski, el triángulo original de lado L (puede ser 2, …) es equilátero.



Escribe el Perímetro de los triángulos sombreados en cada paso y completa la tabla siguiente

Pasos	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…	n
Lado											
Perímetro											

a. ¿Cuál es la longitud del lado de cada triángulo en el paso 4?

b. ¿Cuál es la longitud del lado de cada triángulo en el paso 7?

c. Calcula la longitud del lado de cada uno de los triángulos en cada paso.

d. ¿Cuál es el perímetro de los triángulos sombreados en el paso 4?

e. Cuál es el perímetro de los triángulos sombreados en el paso 7?

f. Calcula el perímetro del triángulo en cada uno de los pasos

g. Calcula la suma del perímetro de los triángulos hasta el paso 4.

3. Investiga sobre el triángulo de Pascal y como construirlo. Observa la relación del teorema del binomio y el triángulo de Pascal. El patrón triangular surge cuando varios binomios se elevan a diferentes potencias, a continuación, se presentan las primeras 4 potencias del binomio a + b, para observar el patrón.

$(a+b)^0 = 1$ 1

$(a+b)^1 = a+b$, coeficientes de los términos 1 1

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 1 2 1

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^2$ 1 3 3 1

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ 1 4 6 4 1

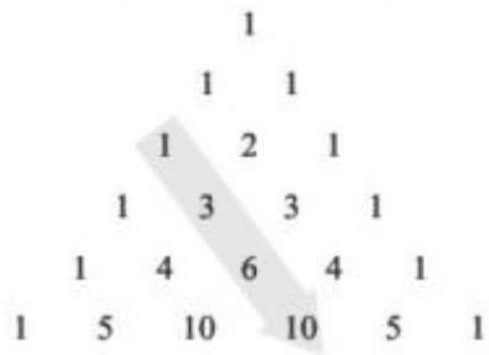
… … … … … … …… … … … … … …… … … … … … …

⋮

⋮

a. Completa hasta el renglón número 10.

b. Observa los cinco números que siguen en la sucesión diagonal de la figura, ¿cómo se denominan estos números?[13] [Idea: Ve al problema 1 de esta sección].



[13] De Miller, C. D., et. al. (2006), Matemática: Razonamiento y aplicaciones, 10 ed., México, Pearson Educación.

Propuesta de evaluación

1. Un pantalón cuesta \$280 pero tiene un descuento del 15%, si el pago se realizó con un billete de \$500, ¿qué cantidad de dinero es el cambio correcto?

2. ¿Cuál es el valor de un medio de dos tercios de tres cuartos de cuatro quintos de cinco sextos de seis séptimos de siete octavos de ocho novenos de nueve decimos de 1000?

3. En una reunión de fin de año hay 17 personas, si todas abrazaron a todas. ¿Cuál es el total de abrazos?

4. Realiza las operaciones indicadas y simplifica los resultados en su mínima expresión.

a) $\frac{5}{6}-\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\right)$ b) $\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{6}\right]$ c) $\left(\frac{5}{7}+\frac{7}{9}\right)\div\left(1+\frac{1}{2}\right)$ e) $\frac{2+\frac{1}{2}}{3+\left(\frac{1}{1+\frac{1}{3}}\right)}$ f) $\frac{\frac{11}{49}-\frac{3}{7}}{\frac{11}{49}+\frac{3}{7}}$

5. ¿Cuáles de los siguientes números son racionales y cuáles son irracionales?

a) $\sqrt{4}$ b) $1+\sqrt{2}$ c) $\left(3*\sqrt{2}\right)\left(5*\sqrt{2}\right)$ d) 0.375 e) $\left(1+\sqrt{3}\right)^2$ f) $5*\sqrt{2}$

6. Expresa los números racionales en su expresión decimal equivalente.

a) $\frac{7}{8}$ b) $\frac{3}{20}$ c) $\frac{3}{7}$

7. Escribe en fracción los siguientes números racionales.

a) 0.123123... b) 2.565656... c) 0.19999....

8. Una receta de pastel para 6 personas indica las cantidades siguientes: 300 gr de harina, 100 gr de azúcar, 150 gr de mantequilla, leche y demás ingredientes al gusto. Si harás el pastel para 15 personas, ¿cuáles serán las cantidades correctas de los ingredientes?

9. Encuentra un número racional entre $\frac{17}{37}$ y $\frac{52}{111}$.

10. Si el lado de un cuadrado aumenta el 100% ¿qué porcentaje aumenta su área?

Bibliografía

1. Peralta, G., *et. al*. (2017). *Guía para el profesor: Matemáticas I.* UNAM, CCH-Sur, México.
2. Seminario de Matemáticas, (2016), *Guía para el profesor de Matemáticas I.* UNAM, CCH-Oriente, México.
3. Mendoza, C. F., et. al. (2019). *Guía para el profesor: Curso de Matemáticas I con enfoque en la resolución de problemas*, UNAM, CCH-Naucalpan, México.
4. Becerril, P., *et. al*. (2016). *Guía para el profesor de Matemáticas I.* UNAM, CCH-Azcapotzalco, México.
5. Klein, Morris, (2001), *Matemáticas para los estudiantes de humanidades*, 3ed., México, Fondo de Cultura Económica.
6. Kalnin, R. A., (1988), *Álgebra y funciones elementales*, 3ed., Moscu, Editorial Mir.
7. Courant, R., Robbins, H. (2002), *¿Qué son las matemáticas? Conceptos y métodos fundamentales*, 1ª ed., México, Fondo de cultura económica.
8. Miller, C. D., et. al. (2006), *Matemática: Razonamiento y aplicaciones*, 10 ed., México, Pearson Educación
9. Baldor, A. (2005). *Aritmética*. México: Publicaciones Cultural.

UNIDAD 2

Variación directamente proporcional y funciones lineales

Propósito:

Al finalizar, el alumno:
Modelará y analizará situaciones que involucren la variación entre dos cantidades en los casos en que la razón de sus incrementos sean proporcionales; utilizando los registros tabular, gráfico y algebraico, con la finalidad de que se inicie en el estudio de la variación, la idea de relación funcional, sus conceptos asociados y, continúe la comprensión del lenguaje algebraico como la representación de la generalidad.

Aprendizajes:

- Identifica situaciones donde existe variación entre dos magnitudes.
- Dada una situación donde existe variación entre dos cantidades, el alumno identifica los elementos que corresponden a los conceptos de variable dependiente e independiente, la razón de cambio y su cálculo dado un incremento de la variable independiente.
- Traduce en una tabla de valores algunos “estados” correspondientes a la descripción verbal de la variación directamente proporcional entre dos magnitudes.
- Traduce en una gráfica, la descripción tabular o verbal de la variación relacionada (directamente proporcional) entre dos cantidades y usa esta representación para obtener información sobre la variación.
- Representa algebraicamente la variación directamente proporcional entre dos cantidades y obtiene a partir de ella información sobre ésta.
- Identifica entre una serie de variaciones entre dos aquellas que correspondan al concepto de función lineal.
- Modela con la expresión $y=mx+b$, una variación relacionada entre dos variables con rapidez de variación constante y condición inicial (0, b). Transitando en la etapa de exploración, por representaciones tabulares y gráficas.

- Dada una variación que se modela con una función lineal, el alumno calcule estados específicos de la variación, su rapidez de cambio y estado inicial, empleando sus representaciones gráfica y analítica.

Introducción

Las matemáticas están tan inmersas en nuestro quehacer diario que nos olvidamos que nos ayudamos de ellas para resolver un sinfín de situaciones problemáticas, como por ejemplo cuando adquirimos cosas que satisfacen nuestro bienestar personal.

Es así, que sin saberlo, nos encontramos con diversas cantidades que se relacionan entre sí, de manera que, si una se incrementa, la otra también lo hace la misma cantidad de veces. Si al cambiar una, corresponde un cambio proporcional de la otra, se trata de una variación proporcional directa. Es decir, dos valores varían de forma directamente *proporcional* si a todo aumento de una, corresponde un aumento para la otra, un cierto número de veces y a toda disminución de una corresponde una disminución para la otra.

Ejemplos de cantidades que son directamente proporcionales:

Trabajo – dinero, volumen – capacidad, tiempo – producción de trabajo,
tiempo – distancia, capacidad – peso, compra – gasto, etc.

2.1 El concepto de variación entre dos magnitudes.

Aprendizaje: *Identifica situaciones donde existe variación entre dos magnitudes.*

Con las actividades siguientes, identificarás situaciones donde existe variación entre dos magnitudes dadas.

Actividad 1. Adán vende tacos al pastor en el cruce de dos calles importantes. En las noches, Cuco ayuda a su paisano para atender a los clientes. La gente consume diversas cantidades de tacos, por lo que Cuco se encontró con un problema, se le dificultaba calcular lo que debía cobrar a cada persona. Considera que cada taco al pastor cuesta $3.

Contesta las siguientes preguntas:

1. ¿Cuánto debe cobrar por 15 tacos al pastor? ___________________________________

2. Si una familia consume 24 tacos al pastor, ¿Cuánto debe cobrar Cuco? __________

3. ¿Sería de gran ayuda hacer una tabla donde se muestre el número de tacos y el precio que debe cobrar? ¿Por qué? ______________________________________

____

Cada taco al pastor cuesta $3, completa la tabla siguiente:

Número de tacos al pastor	**Precio que se debe cobrar**
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
10	
15	
20	
24	

Te habrás dado cuenta que los valores de la columna precio que se debe cobrar se obtienen multiplicando el número de tacos al pastor por $3.

La información obtenida en la tabla, ¿podrá representarse de manera geométrica?

____

Claro que sí, ¡contestaste correctamente!, sí es posible representar la información de la tabla anterior en forma geométrica, porque cada par de valores que aparecen en las filas de la tabla se pueden considerar como una pareja ordenada (número de tacos, precio de venta), las cuales se representarían geométricamente como puntos en el plano cartesiano.

¿Por qué crees que son variables el número de tacos y el precio que se debe cobrar? Explica: ____

____

De la tabla anterior, podemos obtener las siguientes parejas ordenadas, complétalas:

(1, ___) (2, ___) (3, ___)

(4, ___) (5, ___) (6, ___)

(7, ___) (10, ___) (15, ___)

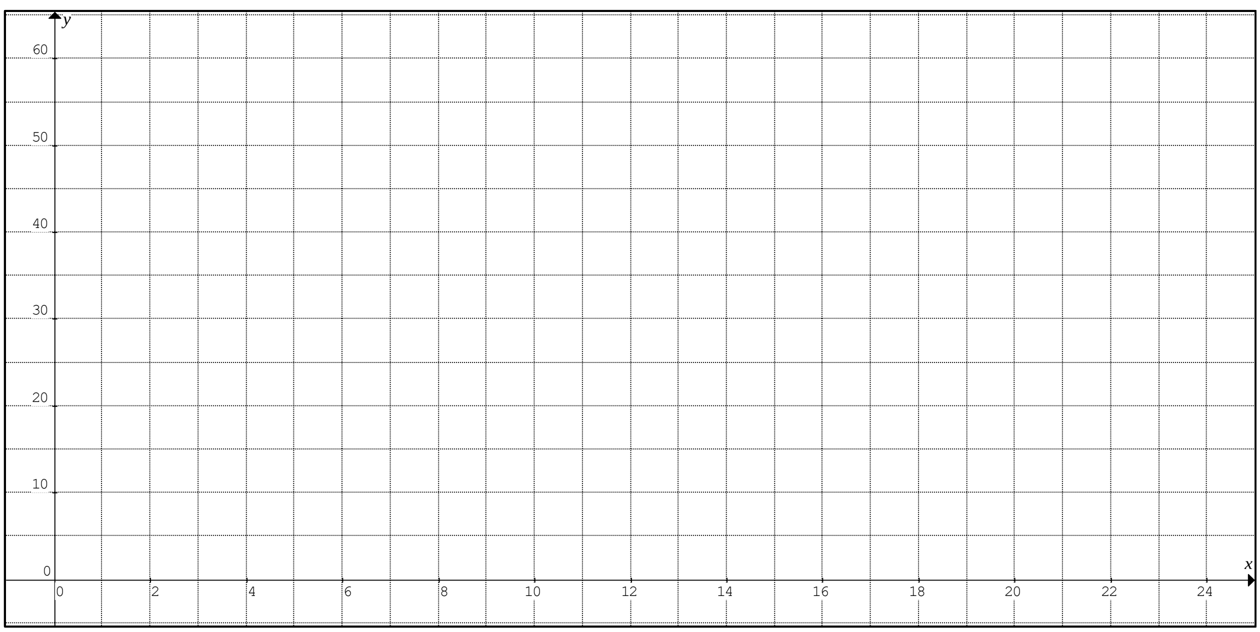
(20, ___)

Es necesario asignar un nombre a cada pareja ordenada, para que, al representarlas en el plano cartesiano, sea posible distinguirlas fácilmente una de otra, con una letra mayúscula A, B, C, D, etc., respectivamente. Cada pareja ordenada se conoce como **coordenada**, donde el primer número de la pareja se llama **abscisa** y el segundo número es la **ordenada**.

Para trazar el sistema de ejes coordenados se utiliza un par de rectas perpendiculares con origen común, llamado el origen del sistema de coordenadas. La recta horizontal se conoce como eje de las abscisas y la recta vertical se llama eje de las ordenadas. Como habrás analizado, en el eje de las abscisas se localizan las abscisas de cada coordenada y en el eje de las ordenadas se localizan las ordenadas.

El eje de las abscisas se le llama el eje de las “x” y al de las ordenadas, el eje de las “y”, porque es común encontrar que las coordenadas de las parejas ordenadas se representan con las letras “x” y “y” para su abscisa y ordenada respectivamente. Así que una pareja ordenada se puede escribir como (x, y).

Ahora, localiza las parejas ordenadas anteriores, en el siguiente plano cartesiano.



Contesta las siguientes preguntas:

¿Los puntos que localizaste en el plano cartesiano son colineales? Si ( ) No ( )

Une los puntos por medio de un trazo suave. ¿Qué tipo de línea obtuviste?

a) Mixta b) Curva c) Recta d) Quebrada

Observa los valores obtenidos en la tabla anterior. Cuando aumenta el número de tacos al pastor, ¿cómo se comportan los valores de los precios que se deben cobrar? ¿aumentan o disminuyen? ___________________

Cuando disminuye el número de tacos al pastor, ¿cómo se comportan los valores de los precios que se deben cobrar? ¿aumentan o disminuyen? ___________________

¿La variable **precio que se debe cobrar** dependerá de la variable **número de tacos al pastor**? ____________________________________

A decir verdad, nuevamente has contestado correctamente la última pregunta, ya que, si observas con detenimiento los resultados de la tabla, podrás ver, por ejemplo, que entre mayor sea el consumo de tacos al pastor, mayor es la cantidad de dinero que se debe cobrar. Es decir, la cantidad de dinero que se debe cobrar depende del número de tacos que se consumen.

2.2 Variables independiente y dependiente.

Aprendizaje: *Dada una situación donde existe variación entre dos cantidades, el alumno identifica los elementos que corresponden a los conceptos de variable dependiente e independiente, la razón de cambio y su cálculo dado un incremento de la variable independiente.*

Cuando estamos seguros de que una variable depende de otra, a una de ellas (la que depende) se le llama **variable dependiente** y a la otra **variable independiente**. Se acostumbra representar a la variable dependiente con la letra **y**, y a la variable independiente con **x.**

Regresando al ejemplo anterior, analizaremos si existe alguna relación entre las variables **precio que se debe cobrar** y **número de tacos**. Contesta las preguntas siguientes:

¿La variación de la variable **precio que se debe cobrar** depende de la variación de la variable **número de tacos**? ____

Por lo tanto, la variable dependiente es: ______________________________________

Y la variable independiente será: ____

La letra que se asigna a la variable dependiente es: ____________________________

La letra que se asigna a la variable independiente es: ___________________________

El propósito de esto es investigar si hay o no **variación proporcional** entre las variables **x** y **y**. Por tal motivo, es conveniente que compares los valores que toman las variables **x** y **y** en cada fila de la tabla anterior.

Las comparaciones se pueden hacer de dos maneras: por diferencia o por cociente.

Actividad 2. Llena la siguiente tabla con el propósito de conocer si existe alguna regularidad entre los valores que toman las variables del ejemplo anterior.

x	*y*	*x – y*	*y – x*	*x / y*	*y / x*
1	**3**				
2	**6**				
3	**9**				
4	**12**				
5	**15**				
6	**18**				
7	**21**				
10	**30**				
15	**45**				
20	**60**				

¿Observa la tabla, algunos valores de las columnas son constantes? _______________

¿Cuáles columnas tienen valores constantes? _________________________________

Escribe los valores constantes: _______________ y ________________

Habrás notado que hay un valor constante en las columnas donde se compararon las cantidades por cociente, en las columnas “x/y” y “y/x”.

Estas constantes te ayudarán a obtener una fórmula que relaciona a la variable “**x**” (**número de tacos)** con la variable “**y**” (**precio que se debe cobrar)**. Si tomas en consideración la columna y/x, puedes concluir que todas las coordenadas (x, y) cumplen con la siguiente relación:

$$\frac{y}{x} = 3$$

despejando **y**,

$$y = 3x$$

está fórmula relaciona a la **variable dependiente** con la **variable independiente**.

Contesta las siguientes preguntas:

¿Cuánto pagará una persona que consume 8 tacos? ___________________________
¿Cuánto pagará una persona que consume 13 tacos? ___________________________
¿Cuánto pagará una familia que consume 35 tacos? ___________________________
Si una familia paga $100, ¿cuántos tacos compraron? __________________________
Si una persona paga $54, ¿cuántos tacos se comió? ________________________

2.3 Razón de cambio entre dos variables correlacionadas.

La razón de cambio es la medida en la cual una variable se modifica con relación a otra. Es decir, se trata de la magnitud que compara dos variables a partir de sus unidades de cambio.

La razón de cambio del ejemplo anterior, es el cociente

$$\frac{y}{x} = a$$

Por lo tanto, la razón es 3. Cuando la razón de cambio entre dos cantidades es constante, existe variación entre las dos cantidades. Si la razón de cambio entre dos variables es cero, significa que las variables no están relacionadas.

Actividad 3. Si el lado de un cuadrado mide 1 cm, su perímetro mide 4 cm. Si el lado mide 2 cm, su perímetro medirá 8 cm. ¿Cuál será el perímetro del cuadrado si su lado mide 18 cm?

Contesta las siguientes preguntas:
Variable dependiente: ____
Variable independiente: ____
Razón de cambio: _________________________
Si el lado del cuadrado mide 18 cm, el perímetro mide: ____________________________

Actividad 4. Rocío corre a una velocidad de 6 m por cada segundo. ¿Qué distancia recorrerá en 8 segundos?

Responde las preguntas siguientes:
Variable dependiente: ____
Variable independiente: ____
Razón de cambio: _________________________
Distancia que recorre Rocío en 8 segundos: ____________________________

2.4 Variación directamente proporcional

2.4.1 Representación tabular de la variación directamente proporcional entre dos magnitudes.

Aprendizaje: *Traduce en una tabla de valores algunos "estados" correspondientes a la descripción verbal de la variación directamente proporcional entre dos magnitudes.*

Dos variables son **directamente proporcionales**, si y sólo si, el valor de una de ellas aumenta y el correspondiente de la otra variable también aumenta. Es decir, son directamente proporcionales cuando el cociente entre dos variables es constante.

Para el ejemplo mostrado al inicio, el cociente de dividir el valor de la variable dependiente entre el valor de la variable independiente es una constante que equivale a 3, es decir, las variables son directamente proporcionales, ya que el precio que se debe de cobrar es directamente proporcional al número de tacos que se consumen.

Es decir, podemos afirmar que,

Cuando la razón entre dos cantidades $\frac{y}{x}$ es constante, se dice que, **y** es **directamente proporcional** a **x**, o también se puede decir que, **y varía directamente** en relación a **x**. El valor constante se llama *a* y se le conoce como **constante de proporcionalidad** o **razón de cambio**.

$$\frac{y}{x} = a \qquad \text{o} \qquad y = ax$$

Contesta las siguientes preguntas, considerando el primer ejemplo.

¿Cuál es el valor de y para x = 5? ________________________

Aumenta el valor de x, por ejemplo, para x = 7, ¿el valor de y es mayor que para x = 5?

____

Nuevamente, aumenta el valor de x, ¿disminuyó el valor de y? ___________________

Finalmente, disminuye el valor de x, ¿disminuyó el valor de y? ___________________

Analiza tus respuestas, te habrás dado cuenta que cuando **x** aumenta, el valor de **y** también aumenta y cuando el valor de **x** disminuye, el valor de **y** disminuye, ésta es una condición necesaria para toda pareja de variables directamente proporcionales.

Por lo tanto,

- Dos variables son directamente proporcionales si y sólo si, $y = ax$.
- Si dos variables son directamente proporcionales, entonces, **y** aumenta, cuando **x** aumenta.
- Si dos variables son directamente proporcionales, entonces, **y** disminuye, cuando **x** disminuye.
- Si dos variables son directamente proporcionales, entonces los puntos que representan las coordenadas (x, y) son colineales, es decir, se encuentran alineados.

Resulta conveniente trabajar con tablas donde se muestren diferentes valores para las variables involucradas en un problema, porque es más simple y fácil de visualizar la relación entre las dos variables. Por ejemplo,

Actividad 5. El kilo de tortillas vale $17, completa la tabla siguiente:

Número de kilos (x)	Dinero por pagar (y)
1	17
2	
3	
	85
	153

Completa la tabla siguiente:

Número de kilos (x)	Dinero por pagar (y)	$\frac{x}{y}$	$\frac{y}{x}$
1			
2	34		
3			
	68		
5			

¿Son constantes los valores de las últimas dos columnas? ____________________

Como el cociente de dividir ambas cantidades es constante, significa que las variables tienen **variación directamente proporcional**.

Actividad 6. En un laboratorio se mide durante cierto tiempo los litros de sangre que bombea el corazón de una persona cuyo peso es de 70 kg, obteniéndose los siguientes resultados, completa la tabla:

Tiempo en minutos (x)	Litros de sangre (y)
4	20
7	
10	50
12	

Ahora, completa la siguiente tabla:

Tiempo en minutos (x)	Litros de sangre (y)	$\frac{x}{y}$	$\frac{y}{x}$
1			
2			
3	15		
	20		
5			
6			

¿Son constantes los valores de las últimas dos columnas? ___________________

Como el cociente de dividir ambas cantidades es constante, significa que las variables tienen **variación directamente proporcional**.

2.4.2 El patrón aditivo en una variación directamente proporcional.

Cuando dos variables son directamente proporcionales, los valores de la variable dependiente forman una sucesión aritmética, es decir, los valores se obtienen mediante un patrón aditivo, de forma que al sumar una misma cantidad a cada término anterior se obtiene el siguiente término. En este caso, el patrón aditivo corresponde a la razón de cambio entre las dos variables que son directamente proporcionales.

Actividad 7. Por cada 24 kg de naranja se obtienen 6 litros de jugo. Completa la tabla siguiente:

Litros de jugo (x)	Kilos de naranja (y)	$\frac{x}{y}$	$\frac{y}{x}$
1			
2			
3			
4			
5			
6	24		

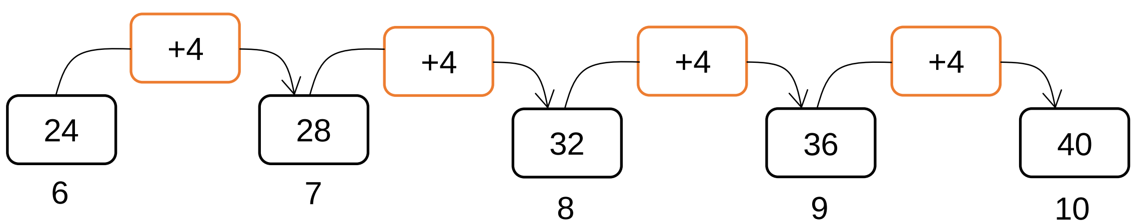
Como los cocientes de las dos últimas columnas son valores constantes, entonces, las variables litros de jugo y kilos de naranja, son directamente proporcionales.

Siempre vamos a considerar la última columna como la razón de cambio entre las variables dependiente (y) e independiente (x), observa que el cociente de esta columna es constante y para este caso es igual a 4.

$$\frac{y}{x} = 4$$

Considerando que el patrón aditivo corresponde a la razón de cambio, entonces, el patrón aditivo será de 4. Observa en la tabla que para obtener 6 litros de jugo se necesitan 24 kg de naranjas, ¿cuántos litros de jugo se obtienen con 40 kg de naranjas?

Para responder esta pregunta debemos hacer una secuencia aritmética, en la que el patrón aditivo es sumar 4 y el término inicial es 24 kg.



Después de conocer los términos de la secuencia, que corresponden a los kilos de naranjas necesarios para obtener los litros de jugo, es fácil saber que con 40 kg de naranjas se obtienen 10 litros de jugo.

Actividad 8. Un avión vuela a velocidad constante de la Ciudad de México a París, Francia. Si en 10 horas ha recorrido 7972 km aproximadamente, ¿qué distancia habrá recorrido en 14 horas?

Considerando que las variables tiempo y distancia tienen variación directamente proporcional, contesta las preguntas siguientes:

Variable dependiente (y): ______________________________

Variable independiente (x): ______________________________

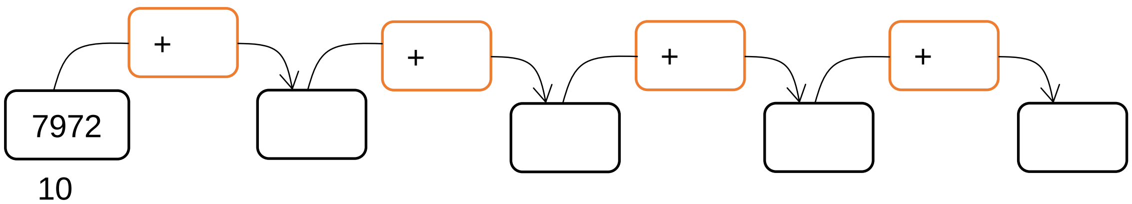
Valor de x: ___________________

Valor de y: ___________________

Razón de cambio:

$$\frac{y}{x} = a \quad \Rightarrow \quad \frac{\quad}{\quad} =$$

Por lo tanto, valor del patrón aditivo: __________



Entonces, en 14 horas el avión habrá recorrido una distancia de ______________ km.

Actividad 9. Una motocicleta consume 2 litros de gasolina para recorrer 90 km, ¿qué distancia recorrerá si consume 6 litros de gasolina? Considera que las variables litros de gasolina y distancia de recorrido tienen variación directamente proporcional.

Realiza las siguientes actividades:

Variable dependiente (y): ______________________________

Variable independiente (x): ______________________________

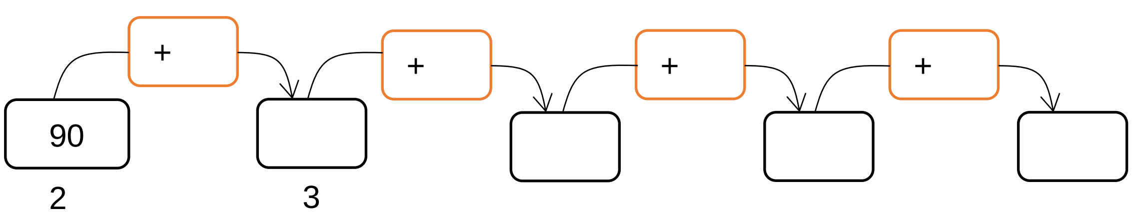
Valor de x: ___________________

Valor de y: ___________________

Razón de cambio:

$$\frac{y}{x} = a \quad \Rightarrow \quad \frac{\quad}{\quad} =$$

Por lo tanto, valor del patrón aditivo: __________



Entonces, si la motocicleta consume 6 litros de gasolina habrá recorrido una distancia de ______________ km.

Actividad 10. Juan necesita reparar la cerca de su parcela, por lo que decide ir a la ferretería para comprar 80 metros de alambre de púas, ahí observa una tabla que muestra el costo para ciertas cantidades de alambre.

Cantidad (m)	Precio ($)
20	100
30	150
50	250

Realiza las siguientes actividades:

¿Las variables cantidad y precio tienen variación directamente proporcional? _________,

¿Por qué? ____

____

Variable dependiente (y): _____________________________

Variable independiente (x): ____________________________

Valor de x: __________________

Valor de y: __________________

Razón de cambio:

$$\frac{y}{x} = a \quad \Rightarrow \quad \frac{\quad}{\quad} =$$

Entonces, valor del patrón aditivo: __________

Completa la serie:

78		79						
390	+		+		+		+	

Por lo tanto, Juan debe pagar $_________ por 80 metros de alambre de púas.

2.5 Sistema Cartesiano

2.5.1 El punto como representación de "estados" específicos de la variación.

Aprendizaje: *Traduce en una gráfica, la descripción tabular o verbal de la variación relacionada (directamente proporcional) entre dos cantidades y usa esta representación para obtener información sobre la variación.*

Recuerda que dos variables son directamente proporcionales, si al aumentar una variable la otra aumenta, o si disminuye una variable la otra disminuye. Y al cociente de las dos variables se le llama razón de cambio.

Si tenemos dos variables que tienen variación directamente proporcional, su representación se puede hacer de manera algebraica o de forma gráfica; hacer la representación tabular es necesario porque cada pareja de valores corresponde a un punto del plano cartesiano, que representan la variación directamente proporcional.

Cuando dos variables son directamente proporcionales, su representación en el plano cartesiano es una semirecta que parte del origen de coordenadas y cada punto de la semirecta representa valores específicos de la variación que nos proporciona información importante acerca de las variables involucradas. Cada punto tiene coordenadas (x, y).

Actividad 11. Si un kilo de manzanas tiene un costo de $60, completa la tabla siguiente:

Número de kilos (*x*)	Dinero por pagar (*y*)	Punto (*x, y*)
1	60	(1, 60)
2		
3		
5		
8		

Habrás notado que la razón de cambio es un valor constante de 60 y al aumentar el número de kilos también aumenta la cantidad de dinero que se debe pagar, por lo tanto, las variables tienen variación directamente proporcional.

Cada coordenada (x, y) se puede localizar en un plano cartesiano para saber como se comportan las variables en una variación directamente proporcional, además de que cada coordenada proporciona información importante acerca de la relación entre ambas variables de manera específica, por ejemplo, consideremos la coordenada (2, 120), estos valores indican que, si se compran 2 kilos de manzanas, se tiene que pagar $120.

Para las siguientes coordenadas escribe cuántos kilos de manzana se compraron y cuánto dinero se pagó por ellas:

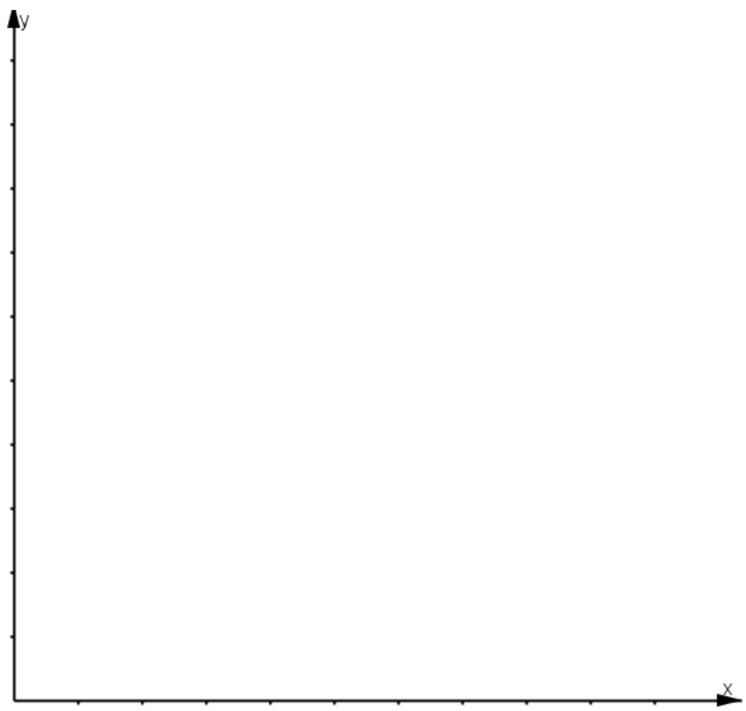
(3, 180): ____

(5, 300): ____

(8, 480): ____

2.5.2 Convenciones sobre las escalas.

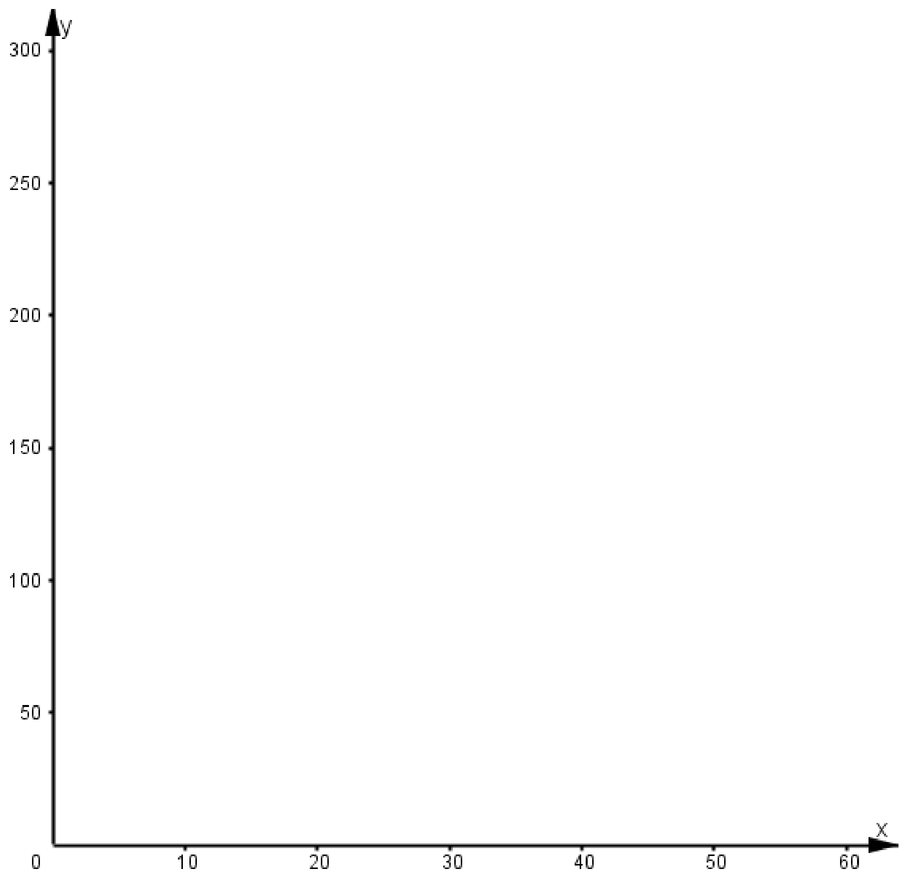
Teniendo la tabla de valores *x* e *y*, procedemos a dibujar un plano cartesiano, donde el eje vertical es el eje "Y" y el eje horizontal es el eje "X". Dividimos cada uno de los ejes en porciones de 1 unidad de medida:



Analizamos los valores más grandes de cada columna de la tabla y asignamos a cada porción de cada eje, valores que incluyan los valores más grandes de la tabla. Por ejemplo, consideremos la siguiente tabla de valores que son directamente proporcionales:

Cantidad (x)	Precio (y)
20	100
30	150
50	250

El valor mayor para el eje **x** es 50 y para el eje **y** es 250, de forma que, no es conveniente que se divida el eje **x** y el eje **y** en porciones de 1 unidad porque necesitaríamos una gráfica muy grande para incluir estos valores. Lo que podemos hacer es dividir al eje **x** en porciones de 10 unidades y al eje **y** en porciones de 50 unidades, de la manera siguiente:



La escala que conviene utilizar es la siguiente:

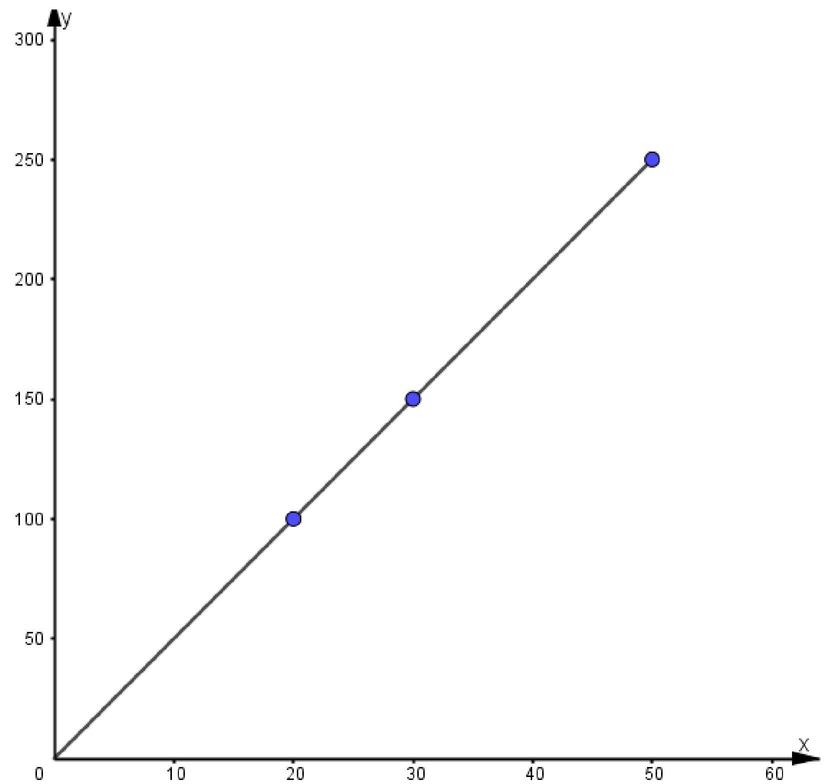
En el eje **x**, 1 unidad equivale a 10 unidades y en el eje **y**, 1 unidad equivale a 50 unidades. Con esta escala se incluyen a todos los valores de la tabla.

Al hacer la gráfica de la relación entre dos variables que tienen variación directamente proporcional, es conveniente tomar en cuenta las siguientes consideraciones:

- Se debe escoger una escala adecuada para cada eje, para graduar los ejes de manera que permita ubicar los valores de las variables con tanta precisión como sea necesario.
- Las escalas escogidas para cada uno de los ejes no tienen porque ser iguales, depende de la naturaleza de la variable que se represente y de los datos que se tengan de la misma.
- Una vez escogida la escala para cada eje, se debe construir la graduación siguiendo exactamente este patrón.

