Colegio de Ciencias y Humanidades
Plantel Oriente
Campo III, IC-21

PAQUETE PARA LA EVALUACIÓN EXTRAORDINARIA

MATEMÁTICAS III

Martín Mejía Ramos
Coordinador

Ricardo Yadel Murillo Pérez
Coordinador

Integrantes:

Fernando García Aguilar

María Elena Gómez Pérez

Pedro Luis Martínez Abraján

Noemí Martínez Alvarado

María Dolores Martínez Gutiérrez

María del Carmen Olivera Martínez

Cristhian Miguel Prieto Villalva

Víctor Agustín Sosa Gómez

Campo III, RUBRO I, NIVEL C, NUMERAL 21

INDICE

GUÍA PARA EL EXAMEN EXTRAORDINARIO

Unidad 1

Elementos de Trigonometría

Elementos de Trigonometría

Propósitos: Utilizar las razones trigonométricas, así como las leyes de senos y cosenos mediante la resolución de problemas en distintos contextos que involucren triángulos con la finalidad de construir conocimientos que serán empleados en asignaturas posteriores**.**

APRENDIZAJES.

Al finalizar la Unidad el Alumno:

1. Comprende que el concepto de razón trigonométrica se deriva de la relación de los lados de un triángulo rectángulo y que son respectivamente invariantes en triángulos semejantes.

2. Determina los valores de las razones trigonométricas para los ángulos de 30º, 45º y 60º y emplea la calculadora para verificarlos.

3. Resuelve problemas que involucren triángulos rectángulos.

4. Comprende la deducción de algunas identidades trigonométricas.

5. Comprende el proceso de deducción de las leyes de senos y de cosenos para resolver problemas sobre triángulos oblicuángulos.

UNIDAD 1

ELEMENTOS DE TRIGONOMETRÍA

Introducción

La trigonometría es una rama de las matemáticas que tiene muchas aplicaciones. Se usa en la topografía, la construcción de edificios, navegación, astronomía, la óptica, la electrónica, la mecánica y las comunicaciones con ondas de radio o con fibra óptica. Esto último incrementó las aplicaciones de la trigonometría.

En la cotidianidad casi siempre necesitamos trigonometría sin estar verdaderamente conscientes, al calcular la cantidad de tela de una cortina, al querer determinar la altura de una escalera, al querer formar un ángulo de 90º en un jardín, etc.

Presentación

Al finalizar esta unidad el alumno será capaz de:

- Utilizar las razones trigonométricas, así como las leyes de senos y cosenos mediante la resolución de problemas en distintos contextos que involucren triángulos con la finalidad de construir conocimientos que serán empleados en asignaturas posteriores.

Para conseguir esta ambiciosa meta, te proponemos una serie de actividades de aprendizaje, teoría y prácticas que están presentadas, de acuerdo a una secuencia lógica propuesta en el programa de la asignatura. Se recomienda seguirlas en el orden que se presentan, sin embargo, puedes estudiar donde consideres necesario, pero recuerda que debes comprender los conceptos antecedentes que se requieren para su entendimiento.

Conceptos clave

Números naturales, Números racionales, Números enteros, Conversiones de unidades, Semejanza de triángulos, Teorema de Pitágoras, Propiedades de los triángulos, pendiente, ángulo de depresión, ángulo de elevación, Razón, Racionalización.

Sugerencias

Este contenido está dirigido a los alumnos que desean estudiar de manera autodidacta y a su ritmo. Se recomienda seguir las actividades de aprendizaje y repasar la teoría. Seguir los ejemplos ayudará a adquirir destreza.

En caso de tener preguntas, se sugiere preguntar al profesor o acudir a asesorías con dudas específicas. No está de más el hacer algunas recomendaciones a los estudiantes para que su estudio sea eficaz: leer con atención cada párrafo y comprender lo que se pide, trabajar en un lugar bien ventilado, iluminado y silencioso, sentarse cómodamente en una silla con respaldo y en una mesa libre de obstáculos y tener una libreta de notas para realizar todos los ejercicios propuestos para adquirir seguridad en esta asignatura. Probablemente alguna de estas recomendaciones no serán factibles, pero en lo posible, es mejor tratar de respetarlas.

Recuerda que lo más importante es tener una actitud positiva, el deseo y la intención de aprender.

Actividad de aprendizaje teórico-práctica

Para introducir el concepto de funciones trigonométricas, se va a considerar la siguiente situación:

Se desea construir una rampa para minusválidos. Por normatividad, una rampa para minusválidos debe tener una inclinación de 15º. Si deseamos que la rampa alcance una altura h = 1.5 m, entonces ¿Qué tan alejada debe colocarse la rampa?

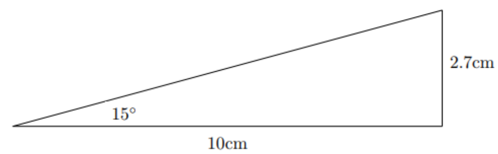
Recuerda que 1 m = 100 cm

Solución:

Notamos que la rampa forma con el piso y la pared un triángulo rectángulo. Como queremos que la rampa este inclinada 15º y el ángulo de la base con la pared es de 90º entonces el ángulo restante debe ser de 75º ya que sabemos que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180º.

Notamos también que cualquier otro triángulo que tenga esos ángulos será un triángulo semejante al que queremos construir. Así pues, construimos un triángulo semejante con ayuda de nuestro juego de geometría:

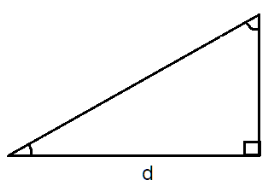
Trazamos una recta horizontal de 10 cm. Hay varias maneras de construir el ángulo de 15º. Una manera es que con el transportador midamos directamente 15º, o bien, dado que sabemos que una de las escuadras tiene 30º dibujamos dicho ángulo y trazamos la bisectriz con ayuda del compás. Una vez que hemos dibujado el triángulo rectángulo semejante al que queremos construir, medimos su altura directamente con la regla. Notamos que la altura es de 2.7 cm



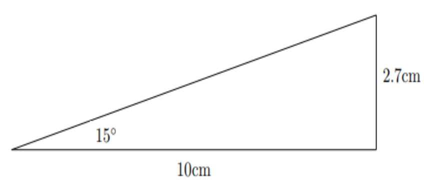
Coloca en los espacios en blanco las medidas de los triángulos rectángulos del problema y el dibujado:

No olvides anotar las longitudes de los lados de los triángulos en las mismas unidades, te proponemos que sea todo en centímetros.

Medidas del triángulo real



Medidas del triángulo dibujado



Por semejanza se cumplen las siguientes proporciones:

$$\frac{150}{2.7} = \frac{d}{10}$$

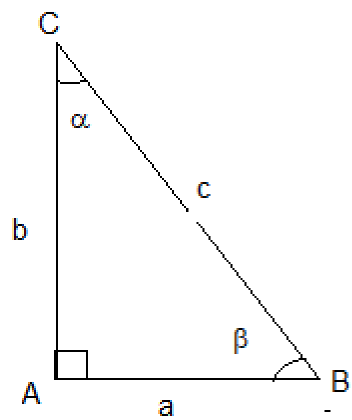
Despejamos y obtenemos el valor de d:

$$d = \frac{150}{2.7} \cdot 10$$
$$d = 555.56\ cm$$

Es decir, la rampa debe estar alejada una distancia de 5.55 m.

Como notamos en este ejercicio, dado un triángulo rectángulo, si conocemos uno de sus ángulos, también podemos conocer el otro y por semejanza, las razones entre sus lados permanecen constantes. Esta última observación es en la que nos basaremos para definir a continuación las razones trigonométricas.

En un triángulo rectángulo definimos lo siguiente:



Los **catetos** son los lados que contienen al ángulo recto, son los de longitud más pequeña.

Cateto opuesto a un ángulo. Es el lado del triángulo que se encuentra enfrente del ángulo.

AB es el cateto opuesto para el ángulo α

AC es el cateto adyacente para el ángulo α

Cateto adyacente a un ángulo. Es el lado que contiene al ángulo.

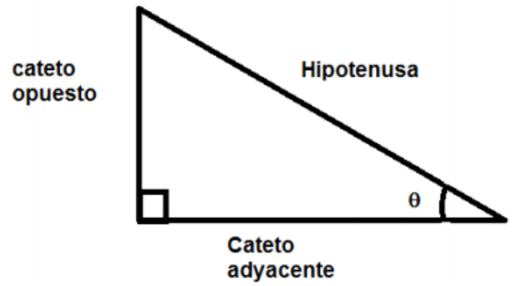
AC es el cateto opuesto para el ángulo β

AB es el cateto adyacente para el ángulo β

Observa que la suma de los ángulos α y β es de 90^0, esto es los ángulos son complementarios

$$\alpha + \beta = 90^0$$

Vamos a definir las razones trigonométricas utilizando el ángulo θ:



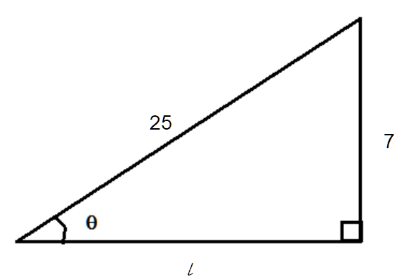
$\sin\theta = \dfrac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$	$\csc\theta = \dfrac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto opuesto}}$
$\cos\theta = \dfrac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$	$\sec\theta = \dfrac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto adyacente}}$
$\tan\theta = \dfrac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}}$	$\cot\theta = \dfrac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Cateto opuesto}}$

Nota. Una ***razón***, como observamos es la comparación de dos cantidades a y b por medio de su cociente $\frac{a}{b}$, la razón inversa es $\frac{b}{a}$.

Ejemplo: Halla los valores de las seis razones trigonométricas para un ángulo θ si el cateto opuesto mide 7 unidades y la hipotenusa 25 unidades.