2.5.3 El patrón gráfico de una variación directamente proporcional.

Una vez que se tiene dibujado el plano cartesiano y la escala conveniente, localizamos cada pareja de puntos de coordenadas (x, y) y unimos todos los puntos con segmentos de recta, de la manera siguiente:



Esta gráfica corresponde a una variación directamente proporcional, que es una línea recta que parte del origen del sistema cartesiano y comúnmente la gráfica se localiza en el primer cuadrante.

Por lo tanto, el patrón gráfico de una variación directamente proporcional es una línea recta que parte del origen en el plano, donde, en el eje horizontal se encuentran los valores de la variable independiente y en el eje vertical los valores de la variable dependiente.

Actividad 12. Una frutería vende tres costales de naranjas en $270. ¿Cuánto se debe pagar si se compran 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 costales de naranjas?

Contesta lo que se pide:

Variable dependiente (y): ____

Variable independiente(x): ____

Completa la tabla:

Número de costales (x)	Precio (y)	$\frac{y}{x}$
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		

Valor de la razón de cambio: ____________________________

Por lo tanto, las variables **número de costales** y el **precio** tienen ____________________

____,

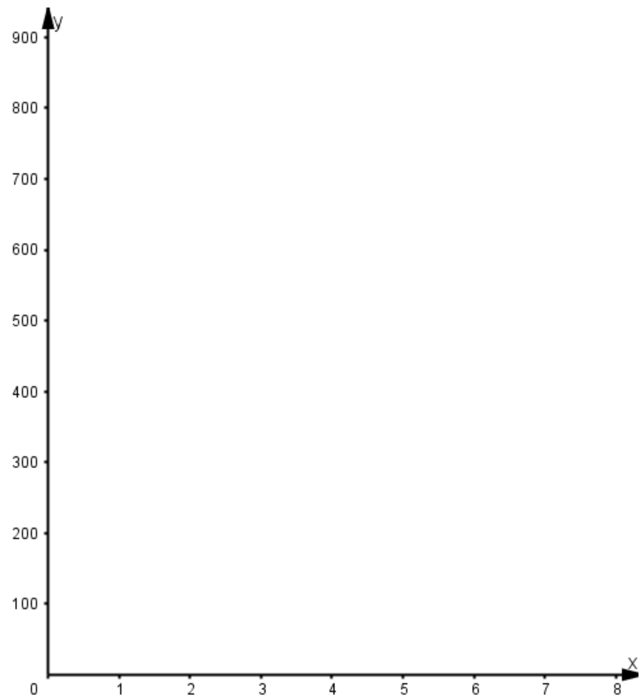
Porque, la razón de cambio es ____

Coordenadas de cada punto (x, y): _______________________________________

____

Escala a usar: para la variable independiente (x) cada porción valdrá 1 unidad y para la variable dependiente (y) cada porción valdrá 100 unidades.

Localiza cada punto de coordenadas (x, y) en el siguiente plano cartesiano y únelos con una línea recta, desde el origen del plano.



Observa la gráfica:

Si se compran 4 costales de naranjas, ¿cuánto se debe pagar? ______________________

Si se compran 6 costales de naranjas, ¿cuánto debe pagarse? ______________________

Si se compran 7 costales de naranjas, ¿cuánto se debe pagar? ______________________

Actividad 13. Carmen compra en la dulcería 2 bolsas grandes de dulces y pagó $130. ¿Cuánto debe pagar si compra 1, 2, 3, 4, 5 y 6 bolsas de dulces del mismo tamaño?

Contesta lo que se pide:

Variable dependiente (y): ____

Variable independiente(x): ____

Completa la tabla:

Número de bolsas (x)	Precio (y)	$\frac{y}{x}$
1		
2		
3		
4		
5		
6		

Valor de la razón de cambio: ______________________________

Por lo tanto, las variables **número de bolsas** y el **precio** tienen ___________________

____,

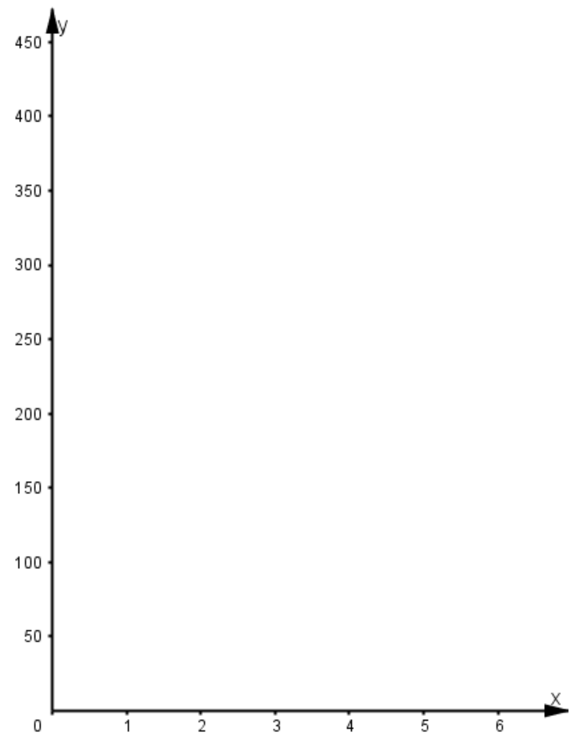
Porque, la razón de cambio es ____

Coordenadas de cada punto (x, y): ____

____

Escala a usar: para la variable independiente (x) cada porción valdrá 1 unidad y para la variable dependiente (y) cada porción valdrá 50 unidades.

Localiza cada punto de coordenadas (x, y) en el siguiente plano cartesiano y únelos con una línea recta, desde el origen del plano.



Observa la gráfica:

Si se compran 3 bolsas de dulces, ¿cuánto debe pagarse? ____________________

Si se compran 5 bolsas de dulces, ¿cuánto debe pagarse? ____________________

Si se compran 6 bolsas de dulces, ¿cuánto se debe pagar? ____________________

2.6 Análisis contextual de la representación gráfica:

2.6.1 Interpretación de los puntos del patrón gráfico como estados de la variación no registrados en una representación tabular.

A partir del patrón gráfico de una variación directamente proporcional podemos conocer el comportamiento de las variables involucradas, sin necesidad de tenerlas en la representación tabular.

Actividad 14. Un automóvil se desplaza por una autopista a una velocidad constante de 80 km por cada hora. ¿Qué distancia habrá recorrido en 20 min, 50 min, 1 hr y 10 min, 1 hr y 15 min, 1 hr y 40 min, 2 hr y 30 min?

Contesta las preguntas siguientes:

Variable dependiente (x): ____

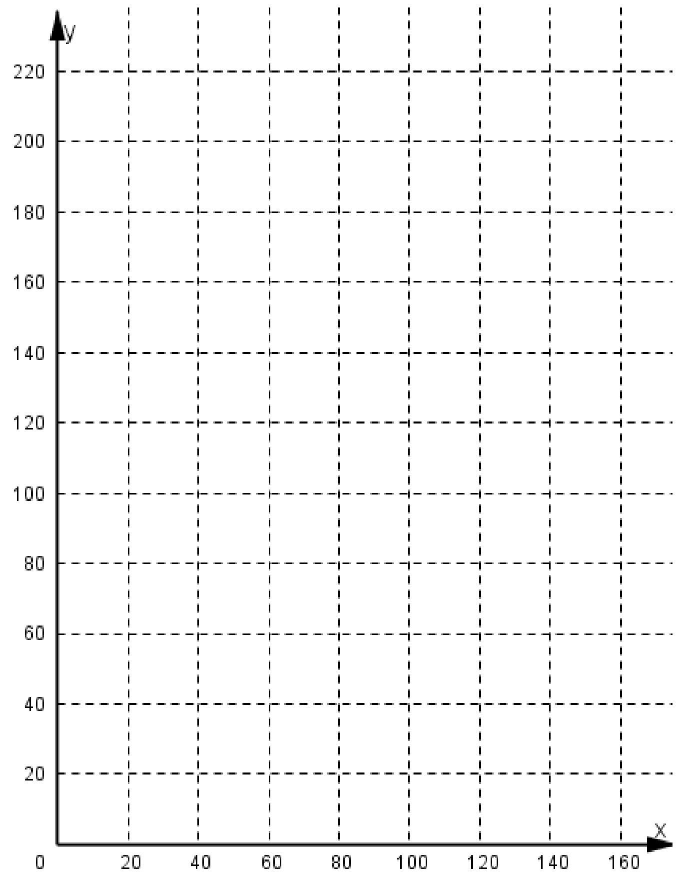
Variable independiente (y): ____

Valor de la razón de cambio: ____

Completa la tabla:

Tiempo (x)	Distancia (y)
20	
50	
60	
70	
75	
100	
150	

En el siguiente plano cartesiano, localiza los puntos de coordenadas (x, y) y únelos con una semirecta a partir del origen del sistema.



La información que se obtiene a partir de un patrón gráfico es muy valiosa, ya que al utilizarla se puede determinar en cualquier momento de tiempo la distancia recorrida por el automóvil y viceversa, sin la necesidad de estar insertando más filas en la representación tabular y calcular la información solicitada.

Por ejemplo, utilizando la gráfica contesta las preguntas siguientes:
Distancia recorrida en 30 minutos: ______________________________________
Tiempo que tarda el vehículo en recorrer 40 km: ____________________________
Distancia recorrida en 80 minutos: ______________________________________
Tiempo que tarda el vehículo en recorrer 140 km: ___________________________
Distancia que ha recorrido el vehículo en 5 minutos: _________________________
Tiempo que tarda el auto en recorrer 130 km: ______________________________
Distancia que ha recorrido el auto en 1 hr y media: __________________________

Actividad 15. En una panadería, con 80 kilos de harina se hacen 120 kilos de pan.

Contesta las preguntas siguientes:

Variable dependiente (x): ____

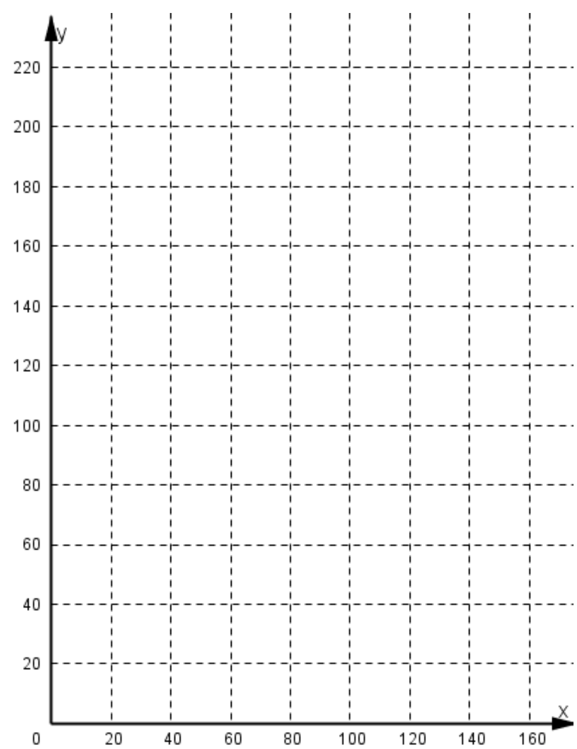
Variable independiente (y): ____

Valor de la razón de cambio: ____

Completa la tabla:

Kilos de harina (x)	Kilos de pan (y)
20	
50	
60	
80	120
90	
100	
120	

En el siguiente plano cartesiano, localiza los puntos de coordenadas (x, y) y únelos con una semirecta a partir del origen del sistema.



La información que se muestra en la gráfica es muy útil porque podemos saber en cualquier momento que si tenemos cierta cantidad de kilos de harina cuántos kilos de pan se pueden hacer y viceversa. Contesta las siguientes preguntas, obteniendo la información de la gráfica.

Kilos de pan que se hacen con 35 kilos de harina: ________________________________
Kilos de harina necesarios para obtener 105 kilos de pan: __________________________
Kilos de pan que se obtienen con 110 kilos de harina: _____________________________
Kilos de harina necesarios para hacer 127.5 kilos de pan: __________________________
Kilos de pan que se hacen con 140 kilos de harina: _______________________________
Kilos de pan que se hacen con 160 kilos de harina: _______________________________
Kilos de harina que se necesitan para hacer 195 kilos de pan: ______________________

2.6.2 El punto en el origen y la inclinación del gráfico como indicadores esenciales de una variación directamente proporcional.

Con lo que hemos estudiado hasta el momento acerca de la variación directamente proporcional, habrás confirmado que la representación gráfica de este tipo de variación es una línea recta que **siempre inicia en el punto de origen** del sistema de coordenadas (0, 0).

Por otra parte, la razón de cambio que resulta de dividir el valor de la variable dependiente entre el valor de la variable independiente, siempre es un valor constante, para cualquier pareja de variables que son directamente proporcionales. El valor de la razón de cambio influye en la **inclinación de la recta** con respecto al eje X, de manera que, entre mayor sea, más se acerca al eje Y.

En la gráfica, como la razón de cambio determina la inclinación de la recta sobre el eje de las X, entre mayor sea la inclinación de la recta, significa que la variación entre las variables asociadas es “más rápida”.

Si la representación gráfica no es una línea recta, la recta no pasa por el origen o la razón de cambio no es constante, entonces no existe variación directamente proporcional entre la variable dependiente e independiente.

Actividad 16. En una distribuidora de materiales para construcción, utilizan una cinta transportadora para acumular arena antes de distribuirla. La cinta que emplean transporta una cantidad fija de arena por hora. La semana anterior la ajustaron para que cada hora transportara 50 m^3.

Completa la tabla.

Tiempo de funcionamiento de la cinta (x)	Volumen de arena (y)	Razón de cambio (y/x)
1		
2		
3		
5		
7.5		

Valor de la razón de cambio: ___________________________

¿Este número es constante para cada fila de la tabla? ________________

Escribe las parejas de puntos que se obtienen:

(0, ____), (1, ____), (2, ____), (3, ____), (5, ____), (7.5, ____)

Localiza los puntos anteriores en el siguiente plano cartesiano y únelos con una línea, desde el origen del plano cartesiano.

¿La línea que trazaste es recta? ________________

¿Pasa por el origen (0, 0)? ____________________

La línea que dibujaste, ¿se acerca más al eje X o al eje Y? ________________________

____

Como la razón de cambio es un número grande, entonces el ángulo de inclinación de la recta es mayor, lo que significa que se transportará más arena conforme la cinta trabaje una mayor cantidad de horas.

Por lo tanto, las variables **x** y **y** tienen: ____

Actividad 17. En la tabla siguiente se muestran los días trabajados por un empleado y su salario correspondiente, sabiendo que el pago por día siempre es el mismo.

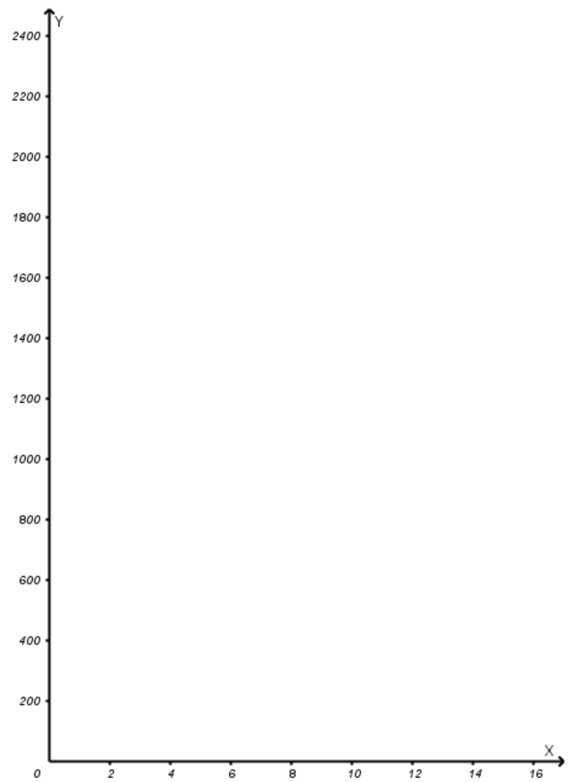
Número de días trabajados	**Sueldo diario ($)**
2	
	640
6	960
8	
14	2240

Valor de la razón de cambio: ____

Escribe las parejas de puntos que se obtienen:

(0, ____), (2, ____), (____, 640), (6, ____), (8, ____), (14, ____)

Localiza los puntos anteriores en el siguiente plano cartesiano y únelos con una línea, desde el origen del plano cartesiano.



¿La línea que trazaste es recta? ________________

¿Pasa por el origen (0, 0)? ____________________

La línea que dibujaste, ¿se acerca más al eje X o al eje Y? ________________________

____

La razón de cambio, ¿es un número grande o pequeño? _________________________

El ángulo de inclinación de la recta, ¿es mayor o menor con respecto al eje X? _________

____

El empleado ganará más dinero si trabaja una _______________ cantidad de horas.

Por lo tanto, las variables **x** y **y** tienen: ____

2.7 Expresión simbólica de la generalidad.

2.7.1 $y = ax$ como representación de una variación directamente proporcional.

Aprendizaje: *Representa algebraicamente la variación directamente proporcional entre dos cantidades y obtener a partir de ella información sobre ésta.*

Cuando dos magnitudes están relacionadas de manera que al duplicar una, la otra se duplica, si una se triplica, la otra también se triplica y si la reducimos a la mitad la otra también se reduce a la mitad, es decir, si una magnitud aumenta la otra aumenta o si una disminuye la otra también disminuye de manera constante, significa que las dos magnitudes tienen variación directamente proporcional.

La razón de cambio es el cociente que se obtiene de dividir el valor de la variable dependiente entre el valor de la variable independiente y este cociente siempre es constante cuando las variables son directamente proporcionales. Esta relación se representa de la manera siguiente:

$$\frac{y}{x} = a$$

donde:

a es la razón de cambio,

y es el valor de la variable dependiente y

x es el valor de la variable independiente.

despejando el valor de ***y***, tenemos

$$\boldsymbol{y = ax}$$

está expresión matemática representa la variación directamente proporcional entre los valores de la variable dependiente e independiente.

Considera que en un almacén de ropa una camisa cuesta $250, si se compran 2 camisas se tendrá que pagar $500 y así sucesivamente, lo que se muestra en la siguiente tabla:

No. de camisas (x)	1	2	5	7	10
Total a pagar (y)	250	500	1250	1750	2500

Obteniendo la razón de cambio,

$$\frac{y}{x} = \frac{250}{1} = \frac{500}{2} = \frac{1250}{5} = \frac{1750}{7} = \frac{2500}{10} = 250$$

$$\frac{y}{x} = 250$$

Por lo tanto,

$$\boldsymbol{y = 250x}$$

Expresión matemática que representa la variación directamente proporcional entre el precio a pagar y el número de camisas a comprar.

Actividad 18. Analiza los valores que se muestran en las tablas e indica si son o no directamente proporcionales. En caso de ser directamente proporcionales escribe la expresión matemática que liga a la variable independiente ***x*** con la variable dependiente ***y***.

a)

x	3	5	7	9	11
y	12	20	28	36	44

¿Las variables son directamente proporcionales? ______________________________

Valor de la constante de proporcionalidad: ____________________________________

Expresión matemática: ____

b)

x	–2	–1	1	2	3
y	–3	6	–6	–3	–2

¿Las variables son directamente proporcionales? ______________________________

Valor de la constante de proporcionalidad: ____________________________________

Expresión matemática: ____

c)

x	–2	–1	1	2	3
y	–4	–2	2	4	6

¿Las variables son directamente proporcionales? ______________________________

Valor de la constante de proporcionalidad: ____________________________________

Expresión matemática: ____

d)

x	2	3	6	10	13	15	26	31	55
y	0.6	0.9	1.8	3	3.9	4.5	7.8	9.3	16.5

¿Las variables son directamente proporcionales? ______________________________

Valor de la constante de proporcionalidad: ___________________________________

Expresión matemática: ____

e)

x	–6	–5	–4	3	6	7
y	–30	–25	–20	15	30	35

¿Las variables son directamente proporcionales? ______________________________

Valor de la constante de proporcionalidad: ___________________________________

Expresión matemática: ____

2.7.2 Análisis contextual de la expresión simbólica: $y = ax$

El parámetro *a* como la rapidez de variación o razón de cambio.

El parámetro *a* como indicador de la inclinación del gráfico de la variación.

La constancia de *a* en una variación directamente proporcional.

La variable **y** es directamente proporcional a la variable **x**, si

$$y = ax$$

donde **a** es una constante, llamada rapidez de variación o razón de cambio y se calcula despejando su valor de la expresión anterior:

$$a = \frac{y}{x},\ \ x \neq 0$$

La gráfica de dos variables que tienen variación directamente proporcional es una línea recta que se localiza en el primer cuadrante del plano cartesiano y siempre parte del origen (0, 0) del sistema de coordenadas, de manera que la razón de cambio **a** es constante y también indica la inclinación de la recta en la gráfica, porque podemos saber si la recta está más cerca del eje X o está más cerca del eje Y.

Actividad 19. Una llave llena una tina de baño a un ritmo de 8 litros por minuto. La cantidad de agua en la tina es directamente proporcional con la cantidad de tiempo que la llave permanece abierta. Considera que la variable **y** representa la cantidad de litros de agua y **x** representa el tiempo, por lo tanto, se obtiene la expresión:

$$y = 8x$$

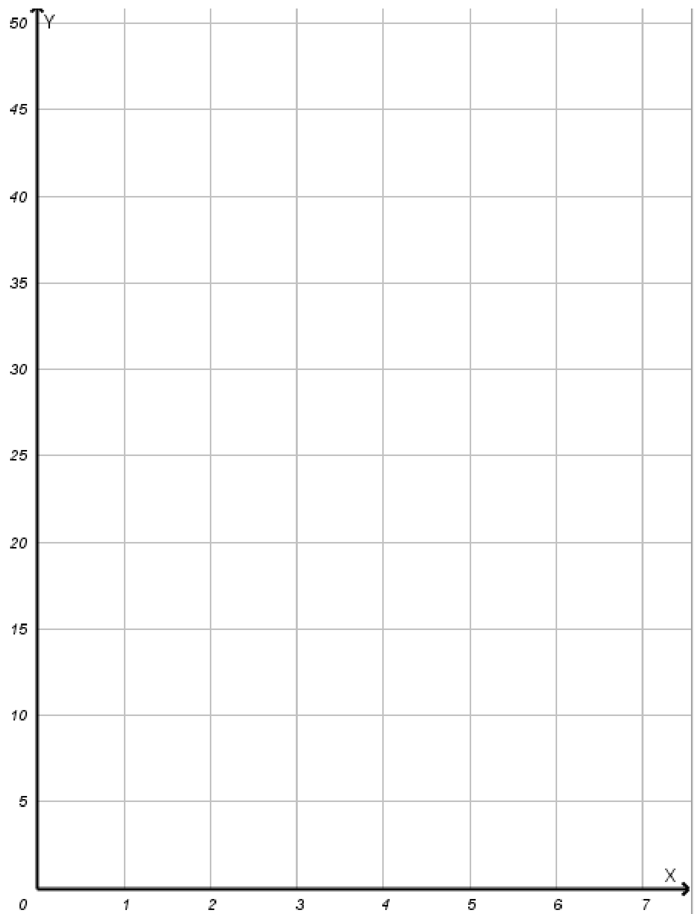
Contesta las preguntas siguientes:

Razón de cambio: a = ________________

Completa la tabla:

Tiempo	Litros de agua
1	8
2	
3	
4	
5	
6	

Localiza los puntos en el siguiente plano y únelos con una línea recta desde el origen.



Puesto que las variables son directamente proporcionales, entonces, la razón de cambio es: ____

Observa la inclinación de la recta en la gráfica, ¿de quién depende que la inclinación de la recta sea menor o mayor con respecto al eje X? ______________________________

Actividad 20. En la siguiente tabla se representa una variación directamente proporcional entre las dos variables. Completa la tabla:

x	y
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	21

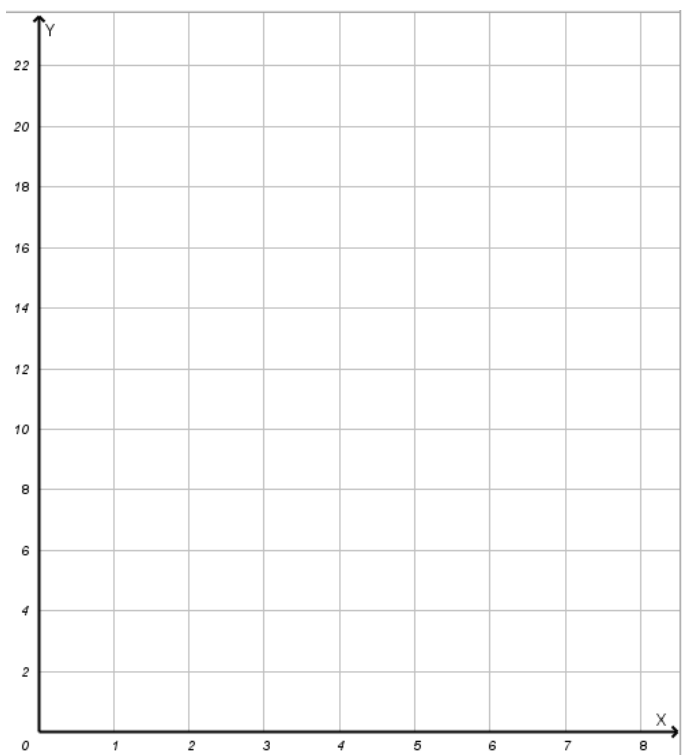
¿Cuánto vale la razón de cambio? _________________

¿Cómo calculaste este valor? ____

Expresión que corresponde a la variación directamente proporcional: ________________

____

Elabora la gráfica:



Como las variables tienen variación directamente proporcional, la razón de cambio es constante y la inclinación de la recta depende de este valor.

Actividad 21. Cuando una persona compra una tela (de anchura constante) paga por ella un precio P que depende de la longitud L adquirida. Suponiendo que 1 m de tela cuesta $80, completa la tabla siguiente:

L (m)	1	2	3	4	5	6
P ($)	80					

Contesta las preguntas siguientes:

a) Al duplicar el valor de L, ¿se duplica también el valor de P? ______________________

b) Si se triplica el valor de L, ¿qué ocurre con el valor de P? ______________________

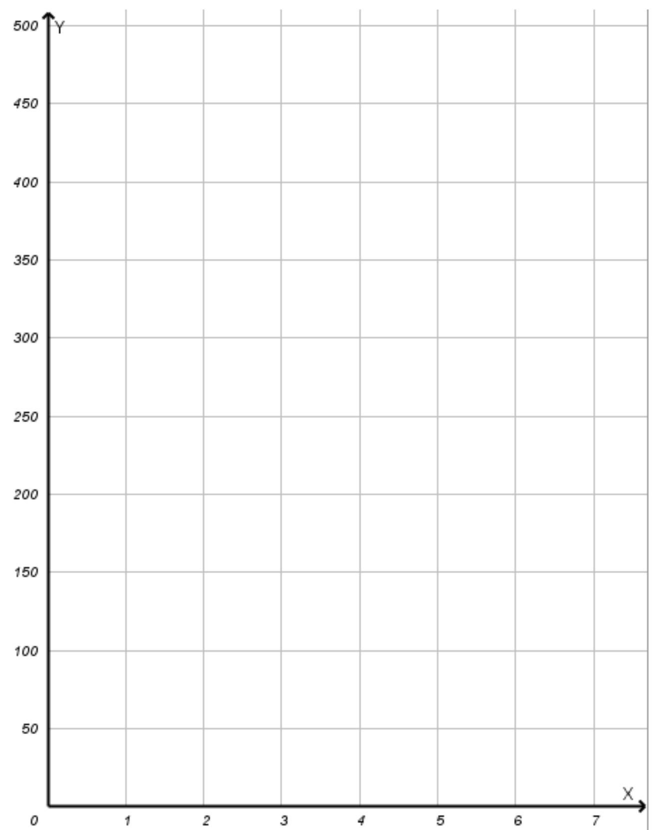
c) Por lo tanto, ¿qué tipo de relación existe entre las variables P y L? ______________

____

d) ¿Cuál es el valor de la razón de cambio? ______________________________

e) Escribe la expresión algebraica que representa la variación directamente proporcional entre las variables P y L: ______________________________________

f) Elabora la gráfica:



2.8 Función lineal

2.8.1 El concepto de función lineal.

Aprendizaje: *Identifica entre una serie de variaciones entre dos aquellas que correspondan al concepto de función lineal*.

Actividad 22. Al sembrar una planta de 2 cm de alto se observa que en el transcurso de 10 semanas su ritmo de crecimiento, es directamente proporcional al tiempo, de manera que en la primera semana mide 2.5 cm. Encuentra la expresión matemática que calcula la altura de la planta en función del tiempo.

Contesta:

Variable dependiente: y = ____

Variable independiente: x = ____

¿Cuál es el valor de la variable dependiente al iniciar la observación? _________________

¿Cuánto medirá la planta en la segunda semana? ________________________

¿Cuánto medirá la planta en la semana 5? ______________________________

¿Cuánto medirá la planta en la semana 8? ______________________________

¿Cuántos cm crece la planta por semana? _____________________. Este valor se llama rapidez de cambio o rapidez de variación.

¿La rapidez de cambio es un valor constante o es variable? ________________________

Recuerda que las variables son directamente proporcionales y al sembrar la planta tiene una altura de 2 cm, de forma que la expresión matemática que calcula la altura de la planta en función del tiempo es:

$$y = \_\_\_x + \_\_\_\_$$

Usando está expresión, completa la tabla siguiente:

Tiempo (x)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Altura (y)	2										

La última expresión se conoce como función lineal.

Actividad 23. Una tienda de artículos domésticos tiene en el almacén 500 planchas al inicio de cada mes, las estadísticas de ventas indican que al día se venden 15 planchas. Encuentra la expresión matemática que representa el número de planchas en el almacén en cualquier día del mes.

Contesta las preguntas siguientes:

Variable dependiente: y = ____

Variable independiente: x = ____

¿Cuál es el valor de la variable dependiente al iniciar cada mes? _________________

¿Cuántas planchas habrá en el almacén el primer día? _______________

¿Cuántas planchas habrá en el almacén el segundo día? _______________

¿Cuántas planchas habrá en el almacén el día 5? _______________

¿Cuántas planchas habrá en el almacén el día 10? _______________

¿Cuántas planchas habrá en el almacén el día 25? _______________

¿Cuál es el valor de la rapidez de cambio? ______________________

¿La rapidez de cambio es un valor constante o es variable? _________________________

La función lineal que resuelve el problema planteado es:

$$y = -\,\_\_\_x + \_\_\_\_$$

Actividad 24. Un técnico en reparación de electrodomésticos cobra $50 por la visita, más $40 por cada hora de trabajo. Encuentra la expresión matemática que calcula el total de dinero que debemos pagar, considerando el tiempo que tarda en hacer la reparación.

Contesta las preguntas siguientes:

Variable dependiente: y = ____

Variable independiente: x = ____

¿Cuál es el valor de la variable dependiente al iniciar la reparación? _________________

¿Cuánto dinero cobra en la primera hora? _______________

¿Cuánto dinero cobra por 5 horas de trabajo? _______________

¿Cuánto dinero cobra por 7 horas de trabajo? _______________

¿Cuánto dinero cobra por 8 horas de trabajo? _______________

¿Cuál es el valor de la rapidez de cambio? ______________________

¿La rapidez de cambio es un valor constante o es variable? _________________________

La función lineal que resuelve el problema planteado es:

$$y = \_\_\_x + \_\_\_\_$$

Hemos usado las funciones lineales en muchas situaciones de nuestra vida diaria, sin siquiera saberlo, es decir, muchas situaciones reales se pueden describir por medio de una función lineal, por ejemplo, cuando queremos saber el equivalente de una temperatura en grados centígrados a grados fahrenheit, cuando deseamos conocer la cantidad de dinero que hemos ganado en un negocio si iniciamos con una cantidad de dinero fijo, costo de producción de artículos con la consideración de costos fijos, etc.

Te habrás dado cuenta que muchas situaciones de la realidad tienen un comportamiento que se pueden describir a través de una función lineal como modelo. Estas funciones tienen la forma:

$$y = mx + b$$

con ***m*** y ***b*** números reales.

Una **función lineal** es una función cuyo dominio son todos los números reales, el rango también son todos los números reales y la expresión matemática que la representa es un polinomio de primer grado.

$$y = mx + b$$

Por ejemplo, las siguientes expresiones son funciones lineales:

$y = 3x + 5$

$y = -4x + 7$

Se llama función lineal porque la gráfica que la representa es una línea recta.

Actividad 25. Escribe cuál de las siguientes funciones corresponde a una función lineal o no lineal.

a) $y = 3x^2 - 2x + 5$ Función ______________________________________

b) $y = \frac{5}{x}$ Función ______________________________________

c) $y = 5x + 3$ Función ______________________________________

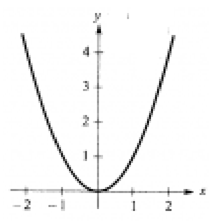
d) $y = \sqrt{x - 4}$ Función ______________________________________

e) $y = 3x - 2$ Función ______________________________________

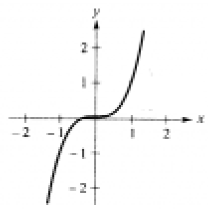
f) $y = 2x$ Función ______________________________________

Actividad 26. ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a una función lineal?

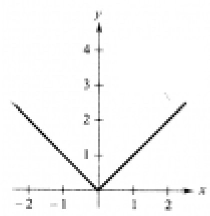
a)



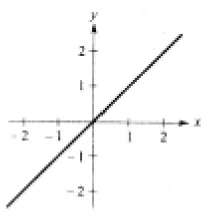
b)



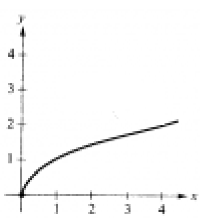
c)



d)



e)



2.8.2 Representación analítica de una función lineal.

Aprendizaje: *Modela con la expresión $y = mx + b$, una variación relacionada entre dos variables con rapidez de variación constante y condición inicial $(0, b)$. Transitando en la etapa de exploración, por representaciones tabulares y gráficas.*

Actividad 27. Una cisterna tiene 50 litros de agua, al abrir la llave, salen 3 litros de agua por minuto. Escribir la función lineal que representa la relación entre las dos variables.

Completa la tabla:

Tiempo en minutos (x)	0	1	2	3	4	5	6
Litros de agua (y)	50	53					

Contesta las preguntas:

¿Qué cantidad de agua tendrá la cisterna después de 3 minutos? ____________________

¿Qué cantidad de agua tendrá la cisterna después de 6 minutos? ____________________

¿Qué cantidad de agua tendrá la cisterna después de ***x*** minutos? ____________________

+1 +1 +1 +1 +1 +1

Tiempo en minutos (x)	0	1	2	3	4	5	6
Litros de agua (y)	50	53					

+3 +3 +3 +3 +3 +3

Considera los valores de **x** y **y** de dos columnas cualesquiera. Por ejemplo, primera columna: x = 2, y = ____; segunda columna: x = 5, y = ____.

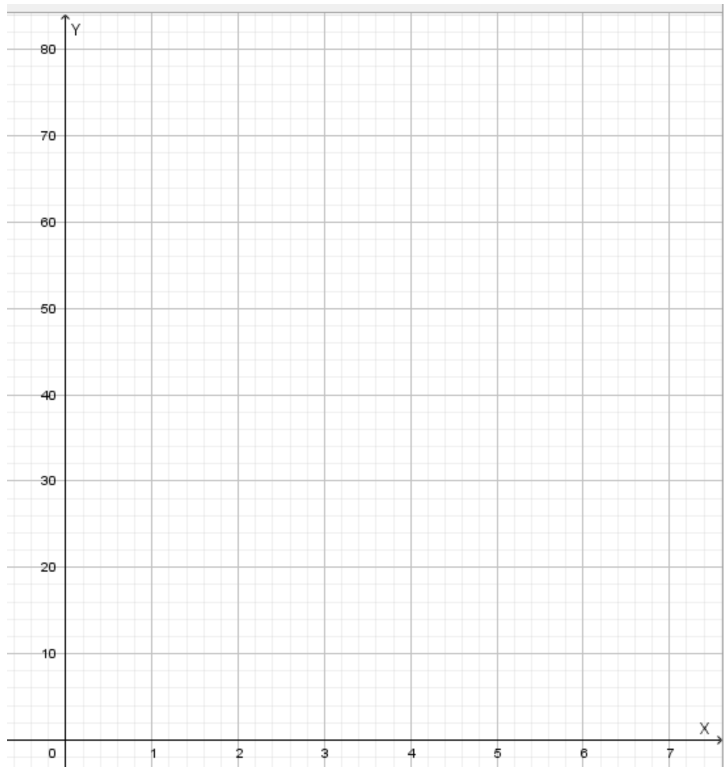
Variación en *x*: 5 – 2 = 3

Variación en *y*: ______________________

Rapidez de variación = $\frac{Variación\ en\ y}{Variación\ en\ x} = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$

Este número indica que el cambio en **y** es 3 veces el cambio en **x**.

Grafica los pares ordenados (x, y) en el siguiente plano cartesiano:



La gráfica que se obtiene es una línea recta. Observa que la recta pasa por el punto $(0, 50)$. Por lo tanto, la función lineal que se obtiene es:

$$y = \_\_\_x + \_\_\_\_$$

Cuando se tienen dos variables ***x*** y ***y***, se dice que, **y es una función lineal de x**, lo que se expresa de la forma $y = mx + b$, donde **m** es la rapidez de variación entre las variables y **b** es una constante que se llama ordenada al origen. Es posible obtener el valor de b, observando la tabla o la gráfica donde x=0. Es decir, la coordenada $(0, b)$ es la condición inicial.

En una función lineal, cuando se compara la variación de la variable *y* respecto a la variación de *x*, la razón obtenida se conoce como rapidez de variación, es decir:

$$Rapidez\ de\ variación = m = \frac{Variación\ en\ y}{Variación\ en\ x}$$

La gráfica de la función lineal $y = mx + b$ es una línea recta, que se puede graficar conociendo los valores de las variables *x* y *y*, para al menos dos puntos por donde pasa la recta. La recta siempre pasa por el punto $(0, b)$, en el caso de que $b = 0$ la recta pasará por el origen del plano cartesiano.

Actividad 28. María toma un taxi para llegar a su trabajo, si el banderazo es de $9 y por cada kilometro se paga $4, ¿cuál es la función lineal que representa la relación entre las variables?

Completa la tabla:

Distancia recorrida en km (x)	0	1	2	3	4	5
Cantidad a pagar en $ (y)						

Contesta las preguntas:

¿Cuánto debe pagar María si su trabajo está a 8 km? ____________________

¿Cuánto paga si el trabajo se encuentra a 11 km? ____________________

¿Cuánto debe pagar si su trabajo se encuentra a ***x*** km? ____________________

+1 +1 +1 +1 +1

Distancia recorrida en km (x)	0	1	2	3	4	5
Cantidad a pagar en $ (y)						

+4 +4 +4 +4 +4

Considera los valores de **x** y **y** de dos columnas cualesquiera. Por ejemplo, primera columna: x = 1, y = ____; segunda columna: x = 3, y = ____.

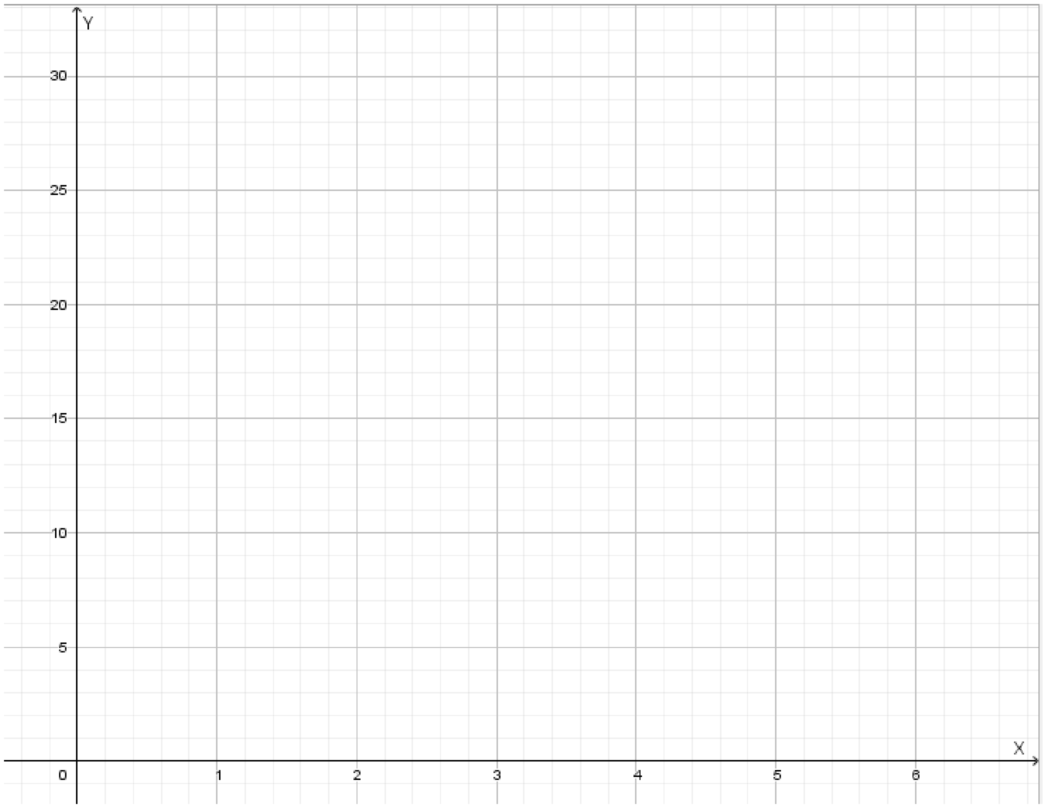
Variación en *x*: 3 – 1 = 2

Variación en *y*: ______________________

Rapidez de variación = $m = \frac{Variación\ en\ y}{Variación\ en\ x} = \underline{\qquad\qquad} = \underline{\qquad\quad}$

Este número indica que el cambio en **y** es 4 veces el cambio en **x**.

Grafica los pares ordenados (x, y) en el siguiente plano cartesiano:



La gráfica que obtuviste es una línea ___________________________

¿En qué punto la recta corta al eje Y? __________________________

Valor de la variable b = _________

Por lo tanto, la función lineal de la forma $y = mx + b$ es:

$$y = \_\_\_x + \_\_\_\_$$

Actividad 29. Al encender una vela de 150 mm de largo, se observa que se acorta 4 mm por cada minuto que pasa. Considera que, *y* es la longitud de la vela después de *x* minutos de encendida, encuentra la función lineal que relaciona ambas variables.

Completa la tabla:

Tiempo encendida en min (x)	0	1	2	3	4	5
Longitud de la vela en mm (y)	150					

Contesta las preguntas:

¿Cuánto mide la vela después de 6 minutos? ____________________

¿Cuánto mide la vela después de 10 minutos? ____________________

¿Cuánto mide la vela después de **x** minutos? ____________________

+1 +1 +1 +1 +1

Tiempo encendida en min (x)	0	1	2	3	4	5
Longitud de la vela en mm (y)	150					

-4 -4 -4 -4 -4

Considera los valores de **x** y **y** de dos columnas cualesquiera. Por ejemplo, primera columna: x = 0, y = ____; segunda columna: x = 4, y = ____.

Variación en *x*: 4 – 0 = 4

Variación en *y*: ______________________

Rapidez de variación = $m = \frac{Variación\ en\ y}{Variación\ en\ x} =$ _______ $=$ ______

Este número indica que el cambio en **y** es menor 4 veces que el cambio en **x**.

Grafica los pares ordenados (x, y) en el siguiente plano cartesiano:

La gráfica que obtuviste es una línea __________________________

¿En qué punto la recta corta al eje Y? _________________________

Valor de la variable b = _________

Por lo tanto, la función lineal de la forma $y = mx + b$ es:

$y =$ ____ $x +$ ____

Actividad 30. Luis compra una tarjeta para viajar en el metro la cual tiene un costo de \$10, para usar el metro debe recargar la tarjeta de manera que por cada viaje el boleto cuesta \$5. Escribe la función lineal que representa la relación entre las variables.

Completa la tabla:

Número de boletos (x)	0	1	2	3	4	5
Costo (y)	10	15				

¿Cuánto paga Luis si compra 6 boletos? ________________

¿Cuánto paga si compra 8 boletos? ________________

¿Cuánto paga si compra 3 boletos? ________________

Cuando $x = 0$, $y =$ ______. Este valor de la ordenada y corresponde al valor de b, es decir, $b =$ ______.

A continuación, escribe como varían las variables x y y de una columna a otra:

Número de boletos (x)	0	1	2	3	4	5
Costo (y)	10	15				

Valor de la rapidez de variación: $m =$ ______

Por lo tanto, la función lineal que se obtiene es:

$y =$ ____ $x +$ ____

Actividad 31. Una pizza individual sin ingredientes cuesta \$6, con 1 ingrediente cuesta \$2 más, es decir, \$8 y así sucesivamente. Encuentra la función lineal que representa la variación entre las variables.

Completa la tabla:

Número de ingredientes (x)	0	1	2	3	4	5
Costo (y)	6	8				

¿Cuánto cuesta una pizza individual con 4 ingredientes? _______________

¿Cuánto cuesta una pizza individual con 7 ingredientes? _______________

Cuando $x = 0$, $y =$ ______. Este valor de la ordenada y corresponde al valor de b, es decir, $b =$ ______.

A continuación, escribe como varían las variables x y y de una columna a otra:

Número de ingredientes (x)	0	1	2	3	4	5
Costo (y)	6	8				

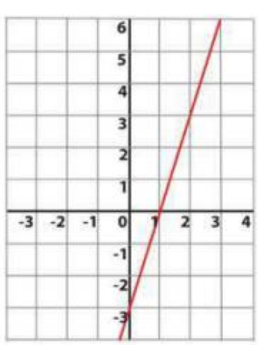
Valor de la rapidez de variación: $m =$ ______

Por lo tanto, la función lineal que se obtiene es:

$$y = \_\_\_\_ x + \_\_\_\_$$

Actividad 32. Encuentra la función lineal que representa cada una de las siguientes gráficas.

a)



Coordenada del punto donde la recta corta el eje Y: ___________________

De manera que, b = _________

Considera dos puntos por donde pasa la recta, por ejemplo, cuando x = 1, y = ______;

cuando x = 2, y = ______

Variación en *x*: 2 – 1 = 1

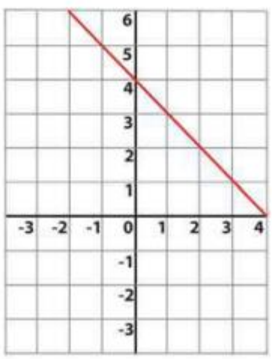
Variación en *y*: ______________________

Rapidez de variación = $m = \frac{Variación\ en\ y}{Variación\ en\ x} = \_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_$

Por lo tanto, la función lineal de la forma $y = mx + b$ es:

$$y = \_\_\_\_x - \_\_\_\_$$

b)



Coordenada del punto donde la recta corta el eje Y: ___________________

De manera que, b = _________

Considera dos puntos por donde pasa la recta, por ejemplo, cuando x = 2, y = ______;

cuando x = 4, y = ______

Variación en *x*: 4 – 2 = 2

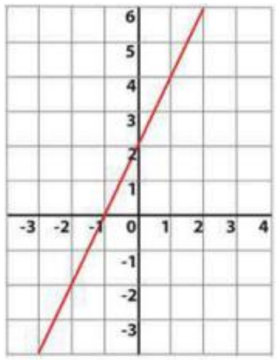
Variación en *y*: ______________________

Rapidez de variación = $m = \frac{Variación\ en\ y}{Variación\ en\ x} = \_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_$

Por lo tanto, la función lineal de la forma $y = mx + b$ es:

$$y = \_\_\_\_\_x + \_\_\_\_$$

c)



Coordenada del punto donde la recta corta el eje Y: ________________

Es decir, b = ________

Considera dos puntos por donde pasa la recta, por ejemplo, cuando x = –2, y = _____;

cuando x = 1, y = _____

Variación en *x*: 1 – (–2) = 1 + 2 = 3

Variación en *y*: ____________________

Rapidez de variación = $m = \frac{Variación\ en\ y}{Variación\ en\ x} = \_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$

Por lo tanto, la función lineal de la forma $y = mx + b$ es:

$$y = \_\_\_\_x + \_\_\_$$

2.9 Análisis algebraico y gráfico de una función lineal

2.9.1 Identificación de los elementos definitorios de una función lineal empleando las representaciones gráficas y analíticas:

- **Condición inicial.**
- **Rapidez de variación.**

Aprendizaje: *Dada una variación que se modela con una función lineal, el alumno calcule estados específicos de la variación, su rapidez de cambio y estado inicial, empleando sus representaciones gráfica y analítica.*

Considera la expresión $y = 5x + 2$, si el dominio es el conjunto de los números reales y hacemos la gráfica, encontraremos que la figura geométrica que se obtiene es una línea recta y, por lo tanto, está relación es una función lineal.

Dos variables *x* y *y*, están **variando linealmente** si y sólo si, el cociente obtenido de dividir la diferencia de ordenadas de dos puntos cualesquiera (Variación en y*)*, entre la diferencia de las correspondientes abscisas (Variación en *x*), es siempre un valor constante. El valor constante se conoce como **rapidez de variación** y se representa con la letra minúscula **m**.

$$m = \frac{Variación\ en\ y}{Variación\ en\ x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

El valor que toma la variable *y* cuando x = 0, se le conoce como ordenada al origen y se representa por la letra **b**, de forma que la coordenada $(0, b)$ es la **condición inicial**.

Al tener una función lineal de la forma $y = mx + b$, podemos obtener fácilmente los valores de la rapidez de variación y la condición inicial, que corresponden a los valores de **m** y **b**, respectivamente.

Para la función lineal $y = 5x + 2$, tenemos,

¿Cuál es el valor de la pendiente? m = ____________

¿Cuál es el valor de la ordenada al origen? b = ____________

Condición inicial: $(0, b) = (0, \_\_\_\_)$

Una ecuación de primer grado de la forma $y = mx + b$ expresa a **y** como una función lineal de **x**. La gráfica de ***y*** contra ***x*** es una **línea recta** que pasa por el punto $(0, b)$ y tiene rapidez de variación **m**.

Actividad 33. Descubre si existe variación lineal entre las variables **x** y **y**, relacionadas por la función mostrada. Considera como dominio al conjunto de los números reales.

a) $y = 2x - 3$

Completa la tabla:

x	-2	-1	0	1	2	3
y						

¿Hay variación lineal? _______, ¿por qué? ____

____

Si hay variación lineal, ¿qué tipo de gráfica representará la relación entre ***x*** y ***y***?

a) recta b) circunferencia c) parábola

Si es una función lineal, el valor de la rapidez de variación es: m = ____________

El valor de la ordenada al origen es: b = ____________

Condición inicial: $(0, b) = (0, \_\_\_\_)$

b) $y = 3x + 4$

Asigna valores a **x** y completa la tabla:

x						
y						

¿Hay variación lineal? _______, ¿por qué? ____

____

Si hay variación lineal, ¿qué tipo de gráfica representará la relación entre ***x*** y ***y***?

a) elipse b) circunferencia c) línea recta

Si es una función lineal, el valor de la rapidez de variación es: m = ____________

El valor de la ordenada al origen es: b = ____________

Condición inicial: $(0, b) = (0, \_\_\_\_)$

c) $y = -2x - 1$

Asigna valores a **x** y completa la tabla:

x						
y						

¿Hay variación lineal? _______, ¿por qué? ______________________________________

____

Si hay variación lineal, ¿qué tipo de gráfica representará la relación entre ***x*** y ***y***?

a) recta b) circunferencia c) parábola

Si es una función lineal, el valor de la rapidez de variación es: m = ____________

El valor de la ordenada al origen es: b = ____________

Condición inicial: $(0, b) = (0, \_\_\_\_)$

d) $3x + 2y = 4$

Asigna valores a **x** y completa la tabla:

x						
y						

¿Hay variación lineal? _______, ¿por qué? ______________________________________

____

Si hay variación lineal, ¿qué tipo de gráfica representará la relación entre ***x*** y ***y***?

a) recta b) circunferencia c) parábola

Si es una función lineal, el valor de la rapidez de variación es: m = ____________

El valor de la ordenada al origen es: b = ____________

Condición inicial: $(0, b) = (0, \_\_\_\_)$

Escribe la función en la forma $y = mx + b$: ______________________________________

e) $-7x - 5y = 3$

Asigna valores a **x** y completa la tabla:

x						
y						

¿Hay variación lineal? ______, ¿por qué? ____

____

Si hay variación lineal, ¿qué tipo de gráfica representará la relación entre ***x*** y ***y***?

a) recta   b) circunferencia   c) parábola

Si es una función lineal, el valor de la rapidez de variación es: m = ____________

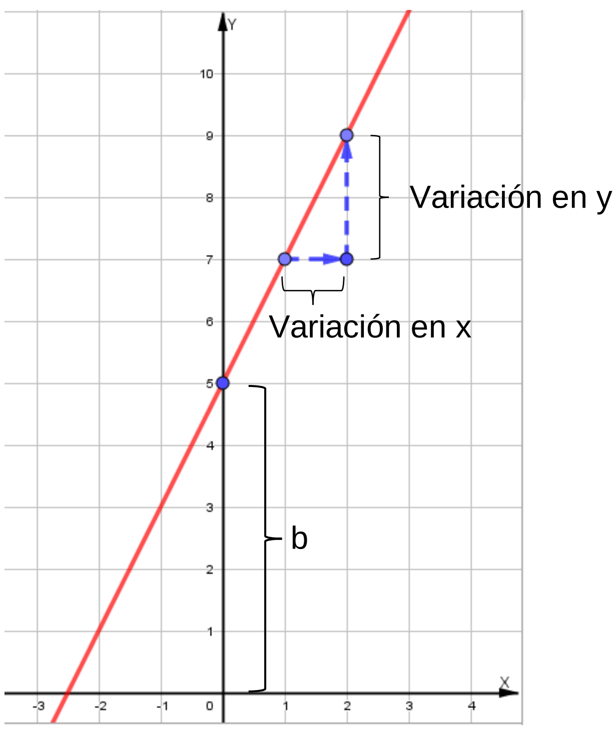
El valor de la ordenada al origen es: b = ____________

Condición inicial: $(0, b) = (0, \_\_\_\_)$

Escribe la función en la forma $y = mx + b$: ______________________________________

Actividad 34. Determina la función lineal que representa a cada una de las siguientes gráficas, en la forma $y = mx + b$.

a)



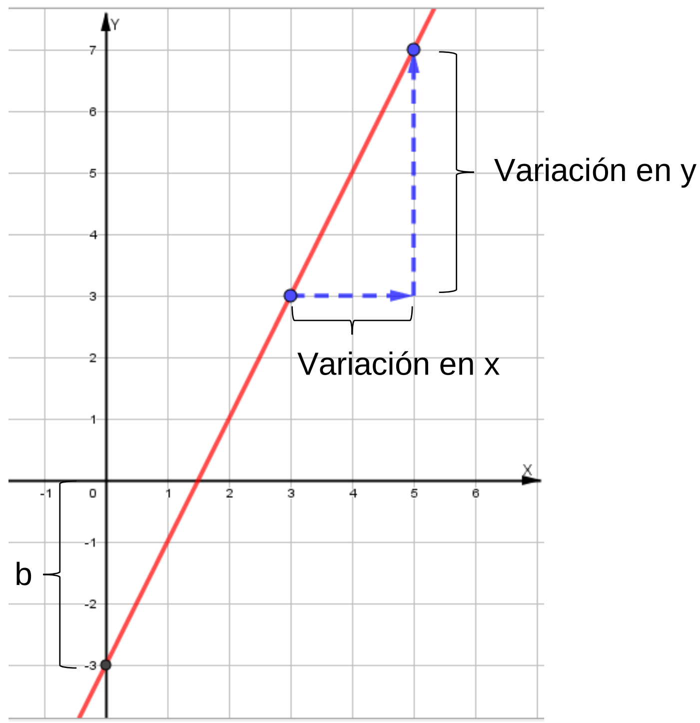
Calcula la rapidez de variación:

$$Rapidez\ de\ variación = m = \frac{Variación\ en\ y}{Variación\ en\ x} = \frac{9-7}{2-1} = \frac{2}{1} = 2$$

El valor de la ordenada al origen es: b = ____________

Escribe la función lineal que representa la gráfica: ____________________________

b)



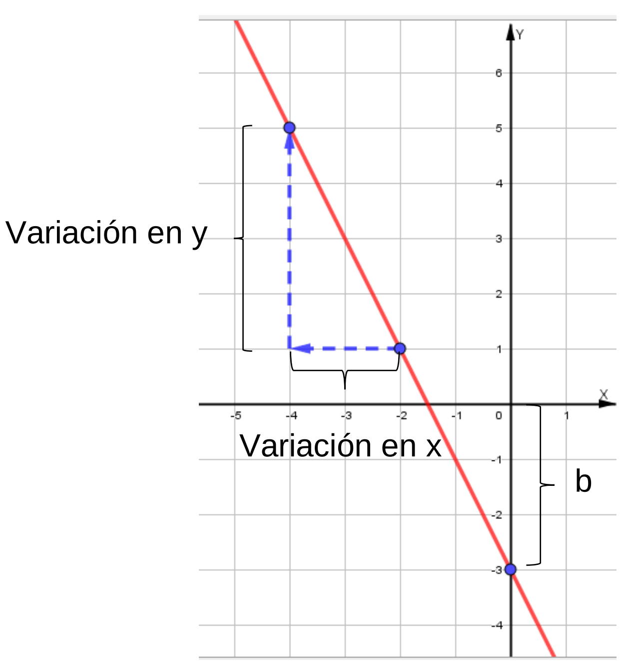
Calcula la rapidez de variación:

$$Rapidez\ de\ variación = m = \frac{Variación\ en\ y}{Variación\ en\ x} = \_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_ =$$

El valor de la ordenada al origen es: b = ____________

Escribe la función lineal que representa la gráfica: ___________________________

c)



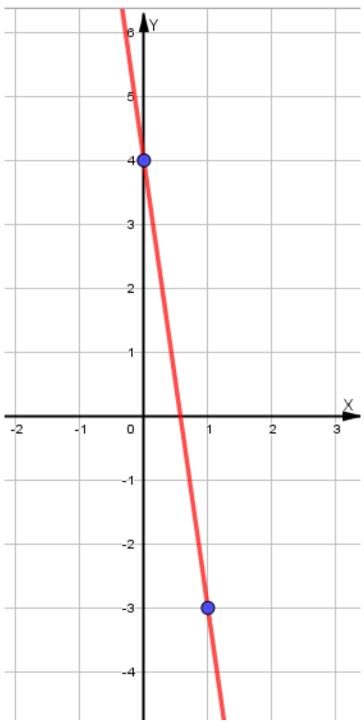
Calcula la rapidez de variación:

$$Rapidez\ de\ variación = m = \frac{Variación\ en\ y}{Variación\ en\ x} = \frac{\qquad}{\qquad} = \frac{\quad}{\quad} =$$

El valor de la ordenada al origen es: b = ____________

Escribe la función lineal que representa la gráfica: ___________________________

d)



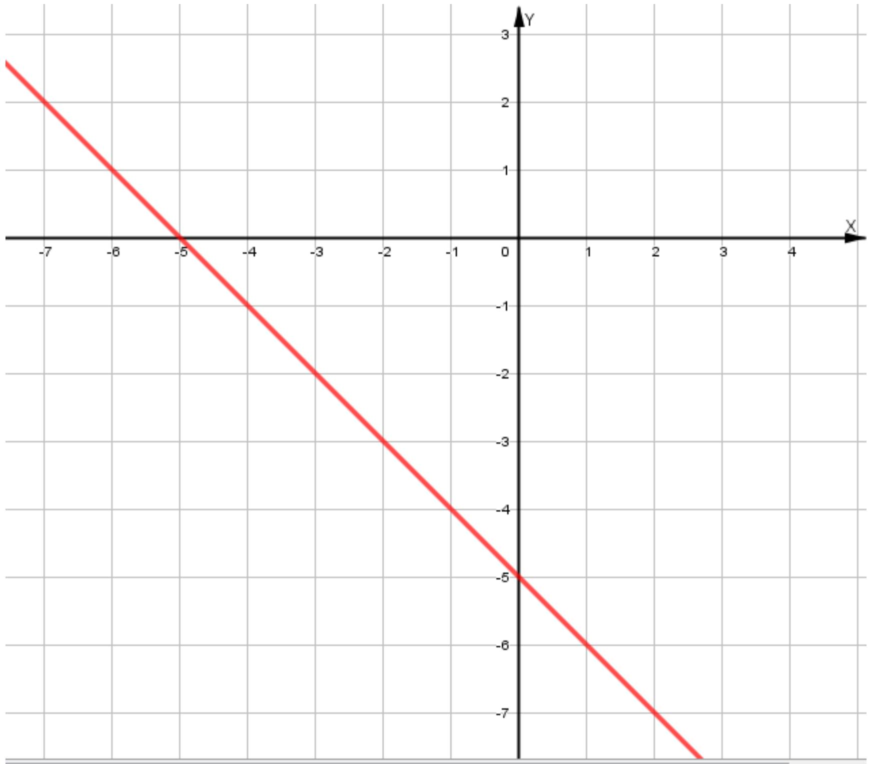
Calcula la rapidez de variación:

$$Rapidez\ de\ variación = m = \frac{Variación\ en\ y}{Variación\ en\ x} = \frac{\qquad}{\qquad} = \frac{\quad}{\quad} =$$

El valor de la ordenada al origen es: b = ____________

Escribe la función lineal que representa la gráfica: ___________________________

e)



Calcula la rapidez de variación:

$$Rapidez\ de\ variación = m = \frac{Variación\ en\ y}{Variación\ en\ x} = \frac{\qquad}{\qquad} = \frac{\quad}{\quad} =$$

El valor de la ordenada al origen es: b = ___________

Escribe la función lineal que represente la gráfica: _________________________

Propuesta de evaluación.

1. Escribe el modelo matemático que representa al enunciado, usa k como la razón de cambio. Determina la variable dependiente e independiente.

   El empuje ***E*** de un cierto tipo de hélice varía conjuntamente como la cuarta potencia de su diámetro ***d*** y el cuadrado del número ***n*** de revoluciones por minuto.

2. El costo ***C*** de tiempo de computadora en cierta máquina varía directamente en relación con la cantidad de tiempo ***t*** empleado. Si 30 minutos cuestan $4.50,
   a) Encuentra el valor de la razón de cambio.
   b) ¿Cuánto cuestan 55 minutos?
3. El volumen de un cilindro varía directamente en relación con el cuadrado del radio. El volumen de un tanque cilíndrico es 9.8 pies^3. ¿Cuál será el volumen si se triplica el radio?
4. Si ***m*** es directamente proporcional como la raíz cuadrada de ***n*** y si ***m*** = 20 cuando ***n*** = 2, encuentra ***m*** cuando ***n*** = 5.
5. Analiza los valores que se muestran en la tabla e indica si son o no directamente proporcionales. En caso de ser directamente proporcionales, escribe el modelo que liga a las variables y encuentra el valor de la constante de proporcionalidad.

x	5	8	11	15	17	21	24	27	39	44
y	70	112	154	210	238	294	336	378	546	616

6. Con la información dada en la siguiente tabla elabora otra, y comprueba que las variables están variando linealmente. Encuentra la pendiente, la ordenada al origen y la ecuación de la recta.

x	–5	–2	–1	1	2	4	5	8
y	–34.5	–13.5	–6.5	7.5	14.5	28.5	35.5	56.5

7. Completa la tabla siguiente y elabora otra para comprobar que las variables están variando linealmente. Encuentra la pendiente, ordenada al origen, la ecuación de la recta y traza la gráfica.

x	–3	–2	–1	0				4	5	

y	–5.25	–4.5	–3.75		–2.25	–1.5	–0.75			1.5

8. Completa la tabla siguiente y elabora otra para comprobar que las variables están variando linealmente. Encuentra la pendiente, ordenada al origen, la ecuación de la recta y traza la gráfica.

x	–8	–6		–1	0	1		5	9	
y	45	33	9			–9	–21			–63

9. La policía puede estimar, algunas veces, la velocidad ***V*** a la que viaja un automóvil antes de frenar a partir de la longitud ***L*** de las marcas de las llantas sobre el pavimento. Suponga que en una superficie seca L = 50 pies cuando V = 35 mi/h. Suponiendo que la velocidad es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la longitud de las marcas, estima la velocidad inicial si la longitud de las marcas es de 150 pies.

10. El máximo alcance (rango) de un proyectil es directamente proporcional al cuadrado de su velocidad inicial. Si el rango es de 16000 pies cuando la velocidad inicial es de 600 pies por segundo.

    a) Escribe el modelo matemático para ***R*** en términos de ***v***, donde ***R*** es el rango en pies y ***v*** la velocidad inicial en pies por segundo.

    b) Utiliza la fórmula para encontrar el rango cuando la velocidad inicial es de 800 pies por segundo.

Bibliografía:

1. Álgebra.Larson/Hostetler.Publicaciones Cultural.

2. Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica.Walter Fleming.Prentice May.

3. Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica.Swokowski.Grupo Editorial Iberoamérica.

4. Álgebra Elemental.Gordon Fuller. CECSA.

UNIDAD 3

Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Propósito:

Al finalizar, el alumno: Será capaz de modelar y resolver situaciones problemáticas que conduzcan a una ecuación de primer grado con una incógnita, esto lo hará manipulando algebraicamente el modelo, con la finalidad de que la representación algebraica sea una herramienta en la resolución de tales situaciones.

Aprendizajes

El lenguaje algebraico como representación de la generalidad

- Comprende el concepto de ecuación en el contexto de la resolución de problemas y lo expresa en el lenguaje algebraico.

El álgebra como sistema simbólico y abstracto que se utiliza para la resolución de problemas.

- Una vez expresada algebraicamente la condición que satisface la incógnita en un problema, el alumno la utiliza para resolverlo, empleando las reglas de transposición o las propiedades de la igualdad.

Introducción

En la unidad anterior se estudió la variación directamente proporcional y la función lineal, por una parte como el análisis de dos cantidades en que la razón de sus incrementos sean proporcionales, por otro lado la introducción del concepto de funcion lineal, aquí estudiaremos las ecuaciones de primer grado con una incógnita, veremos que toda ecuación de primer grado con una incógnita ó una ecuación lineal con una variable, desde la más simple hasta la más compleja, se puede escribir en la forma $ax + b = 0$ ó $ax + b = c$ al simplificar términos semejantes o realizar las operaciones indicadas. Estas ecuaciones son casos particulares de la función lineal $y = ax + b$, correspondientes a los valores de $y = 0$, e $y = c$ respectivamente.
Avanzaremos en el manejo del lenguaje algebraico al plantear ecuaciones de primer grado con una incógnita que expresan una condición que debe satisfacer un valor buscado, lo que permite modelar diversas situaciones.
Aunque en los siguientes cursos de tu bachillerato estudiarás más a fondo el concepto de función y en la unidad anterior avanzaste en este sentido, introduciremos este concepto para comprender la relación entre función, ecuación e identidad; entes matemáticos que manejarás dentro de todos tus cursos de matemáticas y que te servirá para su uso y tratamiento adecuados.

3.1. El lenguaje algebraico como representación de la generalidad

Aprendizaje: Comprende el concepto de ecuación en el contexto de la resolución de problemas y lo expresa en el lenguaje algebraico.

3.1.1 La ecuación como la condición simbólica que debe satisfacer la incógnita en un problema.

A continuación, damos algunos conceptos del algebra que son necesarios para la compresión del contenido desarrollado en esta unidad.

Consideremos los siguientes enunciados o frases:

El número **5** es un número menor que el número 50.

El número **7** es un número menor que el número 50.

El número **11** es un número menor que el número 50.

El número **18** es un número menor que el número 50.

El número **32** es un número menor que el número 50.

Notemos que todos los enunciados anteriores son ciertos o verdaderos.
Pero si deseamos escribir el enunciado sin indicar un número natural en particular (1,2, 3, …, 11, …,49) que cumpla la propiedad o no la cumpla, se puede escribir como sigue

El número **x** es un número menor que el número 50

Que toma el lugar de los cinco enunciados anteriores, ahora si en este enunciado o frase reemplazamos o cambiamos la letra **x** por los números 5, 7,11, 18, 32, uno a la vez obtenemos de nuevo los enunciados dados al inicio, también podemos cambiarla por números de forma que el enunciado sea falso, por ejemplo,

El número **72** es un número menor que el número 50.

El número **93** es un número menor que el número 50.

La letra **x** (y, z, w, t) se llama **variable**, en un enunciado que puede ser verdadero o falso, cuando es **cambiada, o remplazada, o sustituida** por algún número particular.

Ejemplo 1.

a) El número x multiplicado por 8 es igual 40.

b) El número z es un numero par.

c) El número y es un numero primo.

d) El número w es un número compuesto.

Actividad 1.

1. a) Escribe un enunciado con una variable para representar los siguientes enunciados.

1 es un número impar

2 es un número impar

3 es un número impar

4 es un número impar

5 es un número impar

b) ¿Cuáles enunciados son verdaderos y cuáles son falsos?

2. Sean los números 2, 4, 6, 8,10, y 12. Escribir los números de la lista que convierten a los siguientes enunciados en verdaderos.

a) x es un número par.

b) y es un número impar.

c) z más 6 es un número de la lista.

d) w es distinto del número 4.

Nota: Generalmente las ultimas letras del alfabeto se utilizan en matemáticas para simbolizar a las variables.

A continuación, damos definiciones importantes para la compresión de los conceptos que se presentan en esta unidad.

Definición 3.1 Una **expresión algebraica** es una representación simbólica que tiene números, letras, y signos de operaciones (suma, resta, división, potencia, raíces) y agrupación (paréntesis redondos y cuadrados, llaves), por ejemplo,

$$x,\ 5y,\ z^5,\ \sqrt{w},\ (x + y),\ [a\text{-}c]x,\ \frac{2(x+5y)-7z}{x^3-8}$$

Definición 3.2 Una expresión algebraica que consta de uno símbolo o varios símbolos que no están separados por los símbolos +, -, se le llama **término**.

$$a,\ 5xy,\ x^2y,\ \frac{3xz}{w},\ \sqrt{10yz}$$

Definición 3.3 Una **ecuación** es una igualdad con una o más incógnitas la cual se satisface para algunos valores de la o las incógnitas.

Definición 3.4 A los valores que hacen que se cumpla la igualdad se les llama **raíces o solución de la ecuación.**

Definición 3.5 El **grado de una ecuación** es el mayor de los exponentes de las incógnitas que están en los términos que la forman.

Definición 3.6 Una **identidad** es una igualdad, la cual es válida para cualquier valor que se le asigne a la o las incógnitas.

Definición 3.7 Una ecuación de primer grado con una incógnita es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que tienen una variable o incógnita con exponente uno, las cuales se denominan miembros de la igualdad, y es de la forma

$$ax + b = c$$

Donde $a, b\ y\ c$ son números reales con $a \neq 0$.

Ejemplo 2. Ejemplos de ecuaciones de primer grado con una variable o incógnita.

a) $4x + 2 = x - 9$

b) $2x - 8 = 10$

c) $\frac{x+3}{5} = 6$

Actividad 2.

De los siguientes incisos indica cuales son expresión algebraica, termino, ecuación de primer grado con una variable.

a) $7x + 9 = 2$

b) $8xyz – 2w$

c) $x^2 - 8x = 1$

d) $\frac{5zy}{x}$

e) $5y + 7x = 11$

f) $7xy - 4zw = t$

g) $\frac{w^4zt+4x}{3x-7y}$

3.1.2 El uso del paréntesis en la representación algebraica.

En los siguientes problemas se puede observar, la importancia del uso de los paréntesis como signo de agrupación, para escribir la expresión algebraica o el modelo matemático que los describen correctamente.

Ejemplo 3.

a) A la suma de un número con 3 se le resta 4 veces el mismo número para tener un total de 72.

Solución:

Sean

x = número desconocido

$x + 3$ = el número desconocido más 3

$4x$ = 4 veces el número desconocido.

Ahora el enunciado se expresa en forma simbólica como sigue

$$(x + 3) - 4x = 72$$

ó

$$x + 3 - 4x = 72$$

b) a 10 se le agrega la suma de un número con tres dividida por 4 y nos da un total de 72

Solución:

Sean

x = el número desconocido

x + 3 = el número desconocido más 3

$\frac{x+3}{4}$ = la suma del número desconocido con 3 dividida entre 4

El enunciado se escribe en forma simbólica como

$$10 + (x + 3)/4 = 72$$

Si no se escribe el paréntesis tendríamos que

$$10 + x + 3/4 = 72$$

Así que escribiríamos en forma simbólica el enunciado de dos formas, una de las cuales será incorrecta, por esto es importante el uso del paréntesis.

El no escribir, el paréntesis nos conduce a escribir el enunciado en dos formas diferentes que

c) Seis veces un número más cuatro es igual a dieciséis

Solución:

Sean

x = el número desconocido

6x = seis veces el número desconocido

6x + 4 = seis veces el número desconocido más cuatro

En enunciado se escribe en forma simbólica como

$$6x + 4 = 16$$

d) Pedro y Juan tienen entre los dos noventa pesos. Si Pedro pierde cuarenta pesos, el doble que le queda es igual a tres veces lo que tiene Juan. ¿Cuánto tienen cada uno?

Solución:

Sean

x = la cantidad en pesos que tiene Pedro.

90 – x = Cantidad en pesos que tiene Juan.

x – 40 = Cantidad en pesos de Pedro menos cuarenta pesos.

2(x – 40) = El doble de la cantidad que tiene Pedro cuando perdió cuarenta pesos

3(90 – x) = El tiple de la cantidad que tiene Juan

El problema se escribe en forma simbólica como sigue

$$2(x-40)=3(90-x)$$

Actividad 3

Representar en forma simbólica los siguientes problemas.

a) Ana es ocho años mayor que Carlos, pero hace tres años ella tenía el triple de edad que él. Determina la edad que hoy tiene cada uno de ellos.
b) Esperanza es dos veces mayor que Irma. Dentro de 15 años, la suma de sus edades será 105 años. ¿Qué edad tienen actualmente?
c) Calcula el área de un rectángulo cuyo largo es cinco veces su ancho y cuyo perímetro es de 108 metros (m).
d) Un cable de 120 pies de longitud se corta en cuatro tramos. Si cada tramo tiene el doble de longitud que el anterior, calcula la longitud del tramo más largo.
e) Se llena con metanol un tanque cilíndrico hasta un tercio de su capacidad. Si se le agregan 8 litros más, el nivel llega hasta la mitad del tanque. ¿Cuál es la capacidad del tanque?

3.2 La ecuación como la expresión simbólica de un estado específico de una función lineal.

En esta sección se presentan problemas que conducen a una ecuación de primer grado con una incógnita, o a una ecuación lineal con una variable, considerada como un caso particular de una función lineal.

Actividad 4

Contesta lo que se pide en el siguiente problema usando tus conocimientos adquiridos en la unidad 2 sobre funciones lineales.

"Un jugador de fútbol firmó un contrato con un club extranjero por una temporada y su contrato fue de *35,000* dólares anuales y un premio de *500* dólares por cada partido ganado por su equipo".

1. Si x es el número de partidos ganados en la temporada, y es su ingreso anual, ¿Cuál es la expresión que representa sus ingresos? ____.

2. Usa la expresión anterior para determinar su ingreso si ganó *18* partidos en la temporada.

____

____

3. Si su ingreso anual fue de *41,000* dólares ¿Cuántos partidos ganó en la temporada?

____

____

Solución:

1. $y = 35000 + 500x$

2. En este caso nos piden hallar el valor de y para el valor de $x = 18$

Usando la expresión del punto 1 tenemos: $y = 35000 + 500(18) = 44000$

Es decir, su ingreso anual es de *44,000* dólares

3. En este caso nos dan el valor de $y = 41000$, y debemos hallar el valor de x

Usando la expresión del punto 1, tenemos: $41000 = 35000 + 500x$

Despejando el valor de x tenemos: $41000 - 35000 = 500x$

$$6000 = 500x$$

$$\frac{6000}{500} = x$$

$$12 = x$$

Es decir, ganó *12* partidos en la temporada.

Si reescribimos la expresión obtenida en el punto 1, como $y = 500x + 35,000$, tenemos una función lineal, ya que es de la forma $y = ax + b$, donde $a = 500$ y $b = 35000$.

Es claro que el ingreso está en función del valor de x, es decir, depende del valor que tome x por lo que a y se le llama **variable dependiente** y a x **variable independiente**.

¿Puede *x* tomar el valor de –*2*?

El significado que podemos darle a *–2* sería el de *2* partidos perdidos, pero como el ingreso no toma en cuenta los partidos perdidos sino sólo los ganados, entonces en el modelo de este problema, *x* no puede tomar el valor de *–2.* Los valores que puede tomar x son enteros no negativos, es decir, *x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6*, etc.

A este conjunto de valores que puede tomar x se le llama dominio de la función.