Solución:

A la derecha se ha dibujado un triángulo con los datos proporcionados en el enunciado. Como puedes observar, se forma un triángulo rectángulo donde se desconoce uno de los catetos: l



Utilizando el teorema de Pitágoras:

$$l^2 + 7^2 = 25^2$$

Despejando:

$$l = 24 \quad unidades$$

Por definición:

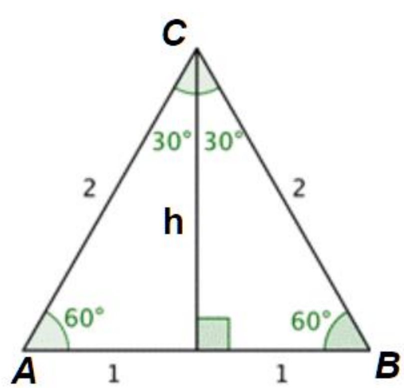
$$sen\,\theta = \frac{7}{25} \qquad csc\,\theta = \frac{25}{7}$$

$$cos\,\theta = \frac{24}{25} \qquad sec\,\theta = \frac{25}{24}$$

$$tan\,\theta = \frac{7}{24} \qquad cot\,\theta = \frac{24}{7}$$

Solución de triángulos rectángulos especiales

Consideremos un triángulo equilátero de lado 2:



Calculamos la altura del $\triangle ABC$:

$$1^2 + h^2 = 2^2$$

$$h^2 = 2^2 - 1^2$$

$$h = \sqrt{3}$$

Razones trigonométricas de ***60⁰***

$$sen\ 60^o = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad csc\ 60^o = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$cos\ 60^o = \frac{1}{2} \qquad sec\ 60^o = 2$$

$$tan\ 60^o = \sqrt{3} \qquad cot\ 60^o = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Razones trigonométricas de ***30⁰***

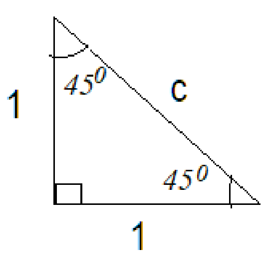
$$sen\ 30^o = \frac{1}{2} \qquad csc\ 30^o = \frac{2}{1}$$

$$cos\ 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad sec\ 30^o = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$tan\ 30^o = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad cot\ 30^o = \sqrt{3}$$

Para encontrar las razones trigonométricas del ángulo de 45^0 utilizamos un triángulo isósceles como el que se muestra.

El valor de la hipotenusa es:



$$c^2 = 1^2 + 1^2$$

$$c = \sqrt{2}$$

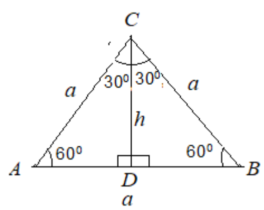
$$sen\ 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad csc\ 45^o = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$cos\ 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad sec\ 45^o = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$tan\ 45^o = \frac{1}{1} \qquad cot\ 45^o = 1$$

Actividad de aprendizaje teórico-práctica

1.- Calcula el valor de las 6 razones trigonométricas para los ángulos de 30º y 60º para las características de los triángulos propuestos en la figura y simplifica:



a). Calcula la altura del ΔABC.

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}a^2$$

Por lo tanto $h = \sqrt{\frac{3}{4}}a$

Simplificando: $h =$

b). Razones trigonométricas de ***60⁰***

$$sen\ 60^o = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} = \underline{\qquad\qquad}$$

$$csc\ 60^o = \underline{\qquad\qquad}$$

$$cos\ 60^o = \underline{\qquad\qquad}$$

$$sec\ 60^o =$$

$$cot\ 60^o = \underline{\qquad\qquad}$$

$$tan\ 60^o = \underline{\qquad\qquad}$$

Respuestas:

$$sen\ 60^o = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad co\sec 60^0 = \frac{a}{\sqrt{\frac{3}{4}}a} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\cos 60^0 = \frac{\frac{1}{2}a}{a} = \frac{1}{2} \qquad \sec 60^0 = \frac{a}{\frac{1}{2}a} = 2$$

$$\tan 60^0 = \frac{\sqrt{\frac{3}{4}}a}{\frac{1}{2}a} = 2\sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{3} \qquad \cot an 60^0 = \frac{\frac{1}{2}a}{\sqrt{\frac{3}{4}}a} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

c). Razones trigonométricas de ***30⁰***

$$sen\ 30^o = \frac{\frac{1}{2}a}{a} = \underline{\qquad\qquad} \qquad cot\ 30^o = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{1}{2}a}$$

$$cos\ 30^o = \frac{\quad}{a} \qquad sec\ 30^o = \frac{a}{\quad}$$

$$tan\ 30^o = \frac{\frac{1}{2}a}{—}$$

$$csc\ 30^o = \frac{—}{\frac{1}{2}a}$$

$$tan\ 30^o = \frac{1}{2}\cdot —$$

Respuestas:

$$sen30^0 = \frac{\frac{1}{2}a}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\cot an30^0 = \frac{\sqrt{\frac{3}{4}}a}{\frac{1}{2}a} = 2\sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{3}$$

$$\cos 30^0 = \frac{\sqrt{\frac{3}{4}a}}{a} = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sec 30^0 = \frac{a}{\sqrt{\frac{3}{4}}a} = \sqrt{\frac{4}{3}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}$$