En el punto 2 hallamos que si *x = 18* entonces y = *44000*. Y similarmente podemos hallar, para cualquier valor de "*x*" que pertenece a su dominio, un número "*y"* asociado a ese valor de "*x*", y sólo uno. Ésta es la condición para tener una función.

Formalmente decimos que una **función** es una regla de correspondencia que asocia a cada valor "*x"* del dominio uno y sólo un valor real "*y*".

En el ejemplo que estamos trabajando, la regla de correspondencia que me indica que valor le debo asociar a "*x*" es: *500 veces* "*x*" *más 35000*, y a este número real le llamamos la imagen de x bajo la función y se denota como f(x). Para observar, geométricamente, la relación entre dos variables al valor f(x) le llamamos "*y*", y así tenemos una pareja ordenada de números reales que podemos graficar en un sistema de coordenadas cartesiano

Aquí tenemos explicito el valor que le corresponde a *y*,

$$y = 500x + 35,000$$

Por ejemplo

si $x = 0$ entonces $y = 500(0) + 35000 = 0 + 35000 = 35000$

si $x = 2$ entonces $y = 500(2) + 35000 = 1000 + 35000 = 45000$

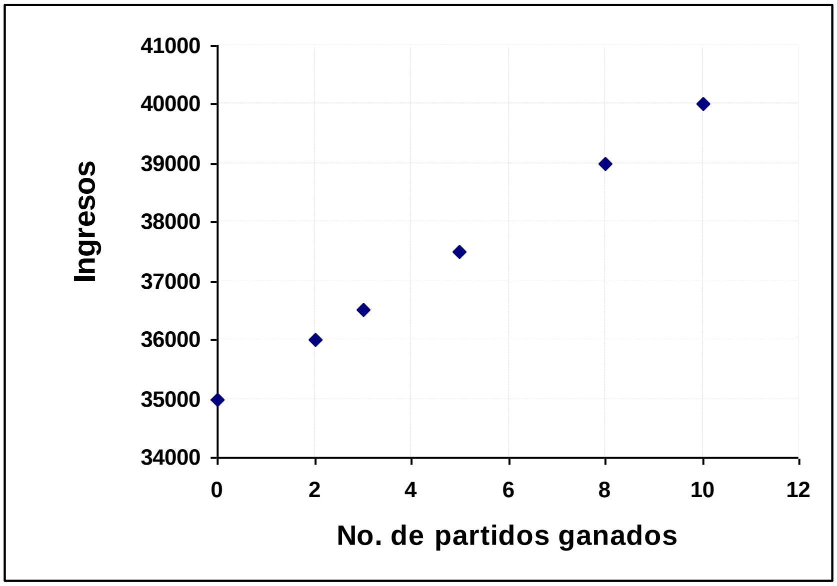
si $x = 5$ entonces $y = 500(5) + 35000 = 2500 + 35000 = 37500$

si $x = 8$ entonces $y = 500(8) + 35000 = 4000 + 35000 = 39000$

si $x = 10$ entonces $y = 500(10) + 35000 = 5000 + 35000 = 40000$

Con estos valores de *x* e *y* podemos dibujar algunos puntos de la gráfica de la función

$$y = 500\,x + 35000$$



Si uniéramos estos puntos se puede observar que se trata de una línea recta, que es lo que sabemos de las gráficas de las funciones lineales.

Para hallar el valor asociado a algún valor de x necesitamos conocer la regla de correspondencia.

Ejemplo 4. Si la longitud de una varilla es de y cm ¿Cuál es la longitud de cada uno de los lados, si se quiere formar un cuadrado?

Solución:

Sean

x = la longitud de un lado del cuadrado

4x = El perímetro del cuadrado

Así que

$$y = 4x$$

Si x = 2, entonces y = 8

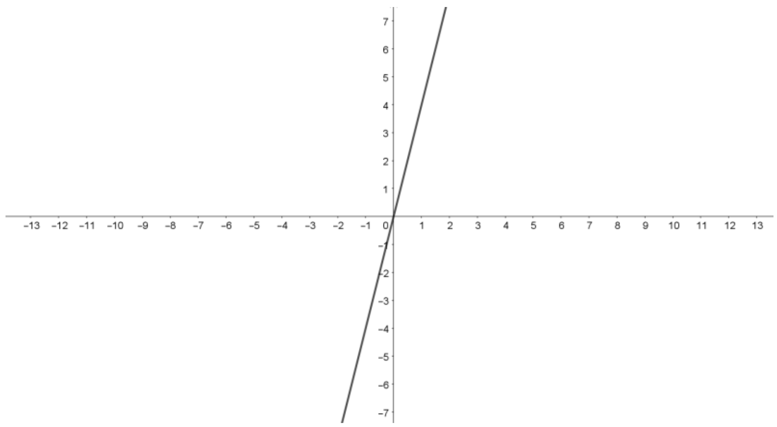
Si x= 5, entonces y = 20

Si x = 7, entonces y = 28

Si seguimos asignando longitudes a la variable x, obtenemos una y solo una longitud para la variable y, por lo que

$$y = 4x$$

Es una función lineal, cuya variable independiente x y la variable dependiente es y. La grafica de la función es



Por otro lado, si y = 44, es la longitud de la varilla, ¿cuál es la longitud de cada uno de los lados? Tendríamos la siguiente una ecuación de primer grado con una variable

$$4x = 44$$

Que al resolverla obtendríamos el valor de x = 11, que es la longitud de cada uno de los lados. Si y = 84 es la longitud de la varilla, la ecuación que obtenemos es

$$4x = 84$$

Si y = 128 es la longitud de la varilla, la ecuación obtenemos es

$$4x = 128$$

Podemos observar que para cada valor particular de y que asignemos tenemos una ecuación de primer grado de una incógnita o variable, que al resolverla obtenemos un único valor para x, a este valor se le llama solución de la ecuación

En el contexto del problema, no podemos asignar a x longitudes negativas, pues no existen, porque si lo hiciéramos obtendríamos que la longitud y de la varilla seria negativa, esto no es posible.

Como función lineal la variable independiente x se le puede asignar cualquier número real, esto se observa en el dibujo de la gráfica que se muestra antes.

Ejemplo 5. La edad Roberto más la edad de Ismael es igual a 57 años. Determina la edad de Roberto, si Ismael tiene 40 años.

Solución:

Sean

$$x = La\ edad\ de\ Roberto$$

$$y = La\ edad\ de\ Isamel$$

Entonces

$$x + y = 57$$

Podemos escribir la expresión anterior como una función lineal

$$y = -x + 57$$

Donde x es la variable independiente, la variable dependiente es y.

Sabemos que Ismael tiene 40 años de edad, es decir, $y = 40$, por lo que

$$-x + 57 = 40$$

Que es una ecuación de primer grado con una incógnita, y su solución es $x = 17$.

Por lo tanto, la respuesta a la pregunta es: Roberto tiene 17 años de edad.

Actividad 5.

Obtener la función lineal de cada problema, para resolver la ecuación de primer grado con una incógnita que se indica en él.

1. La señora Treviño tiene un hijo. La suma de sus edades es de 39 años. Si la señora Treviño tiene 26 años de edad. ¿Cuál es la edad de su hijo?

Sean

La edad de su hijo = _______________

La edad de la señora Treviño = _________________

Entonces la función lineal es _____________________

La ecuación de primer grado es _____________

Por tanto, su hijo tiene ________ años de edad.

2. El perímetro de un rectángulo es de 108 metros, ¿cuánto mide el ancho cuando el largo mide 54 metros?

Sean

_____= La longitud del ancho

_____= La longitud del largo

La función lineal es: __________________

La ecuación de primer grado a resolver es: __________________

El valor de la incógnita es igual a _________________

Por lo tanto, la longitud del ancho es ______ metros.

Utiliza la estrategia anterior para resolver los problemas siguientes

3. Roberto obtuvo las calificaciones siguientes en sendos exámenes de biología: 73, 62, 58 y 64. ¿Qué calificación debe obtener en un próximo examen para que su promedio sea de 70?

4. La escala de la temperatura Fahrenheit se relaciona con la escala Celsius (C) mediante la ecuación $°\mathrm{F} = 1.8°\mathrm{C} + 32$. ¿A cuántos grados Celsius equivalen 104 ºF?

5. Un primer número aumentado en 6% es igual a un segundo número. ¿Cuál es el primer número, cuando el segundo número es 840?

3.3 El álgebra como sistema simbólico y abstracto que se utiliza para la resolución de problemas.

Aprendizaje: Una vez expresada algebraicamente la condición que satisface la incógnita en un problema, el alumno la utiliza para resolverlo, empleando las reglas de transposición o las propiedades de la igualdad.

3.3.1 Reducción de una ecuación de primer grado con una incógnita a la forma: $\boldsymbol{ax+b=0}$.

Mediante el uso de las propiedades de los números reales transformamos ecuaciones de primer grado con una variable o incógnita a la forma

$$ax+b=0$$

donde $a, y\ b$ son números reales, con $a \neq 0$.

Ejemplo 6. Reducir las siguientes ecuaciones de primer grado con una incógnita a la forma

$$ax+b=0$$

El desarrollo que se presenta en los incisos no es formal, y que se realiza cuando se tiene experiencia en el uso de las propiedades de la igualdad y de los axiomas o propiedades de los números reales.

a) $3x = 10$

Solución:

Sea la ecuación

$$3x = 10$$

$$3x - 10 = 10 - 10 \quad restamos\ 10\ a\ ambos\ lados\ de\ la\ ecuacion$$

$$3x - 10 = 0 \quad restando$$

b) $9x = -1$

Solución:

Sea la ecuación

$$9x = -1$$

$$9x + 1 = -1 + 1 \quad sumamos\ en\ ambos\ lados\ de\ la\ ecuacion\ 1$$

$$9x + 1 = 0 \quad haciendo\ la\ suma$$

c) $5x + 7 = 8$

Solución: Sea

$$5x + 7 = 8$$

$$5x + 7 - 8 = 8 - 8 \quad a\ ambos\ lados\ de\ la\ ecuacion\ les\ restamos\ 8$$

$$5x - 1 = 0 \quad haciedo\ la\ resta$$

d) $6x + 4 = 16$

Solución:

Sea la ecuación

$$6x + 4 = 16$$

$$6x + 4 - 16 = 16 - 16 \quad restamos\ 16\ en\ ambos\ lados\ de\ la\ ecuacion$$

$$6x - 12 = 0 \quad haciendo\ la\ resta$$

e) $8x + 3 = -21 - 4x$

Solución:

Sea la ecuación

$$8x + 3 = -21 - 4x$$

$$8x + 3 + 21 = -21 - 4x + 21 \quad sumamos\ 21\ en\ ambos\ lados\ de\ la\ ecuacion$$

$$8x + 24 = -4x \quad haciendo\ la\ resta$$

Observamos que en ambos lados de la ecuación se tienen términos con la incógnita, recordemos que $-4x$ es un número, así que podemos hacer lo siguiente

$$8x + 24 + 4x = -4x + 4x \quad \textit{sumando en ambos lados de la ecuacion } 4x$$

$$12x + 24 = 0 \qquad \textit{haciendo la suma}$$

f) $7x - 4 = 2x + 26$

Solución:

Sea la ecuación

$$7x - 4 = 2x + 26$$

$$7x - 4 - 26 = 2x + 26 - 26 \quad \textit{restamos en ambos lados de la ecuacion } 26$$

$$7x - 30 = 2x \qquad \textit{haciendo la resta}$$

$$7x - 30 - 2x = 2x - 2x \qquad \textit{restamos } 2x \textit{ en ambos lados de la ecuación}$$

$$5x - 30 = 0 \quad \textit{haciendo la resta}$$

g) $\frac{5x+7}{3} = 8$

Solución:

Sea la ecuación

$$\frac{5x + 7}{3} = 8$$

$$5x + 7 = 8 \times 3 \qquad \textit{como 3 esta diviendo pasa multiplicando al otro lado de la ecuacion}$$

$$5x + 7 = 24 \qquad \textit{multiplicamos}$$

$$5x + 7 - 24 = 24 - 24 \quad \textit{restamos 24 en ambos lados de la ecuación}$$

$$5x + (-7) = 0 \qquad \textit{hacemos la resta}$$

Actividad 6. Reducir las siguientes ecuaciones a la forma $ax + b = 0$

1. $10x = -20$
2. $-7x = 14$
3. $3x + 2 = 6$
4. $11x - 9 = -27$
5. $\frac{9}{4}x + 3 = -9$
6. $\frac{2x+3}{3} = 23$

3.3.2 El concepto de ecuaciones equivalentes.

Consideremos los siguientes conceptos que son necesarios saber al resolver una ecuación de primer grado con una incógnita.

Definición 3.8 Una ecuación de primer grado con una incógnita o variable tiene solo **una solución o raíz**.

Definición 3.9 La solución o raíz de una ecuación de primer grado con una incógnita o variable es el valor numérico que al ser sustituido en lugar de la incógnita da como resultado **una identidad numérica**

Otra definición muy importante en el procedimiento algebraico para resolver una ecuación de primer grado de una incógnita es la siguiente.

Definición 3.10 Dos ecuaciones de primer grado con una incógnita se dice que **son equivalentes** cuando tienen la misma solución.

Ejemplo 7.

a) Las siguientes ecuaciones son equivalentes: $6x + 4 = 16$ y $6x - 12 = 0$.

Porque si $x = 2$, entonces

$$6(2) + 4 = 16 \quad ; \quad 6(2) - 12 = 0$$
$$12 + 4 = 16 \quad ; \quad 12 - 12 = 0$$
$$16 = 16 \quad ; \quad 0 = 0$$

En ambas ecuaciones ocurre una identidad numérica al sustituir el número 2 en lugar de la incógnita.

b) ¿Las ecuaciones $7x - 1 = 0$ y $x = 1$ son equivalentes?

No son equivalentes, ya que si $x = 1$, entonces

$$7(1) - 1 = 0 \quad ; \quad 1 = 1$$

$$7 - 1 = 0 \quad ; \quad 1 = 1$$

$$6 \neq 0 \quad ; \quad 1 = 1$$

Para $x = 1$, ni para otro valor, no ocurre que en ambas ecuaciones simultáneamente una identidad numérica, así que no son ecuaciones equivalentes.

c) ¿ Las ecuaciones $3x + 9 = 18$ y $3x = 9$ son equivalentes?

Si $x = 3$, entonces

$$3(3) + 9 = 18 \quad ; \quad 3(3) = 9$$

$$9 + 9 = 18 \quad ; \quad 9 = 9$$

$$18 = 18 \quad ; \quad 9 = 9$$

Notamos que al sustituir el valor 3 en ambas ecuaciones ocurre una identidad numérica, así que es solución de las dos ecuaciones, es decir, tienen la misma solución, por lo tanto son ecuaciones equivalentes.

Actividad 7.

Indica cuales de las siguientes parejas de ecuaciones son equivalentes.

1. $2x - 7 = 1 \quad ; \quad 2x = 8$
2. $4x = 20 \quad ; \quad 2x = 10$
3. $7x + 21 = 24 \quad ; \quad 7x + 6 = 9$
4. $\frac{x+2}{8} + 3 = 1 \quad ; \quad x + 38 = 20$
5. $\frac{5}{3}x - \frac{7}{2} = 6 \quad ; \quad 2x = 3$

Resolver una ecuación de primer grado con una incógnita significa encontrar su solución, es decir, hallar el valor (de la incógnita o variable) que satisface la ecuación.

3.3.3 Las reglas algebraicas que producen ecuaciones equivalentes.

Las reglas de transposición o las propiedades de la igualdad y las condiciones para su aplicación.

El resolver una ecuación, en particular, una ecuación de primer grado con una incógnita, es un proceso que involucra transformar está, en ecuaciones equivalentes cada vez más simples. Esta transformación se lleva a cabo mediante un procedimiento que aplica ciertas operaciones que resultan de la aplicación de las propiedades de la igualdad, que enunciamos a continuación.

Propiedades de la igualdad

- **Propiedad reflexiva**: Todo número es igual a sí mismo.
  Si a es un número real entonces $a = a$

- **Propiedad simétrica**: Si un número es igual a otro, entonces éste es igual al primero.
  Sí a y b dos números reales y $a = b$ entonces $b = a$

Ejemplo 8.

a) Sí *4 = 2x + 3,* entonces *2x + 3 = 4,* las dos ecuaciones son equivalentes, porque:

Si $x = \frac{1}{2}$ entonces

$$4 = 2\left(\frac{1}{2}\right) + 3 \quad ; \quad 2\left(\frac{1}{2}\right) + 3 = 4$$

$$4 = 1 + 3 \quad ; \quad 1 + 3 = 4$$

$$4 = 4 \quad ; \quad 4 = 4$$

En consecuencia, tienen la misma solución.

b) Si $7x - 8 = 12$, entonces $12 = 7x - 8$, las dos ecuaciones son equivalentes, ya que,

Si $x = \frac{20}{7}$, entonces

$$7\left(\frac{20}{7}\right) - 8 = 12 \quad ; \quad 12 = 7\left(\frac{20}{7}\right) - 8$$

$$20-8=12 \quad ; \quad 12=20-8$$

$$12=12 \quad ; \quad 12=12$$

Por lo tanto, tienen la misma solución.

c) Si $\frac{2x}{5}+9=0$, entonces $0=\frac{2x}{5}+9$, son ecuaciones equivalentes, porque,

Si $x=-9$ entonces

$$\frac{2(-9)}{5}+9=0 \quad ; \quad 0=\frac{2\left(-\frac{45}{2}\right)}{2}+9$$

$$\frac{-18}{2}+9=0 \quad ; \quad 0=\frac{-18}{2}+9$$

$$-9+9=0 \quad ; \quad 0=-9+9$$

$$0=0$$

Así que son ecuaciones equivalentes, tienen la misma solución.

- **Propiedad transitiva:** Si un número es igual a un segundo número, y éste es igual a un tercero, entonces el primero es igual al tercero.
  Sí a, b y c son tres números reales donde $a=b$ y $b=c$ entonces $a=c$

Ejemplo 9. *x – 2 = y + 2,* e *y + 2 = 3x + 5,* entonces *x – 2 = 3x + 5*

- **Propiedad aditiva:** Si $a, b,$ y c son tres número reales cualesquiera tales que $a=b$, entonces

$$a+c=b+c$$

Ejemplo 10.

a) Si $3x=7$, entonces $3x+9=7+9$, son ecuaciones equivalentes, puesto que

Si $x=\frac{7}{3}$, entonces

$$3\left(\frac{7}{3}\right)=7 \quad ; \quad 3\left(\frac{7}{3}\right)+9=7+9$$

$$7=7 \quad ; \quad 7+9=7+9$$

$$7 = 7 \quad ; \quad 16 = 16$$

Como $\frac{7}{3}$ es solución de ambas ecuaciones, las ecuaciones son equivalentes.

b) Si $x + 1 = 3$, entonces $x + 1 + 5 = 3 + 5$, son ecuaciones equivalentes ya que

Si $x = 2$, entonces

$$2 + 1 = 3 \quad ; \quad 2 + 1 + 5 = 3 + 5$$

$$3 = 3 \quad ; \quad 8 = 8$$

Como el valor 2 satisface a las dos ecuaciones, esto significa que son ecuaciones equivalentes.

c) Si $3x + 12 = x$, entonces $3x + 12 + 6 = x + 6$

Si $x = -6$, entonces

$$3(-6) + 12 = -6 \quad ; \quad 3(-6) + 12 + 6 = -6 + 6$$

$$-18 + 12 = -6 \quad ; \quad -18 + 12 + 6 = 0$$

$$-6 = -6 \quad ; \quad -18 + 18 = 0$$

$$-6 = -6 \quad ; \quad 0 = 0$$

La solución de ambas ecuaciones es -6, en consecuencia las dos ecuaciones son equivalentes.

Esta propiedad permite deducir que, si sumamos un mismo número en ambos miembros de la ecuación, obtenemos una ecuación equivalente. Esta propiedad también se aplica para la resta de un mismo número en ambos lados de la ecuación, esto es,

Si $a = b$, entonces $a - c = b - c$

Esto significa si restamos un numero en ambos lados de una ecuación, obtenemos una ecuación equivalente a la primera.

Ejemplo 11.

a) Si $5x + 8 = 7$, entonces $(5x + 8) - 7 = 7 - 7$ son ecuaciones equivalentes, puesto que

Si $x = -\frac{1}{5}$, entonces

$$5\left(-\frac{1}{5}\right) + 8 = 7 \quad ; \quad \left(5\left(-\frac{1}{5}\right) + 8\right) - 7 = 7 - 7$$

$$-1 + 8 = 7 \quad ; \quad (-1 + 8) - 7 = 7 - 7$$

$$7 = 7 \quad ; \quad 7 - 7 = 7 - 7$$

$$7 = 7 \quad ; \quad 0 = 0$$

Las dos ecuaciones tienen la misma solución, por lo que son equivalentes.

b) Si $x + 4 = 0$, entonces $x + 4 - 4 = 0 - 4$ son ecuaciones equivalentes, ya que

Si $x = -4$, entonces

$$-4 + 4 = 0 \quad ; \quad -4 + 4 - 4 = 0 - 4$$

$$0 = 0 \quad ; \quad 0 - 4 = 0 - 4$$

$$0 = 0 \quad ; \quad -4 = -4$$

Como -4 es la solución de las dos ecuaciones, las ecuaciones son equivalentes.

Notemos que, a partir de la aplicación de la propiedad aditiva de la igualdad, podemos decir que es posible cambiar un término de la ecuación de lugar con respecto al signo de igualdad cambiándole el signo.

Ejemplo 12.

a) Si $10x - 2 = x$, entonces $10x = x + 2$

b) Si $x + 14 = 0$, entonces $x = -14$

c) Si $4x + 13 = 17$, entonces $4x = 7 - 13$

d) Si $7x + 12 = -x$, entonces $7x + 12 + x = 0$

e) Si $8x + 1 = x - 7$, entonces $8x + 1 - x + 7$

- **Propiedad multiplicativa.** Si a, b y c son números reales cualesquiera tales que $a = b$, y $c \neq 0$, entonces $ac = bc$

Ejemplo 13.

a) Si $4x = 3$, entonces $(4x)(2) = (3)(2)$ o $8x = 6$ son ecuaciones equivalentes.

b) Si $2x + 7 = 3$, entonces $(3x + 7) \times 9 = 3 \times 9$, son ecuaciones equivalentes.

c) Si $\frac{5}{3}x - 1 = 7$, entonces $\left(\frac{5}{3}x - 1\right) \times 3 = 7 \times 3$, son ecuaciones equivalentes.

d) $11x = 5$, entonces $(11x)(3) = (5)(3)$

Esta propiedad establece que, si ambos miembros de una igualdad de números reales se multiplican por un mismo número distinto de cero, se obtiene una igualdad equivalente a la primera. También permite dividir ambos miembros de una igualdad por un número real diferente de cero y obtener una igualdad equivalente a la inicial, ya que $\frac{a}{b} = a\left(\frac{1}{b}\right)$ donde $b \neq 0$.

Otra propiedad útil para resolver ecuaciones es:

- **Propiedad de sustitución:** Si un número es igual a otro, en cualquier expresión en que aparezca el primero puede reemplazarse por el segundo sin alterar el valor de la expresión.

Si $a = b + c$ y $b = d$, entonces $a = d + c$

Ejemplo14.

a) Si *x = y + 3, e y = 4,* entonces *x = 4 + 3*

b) Si $x + 2 = 3 + y$, y $x = 5$, entonces $5 + 2 = 3 + y$

La propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma.

- **Propiedad distributiva:**

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

Ejemplo 15.

a) $3 \times (19 + 4) = (3 \times 19) + (3 \times 4)$

b) $5(x + 2) = 5x + 10$

c) $2(7x - 1) = 14x - 2$

d) $3\left(\frac{11}{3}x - 5\right) = \frac{33}{3}x - 15$

e) $7(9 - 6x) = 63 - 42x$

Actividad 8. En los siguientes ejercicios indica que propiedad de la igualdad se usó para obtener la ecuación equivalente dada, a partir de la ecuación inicial.

Ecuación inicial	Ecuación equivalente	Propiedad
1. $23x + 11 = 5$	$23x + 5 = 0$	Aditiva
2. $6x - 9 = 0$	$6x = 9$	
3. $7x + 1 = 57$	$57 = 7x + 1$	
4. $x + 3 = 1$	$2x + 6 = 2$	

5. $8x - 4 = 8$	$8x = 12$	
6. $3(x + 9) = 12$	$3x + 27 = 12$	

3.3.4 Resolución de una ecuación de primer grado con una incógnita transformándola a la forma

$$\boldsymbol{ax + b = 0}$$

Para transformar una ecuación lineal de primer grado con una incógnita a la forma $\boldsymbol{ax + b = 0}$, y después obtener su solución es necesario que se apliquen las propiedades de la igualdad, y los axiomas de los números reales para conseguir una ecuación equivalente a la inicial, al final del proceso, donde la solución sea evidente, es decir, debe ser de la forma $\boldsymbol{x = k}$.
Es importante señalar que la solución de una ecuación de primer grado con una incógnita es de la forma

$$\boldsymbol{x = k}$$

donde el coeficiente de la incógnita o variable es uno y está es igual a un número real $\boldsymbol{k}$.

Enseguida enunciamos los axiomas o propiedades que cumplen los números reales

Sean $a, b, y\ c$ números reales cualesquiera, con la adición y multiplicación ordinarias definidas.

- **Cerradura:** Si $\boldsymbol{a}\ y\ \boldsymbol{b}$ son números reales, entonces $\boldsymbol{a + b}$ es un número real y $\boldsymbol{a \times b}$ es un número real.

Ejemplo 16. $3 + 8$ es un número real, y 3×8 es un número real.

- **Inverso aditivo:** Para todo número real $\boldsymbol{a}$, existe un único número real $-\boldsymbol{a}$, tal que

$$\boldsymbol{a + (-a) = 0}$$

Ejemplo 17. si $a = 5$, entonces existe $-a = -5$ tal que $5 + (-5) = 0$

- **Inverso multiplicativo:** Para todo número real $\boldsymbol{b}$, con $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$, existe un número real único $\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{b}}$, para el cual $\boldsymbol{b} \times \left(\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{b}}\right) = \boldsymbol{1}$

Ejemplo 18. Si $b = 7$, tenemos que $7 \neq 0$, existe $\frac{1}{b} = \frac{1}{7}$ tal que $7 \times \left(\frac{1}{7}\right) = 1$

- **Propiedades asociativas:**

$$\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} \qquad \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}$$

Ejemplo 19. $5 + (11 + 45) = (5 + 11) + 45$ $\qquad$ $7 \times (10 \times 4) = (7 \times 10) \times 4$

- **Idéntico aditivo:** Existe un único número real **0** tal que $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{a}$, para todo número real $\boldsymbol{a}$.

Ejemplo 20. $23 + 0 = 23$

- **Idéntico multiplicativo:**
  Existe un único número real **1** tal que $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{1} = \boldsymbol{a}$, para todo número real $\boldsymbol{a}$

Ejemplo 21. $12 \times 1 = 12$

- **Propiedades conmutativas:**

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \qquad \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$$

Ejemplo 22. $10 + (-9) = (-9) + 10$ $\qquad$ $5 \times (-3) = (-3) \times 5$

- **Propiedad distributiva:**

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$$

Ejemplo 23. $12 \times (5 + 7) = 12 \times 5 + 12 \times 7$

Es importante conocer la siguiente idea para la resolución de ecuaciones de primer grado con una variable.

Una ecuación lineal o de primer grado con una incógnita **tiene a lo más una solución**, es decir, puede tener **una o ninguna solución**.

Podemos reescribir las soluciones de los incisos del ejemplo 6, indicando que propiedad de la igualdad y que axioma de los números reales, se usó en cada uno de los pasos del desarrollo para expresar primero a la ecuación de primer grado con una variable en la forma $ax + b = 0$, y después para determinar su solución si existe.

Ejemplo 24. Obtener la solución de las siguientes ecuaciones de primer grado con una incógnita.

a) $3x = 10$

Solución:

Sea la ecuación

$$3x = 10$$

$$3x + (-10) = 10 + (-10) \quad propiedad\ aditiva$$

$$3x + (-10) = 0 \quad inverso\ aditivo$$

$$3x = 10 \quad propiedad\ aditiva$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)(3x) = \left(\frac{1}{3}\right)(10) \quad propiedad\ multiplicativa$$

$$\left(\left(\frac{1}{3}\right)(3)\right)x = \frac{10}{3} \quad propiedad\ asociativa$$

$$(1)x = \frac{10}{3} \quad inverso\ multiplicativo$$

$$x = \frac{10}{3} \quad idéntico\ multiplicativo$$

La solución de la ecuación es: $\boldsymbol{x = \frac{10}{3}}$

b) $9x = -1$

Solución:

Sea la ecuación

$$9x = -1$$

$$9x + 1 = -1 + 1 \quad \textit{propiedad aditiva}$$

$$9x + 1 = 0 \quad \textit{inverso aditivo}$$

$$9x = -1 \quad \textit{propiedad aditiva}$$

$$\left(\frac{1}{9}\right)(9x) = \left(\frac{1}{9}\right)(-1) \quad \textit{propiedad multiplicativa}$$

$$\left(\left(\frac{1}{9}\right)(9)\right)x = -\frac{1}{9} \quad \textit{propiedad asociativa y multiplicación}$$

$$(1)x = -\frac{1}{9} \quad \textit{inverso multiplicativo}$$

$$x = -\frac{1}{9} \quad \textit{idéntico multiplicativo}$$

La solución de la ecuación es $\boldsymbol{x = -\frac{1}{9}}$

c) $5x + 7 = 8$

Solución: Sea

$$5x + 7 = 8$$

$$(5x + 7) + (-8) = 8 + (-8) \quad \textit{propiedad aditiva}$$

$$(5x + 7) + (-8) = 0 \quad \textit{inverso aditivo}$$

$$5x + \left(7 + (-8)\right) = 0 \quad \textit{propiedad asociativa}$$

$$5x + (-1) = 0 \quad \textit{sumando}$$

$$5x = 1 \quad \textit{propiedad aditiva}$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)(5x) = \left(\frac{1}{5}\right)(1) \quad \textit{propiedad multiplicativa}$$

$$\left(\left(\frac{1}{5}\right)(5)\right)x = \frac{1}{5} \quad \textit{propiedad asociativa y multiplicación}$$

$$(1)x = \frac{1}{5} \quad \textit{inverso multiplicativo}$$

$$x = \frac{1}{5} \quad \textit{idéntico multiplicativo}$$

La solución de la ecuación es $\boldsymbol{x = \frac{1}{5}}$

d) $6x + 4 = 16$

Solución:

Sea la ecuación

$$6x + 4 = 16$$

$$(6x + 4) + (-16) = 16 + (-16) \quad \textit{propiedad aditiva}$$

$$(6x + 4) + (-16) = 0 \qquad \textit{inverso aditivo}$$

$$6x + \big(4 + (-16)\big) = 0 \qquad \textit{propiedad asociativa}$$

$$6x + (-12) = 0 \qquad \textit{sumando}$$

$$6x = 12 \qquad \textit{propiedad aditiva}$$

$$\left(\frac{1}{6}\right)(6x) = \left(\frac{1}{6}\right)(12) \qquad \textit{propiedad multilicativa}$$

$$\left(\left(\frac{1}{6}\right)(6)\right)x = \frac{12}{6} \qquad \textit{propiedad asociativa y multiplicación}$$

$$(1)x = 2 \qquad \textit{inverso multiplicativo y división}$$

$$x = 2 \qquad \textit{idéntico multiplicativo}$$

La solución de la ecuación es $\boldsymbol{x = 2}$

e) $8x + 3 = -21 - 4x$

Solución:

Sea la ecuación

$$8x + 3 = -21 - 4x$$

$$(8x + 3) + 21 = (-21 - 4x) + 21 \qquad \textit{propiedad aditiva}$$

$$8x + (3 + 21) = (-21 - 4x) + 21 \qquad \textit{propiedad asociativa}$$

$$8x + 24 = (-21 - 4x) + 21 \qquad \textit{sumando}$$

$$8x + 24 = (-4x - 21) + 21 \qquad \textit{propiedad conmutativa}$$

$$8x + 24 = -4x + (-21 + 21) \qquad \textit{propiedad asociativa}$$

$$8x + 24 = -4x + 0 \qquad \textit{inverso aditivo}$$

$$8x + 24 = -4x \qquad \textit{identico aditivo}$$

Observamos que en ambos lados de la ecuación se tienen términos con la incógnita, recordemos que $-4x$ es un número, así que podemos hacer lo siguiente

$$(8x + 24) + 4x = -4x + 4x \qquad \textit{propiedad aditiva}$$

$$(8x + 24) + 4x = 0 \qquad \textit{inverso aditivo}$$

$$8x + (24 + 4x) = 0 \quad \textit{propiedad asociativa}$$

$$8x + (4x + 24) = 0 \quad \textit{propiedad conmutativa}$$

$$(8x + 4x) + 24 = 0 \quad \textit{propiedad asociativa}$$

$$12x + 24 = 0 \quad \textit{sumando}$$

$$12x = -24 \quad \textit{propiedad aditiva}$$

$$\left(\frac{1}{12}\right)(12x) = \left(\frac{1}{12}\right)(-24) \quad \textit{propiedad multiplicativa}$$

$$\left(\left(\frac{1}{12}\right)(12)\right)x = -\frac{24}{12} \quad \textit{propiedad asociativa y multiplicación}$$

$$(1)x = -2 \quad \textit{inverso multiplicativo y división}$$

$$x = -2 \quad \textit{idéntico multiplicativo}$$

La solución de la ecuación es $\boldsymbol{x = -2}$

f) $7x - 4 = 2x + 26$

Solución:

Sea la ecuación

$$7x - 4 = 2x + 26$$

$$(7x - 4) + (-26) = (2x + 26) + (-26) \quad \textit{propiedad aditiva}$$

$$7x + \big(-4 + (-26)\big) = 2x + \big(26 + (-26)\big) \quad \textit{propiedad asociativa}$$

$$7x + \big(-4 + (-26)\big) = 2x + 0 \quad \textit{inverso aditivo}$$

$$7x + \big(-4 + (-26)\big) = 2x \quad \textit{identico aditivo}$$

$$7x - 30 = 2x \quad \textit{sumando}$$

$$(7x - 30) + (-2x) = 2x + (-2x) \quad \textit{propiedad aditiva}$$

$$(7x - 30) + (-2x) = 0 \quad \textit{inverso aditivo}$$

$$7x + \big(-30 + (-2x)\big) = 0 \quad \textit{propiedad asociativa}$$

$$7x + \big((-2x) + (-30)\big) = 0 \quad \textit{propiedad conmutativa}$$

$$\big(7x + (-2x)\big) + (-30) = 0 \quad \textit{propiedad asociativa}$$

$$5x + (-30) = 0 \quad \textit{sumando}$$

$$5x = 30 \quad \textit{propiedad aditiva}$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)(5x) = \left(\frac{1}{5}\right)(30) \quad \textit{propiedad multiplicativa}$$

$$\left(\left(\frac{1}{5}\right)(5)\right)x = \frac{30}{5} \qquad \textit{propiedad asociativa y multiplicación}$$

$$(1)x = 6 \qquad \textit{inverso multiplicatico y división}$$

$$x = 6 \qquad \textit{idéntico multiplicativo}$$

La solución de la ecuación es $\boldsymbol{x = 6}$

Actividad 6.

En los siguientes problemas indica que axiomas o propiedades de los números reales se aplican en cada paso del desarrollo que se realiza, para escribir las ecuaciones de primer grado de una incógnita a la forma $ax + b = 0$, después obtener su solución.

1. $10x = 23$

$$10x + (-23) = 23 + (-23) \quad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$10x + (-23) = 0 \quad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

2. $2x + 1 = -4$

$$(2x + 1) + 4 = -4 + 4 \quad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$(2x + 1) + 4 = 0 \quad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$2x + (1 + 4) = 0 \quad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$2x + 5 = 0 \quad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

3. $\frac{1}{3}(x + 1) = 8$

$$(3)\left(\frac{1}{3}\right)(x + 1) = (3)(8) \quad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$(1)(x + 1) = (3)(8) \quad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$x + 1 = (3)(8) \quad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$x + 1 = 24 \quad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$(x + 1) + (-24) = 24 + (-24) \quad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$(x + 1) + (-24) = 0 \quad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$x + \big(1 + (-24)\big) = 0 \quad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$x + (-23) = 0 \quad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

4. $2x + 8 = 7x - 37$

$$(2x + 8) + 37 = (7x - 37) + 37 \quad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$(2x+8)+37=7x+(-37+37)$ ____________________

$(2x+8)+37=7x+0$ ____________________

$(2x+8)+37=7x$ ____________________

$2x+(8+37)=7x$ ____________________

$2x+45=7x$ ____________________

$(2x+45)+(-7x)=7x+(-7x)$ ____________________

$(2x+45)+(-7x)=0$ ____________________

$2x+\big(45+(-7x)\big)=0$ ____________________

$2x+\big((-7x)+45\big)=0$ ____________________

$\big(2x+(-7x)\big)+45=0$ ____________________

$(-5x)+45=0$ ____________________

5. $\frac{2x}{3}-\frac{5}{3}=3$

$\left(\frac{1}{3}\right)(2x-5)=3$ ____________________

$(3)\left(\frac{1}{3}\right)(2x-5)=(3)(3)$ ____________________

$(1)(2x-5)=(3)(3)$ ____________________

$2x-5=(3)(3)$ ____________________

$2x-5=9$ ____________________

$(2x-5)+(-9)=9+(-9)$ ____________________

$(2x-5)+(-9)=0$ ____________________

$2x+\big(-5+(-9)\big)=0$ ____________________

$2x+(-14)=0$ ____________________

6. $9(2x-6)-(x+3)=4x-18$

$(9)(2x)+(9)(-6)-(x+3)=4x-18$ ____________________

$18x+(-54)-(x+3)=4x-18$ ____________________

$18x+(-54)+(-1)(x+3)=4x-18$ ____________________

$18x+(-54)+(-1)(x)+(-1)(3)=4x-18$ ____________________

$18x+(-54)+(-x)+(-3)=4x-18$ ____________________

$\big(18x+(-x)\big)+\big((-54)+(-3)\big)=4x-18$ ____________________

$$17x + (-57) = 4x - 18 \qquad \_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$\big(17x + (-57)\big) + 18 = (4x - 18) + 18 \qquad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$17x + \big((-57) + 18\big) = 4x + \big((-18) + 18\big) \qquad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$17x + \big((-57) + 18\big) = 4x + 0 \qquad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$17x + \big((-57) + 18\big) = 4x \qquad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$17x + (-39) = 4x \qquad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$\big(17x + (-39)\big) + (-4x) = 4x + (-4x) \qquad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$\big(17x + (-39)\big) + (-4x) = 0 \qquad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$17x + \big((-39) + (-4x)\big) = 0 \qquad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$17x + \big((-4x) + (-39)\big) = 0 \qquad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$\big(17x + (-4x)\big) + (-39) = 0 \qquad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$13x + (-39) = 0 \qquad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Justifica cada paso de tu procedimiento que realizas para escribir las siguientes ecuaciones de primer grado con una incógnita en la forma $ax + b = 0$, y obtén su solución. Recuerden que la incógnita puede ser simbolizada con una letra distinta de la letra x.

7. $\frac{x}{6} + \frac{x}{5} = 11$
8. $15x - 5(2x - 1) = 3(3x - 5)$
9. $4(6 - x) - 2(3 - x) - 5 = 9(5 - 2x)$
10. $\frac{3x+5}{4} - \frac{2x-1}{3} = 2$
11. $6x - 7 = 2x + 1$
12. $3(y + 2) = 8y + 1$
13. $6(y - 1) - 5(y + 2) = -14$
14. $\frac{7w}{8} + 9 = \frac{w}{2} + 6$
15. $\frac{3t+7}{2} + 3t - 7 = \frac{2t+3}{5}$

La ecuación de primer grado con una incógnita es de la forma

$$\boldsymbol{ax + b = c}$$

donde a, b, c son números reales y $a \neq 0$.

Utilizando las reglas de transformación podemos llevar a la ecuación de primer grado con una incógnita a la forma

$$\boldsymbol{ax + d = 0}$$

y está puede ser transformada a la forma

$$\boldsymbol{ax = e}$$

La cual a su vez puede ser llevada a la forma

$$\boldsymbol{x = k}$$

donde $k = \frac{e}{a}$

Cada una de estas ecuaciones son equivalentes entre sí, y a la ecuación inicial, la última ecuación de manera informal, se dice que **“la incógnita está despejada”**, realmente es la solución de la ecuación de primer grado con una incógnita.

Ejemplo 25.

a) Resolver la ecuación $5x + 7 = 22$

Aplicamos la propiedad aditiva

$$5x + 7 - 22 = 0$$

Haciendo la resta

$$5x - 15 = 0$$

Aplicando nuevamente la propiedad aditiva

$$5x = 15$$

Aplicando la propiedad multiplicativa

$$x = \frac{15}{5}$$

Realizando la división obtenemos

$$x = 3$$

Notemos que las ecuaciones

$$5x + 7 = 22$$

$$5x - 15 = 0$$

$$5x = 15$$

$$x = 3$$

Son equivalentes puesto que

$$5(3) + 7 = 22 \quad ; \quad (3) - 15 = 0 \;; \quad 5(3) = 15 \quad ; \quad 3 = 3$$

$$15 + 7 = 22 \;; \quad 15 - 15 = 0 \quad ; \quad 15 = 15 \quad ; \quad 3 = 3$$

$$22 = 22 \quad ; \quad 0 = 0 \quad ; \quad 15 = 15 \quad ; \quad 3 = 3$$

Al cambiar o sustituir la incógnita por el valor $x = 3$, se obtienen en cada ecuación una igualdad verdadera.

b) Resolver la ecuación $10x - 3 = -27$

Aplicamos la propiedad aditiva

$$10x - 3 + 27 = 0$$

Restando

$$10x + 24 = 0$$

Aplicamos la propiedad aditiva

$$10x = -24$$

Aplicando la propiedad multiplicativa

$$x = -\frac{24}{10}$$

Simplificando

$$x = -\frac{12}{5}$$

Las ecuaciones

$$10x - 3 = -27$$

$$10x + 24 = 0$$

$$10x = -24$$

$$x = -\frac{12}{5}$$

Son equivalentes, porque

$$10\left(-\frac{12}{5}\right) - 3 = -27 \quad ; \quad 10\left(-\frac{12}{5}\right) + 24 = 0 \quad ; \quad 10\left(-\frac{12}{5}\right) = -24 \quad ; \quad -\frac{12}{5} = -\frac{12}{5}$$

$$-\frac{120}{5} - 3 = -27 \quad ; \quad -\frac{120}{5} + 24 = 0 \quad ; \quad -\frac{120}{5} = -24 \quad ; \quad -\frac{12}{5} = -\frac{12}{5}$$

$$-24-3=-27 \quad ; \quad -24+24=0 \quad ; \quad -24=-24 \quad ; \quad -\frac{12}{5}=-\frac{12}{5}$$

$$-27=-27 \quad ; \quad 0=0 \quad ; \quad -24=-24 \quad ; \quad -\frac{12}{5}=-\frac{12}{5}$$

Al sustituir o cambiar la incógnita por el valor $x=-\frac{12}{5}$, se obtiene una igualdad verdadera.

Actividad 7

Resuelve las siguientes ecuaciones para la incógnita dada.

1) $2x + 7 = 10$

2) $15 - y = 4y$

3) $16z - 23 = 18z + 41$

4) $-2(n-3) - n = 6$

5) $12(1-x) + 7x = 5x - 12$

6) $3h + 2(h-1) = 5h + 2$

7) $-2(y-7) + 9y + 4 = -(9-7y)$

8) $19 - 9[2 - 2(x-7)] = 3[x - 5(2x+1)]$

9) $\frac{3}{5} = -6x$

10) $\frac{8x}{-3} = 4x + 20$

11) $\frac{3}{x} + \frac{1}{4} = \frac{10}{8x}$

12) $\frac{3}{5}t = \frac{7}{11}$

13) $\frac{3r+1}{3} = \frac{11r-7}{11}$

14) $\frac{17x-5}{x} + 9 = \frac{1}{x}$

15) $\frac{-12}{5} = \frac{4-n}{2n}$

16) $\frac{2}{x+3} - \frac{1}{x} = \frac{5}{7x}$

17) $(3x-5)(3x+5) - (3x-8)^2 = 0$

18) $\frac{7}{x} + 2 = \frac{2x-1}{x+1}$

19) $\frac{3-12y}{1-9y} = \frac{3(1-4y)}{1-9y}$

20) $\frac{z}{z+7} = \frac{9-z}{2z+14}$

Cuando una relación entre objetos de un área determinada es descubierta, frecuentemente es descrita usando un modelo matemático. Un modelo matemático simple es una ecuación Por ejemplo, la relación entre los tres elemento fundamentales en todo circuito eléctrico (Voltaje, corriente y resistencia) fue descubierta y enunciada por el físico alemán George Simón Ohm, y es conocida como la ley de Ohm; ésta establece que: “*En todo circuito eléctrico, la corriente que circula por él, es directamente proporcional al voltaje aplicado, e inversamente proporcional a la resistencia propia del circuito”* , La ley de Ohm se puede expresar usando el modelo matemático. $I = \frac{V}{R}$

I = corriente eléctrica

V = voltaje o tensión eléctrica

R = resistencia

Una ecuación que es usada para describir una relación especifica (una ley) es llamada una **formula.** Obsérvese que estas fórmulas son ecuaciones con dos o más literales.

La solución de ecuaciones con literales no es una solución numérica, sino una expresión algebraica que se obtiene despejando una de las literales.

Actividad 8.

Llena los espacios con la expresión correspondiente para despejar la variable que se indica en cada una de las siguientes formulas (resolver la ecuación).

1) $I = \frac{V}{R}$ despeja a R

$$I = \frac{V}{R}$$

______ $= V$

$R =$ ______

2) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, resuelve la ecuación para h

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

_______ $= \pi r^2 h$

_______ $= h$

Aplicando la propiedad reflexiva se tiene $h =$ ______

3) $W = R + H\,t$, despeja t

$$W = R + H\,t$$

$$\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = H\,t$$

$$\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = t$$

Aplicando la propiedad reflexiva se tiene $t =$ ______

4) $C = \dfrac{nE}{nr + R}$ despeja n

$$C = \frac{nE}{nr + R}$$

$$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = nE$$

Desarrolla la expresión que se encuentra del lado izquierdo de la igualdad anterior para obtener:

$$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = nE$$

$$CR = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$CR = n(E - C\,r)$$ se factorizó

$$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = n$$

Aplicando la propiedad reflexiva se tiene $n =$ __________

5) $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{s}$ resuelve la ecuación para s

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} + \frac{1}{s}$$

$$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \frac{1}{s}$$

Realiza la operación que encuentra del lado izquierdo de la igualdad anterior.

$$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \frac{1}{s}$$

$$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = 1$$

$$(r - R)\,s = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$s = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

6) $L = \frac{600}{W + 1}$ **,** despejar ***W***.

$$L = \frac{600}{W + 1}$$

___________ $= 600$

Desarrolla la expresión que escribiste en la línea anterior

___________ $= 600$

$L\,W =$ ___________

$W =$ ___________

7) $d = vt + \frac{1}{2}at^2$ resuelve para v

$$d = vt + \frac{1}{2}at^2$$

___________ $= v\,t$

___________ $= v$

Realiza la operación de la expresión que escribiste en la línea anterior.

___________ $= v$

Finalmente escribimos $v =$ ___________ al aplicar la propiedad simétrica de la igualdad.

Actividad 9.

Despeja la variable que se indica en cada una de las siguientes formulas.

1) $A = \frac{h}{2}(a + b)$ despeja b

2) $C = \frac{nE}{nr + R}$ despeja R

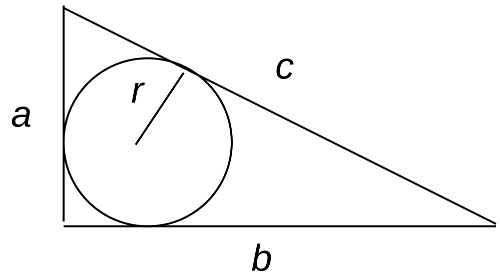
3) $F = \frac{mn}{d^2}$ despeja n

4) $d = vt + \frac{1}{2}at^2$ despeja a

5) $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ despeja f

6) En un triángulo rectángulo cuyos lados tiene longitud a, b y c, el radio, r, de la circunferencia inscrita está dado por la fórmula:

$$r = \frac{ab}{a+b+c}$$



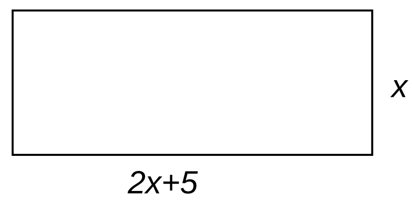
Despeja las variables a*, b,* y *c*

7) $S = \frac{n[\,2a + (n-1)d\,]}{2}$ resolver para *a* y *d*

Aplicaremos las reglas de transformación que hemos aprendido para obtener la solución de ecuaciones de primer grado con una incógnita o variable, que se obtienen al plantear problemas que tienen como modelo matemático una ecuación de este tipo, y determinar su resolución.
Para la solución de problemas que se modelen con una ecuación, debes tener presente que para hallar los valores desconocidos es necesario **plantear tantas ecuaciones como valores desconocidos o incógnitas se tenga**, tratando de usar el menor número posible de ellas, en particular una incógnita, por ejemplo, en el enunciado *"el largo de un rectángulo es cinco centímetros más que el doble de su ancho"* tenemos dos valores desconocidos: el largo y el ancho de un rectángulo, sin embargo, se puede reducir a una sola incógnita que es el ancho del rectángulo, ya que conociendo éste es posible hallar el largo.
x: ancho del rectángulo
2x + 5: largo del rectángulo

Otra cosa que debes tener presente es la relación entre los objetos del problema, por ejemplo, si se habla del perímetro de un rectángulo, debes aplicar tus conocimientos adquiridos con anterioridad acerca de cómo se calcula el perímetro de un rectángulo.

Si en un problema particular se tiene el rectángulo anterior, ¿Cómo hallarías el perímetro de dicho rectángulo?



Perímetro = ____________________

Como éste hay otros tantos conocimientos de los que tienes que echar mano, para poder resolver problemas de aplicación. En la siguiente actividad te ayudaremos a recordar algunas de ellas y como aplicarlas en la obtención de la ecuación para la solución de los problemas de aplicación.

Finalmente, para obtener la ecuación que nos permitirá hallar los valores desconocidos que pide el problema, se debe recordar que una ecuación es una igualdad, por lo que debemos localizar dentro del problema con que elementos podemos establecer dicha igualdad. En algunos problemas se encuentra explícita la igualdad de los elementos relacionados, en algunos otro está implícita.

Ejemplo 26. Resolver el siguiente problema.
"El largo de un rectángulo es cinco centímetros más que el doble de su ancho, si su perímetro es 100 cm. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?"
En la oración "*su perímetro **es** 100 cm"* está explicita la ecuación: *Perímetro = 100.*
Como sabemos que el perímetro del rectángulo involucrado en el problema es: $6x + 10$
La ecuación que modela el problema es: $\mathbf{6x + 10 = 100}$
La solución de la ecuación es: _____________
Por lo tanto, las dimensiones del rectángulo son: ancho: _____ cm, largo: ______ cm

Ejemplo 27. Resolver el siguiente problema.

“En una ciudad, el salario mínimo diario en el 2006 era de $48.50 y para el 2007, de $50.45. ¿Cuál fue el porcentaje de aumento salarial?” no está explicita la ecuación ni hay alguna palabra que nos sugiera el signo de igualdad para poderla plantear.

En estos casos debes hacer uso de tu experiencia y parafrasear el problema para poder establecer la ecuación que permitirá hallar lo que se pide.

Ustedes saben cómo hallar el porcentaje de una cierta cantidad (por ejemplo, saben cómo hallar el *25% de 700*).

Si se aplica el porcentaje de aumento salarial a *$48.50* se obtiene la cantidad de dinero que representa el aumento diario, que para el problema planteado es de: *$50.45 – $48.50 = $1.95*

Y como el porcentaje de aumento salarial es el valor desconocido, lo representaremos con la letra ***x***.

Parafraseando el problema podemos decir que al aplicarle a *48.50* el porcentaje ***x***, éste debe ser igual a *1.95*.

Con esto podemos plantear la ecuación: $48.50\,x = 1.95$

Cuya solución es: ________________

$x =$ ________

Es decir, el porcentaje de aumento salarial fue de *4.02%*

Sugerencias para la solución de problemas:

- Leer el problema cuantas veces sea necesario hasta entenderlo
- Representar con literales los valores desconocidos (las incógnitas)
- Traducir al lenguaje algebraico el problema, escribiendo la relación existente entre los valores desconocidos y conocidos para obtener la ecuación que ayude a encontrar lo que se pide.
- Resolver la ecuación.
- Contestar lo que pide el problema.

Actividad 10.

En esta actividad te proporcionaremos algunas estrategias para abordar los problemas de aplicación que se modelan con una ecuación de primer grado con una incógnita, así como el recordatorio de conocimientos adquiridos en cursos anteriores y que intervienen en el planteamiento de las ecuaciones.

Cada una de las soluciones de los problemas debe contener 4 elementos indispensables:

1) Definición de lo que representa cada una de las incógnitas utilizadas
2) Planteamiento de la ecuación
3) Solución de la ecuación
4) Solución del problema

Estos 4 elementos corresponden a los cuatro últimos puntos planteados en las *sugerencias para la solución de problemas de aplicación.*

1. El lado mayor de un triángulo es el doble del lado menor. El tercer lado del triángulo es 1 centímetro más corto que el lado mayor. Si el perímetro es de 149 cm. ¿Cuál es la longitud de cada lado?

Solución

1) Definición de la incógnita

Tenemos 3 valores desconocidos, la longitud de cada uno de los lados del triángulo, sin embargo, si lees otra vez el problema notarás que si conocemos el lado menor podemos hallar los otros dos lados, por lo tanto, tenemos sólo una incógnita.

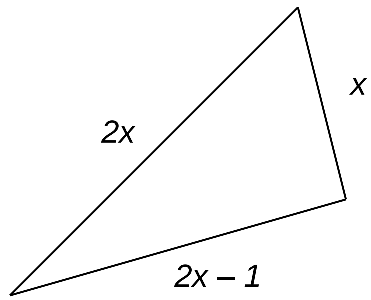
Sea $\boldsymbol{x} =$ longitud del lado menor

$\boldsymbol{2x} =$ longitud del lado mayor

$\boldsymbol{2x - 1} =$ longitud del tercer lado

2) Planteamiento de la ecuación

El hacer un dibujo facilita el manejo de la información, así que cuando sea posible hazlo. Para este problema dibujemos el triángulo con el valor de cada uno de sus lados:



El problema proporciona explícitamente la ecuación con el enunciado: "*el perímetro es de 149 cm".* y como sabemos que el perímetro de una figura es igual a la suma de sus lados, de la figura tenemos:

$$\boldsymbol{x + 2x + 2x - 1 = 149}$$

3) Solución de la ecuación:

$$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = 149$$

$$5x = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$x = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

longitud del lado menor $x =$ ____ *cm*

4) Solución del problema

La longitud de cada lado es: ***30, 60,*** y ***59 cm***.

2. Susana compró un vestido en el "Palacio de Hierro" y pagó $504.00 en efectivo. Si el vestido tenía un descuento del 40% y si pagaba en efectivo la hacían otro 40% de descuento sobre el precio con el primer descuento. ¿Cuál era el precio original del vestido?

Solución

1) Definición de la incógnita

El valor desconocido es el precio original del vestido

Sea ***x*** = precio original del vestido

2) Planteamiento de la ecuación

Si 40% del precio original del vestido es el descuento, entonces el _____% del precio original es el costo del vestido, es decir, 0.60x

Como pagó en efectivo se le aplica otro 40% de descuento a este último costo, entonces, se va a pagar sólo el 60% de esta última cantidad, es decir, ______________, la cual debe ser igual a $504.00

Por lo que la ecuación quedaría así: ***0.60) (0.60x) = 504***

3) Solución de la ecuación

$$(0.60)\,(0.60x) = 504$$

Eliminando paréntesis: __________ $= 504$

$$x = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$x = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

4) Solución del problema

El precio original del vestido era de $1400.00

3. Dos autos ***A*** y ***B***, parten de un mismo punto y recorren un trayecto rectilíneo con velocidades media de 70 y 90 km/h, respectivamente. Sabiendo que ***B*** parte *2* horas después que ***A***. hallar:

a) El que tiempo en que ***B*** alcanza a ***A***.
b) La distancia recorrida hasta que se encuentran

Solución

1) Definición de la incógnita

Sea ***t*** = el tiempo en horas en que ***B*** alcanza a ***A***.

Como ***A*** salió *2* horas antes, el tiempo recorrido por ***A*** hasta que ***B*** lo alcanza es: ***t + 2***

2) Planteamiento de la ecuación

En el instante en que ***B*** alcanza a ***A*** los dos recorrieron la misma distancia.

De la ecuación $v = \frac{d}{t}$ se tiene que $d = v\,t$

Por lo que la distancia recorrida por ***A*** en el instante en que ***B*** lo alcanza es: $70\,(t + 2)$

La distancia recorrida por ***B*** en el instante en que alcanza a ***A*** es. $90\,t$

Como estas distancias son iguales, se tiene la ecuación:

$$\boldsymbol{70\,(t + 2) = 90\,t}$$

3) Solución de la ecuación

$$70\,(t + 2) = 90\,t$$

___________ $= 90\,t$

$$\underline{\qquad\qquad\qquad} = 0$$

$$-20t + 140 = 0$$

$$-20t = \underline{\qquad\qquad}$$

$$t = \underline{\qquad\qquad}$$

$$t = \underline{\qquad\quad}$$

4) Solución del problema

a) ***B*** alcanza a ***A*** en ***7 horas****.*

b) La distancia recorrida hasta que se encuentran es $90(7) = 70(7 + 2) =$ ***630 km.***

4. El largo de un rectángulo es *3 m*. menor que el triple de su ancho, si al aumentar *2 m*. a su ancho y restarle *3 m* a su largo se tiene que el área de este nuevo rectángulo es $6\ m^2$ mayor que el original. Encuentra las dimensiones del rectángulo original.

Solución

1) Definición de la incógnita

Tenemos como incógnitas las dimensiones del rectángulo: largo y ancho, pero el largo depende del valor del ancho por lo que definiremos a *x* como:

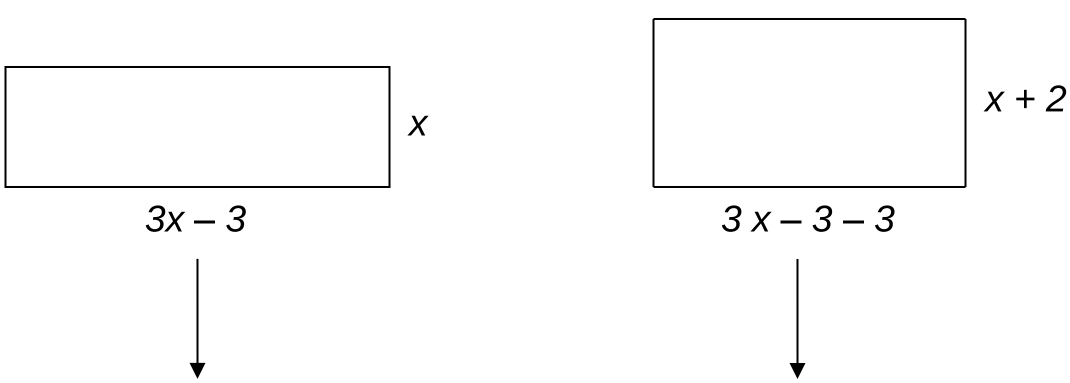
x = ancho del rectángulo en metros

3x – 3 = largo del rectángulo

2) Planteamiento de la ecuación

Dibujemos los dos rectángulos

Rectángulo original



área1 = $(3x - 3)$ $\qquad\qquad$ área2 = $(x + 2)(3x - 6)$

El enunciado: “el área de este nuevo rectángulo **es** *6 m*^{2} mayor que el original” se puede escribir como *área2* **=** área1 + *6* y plantear la ecuación

$$\boldsymbol{(x + 2)(3x - 6) = x(3x - 3) + 6}$$

3) Solución de la ecuación

$$(x + 2)(3x - 6) = x(3x - 3) + 6$$

Eliminando paréntesis __________________ = $3x^2 - 3x + 6$

___________________ $= 0$

$$3x - 18 = 0$$

$x =$ ______

$x =$ ______

4) Solución del problema

Dimensiones del rectángulo: **ancho *x = 6 m***

largo *3x – 3 = 15 m.*

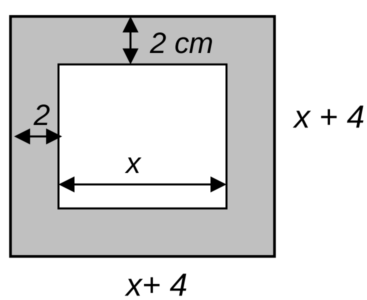
5. Un tablero de ajedrez tiene un marco de caoba de 2 cm de ancho. El área del marco es de 176 cm^2. Determine el lado del tablero.

Solución

1) Definición de la incógnita

Sea $\boldsymbol{x}$ = lado del tablero en cm.

2) Planteamiento de la ecuación



El área de la región sombreada es *176 cm*^{2}

El área del cuadrado interior es x^2

La suma de estas dos áreas es igual al área del cuadrado grande de lado $x + 4$

El área del cuadrado grande es $(x + 4)^2$

Por lo tanto, se tiene la ecuación:

$$\boldsymbol{x^2 + 176 = (x + 4)^2}$$

3) Solución de la ecuación

$$x^2 + 176 = (x + 4)^2$$

$$x^2 + 176 = x^2 + 8x + 16$$

$$x^2 + 176 - x^2 - 8x - 16 = 0$$

$$-8x + 160 = 0$$

$$x = \frac{-160}{-8}$$

$$x = 20$$

4) Solución del problema

El lado del tablero es de ***20 cm***

6. El numerador de una fracción es *5* unidades menor que el denominador, si al aumentarle *3* unidades al numerador y disminuirle *4* al denominador se obtiene la fracción $\frac{3}{2}$. Halla la fracción original.

Solución

1) Definición de la incógnita

Una fracción es la formas: $\frac{x}{y}$, *x* es el numerador y *y* es el denominador

Como el numerador es 5 unidades menor que el denominador, si conocemos el denominador se puede hallar el numerador por lo que sólo se tiene una incógnita.

y = denominador de la fracción original

y – 5 = numerador de la fracción original

2) Planteamiento de la ecuación

La fracción original es $\frac{y-5}{y}$

Al aumentarle *3* unidades al numerador de la fracción anterior se tiene *y – 5 + 3*

y disminuirle *4* al denominador: *y – 4*

Se dice que esta nueva fracción es igual $\frac{3}{2}$ por lo tanto la ecuación es:

$$\frac{y - 5 + 3}{y - 4} = \frac{3}{2}$$

$$\boldsymbol{\frac{y - 2}{y - 4} = \frac{3}{2}}$$

3) Solución de la ecuación

$$\frac{y - 2}{y - 4} = \frac{3}{2}$$

$$(y - 2)\,(2) = 3(y - 4)$$

$$2y - 4 = 3y - 12$$

$$2y - 4 - 3y + 12 = 0$$

$$-y + 8 = 0$$

$$y = 8$$

4) Solución del problema

$y = 8$ es el denominador de la fracción y

$y - 5 = 8 - 5 = 3$ es el numerador

Por lo tanto la fracción original es: $\boldsymbol{\frac{3}{8}}$

7. Antonio tiene el doble de la edad de María. Si actualmente tiene 10 años más que los que tenía María el año pasado, ¿Qué edad tiene cada uno?

Solución

1) Definición de la incógnita

Los valore desconocidos son las edades de Antonio y María, pero como Antonio tiene el doble de la de María, la edad de Antonio depende de la de María. Sea

x = edad actual de María

2x = edad actual de Antonio

2) Planteamiento de la ecuación

$$\underbrace{\text{La edad actual de Antonio}}_{2x}\ \underset{=}{\textbf{es}}\ \underbrace{\text{10 años}}_{10}\ \underset{+}{\text{más}}\ \underbrace{\text{que los que tenía María el año pasado}}_{x-1}$$

3) Solución de la ecuación

$$2x = 9 + x$$
$$2x - x = 9$$
$$x = 9$$

4) Solución del problema

Edad de María: x = ***9 años***

Edad de Antonio: $2x = 2(9)$ = ***18 años***

8. Si Karen puede realizar una tarea en 50 minutos trabajando sola y Araceli puede hacerlo sólo en 25 minutos. ¿Cuánto tiempo les tomara hacerlo juntas?

Solución

1) Definición de la incógnita

Sea ***x =*** tiempo en minutos que les lleva a Araceli y a Karen realizar la tarea juntas.

2) Planteamiento de la ecuación

Karen realiza $\frac{1}{50}$ parte de la tarea en un minuto

Araceli realiza $\frac{1}{25}$ parte de la tarea por minuto

La unidad representa la tarea completa

La parte de tarea que realiza Karen en ***x*** minutos es: $\frac{1}{50}(x)$

La parte de tarea que realiza Araceli en ***x*** minutos es: $\frac{1}{25}(x)$

Si juntamos la parte de tarea que realiza cada una de ellas en el tiempo ***x*** se debe tener la tarea completa, es decir

$$\frac{1}{50}x + \frac{1}{25}x = 1$$

3) Solución de la ecuación

$$\frac{1}{50}x + \frac{1}{25}x = 1$$

$$\frac{3}{50}x = 1$$

$$x = \frac{1}{3/50}$$

$$x = \frac{50}{3}$$

4) Solución del problema

Juntas realizarán la tarea en $\frac{50}{3}$ = 16.666 minutos es decir en **16 minutos 40 segundos**

9. Dos mangueras llenan un depósito en 12 y 15 minutos respectivamente. Las dos mangueras anteriores y una tercera, actuando todas simultáneamente, llenan el depósito en 5 minutos. Halle el tiempo que tardaría en llenarse el depósito empleando solamente la tercera manguera.

Solución

1) Definición de la incógnita

El valor que se quiere conocer es el tiempo en el que la tercera manguera llena sola el depósito,

Sea ***x* =** tiempo en el que la tercera manguera llena sola el depósito

2) Planteamiento de la ecuación

La primera manguera llena $\frac{1}{12}$ parte del depósito por minuto

La segunda manguera llena $\frac{1}{15}$ parte del depósito por minuto

La tercera manguera llena $\frac{1}{x}$ parte del depósito por minuto

En 5 minutos las mangueras llenan: $\frac{5}{12}$, $\frac{5}{15}$ y $\frac{5}{x}$ partes del depósito respectivamente, y como en este tiempo lo llenan entre las tres se debe tener

$$\frac{5}{12} + \frac{5}{15} + \frac{5}{x} = 1$$

3) Solución de la ecuación

$$\frac{5}{12} + \frac{5}{15} + \frac{5}{x} = 1$$

$$\frac{5}{12} + \frac{1}{3} + \frac{5}{x} = 1$$

$$\frac{9}{12} + \frac{5}{x} = 1$$

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{x} = 1$$

$$\frac{5}{x} = 1 - \frac{3}{4}$$

$$\frac{5}{x} = \frac{1}{4}$$

$$(5)\,(4) = 1(x)$$

$$20 = x$$

4) Solución del problema

El tiempo que tardaría en llenarse el depósito empleando solamente la tercera manguera es: ***20 minutos***

10. Cierto país prohíbe la exportación de su famosa bebida de uva a menos que contenga exactamente *12%* de alcohol. Un exportador encuentra que tiene *1000 litros* de la bebida con solo *10%* de alcohol. ¿Cuántos litros con *16%* de alcohol tiene que agregar a sus *1000* litros para satisfacer las especificaciones gubernamentales?

Solución

1) Definición de la incógnita

x = cantidad de litros con *16%* de alcohol

2) Planteamiento de la ecuación

1000 + *x* = número de litros de la nueva mezcla.

Se quiere que la bebida tenga *12%* de alcohol, por lo tanto la nueva mezcla debe contener 12% de alcohol, es decir, que *(1000* + *x) (0.12)* sea alcohol.

1000 litros contienen *10%* de alcohol, es decir, *(1000) (0.10) = 100* litros son de alcohol.

x litros contiene *16%* de alcohol, es decir, x (0.16) = 0.16x es alcohol

Se quiere que estas dos cantidades de alcohol sea el 12% de la nueva mezcla

Por lo tanto, se tiene la ecuación:

$$\boldsymbol{100 + 0.16x = (1000 + x)\,(0.12)}$$

3) Solución de la ecuación

$$100 + 0.16x = (1000 + x)\ (0.12)$$

$$100 + 0.16x = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$\underline{\qquad\qquad\qquad} = 120 - 100$$

$$\underline{\qquad\qquad} = \underline{\qquad\qquad}$$

$$x = \underline{\qquad\quad}$$

$$x = \underline{\qquad\quad}$$

4) Solución del problema

Hay que agregar ***500 litros***

11. En un número de 2 cifras el digito de las decenas es el doble del de las unidades. El número mismo es 7 veces la suma de sus dígitos. Halla el número.

Solución

1) Definición de la incógnita

Número de 2 dígitos: *xy*, donde *xy* no representa un producto, sino ***y*** es el número de unidades y ***x*** es el número de decenas.

No podemos escribir el número de dos dígitos de la forma *xy* dentro de la ecuación, sino como:

y + 10x

Por ejemplo 58 es un número de dos dígitos el cual tiene 8 unidades y 5 decenas y puede escribirse también como: $8 + 10\ (5)$

Como el digito de las decenas es el doble del de las unidades,

Sea:

y = número de unidades

2y = número de decenas

Por lo tanto, el número de dos dígitos es: $y + 10(2y)$ $\mathbf{= 21y}$

2) Planteamiento de la ecuación

Del enunciado "*El número mismo* **es** *7 veces la suma de sus dígitos*" se tiene la ecuación:

$$21y \quad = \quad 7\ (y + 2y)$$

3) Solución de la ecuación

$$21y \ = 7\ (y + 2y)$$

$$21y = 7(3y)$$

$$21y = 21y$$

Esta es una identidad

La cual es válida para cualquier valor de y.

4) Solución del problema

Para este problema en particular los valores que puede tomar $\boldsymbol{y}$ de tal manera que encontremos el número de dos dígitos son:

$\boldsymbol{y}$ **=** número de unidades = 1, 2, 3 y 4

$\boldsymbol{2y}$ **=** número de decenas = *2, 4, 6 y 8*

Por lo tanto, los números son: ***21, 42, 63*** y ***84***

Actividad 11.

Plantea una ecuación lineal con una incógnita para resolver los siguientes problemas de aplicación. Escribe cada uno de los cuatro pasos principales que se han estado trabajando en la actividad anterior.

1) Carola compartió un paquete de hojas para graficar con tres de sus amigos. Dio ¼ del paquete a Memo; Sara obtuvo 1/3 de lo que quedó; luego Marce tomó 1/6 de lo que quedó en el paquete. Si Carola conservó 30 hojas, ¿cuántas hojas había en el paquete al principio?

2) Una pintura cuadrada está colocada en un marco de 1 cm. de ancho. Si el área total del marco es 24 cm^2, ¿Cuál es el área del cuadro?

3) El costo de un automóvil fue de $148,000, al año siguiente era de $130,000. ¿Cuál fue el porcentaje de devaluación?

4) La edad de un padre es el triple de la edad de su hijo. La edad que tenía el padre hace 5 años era el doble de la edad que tendrá su hijo dentro de 10 años. Halla las edades actuales del padre y del hijo.

5) Una mujer puede ir caminando al trabajo a una velocidad de 3 km/h, o en una bicicleta a una velocidad de 12 km/h. Si le toma una hora más caminando que yendo en bicicleta, encuentre el tiempo que le toma caminar para ir al trabajo.

6) El denominador de una fracción es 3 unidades mayor que su numerador. Si el numerador es aumentado en 1 unidad y el denominador en 4, dicha fracción no cambia su valor. ¿Cuál es dicha fracción?

7) En un número de dos cifras el digito de las unidades es 4 mayor que el de las decenas. El número mismo es 6 veces el digito de la unidad. Halla el número

8) Encuentre las cantidades en gramos de una aleación de 10% de cobre que se deben añadir a otra cantidad de gramos de aleación de 60% de cobre para tener 250 gr. de una aleación de 50% de cobre.

9) Un químico mezcló 120 cm^3 de una solución de nitrato de plata al 12% con 80 cm^3 de otra solución de nitrato de plata al 7%. Uso una parte de esta mezcla y la sustituyó por agua pura. Si la nueva solución quedó al 8% ¿Cuánta de la mezcla original se usó?

10) En una cafetería se quiere mezclar el café que se vende a $6 el kilo con el café que se vende a $9.50 el kilo para producir una mezcla que se venderá a $7 el kilo. ¿Qué cantidad de cada uno debe usarse para producir 100 kilos de esta nueva combinación?

Propuesta de evaluación.

Realiza los procedimientos necesarios para contestar las siguientes preguntas

1) ¿Cuál de las siguientes expresiones es una ecuación de primer grado con una incógnita?

a) $2(x + 5) - 8 = -2(x + 1) + 4(x - 3) + 16$ **b)** $\frac{x+1}{x+3} = \frac{2-x}{x+1}$

c) $\frac{2-x}{x-1} = \frac{x+1}{4-x}$

2) Despeja ***t*** de la expresión: $d = \frac{D}{1 + at}$

3) Resuelve las ecuaciones:

a) $8 - 3[x - 4(x - 5) - 6] = 2 - 6(x - 3)$ **b)** $\frac{2}{5}(x - \frac{1}{3}) = \frac{2}{3}(\frac{1}{2} - 2x)$

c) $\frac{x+5}{x+6} = \frac{x+9}{x+7}$ **d)** $x - \frac{3x-5}{4} = 3 - \frac{3-5x}{6}$

e) $\frac{2}{x} - \frac{2}{5} = \frac{1}{x} + \frac{11}{x}$

4) Resuelve los siguientes problemas de aplicación mediante una ecuación de primer grado con una incógnita. Define la incógnita, plantea la ecuación lineal, resuelve la ecuación y contesta lo que pide el problema.

a) Gaste 2/5 de lo que tenía y preste 5/6 de lo que me quedó. Si aún tengo 500 pesos. ¿Cuánto tenía al principio?

d) El numerador de cierta fracción es 5 unidades mayor que el denominador. Si el numerador se disminuye en 9 y el denominador se aumenta en 1, la fracción que resulta es igual a 1/2. ¿Cuál es la fracción?

c) Hace 14 años la edad de un padre era el triple de la edad de su hijo y ahora es el doble. Halla las edades respectivas de hace 14 años.

d) Un joyero mezcló 1200 gramos de una aleación de oro con 2200 gramos de otra que contiene 38% más de oro que la primera. Si la aleación resultante tiene 76% de oro, ¿Cuál es el porcentaje de este metal en cada aleación?

e) Cierta solución contiene 16% de alcohol. ¿Cuántos litros de agua pura hay que agregar a 30 litros de dicha solución para obtener una solución al 12,5%

Bibliografía

1. Algebra, Stanley A. Smith, et al. Addison Wesley
2. Álgebra y Trigonometría. Dennis G. Zill y Jacqueline M. Dewar. Mc Graw Hill
3. Álgebra Moderna, Estructura y Método. Dociani, Berman y Freilich. Publicaciones Culturales, S.A.
4. Algebra. Lorenzo Florence M. Lovaglia. Merritt A. Elmore. Donald Conway. Editorial Harla
5. Fundamentos de Matemáticas. Álgebra, Trigonometría, Geometría Analítica y Cálculo. Juan Manuel Silva y Adriana Lazo. Editorial Limusa
6. Elementary Algebra. An Analytical Approach. Pamela E. Matthews & Ann M. Chisko. John Wiley & sons

UNIDAD 4

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Propósito:

Al finalizar, el alumno: Será capaz de modelar y resolver situaciones problemáticas que conduzcan a sistemas de ecuaciones lineales de orden 2×2 y 3×3, a fin de que se avance en la utilización de la representación algebraica como un sistema de símbolos útiles en la resolución de tales situaciones.

Aprendizajes

Sistemas de ecuaciones lineales 2×2

- Ante un problema que potencialmente lleve a una ecuación con dos variables, el alumno comprende que existe una infinidad de soluciones que satisfacen la condición.
- Grafica las soluciones a un problema con dos variables e identifica el patrón geométrico que siguen las representaciones gráficas de las soluciones y su utilidad.
- Expresa algebraicamente las coordenadas de las soluciones a un problema con dos variables y una sola condición.
- Con el conocimiento anterior, el alumno resuelve gráficamente un problema que potencialmente lleve a un sistema de ecuaciones lineales con dos variables, aplicando la heurística de tratar cada una de las condiciones por separado.

Solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas por los métodos de: Igualación y sustitución

- Resuelve algebraicamente problemas que lleven a un sistema de ecuaciones lineales con dos variables.