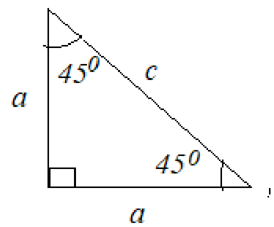
$$\tan 30^0 = \frac{\frac{1}{2}a}{\sqrt{\frac{3}{4}}a} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{3}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos ec30^0 = \frac{a}{\frac{1}{2}a} = 2$$

Auto evaluación:

Encuentra las 6 razones trigonométricas del ángulo de 45^0, según el triángulo isósceles que se muestra.



El valor de la hipotenusa es:

$$c = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} =$$

$$sen 45^0 = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cos 45^0 = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Respuestas:

$sen\ 45^o =$

$csc\ 45^o =$

$cos\ 45^o =$

$sec\ 45^o =$

$tan\ 45^o =$

$cot\ 45^o =$

Solución:

$$sen\ 45^0 = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad csc 45^0 = \frac{\sqrt{2}a}{a} = \sqrt{2}$$

$$\cos 45^0 = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \sec 45^0 = \frac{\sqrt{2}a}{a} = \sqrt{2}$$

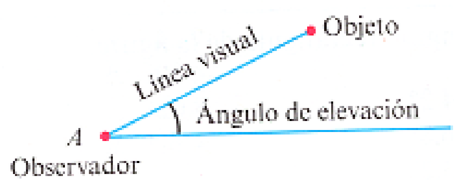
$$\tan 45^0 = \frac{a}{a} = 1 \qquad cot\ 45^o = 1$$

Solución de Problemas de aplicación

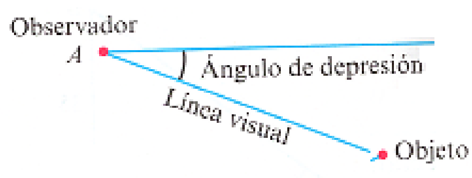
En esta sección se trabajará con diversas condiciones: ángulos de elevación, ángulos de depresión, distancias inaccesibles y cálculo de áreas.

Ángulos de elevación y ángulos de depresión

Un **ángulo de elevación** es aquel que se forma desde la línea de vista horizontal del observador hasta un objeto situado arriba de ésta.



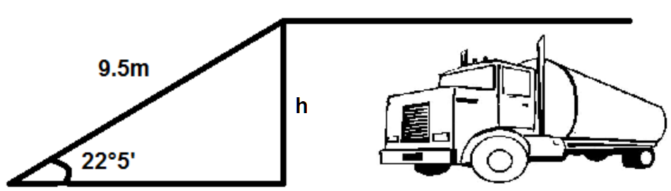
Un **ángulo de depresión** es aquél que se forma desde la línea de vista horizontal del observador hasta un objeto debajo de ésta.



A continuación, se realizarán dos ejemplos en los que se hace referencia a los ángulos de elevación y a los ángulos de depresión del observador. En este tipo de problemas, un error habitual ocurre cuando se confunde el ángulo al que se hace referencia con respecto a la horizontal. Se recomienda tener claro el concepto y ser cuidadoso al respecto.

Ejemplo (ángulo de elevación)

El ángulo de elevación de una rampa de 9.5 m que lleva a un puente es de 22º 5'. Determina la altura máxima que puede tener un camión para poder pasar por debajo del puente.



Solución.

¿Qué razón trigonométrica relaciona los datos dados en el problema? Probemos con la razón seno:

$$sen(22^o5') = \frac{h}{9.5}$$

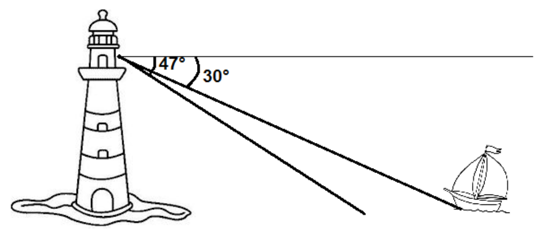
$$h = sen(22^o5') \cdot 9.5$$

$$h \approx 3.57\, m$$

Por lo tanto, la altura máxima que debe tener el camión para pasar debajo del puente es de 3.57 m.

Ejemplo (ángulo de depresión)

Desde la cima de un faro que tiene una altura de 500 m sobre el nivel del mar se observa un bote que se aproxima. Si el ángulo de depresión cambia de 30º a 47º durante el periodo de observación, encuentra la distancia que ha recorrido el bote.