Sistemas de ecuaciones lineales 3×3

- Comprende el concepto de sistemas equivalentes de ecuaciones lineales en el caso de sistemas lineales 3×3.
- Obtiene sistemas equivalentes de ecuaciones lineales.
- Resuelve sistemas de ecuaciones lineales 2×2 y 3×3 a través de obtener un sistema triangular equivalente de ecuaciones.
- Resuelve problemas en diversos contextos empleando los métodos algebraicos vistos con anterioridad.

En la unidad 3 se trabajó con ecuaciones de primer grado con una incógnita, sin embargo, existen situaciones que para su modelación requieren ecuaciones de primer grado con más de una incógnita. Los casos de las ecuaciones de primer grado con dos y tres incógnitas serán los que se abordarán en la presente unidad. Además, aprenderás algunos métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales 2×2 y 3×3.

En la presente unidad utilizaremos el término incógnita(s) en lugar de incógnita(s).

4.1 Sistemas de ecuaciones lineales 2×2

4.1.1 Soluciones de una ecuación lineal con dos variables

Aprendizaje: *Ante un problema que potencialmente lleve a una ecuación con dos variables, el alumno comprende que existe una infinidad de soluciones que satisfacen la condición.*

Actividad 1. ¿Cuántas incógnitas intervienen en el problema 1?

A partir del siguiente problema:

> Problema 1
> La suma de dos números reales es igual 1, ¿cuáles son esos dos números?

Contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Qué diferencia hay entre este problema y los que se resolvieron en la unidad 3? Justificar respuesta.

b) ¿Pueden identificar las incógnitas que intervienen en el problema? Justificar su respuesta.

c) ¿Puedes determinar cinco soluciones del problema? En caso afirmativo, ¿cuáles son esas soluciones?

Al finalizar la actividad compara tus respuestas con la de tus compañeros.

Como te habrás dado cuenta de la actividad anterior, el problema implica a dos incógnitas, además hay más de una solución que satisfacen la condición del problema.

Al realizar la siguiente actividad obtendrás los elementos necesarios para contestar a la pregunta: ¿el problema 1 tiene un número finito o infinito de soluciones?

Actividad 2. ¿Cuántas soluciones tiene el problema 1?

Llena la siguiente tabla y compara tus respuestas con la de tus compañeros.

Texto del problema	Incógnitas implicadas	¿Qué valores pueden asumir las incógnitas implicadas en el problema?	¿El problema tiene un número finito o infinito de soluciones? ¿Por qué?
La suma de dos números reales es igual 1, ¿cuáles son esos dos números?			

De la actividad anterior concluimos que el problema 1 tiene una infinidad de soluciones.

A continuación, realizaremos la representación tabular de las soluciones del problema 1, con la intención de visualizar la relación algebraica entre las incógnitas implicadas.

Actividad 3. Representación tabular del problema 1.

Llena los espacios en vacíos de la siguiente tabla y contesta las preguntas que se plantean. Al finalizar la actividad compara tus respuestas con la de tus compañeros.

a) Si utilizamos las literales x e y para representar al primer y segundo número real, respectivamente, entonces una representación tabular de las soluciones del problema 1 es:

Primer número: x	…	-15	…		…		…	0.5	…	2	…
Segundo número: y	…	16	….	2	…	1	…		…		…

b) ¿Cómo se relacionan las incógnitas? ¿siguen algún patrón? Justificar respuesta.

Como hemos observado de la actividad anterior, la relación entre las dos incógnitas del problema 1, representa una ecuación de primer grado.

A continuación, se presenta la representación algebraica de una ecuación de primer grado con dos incógnitas.

Definición 4.1. Una **ecuación de primer grado o ecuación lineal** con dos incógnitas es de la forma:

$$Ax + By = C$$

con A, B y $C \in \mathbb{R}$; A y B distintas de cero.

A la constante C también se le llama término independiente de la ecuación.

Para hallar las soluciones de la ecuación de primer grado con dos incógnitas basta con asignarle valores en los números reales a una de las incógnitas para que a partir de ellas se obtengan los valores de la otra incógnita.

En seguida obtendremos la representación algebraica del problema 1.

Actividad 4. Representación algebraica del problema 1.

Para obtener la representación algebraica del problema 1, $Ax + By = C$, donde x e y representan al primer y el segundo número real, respectivamente. Llena la siguiente tabla. Al finalizar compara tus respuestas con las de tus compañeros.

Enunciado del problema	Valor de la constante *A*	Valor de la constante *B*	Valor de la contante *C*	Ecuación de primer grado con dos incógnitas $Ax + By = C$

La suma de dos números reales es igual 1, ¿cuáles son esos dos números?				

Actividad 5.

Para los siguientes problemas:

I. La suma de dos números reales es igual a -100, ¿cuáles son esos dos números?

II. Dado dos números reales, se tiene que el doble de uno de los números más el triple del otro es igual a 50. ¿Cuáles son esos dos números?

III. La resta de dos números reales es igual a 10, ¿cuáles son esos dos números?

Contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántas incógnitas se encuentran involucradas en el problema? ¿cuáles son esas incógnitas? Justificar respuesta.

b) ¿Puedes dar una representación tabular del problema? En caso afirmativo, realizar una representación tabular del problema. Justificar respuesta.

c) ¿Puedes dar una representación algebraica del problema? En caso afirmativo, dar la representación algebraica del problema. Justificar respuesta.

d) ¿Puedes dar tres soluciones del problema? En caso afirmativo, proporciona las soluciones. Justificar respuesta.

e) ¿El problema tiene un número finito o infinito de soluciones? Justificar respuesta.

En la sección 4.1 estudiamos la expresión algebraica de una ecuación de primer grado con dos incógnitas, $Ax + By = C$. También concluimos que la ecuación tiene una infinidad de soluciones.

A continuación, estudiaremos el comportamiento gráfico de las soluciones de una ecuación de primer grado con dos incógnitas e identificaremos el patrón geométrico que siguen.

4.1.2 Representación gráfica e identificación del patrón que siguen las soluciones de una ecuación lineal 2×2.

Aprendizaje: *Grafica las soluciones a un problema con dos variables e identifica el patrón geométrico que siguen las representaciones gráficas de las soluciones y su utilidad.*

En la sección 4.1 trabajamos con el Problema 1:

La suma de dos números reales es igual 1, ¿cuáles son esos dos números?

Obtuvimos que su representación algebraica es $x + y = 1$ donde x e y representan al primer y el segundo número real, respectivamente. Además, también se logró la siguiente representación tabular:

Primer número: x	…	-15	…	**-1**	…	**0**	…	0.5	…	2	…
Segundo número: y	…	16	….	2	…	1	…	**0.5**	…	**-1**	…

Por lo anterior concluimos que el problema 1 se representa a partir de una ecuación de primer grado con dos incógnitas, tiene una infinidad de soluciones que satisfacen la condición del problema.

En seguida vamos a estudiar la representación gráfica de las soluciones, identificaremos el patrón geométrico que siguen y la utilidad que este tiene.

Una manera de representar una solución de una ecuación de primer grado es mediante un par ordenado: (x, y), donde la primera y segunda coordenada corresponden a los valores de la primera y segunda incógnita implicada en la ecuación de primer grado en dos incógnitas, $Ax + By = C$.

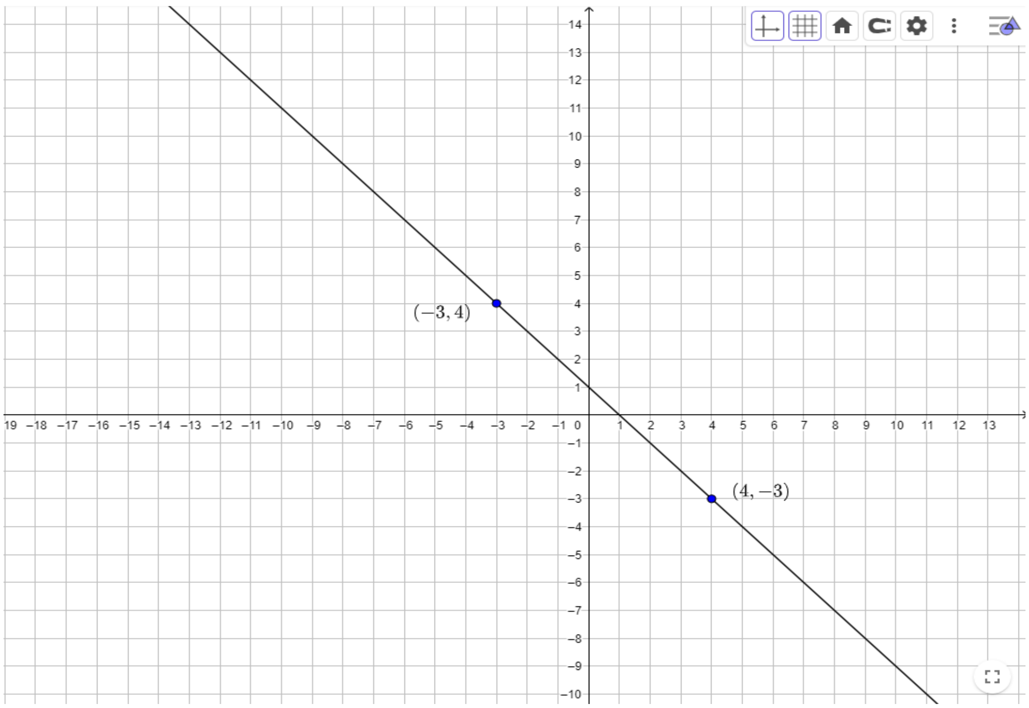
Actividad 6. Representación gráfica de las soluciones del problema 1 y el patrón geométrico que siguen.

a) Auxiliándote de la representación tabular del problema 1, tabla de la página anterior, expresa como un par ordenado a por lo menos 5 soluciones.

____

____

b) Considerando el siguiente plano cartesiano, que contiene la representación gráfica de los siguientes pares ordenados (-3, 4) y (4, -3), soluciones del problema 1:



Realiza lo que se pide en cada inciso.

i) ¿Qué representa cada eje del plano cartesiano? Rotula cada eje con una leyenda que indique lo que representa.

ii) En el plano cartesiano, proporcionado al inicio de la actividad, grafica al menos otras 5 soluciones del problema 1.

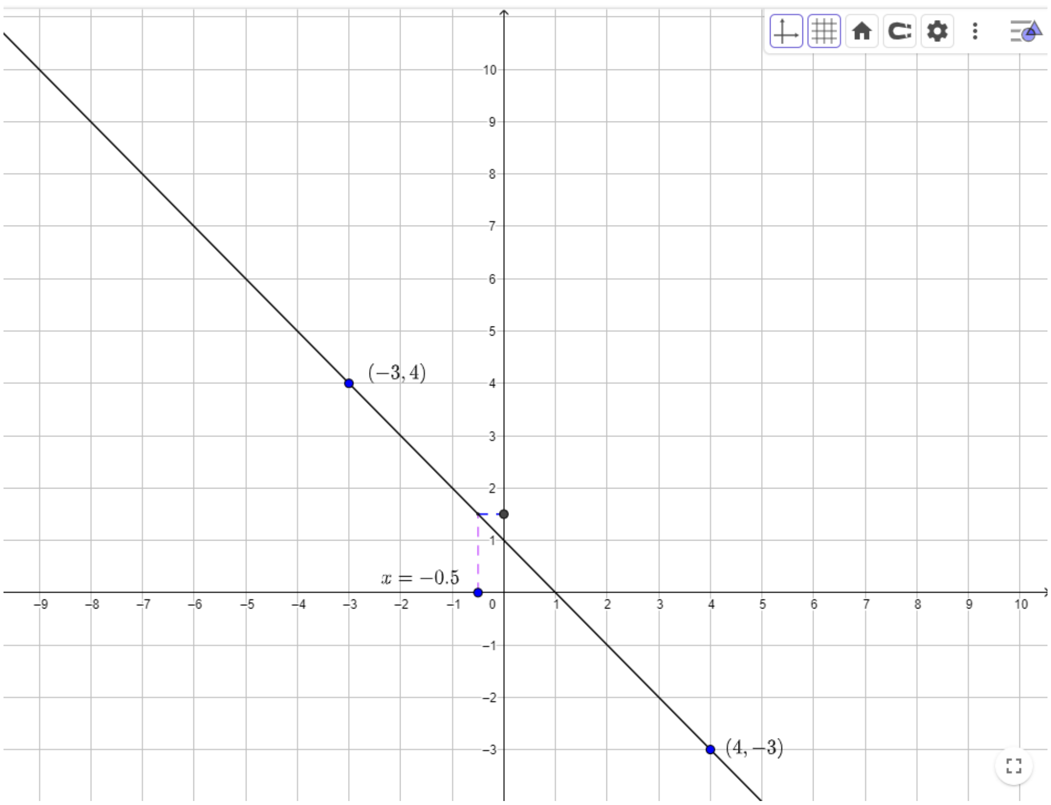
iii) Analiza las representaciones graficas realizadas en el inciso *ii)*, posteriormente unes con una curva todos los puntos graficados en el plano cartesiano, ¿qué ocurre? ¿siguen algún patrón geométrico? Justifica tus respuestas.

Actividad 7. Utilidad del patrón geométrico que siguen las soluciones del problema 1.

Problema 1:

La suma de dos números reales es igual 1, ¿cuáles son esos dos números?

En el siguiente plano cartesiano se tiene la representación gráfica del problema 1:



a) Rotula cada eje del plano cartesiano y posteriormente analízalo para que puedas determinar la coordenada que le hace falta al siguiente par ordenado

(-0.5, $y =$ ______).

Por lo anterior se tiene que el par ordenado (-0.5, _____) es solución del problema 1, es decir, que la suma de los números -0.5 y ______ es igual a 1.

b) En el plano cartesiano anterior, ubica sobre el eje horizontal la coordenada

$x = -6$, a partir de ella ubica la coordenada que hace falta para completar el par ordenado (-6, $y =$ _____).

Por lo anterior concluimos que la suma de los números -6 y _____ es igual a 1.

c) Auxiliándote del plano cartesiano, proporcionado al inicio de la actividad, contesta las siguientes preguntas:

i) ¿Qué número se le debe sumar a -8 para que dé como resultado 1? Justifica tu respuesta.

ii) ¿El par ordenado (-7.5, 8.15) corresponde a una solución del problema 1? Justifica tu respuesta.

iii) ¿El par ordenado (1.5, 0.25) corresponde a una solución del problema 1? En caso de que tu respuesta sea negativa, corrige la coordenada que sea necesaria para que el punto corresponda a una solución del problema 1.

d) ¿El punto (0, 0) es una solución del problema 1? Grafica el punto (0, 0) en el plano cartesiano y verifica si se encuentra contenido en el patrón geométrico del problema 1.

Toda ecuación de primer grado con dos incógnitas representa una línea recta. Por lo anterior, también se les conoce como ecuaciones lineales.

Actividad 8.

1. Dada la ecuación de primer grado con dos incógnitas $4x + 5y = 0$, realizar:

   a) Una representación tabular de la ecuación, con al menos 5 soluciones.

   b) Una representación gráfica de las soluciones incluidas en la representación tabular elaborada en el inciso *a)*.

   c) ¿Cuál es el patrón geométrico que siguen las soluciones de la ecuación de primer grado con dos incógnitas con la que trabajaste? Justifica tu respuesta.

2. Determina si las siguientes tablas corresponden a la representación tabular de una ecuación de primer grado con dos incógnitas y anota su expresión algebraica. Justifica tus respuestas.

A)

x	y
-1	2
0	3/2
3	0
5	-1
11	-4

B)

w	z
-39	-7
-39	7
9	-1
9	1
10	0

C)

x	y
-3	5
-2	4
2	0
1	1
0	2

D)

z	w
-10	-10/3
-1	-1/3
0	0
1	1/3
10	10/3

3. Las siguientes tablas corresponden a la representación tabular de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, llena los espacios vacíos.

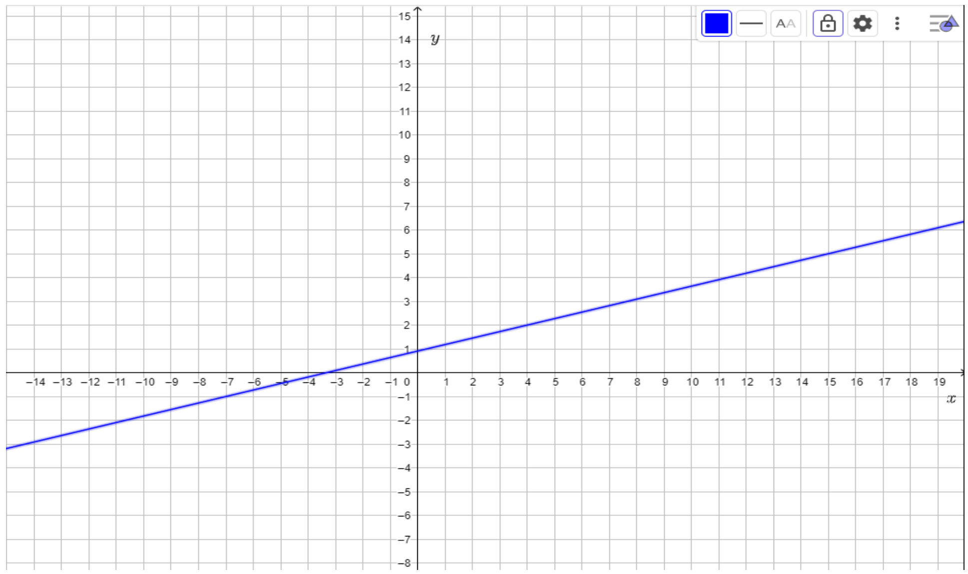
Tabla 1

x	y
	20
-1	15
0	10
1/5	9
1	

Tabla 2

z	w
-3	-9
1	3
	9
5	
10	30

4. La siguiente gráfica corresponde a la representación gráfica de una ecuación de primer grado con dos incógnitas. ¿Los puntos (4, 2) y (-6, 1) representan dos soluciones de la ecuación? Justifica tus respuestas.



RESPUESTAS:

2.

A) $\boldsymbol{x+2y=3}$

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y}$
-1	2
0	3/2
3	0
5	-1
11	-4

B) $w+z^2=10$

$\boldsymbol{w}$	$\boldsymbol{z}$
-39	-7
-39	7
9	-1
9	1
10	0

C) $\boldsymbol{x+y=2}$

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y}$
-3	5
-2	4
2	0
1	1
0	2

D) $\boldsymbol{z-3w=0}$

$\boldsymbol{z}$	$\boldsymbol{w}$
-10	-10/3
-1	-1/3
0	0
1	1/3
10	10/3

3.

Tabla 1. $\boldsymbol{5x+y=10}$

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y}$
-2	20
-1	15
0	10
1/5	9
1	**5**

Tabla 2. $\boldsymbol{3z-w=0}$

$\boldsymbol{z}$	$\boldsymbol{w}$
-3	-9
1	3
3	9
5	**15**
10	30

4. El punto (-6, -1) no representa una solución de la ecuación de primer grado con dos incógnitas.

4.1.3 Las coordenadas:

$$\left(x, \frac{c - ax}{b}\right) \text{ ó } \left(\frac{c - by}{a}, y\right)$$

Como la expresión general de los puntos que pertenecen a la recta que representa las soluciones de un problema que lleva a una ecuación lineal con dos variables y que se reduce a la forma:

$$ax + by = c$$

Aprendizaje: *Expresa algebraicamente las coordenadas de las soluciones a un problema con dos variables y una sola condición.*

Para ser coherentes con los ideales del modelo educativo del CCH, se introduce al alumno al tema con una actividad que dé inicio no dé lugar a situaciones o problemas con fuertes dificultades operatorias, y que además fomente el trabajo en equipo. Para tal efecto se solicita al grupo que formen equipos de máximo 5 integrantes para trabajar las actividades de la presente sección.

Los sistemas de ecuaciones lineales con 2 ecuaciones y 2 incógnitas (2x2) surgen de manera natural al analizar situaciones de la vida cotidiana tan elementales como la dada en el siguiente problema:

Una señora que tiene un negocio de comida va a la tortillería y pide 3 kg. de masa y 5 kg. de tortilla. Si en total le cobraron $ 130. ¿Podrías decir cuánto cuesta el kg de cada producto?

Actividad 9.

En equipo, responder a las preguntas que se plantean en el problema. ¿Qué estrategia siguieron para dar sus respuestas?

Posteriormente comparar con los demás equipos las respuestas encontradas, dando los argumentos y estrategias que los condujeron a tales respuestas.

El objetivo de las exposiciones es que el grupo en consenso se dé cuenta que la pregunta puede tener varias respuestas.

Actividad 10.

Elaboren un registro tabular con los resultados obtenidos por los diferentes equipos.

¿La tabla obtenida se parece un poco a la siguiente tabla? ¿En que difiere? Justificar sus respuestas ____

Respuesta sugerida por	Precio de cada kg de masa	Precio de cada kg de tortilla	Importe por la masa	Importe por las tortillas	Importe total
Equipo 1	$10	$20	$30	$100	$130
Equipo 2	$15	$17	$45	$85	$130
Equipo 3	$16.25	$16.25	$48.75	$81.25	$130
Equipo 4	$16	$16.4	$48	$82	$130
Equipo 5	$0	$26	$0	$130	$130
Profesor	$50	-$4	$150	-$20	$130

Como se pudieron haber dado cuenta, en esta tabla hay soluciones con sentido (precios de los productos positivos), soluciones extremas (alguno de los productos tiene precio nulo) y soluciones sin sentido (alguno de los productos tiene precio negativo).

Actividad 10.

Dadas las siguientes situaciones, contesta lo qué se pide:

a) Si suponemos que el precio del kilogramo de masa es de \$18 ¿Cuánto cuesta el kg de tortilla? ¿Qué operaciones te viste en la necesidad de efectuar?

b) Si suponemos que el precio del kilogramo de tortillas es de \$20 ¿Cuánto cuesta el kg de masa? ¿Qué operaciones te viste en la necesidad de efectuar?

Usando lo visto en 4.1, dar un modelo algebraico (Ecuación lineal o de primer grado con 2 incógnitas), en donde se ve la relación que hay entre el precio x del kg. de masa y el precio y del kg. de tortilla.

Como de entrada no se sabe el precio de la masa ni el de las tortillas, entonces podemos empezar denotando con:

$x =$ Precio de cada kg de masa

$y =$ Precio de cada kg de tortilla

Con lo anterior se tiene que:

$3x =$ El importe de la masa comprada

$5y =$ Importe de las tortillas compradas

Finalmente, el modelo matemático es:

$3x + 5y = 130$ "Ecuación lineal o de primer grado con 2 incógnitas"

Es claro que la ecuación $3x + 5y = 130$ tiene infinidad de soluciones, como se vio en parte con las respuestas dadas por los diferentes equipos y también con lo trabajado en la sección 4.1.

c) En general si se sabe que el precio de cada kg de masa es \$ x ¿Cuál es el precio de cada kg de tortilla? Justifica tu respuesta.

d) Con lo obtenido en el inciso *c)*, completen la siguiente tabla y compárenla con la dada en la discusión grupal antes hecha.

x	$y = \frac{130 - 3x}{5}$
0	26
3	
7	
10	
17	
20	
30	8
40	
42	
$43.\overline{3}$	

e) En general si se sabe que el precio de cada kg de tortilla es $\$\,y$ ¿Cuál es el precio de cada kg de tortilla? Justifica tu respuesta.

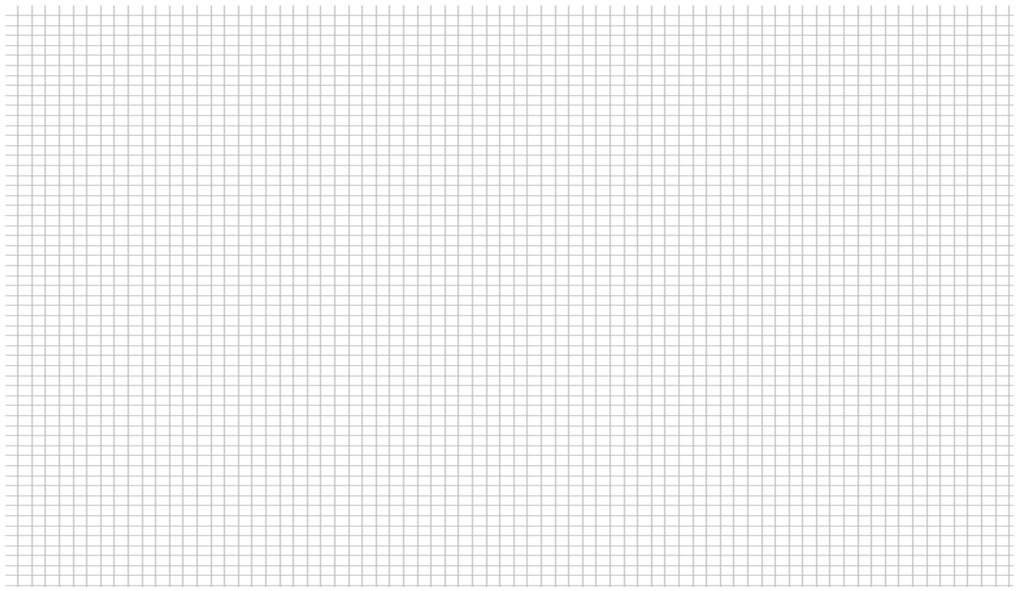
f) Con lo obtenido en el inciso anterior, completen la siguiente tabla y compárenla con la dada en la discusión grupal antes hecha.

$x=\dfrac{130-5y}{3}$	y
	0
	5
	13
	17
	20
	25
	30

Como se pudieron haber dado cuenta, en las tablas dadas en los incisos *d)* y *f)*, a x e y se le asignaron valores para obtener soluciones con sentido o extremas.

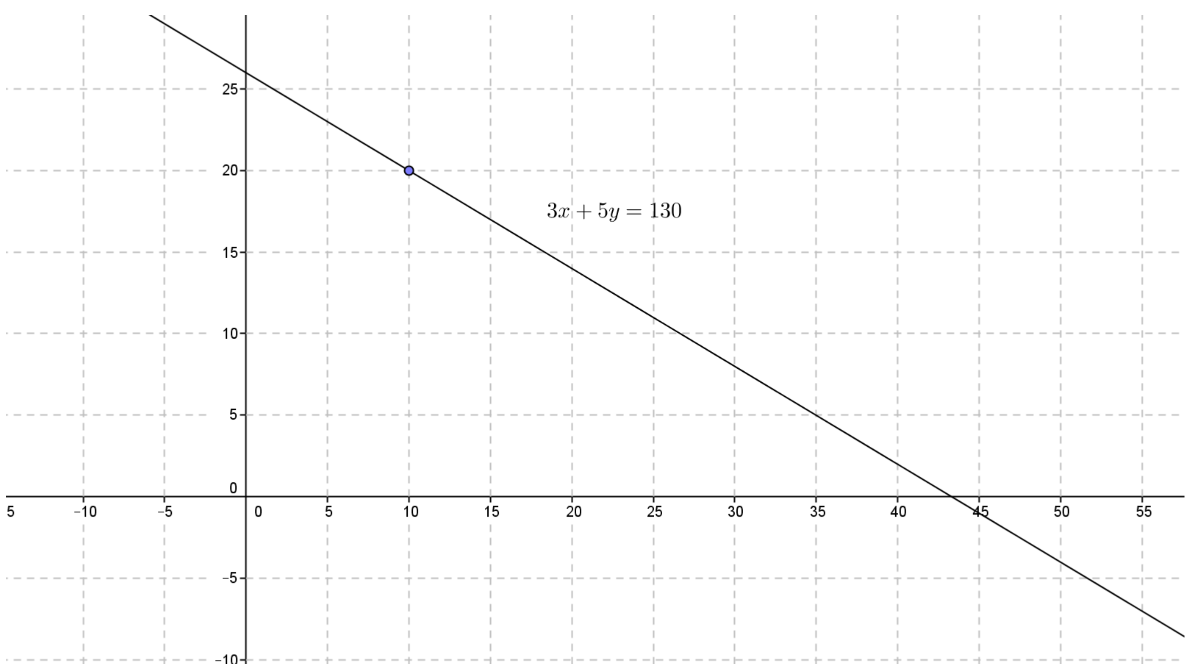
Actividad 11.

g) Con cualquiera de las tablas anteriores y lo visto en la sección 4.2, realicen la gráfica asociada a la ecuación lineal o de primer grado con 2 incógnitas $3x+5y=130$.



Claramente la gráfica asociada es una recta, la cual nos da información de los puntos que representan geométricamente a las soluciones del problema.

Verifica la gráfica que realizaste con la obtenida con *Geogebra*:



¿Cuál es la representación algebraica de las coordenadas de las soluciones a la ecuación $3x+5y=130$? ¿Todos los puntos sobre la línea recta corresponden a soluciones lógicas o con sentido del problema?

Con todo lo antes hecho también es claro que la representación algebraica de las coordenadas de las soluciones a la ecuación $3x+5y=130$ están dadas por:

$$\left(x, \frac{130-13x}{5}\right),\ x \in \mathbb{R} \quad \text{ó} \quad \left(\frac{130-5y}{3}, y\right),\ y \in \mathbb{R}$$

Equivalentemente:

$$\left(x, y = \frac{130-13x}{5}\right),\ x \in \mathbb{R} \quad \text{ó} \quad \left(x = \frac{130-5y}{3}, y\right),\ y \in \mathbb{R}$$

Las soluciones lógicas o con sentido corresponden a las coordenadas de los puntos de la recta en el primer cuadrante, las soluciones extremas corresponden a las coordenadas de los puntos de intersección de la recta con los ejes coordenados, y los demás puntos de la recta corresponden a soluciones sinsentido en el contexto del problema.

En general si tenemos una ecuación lineal o de primer grado con 2 incógnitas de la forma:

$$Ax + By = C \quad \text{con} \quad A, B, C \in \mathbb{R} \; (A, B \neq 0)$$

Procediendo como en el caso particular que se trabajó se tiene que las soluciones están dadas por:

$$\left(x, \frac{C-Ax}{B}\right), x \in \mathbb{R} \quad \text{ó} \quad \left(\frac{C-By}{A}, y\right), y \in \mathbb{R}$$

Actividad 12.

1. Encuentra dos números reales cuya suma sea 10.
2. Un niño que siempre colocaba en su alcancía monedas de a \$2 y de a \$5, al romperla para comprarle un regalo a su Mamá se dio cuenta que había ahorrado \$300 ¿Cuántas monedas de cada tipo había en la alcancía?

4.1.4 Método gráfico para resolver un sistema de ecuaciones lineales 2×2.

Aprendizaje: *Con el conocimiento anterior, el alumno resuelve gráficamente un problema que potencialmente lleve a un sistema de ecuaciones lineales con dos variables, aplicando la heurística de tratar cada una de las condiciones por separado.*

Todo lo hecho en la sección anterior, no nos sirve del todo para dar el precio exacto del kg de masa y del kg de tortilla, ya que solo se hicieron suposiciones sobre el precio de los productos y como se logra observar hay muchas posibilidades, cosa que no ocurre en la realidad porque el precio de cada producto es fijo, al menos por algún tiempo.

Retomando la situación planteada en la sección 4.1.3:

Si más tarde la misma señora pide 6 kg. de masa y 2 kg. de tortilla y le cobran \$124.

a) ¿Cuáles son los posibles precios de cada producto si solo tomamos en cuenta esta nueva situación? Justifica tu respuesta.

b) ¿Qué respuestas de las dadas por los diferentes equipos en la primera actividad de la sección 4.1.3 son compatibles con este nuevo evento? ¿Cuál es el modelo matemático para esta nueva situación?

Con un análisis similar a lo antes hecho se encuentra que una respuesta compatible es la dada por el equipo 2.

Para responder a estas preguntas se les da 5 minutos, y después cada equipo tendrá 3 minutos para exponer dando los argumentos que los condujeron a tales respuestas. El objetivo de las exposiciones es que el grupo en consenso se dé cuenta que esta nueva pregunta tiene también infinidad de soluciones.

Como se pudieron haber dado cuenta el modelo o ecuación que relaciona a x e y es:

$$6x+2y=124$$

En donde nuevamente

$x=$Precio de cada kg de masa

$y=$Precio de cada kg de tortilla

Actividad 13.

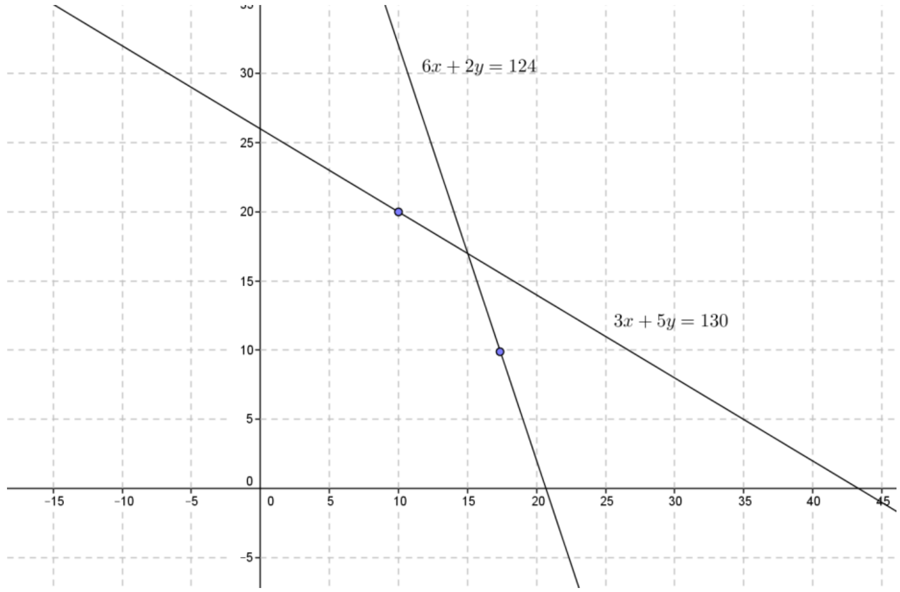
c) Expresen algebraicamente las coordenadas de las soluciones a la ecuación obtenida

- En términos de x:______________________________

- En términos de y:______________________________

d) Usando lo anterior realicen la gráfica asociada a la ecuación $6x+2y=124$.

Si en un solo sistema de referencia hacemos las gráficas asociadas a las ecuaciones $3x+5y=130$ y $6x+2y=124$ se obtiene lo siguiente:



e) ¿Qué información dan las coordenadas de los puntos sobre la primera recta? ¿Qué información dan las coordenadas de los puntos sobre la segunda recta?

f) Para encontrar respuestas compatibles (que satisfagan ambas ecuaciones) ¿Qué es lo que se tiene que hacer? ¿Cuál es el precio de cada uno de los productos?

Como pueden observar parece que el precio exacto de los productos es:

$15 el kg de masa y $17 el kg de tortillas

Se puede concluir que para encontrar el valor de cada uno de los productos (si es que existe), geométricamente se tiene que encontrar el punto de intersección de 2 rectas o equivalentemente resolver conjuntamente el par de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} 3x+5y=130 \\ 6x+2y=124 \end{cases}$$

A tal método se le conoce como el **método gráfico**.

***Definición* 4.2.** Un sistema de 2 ecuaciones lineales con 2 incógnitas es un par de ecuaciones lineales del siguiente tipo:

$$S:\begin{cases} Ax & +By & =C \\ Dx & +Ey & =F \end{cases} \qquad A,B,C,D,E,F\in\mathbb{R}$$

Resolver un sistema de ecuaciones lineales con 2 incógnitas cada una de ellas, significa encontrar parejas (a,b) que al sustituir en ambas ecuaciones se obtenga algo verdadero.

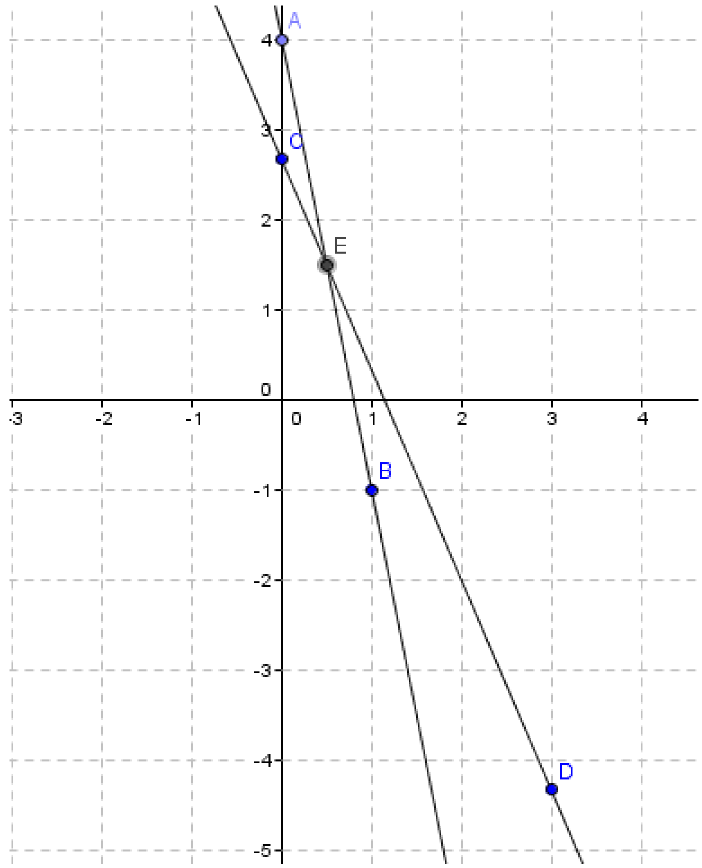
Ejemplo. Resolver el sistema: $S:\begin{cases} 7x & +3y & =8 \\ 5x & +y & =4 \end{cases}$ mediante el método gráfico.

SOLUCIÓN:

Despejando a “ y ” de ambas ecuaciones se obtienen 2 funciones lineales (De las estudiadas en la unidad dos del presente material), a saber:

$$y=f(x)=-\frac{7}{3}x+\frac{8}{3}$$
$$y=g(x)=-5x+4$$

Graficando:



De donde se ve que la solución es aproximadamente: $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{3}{2}$.

Cabe mencionar que al utilizar el método grafico para resolver un sistema, lo que se obtiene en la mayoría de los casos son meras aproximaciones ya que al graficar siempre se cometen pequeños errores, que pueden ser por el uso de malos instrumentos de medición o por muchas otras razones.

Algebraicamente lo que se tiene que hacer para resolver un sistema de ecuaciones lineales con 2 incógnitas o más, es utilizar alguno de los métodos analíticos que se verán en las siguientes secciones.

Actividad 14.

1. Un bote que navega por un río recorre 15 kilómetros en 1.5 horas a favor de la corriente y 12 kilómetros en 2 horas contra la corriente. Hallar la velocidad del bote en agua tranquila y la velocidad del río.