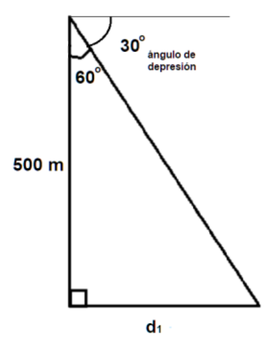


Solución

Primero observamos que el ángulo complementario de 30° es 60°. Así pues, la distancia a la que está el bote del faro la primera vez que lo vimos es:

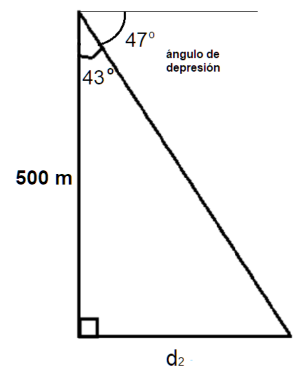
$$tan\ 60^o = \frac{d_1}{500}$$

$$d_1 = 500 \cdot (\tan(60°))$$



Entonces, aproximadamente $d_1 = 866\, m$

Luego, el ángulo complementario de 47° es 43°. De manera que la distancia a la que está el bote del faro la segunda vez que lo vimos es:



$$tan\ 43^o = \frac{d_2}{500}$$

$$d_2 = 500 * (\tan(43°))$$

Aproximadamente $d_2 = 536.18\ m$

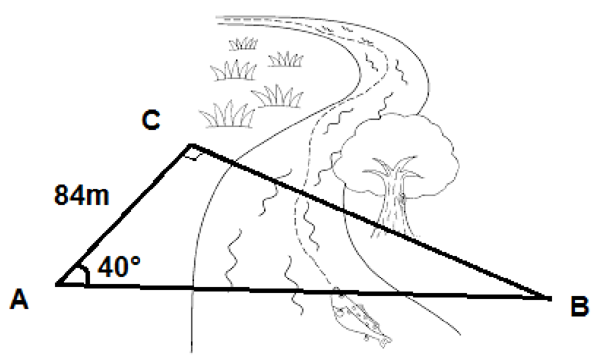
Por lo tanto, la distancia que avanzó recorrió el bote durante el periodo de observación es

$d = d_1 - d_2$. Lo cual resulta ser $d = 329.84\ m$.

Así también, con ayuda de la trigonometría, podemos calcular distancias que no se pueden medir de manera directa, como son el ancho de un río, o bien, la distancia entre dos puntos, donde un obstáculo nos impide medirlos de manera directa (un edificio, una montaña, etc.). El siguiente ejemplo nos muestra un problema de este tipo.

Ejemplo 3 (Distancias Inaccesibles).

Dos puntos A y B se encuentran en la orilla opuesta de un río tal que no podemos medir su distancia de manera directa, pero contamos con un artefacto que nos permite saber los ángulos existentes entre dos puntos fijos. Para medir la distancia de A a B, se toma un punto auxiliar C que se encuentra en el mismo lado del río que el punto A. El punto C se ubica cuidadosamente de manera que el ángulo ACB resulta ser de 90° y el ángulo CAB es de 40°. Si la distancia entre A y C es de 84 metros, ¿Cuánto mide la distancia de A a B?



Solución. Para calcular la distancia de A a B, utilizaremos la razón trigonométrica tangente, pues

$$\cos 40° = \frac{84}{d}$$

Despejamos el valor de la distancia d de la expresión anterior y obtenemos que

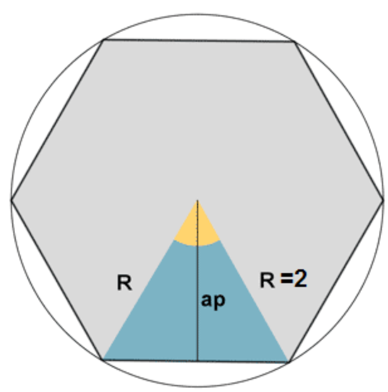
$$d = \frac{84}{\cos 40}$$

Lo cual tiene un valor aproximado de 109.65 metros.

Otra aplicación de la trigonometría está en que nos ayuda en gran manera en el cálculo de áreas de polígonos. Veremos un ejemplo de cómo se calcula el área de un hexágono regular. Observamos que el procedimiento se puede generalizar para cualquier polígono regular.

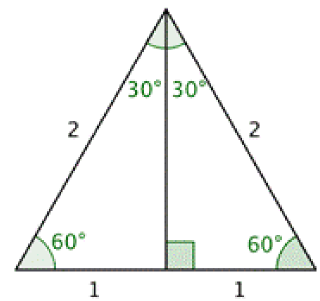
Ejemplo 4 (Cálculo de áreas).

Encuentra el área de un hexágono regular inscrito en un círculo de radio de 2 unidades.



Solución.

Para calcular el área de un hexágono regular inscrito en un círculo de radio 2, dividimos el hexágono en 6 triángulos que tienen como vértice común el centro del círculo y sus lados son los radios que van del centro a cada uno de los vértices del hexágono. Ahora nos fijamos en uno de los triángulos que se generaron.