2. Se tienen \$ 1200 en billetes de \$20 y de a \$ 50 ¿Cuántos billetes de cada denominación se tienen si en total hay 33 billetes?
3. ¿En qué día del año habla Irene?
   Si a la mitad de los días que han transcurrido desde el principio del año, le añado 1/3 de los que faltan para acabar el año, entonces obtengo el número de días transcurridos.

4.2 Métodos analíticos para resolver sistemas de ecuaciones lineales 2×2: Método de igualación y método de sustitución.

Aprendizaje: *Resuelve algebraicamente problemas que lleven a un sistema de ecuaciones lineales con dos variables.*

Actividad 15.

La suma de las edades de un padre y su hijo es de 80 años, la edad del hijo es $\frac{3}{5}$ la edad del padre. Encuentra el sistema de ecuaciones y la edad de cada uno de ellos.

SOLUCIÓN:

Por aproximaciones o al tanteo. Con la finalidad de encontrar las ecuaciones y las edades. Llena la siguiente tabla, propón valores para las edades del padre e hijo que satisfagan las condiciones que se indican. Al finalizar, discute con tus compañeros, en caso de tener alguna duda pídele ayuda a tu profesor.

	Condición 1: La suma de la edad del padre y el hijo es igual a 80	Condición 2: La edad del hijo es 3/5 la edad del padre	¿La edad del hijo satisface las condiciones 1 y 2? Justificar respuesta.
Edad del padre	Edad del hijo	Edad del hijo	
60	**20** Porque 60+20=80	**36** Porque $\frac{3}{5}(60) = \frac{180}{5} = 36$	No porque la edad del hijo bajo las dos condiciones no es igual, $20 \neq 36$.
65	**15** Porque 65+15=80	**45** Porque	No porque la edad del hijo

		$\frac{3}{5}(60) = 3\left(\frac{65}{5}\right)$ $= 3(15) = 45$	bajo las dos condiciones no es igual, $15 \neq 45$.

Representación algebraica del problema:

Anota las incógnitas que intervienen en el problema:

Las incógnitas son: edad del padre y edad del hijo, ambos números positivos.

Asigna una literal a cada incógnita que interviene en el problema:

P: Edad del padre H: Edad del hijo

Escribe las relaciones algebraicas existentes entre las incógnitas:

Primera relación algebraica entre las dos incógnitas (considerando la suma de las edades)	Segunda relación algebraica entre las dos incógnitas (la edad del hijo respecto a la edad del padre)

Anota el sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas que se genera con las ecuaciones obtenidas anteriormente:

$$\begin{cases} P + H = 80 & \ldots\ldots\text{. (Ec.1)} \\ H = \frac{3}{5}P & \ldots\ldots\text{. (Ec. 2)} \end{cases}$$

Como se puede observar las aproximaciones de la tabla nos permitió obtener el modelo del problema, es decir el sistema de ecuaciones lineales 2×2 asociado al problema, que es lo más complejo de los problemas.

En la sección 4.1.4, aprendimos a resolver sistemas de ecuaciones lineal 2×2 empleando el método gráfico, en tu libreta resuelve el problema de la actividad anterior empleando ese método.

En la presente sección estudiaremos dos métodos analíticos: Igualación y sustitución, para resolver sistemas de ecuaciones lineal 2×2.

El método de igualación para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas consiste en despejar a la misma incógnita de cada ecuación, y luego esos resultados se deben de igualar, esta nueva ecuación se tiene que resolver para la incógnita involucrada, al encontrar su valor, este se sustituye en alguna de las ecuaciones anteriores con el propósito de obtener el otro valor de la otra incógnita, con ello se ha resuelto el sistema propuesto.

A continuación, se emplea el método de igualación en la resolución de un problema. Completa los espacios que hagan falta, al finalizar compara tus respuestas con tus compañeros.

4.2.1 Método de igualación

Actividad 16.

En un corral se tienen faisanes y conejos. Si hay 35 cabezas y 94 patas, ¿cuántos faisanes y cuántos conejos se tienen? (Problema chino, 200 años a.C.).

Anota las incógnitas que intervienen en el problema:

Las incógnitas son: número de faisanes y número de conejos

Asigna una literal a cada incógnita que interviene en el problema:

x: número de faisanes y: número de conejos

Escribe las relaciones algebraicas existentes entre las incógnitas:

Primera relación algebraica entre las dos incógnitas (considerando el número de cabezas de los animales en el corral)	Segunda relación algebraica entre las dos incógnitas (considerando el número de patas de los animales en el corral)
Cabezas (faisanes y conejos)	Patas (faisanes y conejos)

Anota el sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas que se genera con las ecuaciones obtenidas anteriormente:

$$\begin{cases} x + y = 35 \quad \ldots\ldots\text{ (Ec.1)} \\ 2x + 4y = 94 \ldots\ldots\text{ (Ec. 2)} \end{cases}$$

Aplica el método de eliminación para resolver el sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. A continuación, completa lo que haga falta.

EMPLEO DEL MÉTODO DE IGUALACIÓN

Paso 1: Elige una incógnita a despejar y anótala a continuación: $\underline{x}$

Paso 2: Despejaremos la incógnita seleccionada en el paso 1, en cada una de las dos ecuaciones del sistema.

Despeje la incógnita $\underline{x}$ en la primera ecuación del sistema y simplifica la expresión resultante, de ser necesario.	Despeje la incógnita $\underline{x}$ en la segunda ecuación del sistema y simplifica la expresión resultante, de ser necesario.
…. (Ec. 3)	$x = \frac{94-4y}{2} = 47 - 2y$ …. (Ec. 4)

Paso 3: Igualar las dos expresiones obtenidas en el paso 2, se genera una ecuación de primer grado con una incógnita (se ha eliminado la otra incógnita).

Paso 4: Resolver la ecuación de primer grado con una incógnita, obtenida en el paso 3.

$$35 - y = 47 - 2y$$

Paso 5: Sustituir el valor de la incógnita obtenida en el paso 4, en una de las ecuaciones del sistema o en alguna de las ecuaciones obtenidas en el paso 2 (generalmente se sustituye en la más sencilla). Finalmente, resolver la ecuación que se genera.

Sustituimos $y = 12$ en la ecuación Ec. 3:

Así, la solución del sistema de ecuaciones es: ____________________________

Verifica tus respuestas:

Para verificar los resultados obtenidos, es suficiente con sustituir los valores de las incógnitas, obtenidas por el método de igualación, en cada una de las ecuaciones del sistema.

Sustituir la solución en la primera ecuación del sistema	Sustituir la solución en la segunda ecuación del sistema
$x + y = 35$ $23 + 12 = 35$ $35 = 35$	$2x + 4y = 94$
¿Obtuviste una igualdad? Sí	¿Obtuviste una igualdad? ___

La solución que obtuviste es correcta si al sustituir los valores de las incógnitas, en cada ecuación, obtienes una igualdad.

Finalmente, redacta la conclusión del problema, es decir, contesta la pregunta que se plantea en el problema: ____

____

____

____

____

Actividad 17. Resuelve el siguiente problema empleando el método de igualación.

Se venden bicicletas y triciclos. Jorge le pregunta a Raúl: ¿Cuántas bicicletas y cuántos triciclos hay, si en total conté 50 pedales y 64 ruedas?

Planteamiento del problema

Anota las incógnitas que intervienen en el problema:

Asigna una literal a cada incógnita que interviene en el problema:

Escribe las relaciones algebraicas existentes entre las incógnitas:

Primera relación algebraica entre las dos incógnitas (considerando el número de pedales)	Segunda relación algebraica entre las dos incógnitas (considerando el número de ruedas)

Anota el sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas que se genera con las ecuaciones obtenidas anteriormente:

$$\begin{cases} \\ \end{cases}$$

Aplica el método de igualación para resolver el sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

EMPLEANDO EL MÉTODO DE IGUALACIÓN

Paso 1: Elige una incógnita a despejar y anótala a continuación: ________.

Paso 2: Despeja la incógnita seleccionada en el paso 1, en cada una de las dos ecuaciones del sistema.

Despejar la incógnita _____ en la primera ecuación del sistema y	Despejar la incógnita _____ en la segunda ecuación del sistema y

simplifica la expresión resultante, de ser necesario.	simplifica la expresión resultante, de ser necesario.

Paso 3: Igualar las dos expresiones obtenidas en el paso 2, se genera una ecuación de primer grado con una incógnita (se ha eliminado la otra incógnita).

Paso 4: Resolver la ecuación de primer grado con una incógnita, obtenida en el paso 3.

Paso 5: Sustituir el valor de la incógnita obtenida en el paso 4 en una de las ecuaciones del sistema o en alguna de las ecuaciones obtenidas en el paso 2 (generalmente se sustituye en la más sencilla). Finalmente, resolver la ecuación que se genera.

Así, la solución del sistema de ecuaciones es:______________________________.

Verifica tus respuestas:

Para verificar los resultados obtenidos, es suficiente con sustituir los valores de las incógnitas, obtenidas por el método de igualación, en cada una de las ecuaciones del sistema.

Sustituir la solución en la primera ecuación del sistema	Sustituir la solución en la segunda ecuación del sistema
¿Obtuviste una igualdad? __________	¿Obtuviste una igualdad? __________

La solución que obtuviste es correcta si al sustituir los valores de las incógnitas, en cada ecuación, se llega a una igualdad.

Finalmente, redacta la conclusión del problema, es decir, contesta la pregunta que se plantea en el problema: ____

____

____

____

____

Actividad 18.

Emplea el método de igualación para resolver el problema planteado en la actividad 1. Comprueba que la edad del padre es 50 y la edad del hijo es 30.

Actividad 19.

Sea un número de dos cifras. Si a dicho número se le disminuye en 17 y esta diferencia se divide entre la suma de sus cifras, el cociente es 5. Pero si al número se le disminuye en 2 y esta diferencia se divide por la cifra de las unidades disminuida en 2, el cociente es 19. Encontrar el sistema de ecuaciones que representa el problema y el número en cuestión.

SOLUCIÓN:

Para entender el problema es crucial leerlo y paralelamente ir escribiendo el proceso algebraico, es apropiado dar algunas explicaciones y hacer referencia a nuestro pensamiento aritmético conforme se va avanzando.

Por ejemplo: Considerando el número 17=ab, se identifica que sus cifras son a=1 (una decena) y b=7 (siete unidades). Así ab=17= 10+7.

Condición 1: Se tiene un número de dos cifras se disminuye en 17 y esta diferencia se divide entre la suma de sus cifras, el cociente es 5.

Si suponemos que el número es ab (donde a son las decenas y b las unidades, significa que ab = 10 a + b) entonces:

- ab -17 al dividirla entre a + b (cifras del número ab) el cociente es 5, es decir: $\frac{ab-17}{a+b} = 5$ que es equivalente a: $\frac{10\,a+b-17}{a+b} = 5$, ¿por qué? Justifica tu respuesta.

  Completa los pasos que faltan para simplificar la expresión anterior:

$$10\,a + b - 17 \;= 5\,(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\,)$$

5 a – 4 b = _____ …. (Ec. 1)

Condición 2 es: Al número se le disminuye en 2 y esta diferencia se divide por la cifra de las unidades disminuida en 2, el cociente es 19, continuación, como el número es ab entonces

- ab - 2 al dividirla entre b - 2 (cifra de la unidad disminuida en 2) el cociente es 19, es decir: $\frac{ab-2}{b-2} = 19$ que es equivalente a: $\frac{10\,a+b-2}{b-2} = 19$, ¿por qué? Justifica tu respuesta.

Completa los pasos que faltan para simplificar la expresión anterior:

$10\ a + b - 2\ = 19(\boldsymbol{b} - \mathbf{2}\ )$ -5 a +9 b = ____ …. (Ec. 2)

Así, obtenemos el sistema de ecuaciones lineales 2×2:

$$\begin{cases} 5a - 4b = \_\_\_\_ \text{ …. (Ec. 1)} \\ -5a + 9b = \_\_\_\_\_ \text{ …. (Ec. 2)} \end{cases}$$

Resuelve el sistema anterior empleando el método de igualación, completa el siguiente procedimiento.

EMPLEANDO EL MÉTODO DE IGUALACIÓN

Paso 1: Elige una incógnita a despejar y anótala a continuación: ________.

Paso 2: Despeja la incógnita seleccionada en el paso 1, en cada una de las dos ecuaciones del sistema.

Despejar la incógnita _____ en la primera ecuación del sistema y simplifica la expresión resultante, de ser necesario.	Despejar la incógnita _____ en la segunda ecuación del sistema y simplifica la expresión resultante, de ser necesario.

Paso 3: Igualar las dos expresiones obtenidas en el paso 2, se genera una ecuación de primer grado con una incógnita (se ha eliminado la otra incógnita).

Paso 4: Resolver la ecuación de primer grado con una incógnita, obtenida en el paso 3.

Paso 5: Sustituir el valor de la incógnita obtenida en el paso 4 en una de las ecuaciones del sistema o en alguna de las ecuaciones obtenidas en el paso 2 (generalmente se sustituye en la más sencilla). Finalmente, resolver la ecuación que se genera.

Así, la solución del sistema de ecuaciones es:______________________________.

Verifica tus respuestas:

Para verificar los resultados obtenidos, es suficiente con sustituir los valores de las incógnitas, obtenidas por el método de igualación, en cada una de las ecuaciones del sistema.

Sustituir la solución en la primera ecuación del sistema	Sustituir la solución en la segunda ecuación del sistema
¿Obtuviste una igualdad? __________	¿Obtuviste una igualdad? __________

La solución que obtuviste es correcta si al sustituir los valores de las incógnitas, en cada ecuación, se llega a una igualdad.

Finalmente, redacta la conclusión del problema, es decir, contesta la pregunta que se plantea en el problema: ____

____

____

____

____

RESPUESTA DEL PROBLEMA:

La solución del sistema de ecuaciones es a = 9 y b = 7, es decir, el número en cuestión es 97.

Actividad 20.

Un bote que navega por un río recorre 15 kilómetros en $1\frac{1}{2}$ horas a favor de la corriente, y recorre una distancia de 12 kilómetros en 2 horas contra la corriente, como se muestra en la figura de abajo, encontrar el sistema de ecuaciones, la velocidad del bote y la velocidad del río.

Un ejercicio parecido fue propuesto en la sección 4.4 para resolverse aplicando el método gráfico.

Recuerda que la $velocidad = \frac{distancia}{tiempo}$

Del

La velocidad del bote es favorecida con la velocidad del rio, teniendo una velocidad de: 15 km en $1\frac{1}{2}\ horas$

La velocidad del bote es contrarestada por una velocidad del rio, teniendo una velocidad de: 12 km en 2 horas.

enunciado que se encuentra en el extremo derecho de la imagen anterior, se tiene:

$$Veloc_{del\ bote} + Veloc_{del\ río} = \frac{15\ km}{1\frac{1}{2}\ hrs} \ldots .(Ec.1)$$

Del enunciado que se encuentra en el extremo derecho de la imagen anterior, se tiene:

$$Veloc_{del\ bote} - Veloc_{del\ río} = \frac{12\ km}{2\ hrs} \ldots .(Ec.2)$$

Si denotamos a las velocidades como: $Veloc_{del\ bote} = b$, $Veloc_{del\ río} = a$, se tiene:

$$b + a = \frac{15}{1\frac{1}{2}} = \frac{\frac{15}{1}}{\frac{3}{2}} = 10\ \ implica\ b + a = 10 \ldots .(Ec.1)$$

$$b - a = \ 2 \ldots .(Ec.2)$$

Así, obtenemos el sistema de ecuaciones lineales 2×2:

$$\begin{cases} b + a = 10 \ldots .\ (\text{Ec. } 1) \\ b - a = 2 \quad \ldots .\ (\text{Ec. } 2) \end{cases}$$

Resuelve el sistema anterior empleando el método de igualación, completa el siguiente procedimiento.

EMPLEANDO EL MÉTODO DE IGUALACIÓN

Paso 1: Elige una incógnita a despejar y anótala a continuación: ________.

Paso 2: Despeja la incógnita seleccionada en el paso 1, en cada una de las dos ecuaciones del sistema.

Despejar la incógnita _____ en la primera ecuación del sistema y simplifica la expresión resultante, de ser necesario.	Despejar la incógnita _____ en la segunda ecuación del sistema y simplifica la expresión resultante, de ser necesario.

Paso 3: Igualar las dos expresiones obtenidas en el paso 2, se genera una ecuación de primer grado con una incógnita (se ha eliminado la otra incógnita).

Paso 4: Resolver la ecuación de primer grado con una incógnita, obtenida en el paso 3.

Paso 5: Sustituir el valor de la incógnita obtenida en el paso 4 en una de las ecuaciones del sistema o en alguna de las ecuaciones obtenidas en el paso 2 (generalmente se sustituye en la más sencilla). Finalmente, resolver la ecuación que se genera.

Así, la solución del sistema de ecuaciones es:______________________________.

Verifica tus respuestas:

Para verificar los resultados obtenidos, es suficiente con sustituir los valores de las incógnitas, obtenidas por el método de igualación, en cada una de las ecuaciones del sistema.

Sustituir la solución en la primera ecuación del sistema	Sustituir la solución en la segunda ecuación del sistema
¿Obtuviste una igualdad? ___________	¿Obtuviste una igualdad? ___________

La solución que obtuviste es correcta si al sustituir los valores de las incógnitas, en cada ecuación, se llega a una igualdad.

Finalmente, redacta la conclusión del problema, es decir, contesta la pregunta que se plantea en el problema: ____

____

____

____

____

RESPUESTA DEL PROBLEMA:

La solución es: $a = 2\frac{km}{hr}$ que es la velocidad del río y $b = 8\ \frac{km}{hr}$ es la velocidad del bote.

Actividad 21.

1. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de igualación:

a) $2x + y = 7$

$2x - y = 1$

b) $x + 2y = 8$

$-x + 3y = 17$

c) $2x + y = 7$

$3x + 2y = 12$

d) $-3x + 2y = 2$

$2x - 2y = 4$

e) $4x - 3y = -2$

$2x + 2y = -8$

2. Se tienen $ 1500 en 19 billetes de $ 50 y $ 100. ¿Cuántos billetes son de $ 50 y cuántos billetes son de $ 100?
3. Encontrar dos números cuya suma sea 49 y su diferencia sea 23.
4. El perímetro de un terreno rectangular es de 70 m. El triple del largo menos el doble del ancho es igual a 30 m. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno?
5. Si A le da a B un peso, $1, ambos tienen lo mismo, y si B le da a A un peso, $1, A tendrá el triple de lo que le queda a B. ¿Cuánto tiene cada uno de ellos?
6. Hace 10 años la edad de A era el doble que la de B; dentro de 10 años la edad de B será $\frac{3}{4}$ de la de A. Hallar las edades actuales.
7. Una tripulación rema 28 kilómetros en $1\frac{3}{4}$ horas río abajo, 24 kilómetros en 3 horas río arriba. Hallar las velocidades del bote en agua tranquila y la velocidad del río.
8. Una persona compra dulces de dos clases: los de una clase cuestan $0.80 y los de la otra tienen un precio de $1.20 cada uno. Si pago un total de $76 por 75 dulces, ¿cuántos compró de cada clase?
9. Hallar dos números tales que 3 veces el mayor excede a $\frac{1}{5}$ del menor en 264, y 3 veces el menor exceda a $\frac{1}{5}$ del mayor en 72.

SOLUCIONES:

5. A tiene $5 y B tiene $3
6. La edad actual de A es de 30 años y la de B es de 20 años.
7. La velocidad del bote en aguas tranquilas es de 12 kilómetros por hora y la velocidad del río es de 4 kilómetros por hora.
8. Compró 35 dulces de $0.80 y 40 dulces de $1.20
9. El mayor es 90 y el menor es 30.

4.2.2 Método de sustitución

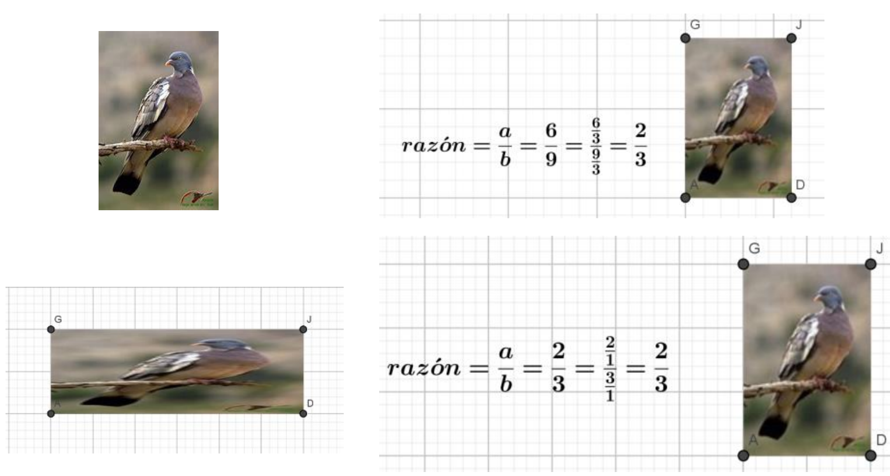
En la sección 4.2.1 estudiamos el método de igualación, ahora toca el turno de estudiar el método de sustitución.

A continuación, se presenta el planteamiento de un problema. Completa lo que hace falta para llegar al modelo matemático del problema. Al finalizar compara tus respuestas con las de tus compañeros.

Actividad 22.

Un fotógrafo requiere contar con papel en forma rectangular cuyo perímetro sea de 70 cm. Él sabe que las dimensiones de los lados deben de estar la razón $\frac{2}{3}$, esto es para que la foto salga bien ¿Cuáles deben de ser las dimensiones del papel fotográfico?

Proceso de solución. Pida al alumno que escoja alguna de las fotos de abajo y que haga algunos dibujos en su cuaderno considerando la información de la situación.



De lo anterior se sabe que cada lado es un número que debe de cumplir con la razón dada.

Ahora completa los espacios en blanco:

a) El perímetro debe cumplir:

$2\,a + 2\,b$ = ____, al simplificar se tiene:

$a + b$= _____ ….(Ec. 1)

b) Se sabe que $\frac{a}{b} = \frac{}{}$ .... (Ec. 2),

al despejar $\boldsymbol{a}$ se tiene:

$$\boldsymbol{a} = \frac{}{} * \_\_ \quad ....(\text{Ec. } 3).$$

En tu cuaderno resuelve el sistema de ecuaciones empleando el método de igualación visto en la sección anterior.

Otro método algebraico que se emplea con frecuencia para resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas es el método de sustitución, el cual consiste en despejar una incógnita de una de las ecuaciones y sustituir lo obtenido en la otra ecuación, y la nueva ecuación se resuelve como se hizo anteriormente.

En las siguientes actividades aplicaremos el método de sustitución para resolver algunos problemas.

Actividad 23.

Dos ángulos suplementarios suman 180°, si la diferencia de los ángulos es de 90°, ¿cuánto mide cada ángulo?

Planteamiento del problema

Anota las incógnitas que intervienen en el problema:

Ángulo 1 y ángulo 2.

Asigna una literal a cada incógnita que interviene en el problema:

$x = \acute{A}ngulo\ 1$ $y = \acute{A}ngulo\ 2$

Escribe las relaciones algebraicas existentes entre las incógnitas:

Primera relación algebraica entre las dos incógnitas (considerando que son suplementarios)	Segunda relación algebraica entre las dos incógnitas (considerando su diferencia)
$x + y = 180°$	$x - y = 90°$

Anota el sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas que se genera con las ecuaciones obtenidas anteriormente:

$$\begin{cases} x + y = 180° \text{ ....(Ec. 1)} \\ x - y = 90° \text{ ....(Ec. 2)} \end{cases}$$

Aplica el método de sustitución para resolver el sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

EMPLEO DEL MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

Paso 1: Elige una incógnita a despejar y anótala a continuación: $\underline{x.}$

Paso 2: Despeja la incógnita seleccionada en el paso 1, en una de las ecuaciones del sistema.

Despejando la incógnita $\underline{x}$ en la Ec. 1 ecuación del sistema de ecuaciones, y simplifica la expresión resultante, se obtiene:
$x = 180° - y$ …. (Ec. 3)

Paso 3: Sustituir el valor de la incógnita obtenida en el paso 2 en la ecuación restante, se genera una ecuación de primer grado con una incógnita (se ha eliminado la otra incógnita).

Sustituyendo $x = 180° - y$ en Ec. 2, se tiene:

$$(180° - y) - y = 90°$$

Paso 4: Resolver la ecuación de primer grado con una incógnita, obtenida en el paso 3.

Despejando y de la expresión obtenida en el paso 3, tenemos:

$$180° - y - y = 90°$$
$$-2y = 90° - 180°$$
$$-2y = -90°$$
$$y = \frac{-90°}{-2°}$$
$$y = 45°$$

Paso 5: Sustituir el valor de la incógnita obtenida en el paso 4 en una de las ecuaciones del sistema o en la ecuación obtenida en el paso 2 (generalmente se sustituye en la más sencilla). Finalmente, resolver la ecuación que se genera.

Sustituyendo $y = 45°$ en Ec. 3:

$$x = 180° - 45°$$
$$x = 135°$$

Así, la solución del sistema de ecuaciones es: ____________________________.

Verifica tus respuestas:

Para verificar los resultados obtenidos, es suficiente con sustituir los valores de las incógnitas, obtenidas por el método de sustitución, en cada una de las ecuaciones del sistema.

Sustituir la solución en Ec. 1 del sistema de ecuaciones lineal 2×2.	Sustituir la solución en Ec. 2 del sistema de ecuaciones lineal 2×2.
¿Obtuviste una igualdad? __________	¿Obtuviste una igualdad? __________

La solución que obtuviste es correcta si al sustituir los valores de las incógnitas, en cada ecuación, se llega a una igualdad.

Finalmente, redacta la conclusión del problema, es decir, contesta la pregunta que se plantea en el problema: ____

____

____

____

____

Actividad 24.

Una fábrica de automóviles produce mensualmente 625 unidades, estándar y automático; la diferencia de producción entre autos estándar y automático es de 55 unidades. ¿Cuántos autos de cada tipo se producen en un mes?

Planteamiento del problema

Anota las incógnitas que intervienen en el problema:

Asigna una literal a cada incógnita que interviene en el problema:

Escribe las relaciones algebraicas existentes entre las incógnitas:

Primera relación algebraica entre las dos incógnitas (considerando la cantidad total automóviles producidos en un mes)	Segunda relación algebraica entre las dos incógnitas (considerando la diferencia de producción entre tipos de automóviles)

Anota el sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas que se genera con las ecuaciones obtenidas anteriormente:

$\begin{cases} \qquad \text{....(Ec. 1)} \\ \qquad \text{....(Ec. 2)} \end{cases}$

Aplica el método de sustitución para resolver el sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

Paso 1: Elige una incógnita a despejar y anótala a continuación: _______________

Paso 2: Despeja la incógnita seleccionada en el paso 1, en una de las ecuaciones del sistema.

Despejando la incógnita _____ en la ____________ ecuación del sistema de ecuaciones, y simplifica la expresión resultante, se obtiene:
…. (Ec. 3)

Paso 3: Sustituir el valor de la incógnita obtenida en el paso 2 en la ecuación restante, se genera una ecuación de primer grado con una incógnita (se ha eliminado la otra incógnita).

Paso 4: Resolver la ecuación de primer grado con una incógnita, obtenida en el paso 3.

Paso 5: Sustituir el valor de la incógnita obtenida en el paso 4 en una de las ecuaciones del sistema o en la ecuación obtenida en el paso 2 (generalmente se sustituye en la más sencilla). Finalmente, resolver la ecuación que se genera.

Así, la solución del sistema de ecuaciones es:____________________________.

Verifica tus respuestas:

Para verificar los resultados obtenidos, es suficiente con sustituir los valores de las incógnitas, obtenidas por el método de sustitución, en cada una de las ecuaciones del sistema.

Sustituir la solución en Ec. 1 del sistema de ecuaciones lineal 2×2.	Sustituir la solución en Ec. 2 del sistema de ecuaciones lineal 2×2.
¿Obtuviste una igualdad? __________	¿Obtuviste una igualdad? __________

La solución que obtuviste es correcta si al sustituir los valores de las incógnitas, en cada ecuación, se llega a una igualdad.

Finalmente, redacta la conclusión del problema, es decir, contesta la pregunta que se plantea en el problema: ____

____

____

____

____

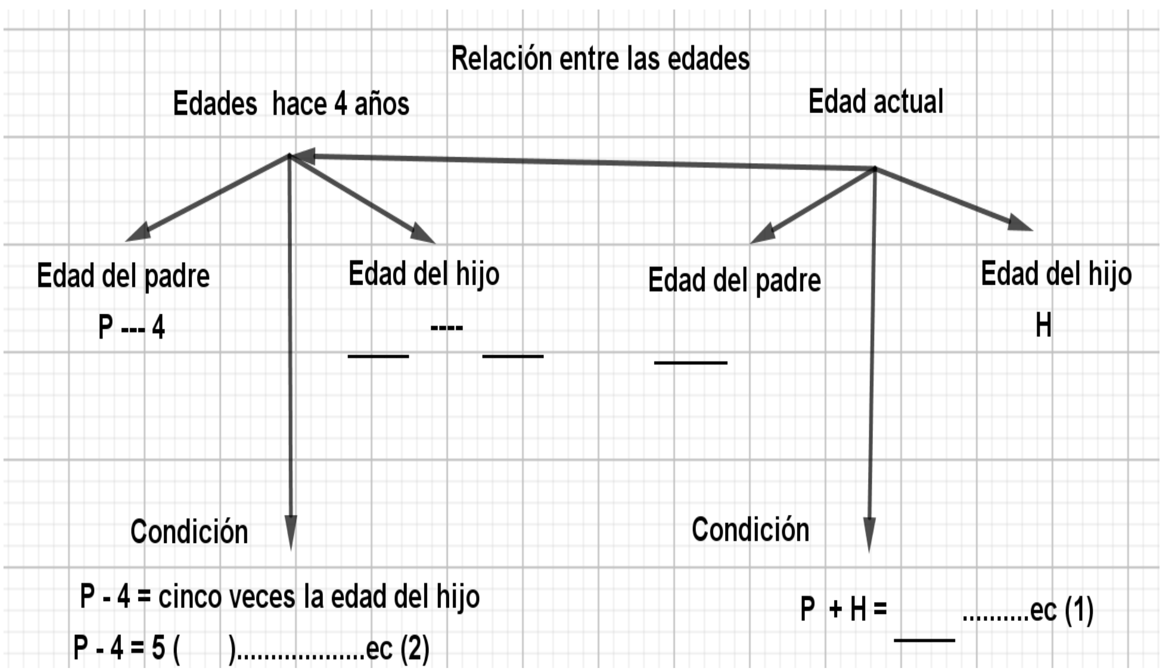
Actividad 25.

La suma de las edades del padre e hijo es de 74 años actualmente, y hace 4 años la edad del padre era 5 veces la edad de su hijo encuentra el sistema de ecuaciones y ¿Cuál es la edad de cada uno de ellos?

SOLUCIÓN:

Como la edad es un número positivo, entonces podemos denotar como P a la edad del padre y H a la edad del hijo.

A continuación, lee con detenimiento el enunciado del problema y completa el esquema. Posteriormente auxíliate de la información contenida en el esquema para obtener el sistema de ecuaciones lineales 2×2 que modele el problema. Finalmente resuelve el sistema de ecuaciones que obtuviste empleando el método de sustitución. Verifica tu solución con tus compañeros y si tienes alguna duda pregúntale a tu profesor.



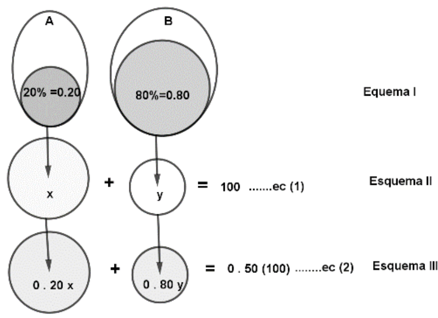
Actividad 26.

Sean A y B dos soluciones salinas. Una solución A al 20% de sal y otra B al 80% de sal, encuentra el sistema de ecuaciones y ¿Cuánto se deberá poner de cada solución para obtener 100 ml de una solución al 50% de sal?

SOLUCIÓN:

Planteamiento del problema:

El proceso de la solución se esquematiza en la siguiente figura:



De la solución A supongamos que tomamos una cantidad ***x*** *ml* y de la solución B se toma una cantidad ***y*** *ml* Obteniéndose así $x + y = 100$ …. (Ec. 1)

De la cantidad *x ml* tiene una concentración al 20% = 0.20 de sal, entonces $0.20*x$ es sal, de manera análoga tenemos para la otra solución, es decir, $0.80*y$ es sal, al mezclarlas se quiere que este al 50% = 0.50 de sal, es decir,

$0.50(x + y) = 0.50\ (100) = 50$, lo cual implica que $0.20\ x + 0.80\ y = 50$…..(Ec. 2).

La ecuación Ec. 2 contiene números decimales, si la multiplicamos por 10 se tiene la ecuación equivalente: $2\ x + 8\ y = 500$, cuyos coeficientes son enteros y múltiplos de 2. Al dividir entre 2, la ecuación anterior, tenemos otra ecuación equivalente: $x + 4\ y = 250$ …. (Ec. 2)

El sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas que se genera con las ecuaciones obtenidas anteriormente es:

$$\boxed{\begin{cases} x + y = 100 & \text{....(Ec. 1)} \\ x + 4\ y = 250 & \text{....(Ec. 2)} \end{cases}}$$

Aplica el método de sustitución para resolver el sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

Paso 1: Elige una incógnita a despejar y anótala a continuación: ___________

Paso 2: Despeja la incógnita seleccionada en el paso 1, en una de las ecuaciones del sistema.

Despejando la incógnita _____ en la ____________ ecuación del sistema de ecuaciones, y simplifica la expresión resultante, se obtiene:
…. (Ec. 3)

Paso 3: Sustituir el valor de la incógnita obtenida en el paso 2 en la ecuación restante, se genera una ecuación de primer grado con una incógnita (se ha eliminado la otra incógnita).

Paso 4: Resolver la ecuación de primer grado con una incógnita, obtenida en el paso 3.

Paso 5: Sustituir el valor de la incógnita obtenida en el paso 4 en una de las ecuaciones del sistema o en la ecuación obtenida en el paso 2 (generalmente se sustituye en la más sencilla). Finalmente, resolver la ecuación que se genera.

Así, la solución del sistema de ecuaciones es:______________________________.

Verifica tus respuestas:

Para verificar los resultados obtenidos, es suficiente con sustituir los valores de las incógnitas, obtenidas por el método de sustitución, en cada una de las ecuaciones del sistema.

Sustituir la solución en Ec. 1 del sistema de ecuaciones lineal 2×2.	Sustituir la solución en Ec. 2 del sistema de ecuaciones lineal 2×2.
¿Obtuviste una igualdad? __________	¿Obtuviste una igualdad? __________

La solución que obtuviste es correcta si al sustituir los valores de las incógnitas, en cada ecuación, se llega a una igualdad.

Finalmente, redacta la conclusión del problema, es decir, contesta la pregunta que se plantea en el problema: ____

____

____

____

____

Actividad 27.

Se tienen dos soluciones salinas. Una solución A al 20% de sal y otra al 60% de sal, encuentra el sistema de ecuaciones y ¿Cuánto se deberá poner de cada solución para obtener 100 ml de una solución al 50% de sal?

Escribe la solución en tu cuaderno y comenta con tus compañeros, si tienes alguna duda pregúntale a tu profesor.

Actividad 28.

En la actividad 22, se planteó el siguiente problema:

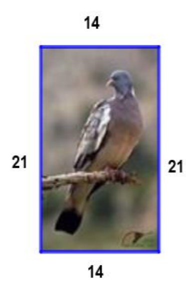
Un fotógrafo requiere contar con papel en forma rectangular cuyo perímetro sea de 70 cm. Él sabe que las dimensiones de los lados deben de estar la razón $\frac{2}{3}$, esto es para que la foto salga bien ¿Cuáles deben de ser las dimensiones del papel fotográfico?

Recupera el sistema de ecuaciones lineales 2×2 obtenido y resuélvelo en tu cuaderno, empleando el método de igualación.

Al finalizar, comprueba tu respuesta:

La imagen que cumple con las condiciones del problema es:

$$razón = \frac{a}{b} = \frac{14}{21} = \frac{\frac{14}{7}}{\frac{21}{7}} = \frac{2}{3}$$



Actividad 29.

1. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de sustitución:

a) $4x + 5y = 21$
$-4x + 8y = -8$

b) $3x + 2y = 23$
$2x - 2y = 2$

c) $2x - 4\,y = -2$
$3x + 4y = 17$

d) $x + 2y = 8$
$-x + 3y = 17$

e) $4x - 3y = -2$
$2x + 2y = -8$

2. Un granjero vendió 52 pollos de color blanco y café en $ 1 695. Si recibió $ 30 por cada pollo blanco y $ 35 por cada pollo café. ¿Cuántos pollos de cada color vendió?
3. La suma de dos números es de 75, y su diferencia es 34.8, ¿cuáles son esos números?
4. El triple de la suma de dos números es 36. El doble del primer número sumado con el triple del segundo número es igual a 29. ¿Cuáles son esos dos números?
5. Karla pagó $ 60 por una pasta de dientes y dos jabones. Beatriz compró dos pastas de dientes y tres jabones por $ 108. ¿Cuánto cuesta cada jabón y cada pasta?
6. Un tercio de la diferencia de dos números es 11 y los $\frac{4}{9}$ del mayor equivalen a los $\frac{3}{4}$ del menor.
7. Hallar dos números tales que 5 veces el mayor exceda a $\frac{1}{5}$ del menor en 222, y 5 veces el menor excede a $\frac{1}{5}$ del mayor en 66.
8. Si a los dos términos de una fracción se añade 1, el valor de la fracción es $\frac{2}{3}$, y si a los dos términos de la fracción se resta 1, el valor de la fracción es $\frac{1}{2}$.encuentra los números.
9. La suma de la cifra de las decenas y la cifra de las unidades de un número es 12, y si al número se resta 18, las cifras se invierten. Hallar el número.

RESPUESTAS:

6. El mayor es 48 y el menor es 15
7. El mayor es 45 y el menor es 15
8. El numerador es 3 y el denominador es 5
9. El número es 75

4.3 Sistemas de ecuaciones lineales 3×3

4.3.1 Sistemas equivalentes de ecuaciones.

Aprendizaje: Comprende el concepto de sistemas equivalentes de ecuaciones lineales en el caso de sistemas lineales 3×3

Anteriormente ya se trabajó con ecuaciones de primer grado con una incógnita, con dos incógnitas y se resolvieron situaciones y sistemas de ecuaciones de lineales con dos incógnitas o sistemas de ecuaciones lineales de 2×2, ahora analizaremos y resolveremos sistemas lineales de 3×3.

Sistemas de Ecuaciones lineales de 3×3

Los sistemas de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas son sistemas de orden 3, para resolverlos es más conveniente usar el método de suma o resta también llamado de eliminación, suma o resta o eliminación.

***Definición* 4.2.** Un sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas es de la forma:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \\ A_3x + B_3y + C_3z = D_3 \end{cases}$$

Donde los A_i, B_i, C_i, D_i son números reales.

La gráfica de un sistema de orden 3 son tres planos en el espacio de tres dimensiones.

Actividad 30.

Observa y analiza el siguiente problema:

En una encuesta aplicada a 28 estudiantes que hacen tarea en la biblioteca, resultó que entre los alumnos que cursan los semestres primero y tercero triplican a los que cursan quinto semestre. También resultó que entre los del primero y quinto semestre exceden en 12 a los de tercer semestre.

Ahora contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Qué diferencia hay entre este problema y los que se resolvieron anteriormente? Justificar respuesta. __________________________________.

b) ¿Pueden identificar cuántas incógnitas intervienen en el problema? Si es así utiliza una variable para cada una y defínelas. ____________________________

c) ¿Puedes determinar el modelo del problema? En caso afirmativo escribelo____

d) ¿Puedes determinar una solución al modelo del problema? En caso afirmativo escribela____

Como te habrás dado cuenta de la actividad anterior, el problema implica a tres incógnitas, el modelo del problema es el siguiente:

$$\begin{cases} x + y + z = 28 \\ x + y = 3z \\ x + z = y + 12 \end{cases}$$

Simbolizando a:

x: número de estudiantes de primer semestre,

y: número de estudiantes de tercer semestre

z: número de estudiantes de quinto semestre.

La solución del sistema lineal de 3x3 es (13,8,7), es decir $x = 13$, $y = 8$, $z = 7$

Para verificar lo anterior sustituimos estos valores en las tres ecuaciones:

$$\begin{cases} 13 + 8 + 7 = 28 \\ 13 + 8 = 3(7) \\ 13 + 7 = 8 + 12 \end{cases}$$

Actividad 31. Con base en el modelo del problema anterior resuelve y contesta lo que se pide.

Nombrando a cada ecuación con ε_1, $\varepsilon_2, \varepsilon_3$: el modelo es como sigue:

$$\begin{cases} x + y + z = 28 & \varepsilon_1 \\ x + y = 3z & \varepsilon_2 \\ x + z = y + 12 & \varepsilon_3 \end{cases}$$

Realizar lo siguiente considerando el sistema anterior:

1. En la ε_2 resta $3z$ de ambos lados, el resultado es: ____________________.

2. En la ε_3 resta y de ambos lados, el resultado es: ____________________.

3. El Sistema anterior ahora se escribe como:

4. Sustituye la ε_2 por el resultado de realizar la siguiente operación: $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$, las demás ecuaciones escríbelas igual, ahora el sistema se escribe como:

5. ¿La solución del sistema original también satisface este nuevo sistema? verifícalo sustituyendo los valores:

6. Usando tu resultado en la pregunta (3), vuelve a escribir el sistema que resulta de sumar la ecuación 1 con la ecuación 3, (recuerda, la ecuación 1 y la ecuación 2 permanecen igual, solo se modificará la ecuación 3) el sistema resultante es:

7. Verifica si la solución del sistema original también satisface este nuevo sistema:

8. Nuevamente usa el sistema original de (3) y solo multiplica la ecuación 3 por 2, el sistema resultante es:

9. Verifica si la solución del Sistema original también satisface este nuevo sistema:

Cómo pudiste verificar la solución de cada sistema es la misma, así pues decimos que:

a) Si en un sistema lineal una ecuación o mas es sumada con otra, el sistema resultante es equivalente al inicial y la solución de ambos es la misma.
b) Si en un sistema una ecuación es multiplicada por un número real diferente de cero (un escalar), el sistema resultante es equivalente al sistema inicial y sus soluciones son la misma.

4.3.2 El método de suma o resta y la multiplicación de una de las ecuaciones por un escalar en un sistema de ecuaciones lineales de 2x2 y 3x3.

Aprendizaje: Obtiene sistemas equivalentes de ecuaciones lineales.

Ya sabemos que, si tenemos un sistema lineal de 2x2, de 3x3 o de grado superior al sumar una ecuación con otra o al multiplicar por un escalar una ecuación el sistema resultante es equivalente al original y que ambos sistemas tienen la misma solución.
Actividad 32. Con base en el sistema lineal de 2x2 que se muestra a continuación, realiza lo que se solicita en cada apartado.

$$\begin{cases} 2x + 5y = 11 & \varepsilon_1 \\ x - 3y = 0 & \varepsilon_2 \end{cases}$$

1. El resultado de sumar ε_1 con ε_2 es: ______________________

2. El Sistema equivalente que resulta después de la operación anterior es: (Nota: ε_1 permanece igual, solo cambia la ε_2)

Ahora resolvamos el Sistema original por el método de igualación.

3. Al despejar x de ε_1 resulta: ________________________________

4. Al despejar x de ε_2 resulta: _________________________________

5. Iguala ambos resultados y resuelve para y, y= _________

6. Sustituye el valor obtenido de y en cualquier ecuación en (3) o (4), x=____

7. La solución del sistema original es: x= ______, y= ________

Ahora resolvamos el Sistema equivalente que obtuviste al realizar (1).

8. Al despejar x de ε_1 resulta: ______________________________

9. Al despejar x de ε_2 resulta: _______________________________

10. Iguala ambos resultados y resuelve para y, y= _________

11. Sustituye el valor obtenido de y en cualquier ecuación en (3) o (4), x=____

La solución del sistema equivalente es: x= ______, y= ________

Actividad 33. Con base en el sistema lineal de 2x2 que se muestra a continuación, realiza lo que se solicita en cada apartado.

$$\begin{cases} 2x + 5y = 11 & \varepsilon_1 \\ x - 3y = 0 & \varepsilon_2 \end{cases}$$

1. El resultado de multiplicar ε_1 por 3 es: _____________________

2. El Sistema equivalente que resulta después de la operación anterior es: (Nota: ε_2 permanece igual, solo cambia la ε_1)

Ahora resolvamos el Sistema original por el método de sustitución.

3. Al despejar x de ε_1 resulta: ______________________________

4. Al sustituir x en ε_2 resulta: _______________________________

5. Resolviendo la ecuación obtenida para y resulta y= ____

6. Sustituye el valor obtenido de y en ecuación en (3) x=____

7. La solución del sistema original es: x= ______, y= ________

Ahora resolvamos el Sistema equivalente que obtuviste al realizar (1).

8. Al despejar x de ε_1 resulta: ________________________________

9. Al sustituir x en ε_2 resulta: ________________________________

10. Resolviendo la ecuación obtenida para y resulta y= ____

11. Sustituye el valor obtenido de y en cualquier ecuación en (3), x=____

La solución del sistema equivalente es: x= ______, y= ________

"Como podrás observar, los sistemas equivalentes tienen la misma solución".

Actividad 34. Con base en el sistema lineal de 3x3 que se muestra a continuación, realiza lo que se solicita en cada apartado.

Dado el sistema lineal de 3x3 con solución (2,-1,2)

$$\begin{cases} 2x + y + 5z = 13 & \varepsilon_1 \\ x + y + 2z = 5 & \varepsilon_2 \\ x - y + 3z = 9 & \varepsilon_3 \end{cases}$$

1. Multiplica por -2 la ε_2 , el sistema resultante es: (Nota: ε_1y ε_3 permanecen igual, solo cambia la ε_2)

$$\begin{cases} 2x + y + 5z = 13 & \varepsilon_1 \\ \qquad\qquad = & \varepsilon_2 \\ x - y + 3z = 9 & \varepsilon_3 \end{cases}$$

2. Verifica si este nuevo sistema tiene la misma solución.

$$\begin{cases} 2(\quad) + (\quad) + 5(\quad) = & \varepsilon_1 \\ -2(\quad) - 2(\quad) - 4(\quad) = & \varepsilon_2 \\ (\quad) - (\quad) + 3(\quad) = & \varepsilon_3 \end{cases}$$

3. Ahora a partir del sistema obtenido en (1), suma ε_1 con ε_2, el sistema resultante es: (Nota: Solo cambia la ecuación a la que se le suma)

4. Verifica si este nuevo sistema tiene la misma solución.

5. Escribe tus conclusiones con respecto de los sistemas equivalentes. ____
____
_______________________________.

Actividad 35.

1. Para cada uno de los sistemas, escribe a la derecha el sistema equivalente que resulta de aplicar las operaciones indicadas, ya sea sumando o restando una ecuación a otra o multiplicando una ecuación por un escalar.

#	Sistema original	Operaciones	Sistema equivalente
a	$\begin{cases} 2x+3y=8 & \varepsilon_1 \\ x+2y=10 & \varepsilon_2 \end{cases}$	$\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2$	
b	$\begin{cases} 2x+3y=8 & \varepsilon_1 \\ -y=-12 & \varepsilon_2 \end{cases}$	$-\varepsilon_2$	
c	$\begin{cases} x+2y+3z=1 & \varepsilon_1 \\ x+5y-z=4 & \varepsilon_2 \\ x-2y+4z=6 & \varepsilon_3 \end{cases}$	$\varepsilon_1 + \varepsilon_3$	
d	$\begin{cases} 2x-y+z=8 & \varepsilon_1 \\ x+y-z=-4 & \varepsilon_2 \\ 4x+2y+z=0 & \varepsilon_3 \end{cases}$	$-2\varepsilon_1 + \varepsilon_3$	
e	$\begin{cases} x+y=4 & \varepsilon_1 \\ y-z=6 & \varepsilon_2 \\ x+6z=10 & \varepsilon_3 \end{cases}$	$6\varepsilon_1 - \varepsilon_3$	

4.3.3 Transformación de un sistema de ecuaciones lineales de 2x2 o de 3x3 a un sistema triangular equivalente de ecuaciones.

Aprendizaje: Resuelve sistemas de ecuaciones lineales 2x2 y 3x3 a través de obtener un sistema triangular equivalente de ecuaciones.

Actividad 36. Responde a las siguientes preguntas:

¿Qué es una ecuación equivalente?

____

¿Qué es un sistema de ecuaciones de 2x2 o de 3x3?

____

¿En qué consiste el método de suma o resta en un sistema de ecuaciones lineales?

____

____

Un sistema de ecuaciones lineales para ser resuelto puede ser transformado en un sistema triangular, todo esto con la finalidad de ser resuelto de una manera más fácil y rápida.

Para ello, al sistema de ecuaciones lineales presentado se le pueden aplicar a una o varias ecuaciones, una serie de operaciones y transformarlas a su forma equivalente, la cual admitirá las mismas soluciones.

Las acciones u operaciones elementales que se pueden aplicar al sistema de ecuaciones, y obtener un sistema equivalente al original son:

1. Intercambiar de posición dos ecuaciones.

2. Multiplicar una de las ecuaciones por una constante diferente de cero.

3. Sumar o restar de una ecuación a otra ecuación.

A continuación, se presentan sistemas de ecuaciones lineales en la parte izquierda y en la parte derecha, mediante las operaciones que se indican arriba, se realiza la transformación este sistema de ecuaciones a un sistema triangular equivalente:

En un sistema de ecuaciones lineales de 2x2

Sistema de ecuaciones a resolver		Sistema Triangular equivalente
$3x - 2y = 7$ ………….. (1)	transformando	$12x - 8y = 28$ ….. (1´)
$4x + 5y = -6$…………. (2)	mediante operaciones	$-23y = 46$…… (2´)

Notemos que a la ecuación (1) la multiplicamos por el número 4 y obtenemos la ecuación (1´), después a la ecuación (2) la multiplicamos por el número 3 y enseguida le restamos la ecuación (1´), así obtenemos la ecuación (2´), por último, a la ecuación (2´) la multiplicamos por el número (-1/23) para tener el siguiente sistema equivalente triangular

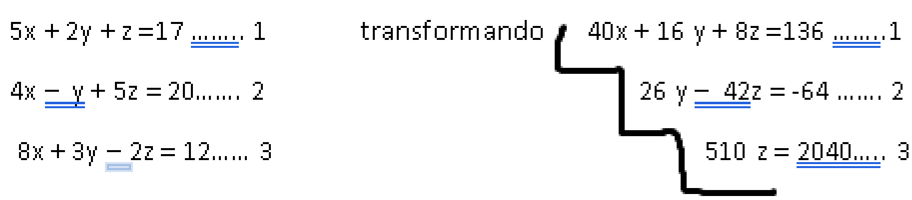
$12x - 8y = 28$ …….(1´)

$y = -2$ ………(2´´)

En un sistema de ecuaciones lineales de 3x3

$5x + 2y + z = 17$ …….. 1	transformando	$40x + 16y + 8z = 136$ ……..1
$4x - y + 5z = 20$……. 2		$26y - 42z = -64$ ……. 2
$8x + 3y - 2z = 12$…… 3		$510z = 2040$….. 3

El sistema de ecuaciones obtenido mediante elementales operaciones, tiene una forma triangular o escalonada. Esta forma recibe este nombre, porque se forman escalones en este sistema o se puede observar un triángulo, tal como se ilustrar a continuación:



40x + 16 y + 8z =136 …….1

26 y – 42z = -64 ……. 2

510 z = 2040….. 3

Ejemplo 1. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales, transformarlo a un sistema equivalente triangular.

Solución. Dado el sistema de ecuaciones mostrado, se aplican a este sistema en cada paso, una serie de operaciones en una o varias ecuaciones y se señala en el siguiente paso la o las ecuaciones equivalentes resultantes.

Sistema de Ecuaciones Procedimiento:

5x + 2y + z =17 ……. 1 4x – y + 5z = 20……. 2 8x + 3y – 2z = 12…… 3	a) Conforme al orden de las ecuaciones, se elige que la incógnita a eliminar, en este caso será la “x”, por tanto, se obtiene que el m.c.m. del coeficiente en “x”. El m.c.m. de 5,4 y 8 es 40.
8 (5x + 2y + z =17) 10 (4x – y + 5z = 20) 5(8x + 3y – 2z = 12)	b) Se multiplica cada ecuación por el número que multiplicando a cada coeficiente de “x” de 40.
40x + 16y + 8z =136…1 40x –10 y + 50z = 200...2 40x +15y – 10z = 60.... 3	c) Se obtienen las ecuaciones equivalentes y conforme al método de suma o resta, se realiza para eliminar la incógnita “x”: A la ec. 2 se le resta la ec. 1 y se asigna el resultado a la ec,2, A la ec. 3 se le resta la ec. 1 y se asigna el resultado a la ec.3
40x + 16y + 8z =136 …1 – 26y + 42 z = 64…. 2 - y - 18 z = - 76….3	Con las operaciones indicadas, se eliminó de la ec. 2 y ec. 3, la componente “x”

40x + 16y + 8z =136 1(– 26y + 42 z = 64) 26(- y - 18 z = - 76)	d) Ahora se trabaja con la ec. 2 y la ec. 3, para eliminar la siguiente incógnita, que en este caso es “y”, para ello se obtendrá el m.c.m de 26 y 1 (coeficiente de y , en ambas ecuaciones) m.c.m es 26. y se multiplican las ecuaciones (ec. 2 por 1, ec. 3 por 26)
40x + 16y + 8z =136 – 26y + 42 z = 64 -26 y - 468 z =- 1976	e) Para eliminar de la ec. 3 la incógnita “z”, a la ec. 3 se le resta la ec. 2 y el resultado se le asigna a la ec.3
40x + 16y + 8z =136 … 1 – 26y + 42 z = 64 … 2 - 510 z = - 2040…3	f) el sistema obtenido, es un sistema de ecuaciones triangular
- **510 z =- 2040 …3** → z **= 4**	g) para obtener “z” , de la ec.3 se resuelve la ecuación
– 26y + 42 z = 64…2 - 26 y + 42 (4) = 64 - **26 y +168 = 64** → **y = 4**	h) con este valor de z=4, se sustituye en la ec. 2, y se resuelve la ecuación lineal, obteniendo el valor de la incógnita “y “-
40x + 16y + 8z =136 … 1 40x + 16(4) + 8(4) =136 40x + 64 + 32=136 → **x = 1**	Con los valores de **y= 4; z = 4** se sustituyen en la ec. 1. Se resuelve la ecuación lineal

Actividad 37.

1. Dado el siguiente sistema de ecuaciones, indica en cada sistema equivalente, el procedimiento que se siguió en cada paso, hasta que se llega a la solución del sistema triangular.

6x + 5y + z =67 …1 3x +4 y + 3z = 49 …2 x + 3y + 2z = 30 …3	**Sistema de ecuaciones lineales**
z +6x + 5y =67 3z +3x +4 y = 49 2z + x + 3y = 30	**Procedimiento:**
6 (z +6x + 5y =67) 2 (3z +3x +4 y = 49) 3(2z + x + 3y = 30)	
6z +36x + 30y = 402 6z + 6x + 8 y = 98 6z + 3x + 9y = 90	
6z +36x + 30y = 402 30x - 22y = - 304 -33y - 21y = - 312	
6z +36x + 30y = 402 33 (-30x - 22y = - 304) 30 (-33x - 21y = - 312)	
6z + 36x + 30y = 402 . - 990 x - 726y = - 10032 . – 990x - 630y = - 9360	
6z + 36x + 30y = 402 - 990 x - 726y = - 10032 . 96y = 672	

.	
96y = 672 **Y = 7**	
- 990 x - 726y = - 10032 - 990 x – 726 (7) = - 10032 -990x- 5082 = - 10032 **X = 5**	
6z + 36(5) + 30(7) = 402 6z + 180+210= 402 **Z = 2**	

2. Dado el siguiente sistema de ecuaciones, indica las operaciones que se efectuaron a lo largo de la resolución del mismo.

Sistema de Ecuaciones	**Operaciones Realizadas**
5x + 4y = 6…….1 **-3 x+2y = 14……2**	
3 (5x + 4y = 6) **5(-3 x+2y = 14)**	
15x + 12y = 18 **-15 x+10y = 70**	
15x + 12y = 18 **22y = 88**	
22y = 88 **y= 88/22**	

y=4	
15x + 12y = 18 **15x + 12(4) = 18** **15x + 48 = 18** **15x = 18 – 48** **15x = - 30** **x = - 30 / 15** **x = 2**	

Actividad 38.

Elabora un plan que efectúes para resolver cualquier sistema de ecuaciones, transformando un sistema de 2x2 o 3x3, mencionando las acciones a realizar, mediante un cuadro sinóptico, un mapa mental o un mapa conceptual.

4.3.4 Problemas de Aplicación.

Aprendizaje:

Resuelve problemas en diversos contextos empleando los métodos algebraicos vistos con anterioridad.

En esta sección usaremos los conocimientos adquiridos sobre la solución de sistemas de ecuaciones lineales para resolver problemas de aplicación.

Al igual que en la unidad anterior seguiremos los 4 pasos esenciales en la solución de los problemas de aplicación: definir las incógnitas, plantear las ecuaciones. Resolver el sistema y contestar lo que pide el problema.

Ejemplos.

1) Un museo cobra $20 de admisión por adulto y $10 por niño. En cierto día se vendieron 295 boletos y había $4020 en la caja. ¿Cuántos niños y cuántos adultos entraron al museo ese día?

1. Definición de las incógnitas

x = número de niños

y = número de adultos

2. Planteamiento de las ecuaciones (traducción del problema a lenguaje algebraico)

$x + y = 295$

$10x + 20y = 4020$

3. Solución del sistema de ecuaciones

Resolvamos el sistema por el método de sustitución

Despejando a x de la primera ecuación: $x = 295 - y$

Sustituyendo en la segunda: $10(295 - y) + 20y = 4020$

$2950 - 10y + 20y = 4020$

$10y = 4020 - 2950$

$y = \frac{1070}{10}$

$y = 107$

$x = 295 - y \quad \Rightarrow \quad x = 295 - 107 = 188$

4. solución del problema

Entraron al museo *188* niños y *107* adultos

2) Se quiere mezclar un tipo de leche que contiene 10% de grasa y otra que contiene 80% para envasar leche con 50% de grasa. ¿Cuántos litros de cada una se necesitan para producir 140 litros de leche con el porcentaje deseado de grasa?

1. Definición de las incógnitas

x = litros de leche que contiene 10% de grasa

y = litros de leche que contiene 80% de grasa

2. Planteamiento de las ecuaciones

Se quiere que de los 140 litros 50% sea grasa, es decir 70 litros

Los x litros proporcionan $0.10x$ litros de grasa

Los y litros proporcionan $0.80x$ litros de grasa

$x + y = 140$

$0.10x + 0.80y = 70$

3. Solución de las ecuaciones

Resolvamos el sistema de ecuaciones por el método de sustitución.

Despejamos a x de la primera ecuación. $x = \mathbf{140 - y}$

Sustituimos en la segunda: $0.10x + 0.80y = 70$

$0.10(\mathbf{140 - y}) + 0.80y = 70$

$14 - 0.10y + 0.80y = 70$

$14 + 0.70y = 70$

$0.70y = 70 - 14$

$$y = \frac{56}{0.70}$$

$y = 80$

$x = 140 - y = 140 - 80 = 60$

4. solución del problema

Se necesita ***60 litros*** de leche que contiene 10% de grasa y ***80 litros*** de leche que contiene 80% de grasa

3) Una cantidad al 6% y otra al 4% dan un interés de \$57. Si se intercambian las cantidades, el interés aumentará en \$6. ¿Cuáles son las cantidades?

1. Definición de las incógnitas

x = cantidad invertida al 6%

y = cantidad invertida al 4%

2. Planteamiento de las ecuaciones

Del enunciado *"una cantidad al 6% y otra al 4% dan un interés de \$57"* se tiene la ecuación:

$0.06x + 0.04y = 57$

Y del enunciado: *"Si se intercambian las cantidades, el interés aumentará en \$6"* se tiene la ecuación: $0.06y + 0.04x = 57 + 6$

Hay que resolver el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 0.06x + 0.04y = 57 \\ 0.06y + 0.04x = 63 \end{cases}$

3. Solución del sistema de ecuaciones

Usaremos el método de suma o resta para resolver el sistema de ecuaciones:

Para eliminar a *x* sumemos la primera ecuación multiplicada por –2 con la segunda multiplicada por 3.

$$\begin{array}{ll} (-2)\,(0.06x + 0.04y = 57) & -0.12x - 0.08y = -114 \\ (3)\,(0.04x + 0.06y = 63) & \underline{\;\;0.12x + 0.18y = 189} \\ & \;\;0x + 0.10y = 75 \end{array}$$

$$\begin{cases} 0.06x + 0.04y = 57 \\ 0.06y + 0.04x = 63 \end{cases} \quad \textit{es equivalente a} \quad \begin{cases} 0.06x + 0.04y = 57 \\ \qquad\quad 0.10y = 75 \end{cases}$$

Resolviendo la última ecuación:

$$y = \frac{75}{0.10} = 750$$

Sustituyendo en $0.06x + 0.04y = 57$

$0.06x + 0.04(750) = 57$

$0.06x + 30 = 57$

$0.06x = 57 - 30$

$$x = \frac{27}{0.06} = 450$$

4. solución del problema

Las cantidades invertidas son: ***\$450*** al 6% y ***\$750*** al 4%

4) Dos números son tales que la diferencia entre el mayor y el menor es 13 y al dividir el mayor entre el menor el cociente es 2 con residuo 1. Encuentra dichos números.

Solución

1. Definición de las incógnitas

x = número mayor

y = número menor

2. Planteamiento del sistema de ecuaciones

Del enunciado: *"la diferencia entre el mayor y el menor es 13"* se tiene $x - y = 13$

Y del enunciado *"al dividir el mayor entre el menor el cociente es 2 con residuo 1"* se tiene la ecuación $x = 2y + 1$

Tenemos que resolver el sistema $\begin{cases} x - y = 13 \\ x = \mathbf{2y + 1} \end{cases}$

3. Solución de las ecuaciones

El sistema resulta más fácil resolverlo por el método de sustitución, solo sustituimos la segunda ecuación en la primera:

$x - y = 13$

$\mathbf{2y + 1} - y = 13$

$y = 13 - 1$

$y = 12$

$x = 2y + 1 = 2(12) + 1 = 24 + 1 = 25$

4. solución del problema

El número mayor es ***25*** y el menor es ***12***

5) La suma de los dígitos de un número de 2 dígitos es 15. El número que se obtiene al invertir los dígitos es 27 menor que el número mismo. Hallar el número.

Solución

1. Definición de las incógnitas

x = unidad del número de dos dígitos

y = decenas del número de dos dígitos

el número de dos dígitos lo escribimos como: $x + 10y$

2. Planteamiento de las ecuaciones

"La suma de los dígitos de un número de 2 dígitos es 15" se simboliza: $x + y = 15$

El número que se obtiene al invertir los dígitos es: $y + 10x$

Por lo tanto *"El número que se obtiene al invertir los dígitos es 27 menor que el número mismo"* se simboliza: $y + 10x = x + 10y – 27$

Debemos resolver el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x + y = 15 \\ y + 10x = x + 10y - 27 \end{cases}$

3. Solución de las ecuaciones

Resolveremos el sistema por el método de suma o resta, para esto simplifiquemos la segunda ecuación: $y + 10x = x + 10y - 27$

$$y + 10x - 10y - x = -27$$

$$9x - 9y = -27$$

Tenemos el sistema: $\begin{cases} x + y = 15 \\ 9x - 9y = -27 \end{cases}$

Sumemos la primera ecuación multiplicada por – 9 con la segunda.

$$-9x - 9y = -135$$

$$\underline{\;\;9x - 9y = -27}$$

$$0x - 18y = -162$$

$\begin{cases} x + y = 15 \\ 9x - 9y = -27 \end{cases}$ es equivalente a $\begin{cases} x + y = 15 \\ -18y = -162 \end{cases}$

Resolviendo la última ecuación

$$-18y = -162$$

$$y = \frac{-162}{-18} = 9$$

Sustituyendo en la primera ecuación este valor:

$x + y = 15$

x + 9 = 15

x = 15 – 9 = 6

4. solución del problema

El número es *6 + 10(9) =* ***96***

A continuación, se presentan situaciones a resolver, primero tendrás que plantear los sistemas de ecuaciones a partir de las condiciones del problema y en después en segundo lugar, aplicaras algún método de resolución visto en clase.

Plantea y resuelve.

Sobre botes de chocolate en polvo.

1.- En una tienda se venden botes de chocolate en polvo de tamaño grande, mediano y chico. Si una persona se lleva 3 contenedores grandes, 5 medianos y 6 chicos paga $970, pero si se lleva 2 botes grandes, 4 medianos y 3 chicos se $665 y si finalmente lleva 1 bote grande , 1 mediano y 1 chico paga $235. Determina el precio de venta del bote grande, el mediano y el chico de chocolate.

Mecanismo de solución.

Cuando se desea formular una ecuación o un sistema de ecuaciones a partir de un enunciado, se debes de considerar ciertos aspectos.

A continuación, te presentamos algunos elementos a considerar en esta formulación.

Responde a los siguientes cuestionamientos

1. ¿Qué es una incógnita?

2. ¿Cómo se simboliza una incógnita?

3. Señala que se debe de considerar para formular una expresión matemática a partir de un enunciado.

Incógnitas Condiciones del problema

Incógnitas y condiciones del problema

4.- Si las incógnitas de este problema son representadas por:

El precio de cada bote de chocolate y se representa a cada incógnita por:

x= precio del bote de chocolate en polvo de tamaño grande

y= precio del bote de chocolate en polvo de mediano

z = precio del bote de chocolate en polvo de tamaño chico

5.- Escribe las condiciones que se encuentran en el enunciado

a)

b)

c)

6.- Trascribe estos enunciados a lenguaje algebraico, considerando las incógnitas a determinar.

7.- Forma el sistema de ecuaciones, agrupando las ecuaciones e identificando cada una de ellas con un número, conforme a las condiciones encontradas en el enunciado

Actividad 39.

Utilizando el mecanismo anterior plantea y resuelve los sistemas de ecuaciones por el método que prefieras.

Sobre explosivos en demoliciones de edificios.

2. – Una compañía de explosivos fabrica 2 tipos diferente de explosivos para demolición, el tipo A y el tipo B.

Si se emplean 3 cargas de explosivo A y 2 de B, devastan un área de 515 $m^{2.}$ Mientras que si emplean 8 cargas del explosivo A y 5 del tipo B devastan 1350 $m^{2.}$

Determina el área que devastan los explosivos tipo A y tipo B.

Sobre costos en cursar asignaturas.

3. Un estudiante desea cursar una maestría, donde hay materias del tronco común y materias de especialización. Si cursa 3 materias del tronco común y 2 materias de especialización su pago para cursarlas será de $ 7,500, mientras que si cursa 4 materias del tronco común y 1 de especialización paga por cursarlas $ 7, 000. determina el costo por cursar una materia del tronco común y 1 materia de especialización.

Sobre bombeo de agua en un conjunto habitacional

4. En un conjunto habitacional se tiene 3 cisterna para abastecer de agua potable a los departamentos. Si en primavera se tenían que abastecer por semana el contenido de 2 cisternas del tamaño A , 1 del tamaño B y la mitad del tamaño C y se consumían 1, 314 m^3 , mientras que en verano se consumían lo que contenían 1 cisterna del tamaño A , 2 del tamaño B y 2 del tamaño C consumiendo 936 m^3 y finalmente en invierno se consume por semana la mitad del contenido de la cisterna A , la mitad de la cisterna B y 1 del contenido de la cisterna tipo C , ¿Qué cisterna tiene mayor capacidad y cuánta agua medida en 378 m^3 tiene?

Sobre consumo de energía de luminarias.

5.- En un edificio se conectan luminarias tipo led para ciertas áreas que se ocupan. Se emplean focos LED ahorradores de distintos consumos de energía. El tipo bajo de energía A, el mediano de energía B y el de consumo medio alto tipo C.

Si el consumo de una determinada luminaria está indicado en la etiqueta y muestra la energía por hora consumida en watt/ hora, Se tiene que:

a) En el primer piso del edificio, se tienen 22 luminarias del tipo A, 3 luminarias del tipo B y solo 2 luminarias del tipo C, se consumen 259 watt en 1 hora.

b) En el segundo piso se tienen en uso 45 luminarias del tipo A, 5 luminarias del tipo B y solo 4 luminarias del tipo C se consumen por hora 515 watt y

c) Finalmente, en el tercer piso se tienen en uso 20 luminarias del tipo A, 8 luminarias del tipo B y 6 luminarias del tipo C y se consume en una hora 492 watts.

Calcula el consumo de energía por hora de cada luminaria del tipo A, B y C.

6. Una arrendadora de autos A, renta un auto con una tarifa diaria de $21.95 más 19 centavos por kilómetro. Otra arrendadora B, renta un auto de las mismas características que A con una tarifa de $18.95 más 21 centavos por kilómetro. Para que kilometraje el costo es el mismo.

7. Alicia compra 2 kg. de mantequilla y 3 docenas de huevo en $29. Después compra 1 kg. de mantequilla y 2 docenas de huevo en $17.10. Halla el precio unitario de la mantequilla y de cada huevo.

8. La suma de dos números es $\frac{7}{10}$ y tres cuartos de su diferencia es $\frac{2}{5}$. Encuentra los números.

9. Si se suma 2 al numerador y 4 al denominador de una fracción, su valor resulta ser $\frac{2}{3}$. Si se resta 2 al numerador y se suma 1 al denominador, el valor de la fracción se convierte en $\frac{1}{2}$. Halle la fracción.

10. El promedio de dos números es $\frac{5}{48}$. Un cuarto de su diferencia es $\frac{1}{96}$. Hallar los dos números.

11. Un avión voló 640 millas en dirección del viento en una hora y 36 minutos. De regreso, voló contra el viento y demoró 2 horas en realizar el vuelo. Obtenga la velocidad del viento y la del avión con el viento en calma.

12. Hace 30 años la edad de una señora era $\frac{1}{2}$ la edad de su esposo, y dentro de 15 años ella tendrá $\frac{4}{5}$ de la edad de él. Halle las edades actuales.

13. Si la base de un rectángulo aumenta 2 cm. y la altura disminuye 2, el área disminuye 16 centímetros cuadradas. Si la base disminuye 1 cm. y la altura aumenta 2, el área se incrementa en 20 cm^2. Determine el área original del rectángulo.

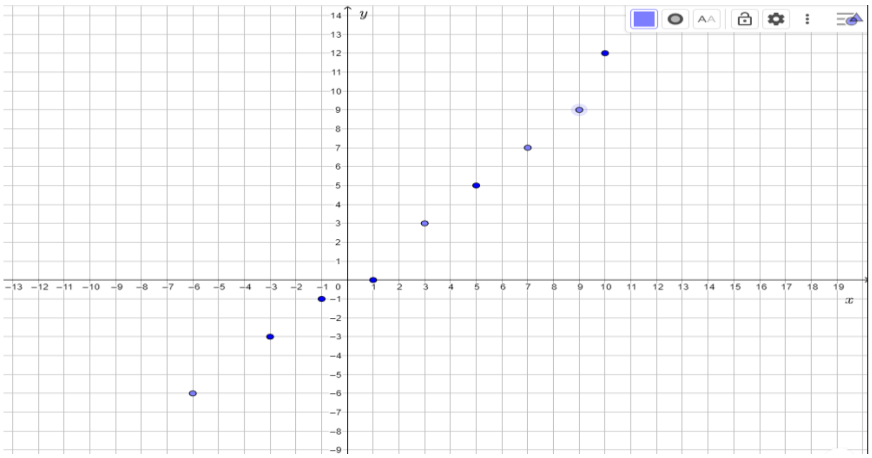
14. ¿Cuántos kilogramos de un mineral que contiene 60% de plata pura y cuántos de un mineral que contiene 90% deberán mezclarse para obtener 6 kilogramos de aleación que tenga un 80% de plata pura?

15. En una granja se necesitan mezclar dos tipos de alimento. Uno tiene 80% de Fibra y el otro contiene 30% de fibra. ¿Cuántos kilogramos se deben mezclar de cada uno para obtener 200 kilogramos de un alimento que contenga 45% de fibra?

Propuesta de evaluación

1. La resta de dos números reales es igual a 100, ¿cuáles son esos números? ¿El problema tiene una única solución o una infinidad de soluciones?

2. En el siguiente plano cartesiano se ubicaron algunos puntos, determina si los puntos forman parte de la representación gráfica de una ecuación lineal con dos incógnitas. Justifica tu respuesta.



3. Un niño que siempre colocaba en su alcancía monedas de a $2 y de a $10, al romperla para comprarle un regalo a su Papá se dio cuenta que había ahorrado $300 ¿Cuántas monedas de cada tipo había en la alcancía?

4. Una fábrica de automóviles produce mensualmente 625 unidades, estándar y automático; la diferencia entre autos estándar y automático es de 55 unidades. ¿Cuántos autos de cada tipo se producen en un mes? (Aplica el método gráfico para resolver el problema).

5. Un granjero vendió 52 pollos de color blanco y café en $ 1 695. Si recibió $ 30 por cada pollo blanco y $ 35 por cada pollo café. ¿Cuántos pollos de cada color vendió? (Aplica el método de igualación para resolver el problema).

6. Pedro le dice a Juan: si me das $15 tendré 5 veces lo que tú tienes; y Juan le dice a Pedro: Si tú me das $20 tendré 3 veces lo que tú tienes. ¿Cuánto tiene cada uno?

   Aplica el método de sustitución para resolver el problema.

   Respuesta: Pedro tiene $35 y Juan tiene $25

7. Resolver los siguientes sistemas por los métodos de: suma o resta, sustitución o igualación

a) $\begin{aligned} 2x - y &= -5 \\ 3x + 8y &= 21 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} \frac{2}{3}x - \frac{3}{4}y &= \frac{1}{12} \\ \frac{4}{7}x + \frac{9}{8}y &= \frac{37}{56} \end{aligned}$

c) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2} = \dfrac{7}{24} \\ \dfrac{1}{4}(x-y) = \dfrac{1}{48} \end{cases}$

d) $\begin{aligned} \frac{x+3y}{2} + \frac{x-y}{3} &= \frac{1}{6} \\ \frac{x+y}{2} - \frac{3x+4y}{6} &= \frac{1}{3} \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} 4(x + 1) - 3(y + 2) &= 19 \\ 5x + 4(y - 3) &= -9 \end{aligned}$

8. Con base en el sistema

$$\begin{cases} x - 3y = 5 & \varepsilon_1 \\ 2x + y = 8 & \varepsilon_2 \end{cases}$$

escribe la secuencia de sistemas equivalentes que resultan de aplicar las operaciones indicadas en cada inciso:

Operaciones	Sistema resultante
$2\varepsilon_1$	
$-\varepsilon_2$	
$\varepsilon_1 + \varepsilon_2$	
$-\varepsilon_2$	

$1/4\varepsilon_2$	

9. El sistema siguiente tiene como solución a (3,1)

$$\begin{cases} 2x - 4y = 2 & \varepsilon_1 \\ x + 6y = 9 & \varepsilon_2 \end{cases},$$

escribe el sistema equivalente que resulta de aplicar la operación

$$\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2$$

10. Verifica que el sistema obtenido en la pregunta anterior tenga la misma solución del sistema original.

11. Con base en el sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 2 & \varepsilon_1 \\ x - 2 + 4z = -4 & \varepsilon_2 \\ 2x - y + z = 2 & \varepsilon_3 \end{cases}$$

cuya solución es (2,1,-1) escribe la secuencia de sistemas equivalentes que resultan de aplicar las operaciones indicadas en cada inciso:

Operaciones	Sistema resultante
$-\varepsilon_2$	
$\varepsilon_1 + \varepsilon_2$	

$1/2\varepsilon_3$	
$\varepsilon_1 + \varepsilon_3$	
$-2\varepsilon_3$	
$\varepsilon_2 + \varepsilon_3$	
$-\varepsilon_3$	

12.Verifica que cada sistema equivalente obtenido en el ejercicio anterior tenga la misma solución del sistema inicial

Bibliografía

1. Baldor, A. J. (1995). Álgebra. México: Publicaciones cultural, México.
2. Charles, I., McNemar, B., & Ramírez, A. (2009). *Prentice Hall Mathematics. Pre-algebra.* Pearson Education. United States of America.
3. Domínguez, M. E., Jiménez, C. A., García, J., & Torres, L. (2016). *Guía para el profesor, Matemáticas I.* (1a ed.). CCH, Oriente, Seminario de Matemáticas.
4. Mejía, M., Olguín, G., Olivera, M. del C., & Popoca, M. V. (2012). Paquete para la evaluación extraordinaria, Matemáticas I. CCH, Oriente.
5. Smith, S., Charles, R., Dossey J., Keedy M., y Brittinger M., (2001). *Álgebra*. México: Pearson.