Observamos que el ángulo cuyo vértice es el centro del círculo se puede calcular dividendo 360 (que es el ángulo que mide el círculo completo) entre 6. Así pues, dicho ángulo mide 60°. Como el triángulo en el cual estamos haciendo el análisis es un triángulo isósceles (pues sus lados son radios del círculo), los ángulos de su base valen también 60° cada uno. Entonces podemos afirmar que el triángulo en cuestión es de hecho un triángulo equilátero. Cada lado mide 2 unidades.

Para calcular el área del triángulo necesitamos conocer la altura. La altura se puede conocer con ayuda de la razón trigonométrica seno como sigue:

$$h = 2 \cdot (sen(60°))$$

que nos da de manera aproximada $h = 1.73\ unidades$. El área de uno de los triángulos en que dividimos el hexágono es:

$$A_T = \frac{2 \cdot 1.73}{2}$$

Como el hexágono consta de 6 triángulos iguales como el que acabamos de analizar, concluimos que el área del hexágono es:

$$A_H = 6 \cdot \sqrt{3} \text{ unidades cuadradas}$$

Ejercicio. De manera general, el perímetro *P* de un polígono regular de *n* lados inscrito en un círculo de radio *r* está dado por $P = 2nr\ sen(\frac{180°}{n})$. Para llegar a dicha afirmación se debe generalizar el procedimiento descrito en el ejercicio anterior. Justifica la fórmula general para el perímetro de un polígono regular.

Ejercicio. Resuelve los siguientes problemas.

1. Dos caminos rectos se cortan formando un ángulo entre ellos de 75°, Encuentre la distancia más corta desde un camino hasta una estación de gasolina situada en el otro camino a 1000 m del punto de intersección.

a)867.23 b)765.43 c)699.23 d)965.92 e)1342.7

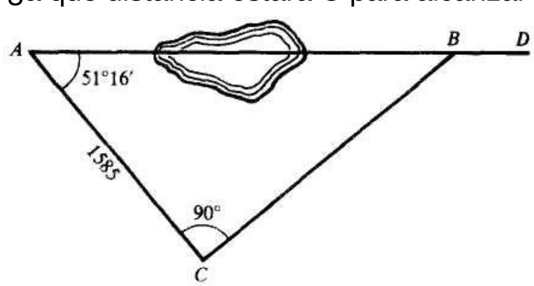
2. Una escalera, cuya base está de un lado de la calle, forma un ángulo de elevación de 30° con el piso cuando su parte superior descansa contra un edificio, y forma un ángulo de elevación de 40° con el piso cuando descansa contra un edificio al otro lado de la calle. Si la escalera mide 50 pies de largo, ¿cuál es el ancho de la calle?

a)68.2 pies b)81.6 pies c)104.5 pies d)65.2 pies e)78.3 pies

3. Para calcular el ancho de un río, un topógrafo instala su base en C en una orilla y mira a un punto B en la orilla opuesta; luego, girando un ángulo de 90°, mide una distancia *CA* = 225 m. Finalmente, instalando la base en A, mide un ángulo *CAB* de 48°20'. Encuentre el ancho del río.

a)188.2 m b)211.3 m c)252.83 m d)325.3 m e)258.91 m

4. En la Figura, la línea *AD* atraviesa un pantano. Para localizar un punto en esta línea, un topógrafo se desvía un ángulo de 51 °16' en *A* y mide una distancia de 1585 pies hasta el punto C. Luego, se desvía un ángulo de 90° en C y traza una línea *CB.* Si *B* está sobre *AD,* ¿a qué distancia estará C para alcanzar B?



a)998.21 pies b)2314.65 pies c)1578.12 pies d)1789.32 pies e)1976.04 pies

5. Encuentra el área de un círculo en el que está inscrito un octágono regular cuyo perímetro vale 20m.

a)134.07 b)48.26 c)67.39 d)18.4 e)98.67

6. La base de un triángulo isósceles es de 15.90 pulgadas y los ángulos de la base miden 54°28'. Encuentre los lados iguales.

a)10.23 pulg. b)30.32 pulg. c)13.67 pulg. d)15.78 pulg. e)27.35 pulg.

Identidades trigonométricas

Las identidades trigonométricas básicas se pueden dividir en tres tipos como se muestra a continuación en la siguiente tabla.

Relaciones recíprocas	***Relaciones cocientes***	***Relaciones pitagóricas***
$csc\theta = \frac{1}{sen\theta}$	$tan\theta = \frac{sen\theta}{cos\theta}$	$(sen\theta)^2 + (cos\theta)^2 = 1$
$sec\theta = \frac{1}{cos\theta}$	$cot\theta = \frac{cos\theta}{sen\theta}$	$1 + (tan\theta)^2 = (sec\theta)^2$
$cot\theta = \frac{1}{tan\theta}$		$1 + (cot\theta)^2 = (csc\theta)^2$

Las identidades trigonométricas se usan para transformar o reducir una expresión dada que utilice razones trigonométricas a otra expresión generalmente más sencilla de manipular.

Ejemplo 1. En la siguiente expresión, factorizando $sen\theta$ y utlizando la primera identidad de las relaciones pitagóricas, podemos reducirla a una expresión más simple que es $sen\theta$

$$(sen\theta)^3 + sen\theta(cos\theta)^2 = sen\theta((sen\theta)^2 + (cos\theta)^2) = sen\theta$$

Ejemplo 2. Verifique la identidad $tan\theta + 2cot\theta = \frac{(sen\theta)^2+2(cos\theta)^2}{sen\theta cos\theta}$

$$\frac{(sen\theta)^2 + 2(cos\theta)^2}{sen\theta cos\theta} = \frac{sen\theta^2}{sen\theta cos\theta} + \frac{2cos\theta^2}{sen\theta cos\theta} = \frac{sen\theta}{cos\theta} + \frac{2cos\theta}{sen\theta} = tan\theta + 2cot\theta$$

Ejemplo 3. Verifique la identidad $\frac{sen\theta}{1+cos\theta}=\frac{1-cos\theta}{sen\theta}$

$$\frac{sen\theta}{1+cos\theta}=\frac{sen\theta}{1+cos\theta}*\frac{1-cos\theta}{1-cos\theta}=\frac{sen\theta(1-cos\theta)}{1-cos\theta^2}=\frac{sen\theta(1-cos\theta)}{sen\theta^2}=\frac{1-cos\theta}{sen\theta}$$

Ejercicio. Verifique las siguientes identidades.

a) $tan\theta+cot\theta=\frac{csc\theta}{cos\theta}$
b) $(tan\theta)^2(cos\theta)^2+(cot\theta)^2(sen\theta)^2=1$
c) $tan\theta+\frac{cos\theta}{1+sen\theta}=sec\theta$

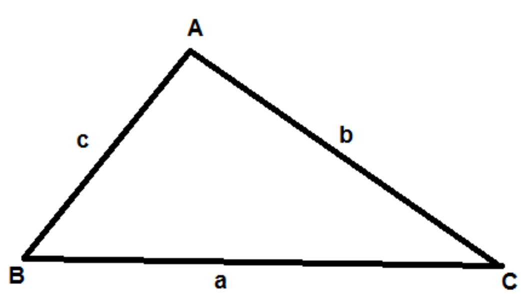
Triángulos oblicuángulos

Las razones trigonométricas han servido para resolver problemas que involucran triángulos rectángulos. A continuación, resolveremos problemas que involucran triángulos tales que ninguno de sus ángulos es reto. Dichos triángulos reciben el nombre de *triángulos oblicuángulos*. Para resolver problemas sobre triángulos oblicuángulos utilizamos lo que se conoces como la *ley de senos* y la *ley de cosenos*.

Ley de senos

La ley de senos establece que en un triángulo cualquiera, se cumplen las siguientes relaciones:

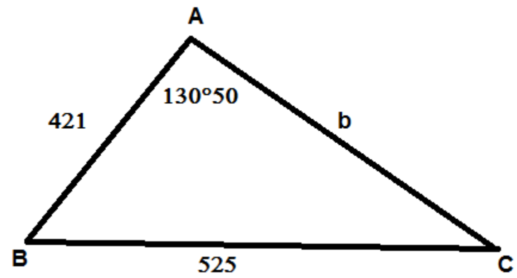
$$\frac{\boldsymbol{sen\ A}}{\boldsymbol{a}}=\frac{\boldsymbol{sen\ B}}{\boldsymbol{b}}=\frac{\boldsymbol{sen\ C}}{\boldsymbol{c}}$$



De manera que si contamos con dos lados y uno de los ángulos opuestos a los lados, podemos encontrar el otro ángulo. O bien, si conocemos los ángulos de un triángulo y contamos con uno de sus lados, podemos encontrar sus otros lados.

Ejemplo.

En el triángulo ABC, a=525 m, c=421 m y A=130°50’. Encuentre b, B y C.



Solución. Por la Ley de senos tenemos la siguiente igualdad:

$$\frac{sen(130°50')}{525} = \frac{sen\ C}{421}$$

Despejando tenemos que $sen\ C = 0.6067$. Entonces $C = 37°21'$. Como la suma de los ángulos internos de un triángulo tiene que dar 180°, entonces $B = 93°29'$. Asimismo, por la ley de senos tenemos la siguiente igualdad:

$$\frac{sen(130°50')}{525} = \frac{sen(93°29')}{b}$$

Despejando tenemos que $b = 692.59$ m.

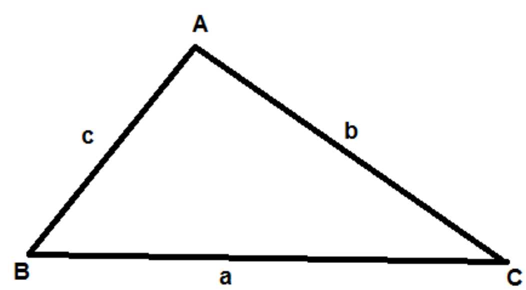
Ley de cosenos

La ley de cosenos establece que en un triángulo cualquiera, se cumplen las siguientes relaciones:

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A}$$

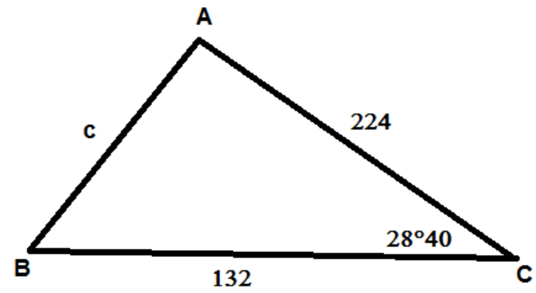
$$\boldsymbol{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B}$$

$$\boldsymbol{c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos C}$$



Ejemplo 2.

En el triángulo ABC, a=132, b=224 y C=28°40’. Encuentre c, B y A.



Solución

Aplicando directamente la ley de cosenos podemos encontrar el valor de c de la siguiente manera:

$$c^2 = 132^2 + 224^2 - 2(132)(224)\cos{(28°40')}$$

De manera que $c = 125.34$. Ahora, para encontrar el valor del ángulo A, utilizamos la Ley de senos. Por la Ley de senos tenemos que:

$$\frac{senA}{132} = \frac{sen(28°40')}{125.34}$$

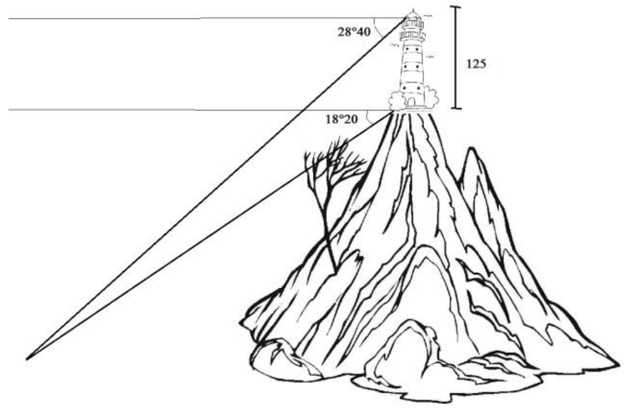
Despejando obtenemos que $senA = 0.5052$. Lo cual implica que $A = 30°20'$. Como la suma de los ángulos internos de un triángulo debe ser 180°, concluimos que el ángulo $B = 121°$.

Problemas de aplicación que involucran triángulos oblicuángulos

La ley de senos y la ley de cosenos nos permiten resolver una gran cantidad de problemas que involucran triángulos oblicuángulos.

Ejemplo 3.

Sobre un peñasco situado a la rivera de un río se encuentra una torre de 125 pies de altura. Desde lo alto de la torre, el ángulo de depresión de un punto situado en la orilla opuesta es de 28°40' y desde la base de la torre, el ángulo de depresión del mismo punto es de 18°20'. Calcule cuánto mide el ancho del río y la altura del peñasco.



Solución.

Para resolver el problema nos fijamos en el triángulo que se forma con los extremos de la torre y el punto situado en la orilla opuesta del río. El ángulo complementario de 28°40' es 61°20'. El ángulo del vértice de la base de la torre es 18°20' más 90°, es decir, 108°20'. Como la suma de los ángulos internos de un triángulo debe dar 180°, el ángulo correspondiente al vértice que es el punto en la orilla opuesta del río es 43°. Como la altura de la torre es de 125 pies, aplicamos la Ley de senos para encontrar la distancia que va de la base de la torre hasta el punto en la orilla opuesta del río.

$$\frac{sen(61°20')}{d_1} = \frac{sen(43°)}{125}$$

Despejando llegamos a que $d_1 = 160.81$pies. Ahora, para encontrar la altura del peñasco y la anchura del río, nos fijamos en el triángulo rectángulo formado por la base del peñasco, la base de la torre y el punto en la orilla opuesta del río. El ángulo correspondiente al vértice de la base de la torre es el ángulo complementario de 18°20', es decir, 71°40'. Así pues, tomando *R* como el ancho del río y a *H* como la altura del peñasco, tenemos que,

$$sen(71°40') = \frac{R}{160.81}$$

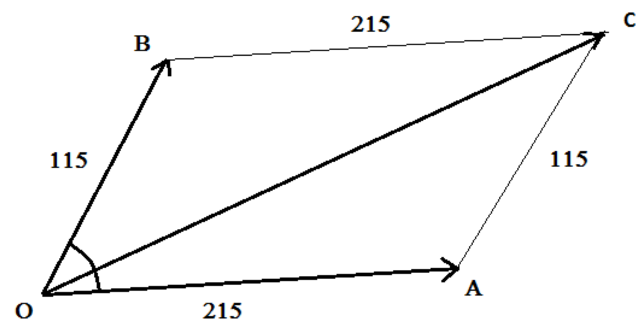
De manera que el ancho del río vale $R = 152.64$ pies. Así también,

$$\cos(71°40') = \frac{H}{160.81}$$

Por lo tanto, la altura del peñasco vale $H = 50.58$ pies.

Ejemplo 4.

Dos fuerzas de 115 lb y 215 lb que actúan sobre un objeto tienen una resultante de 275 lb. Encuentra el ángulo formado por las direcciones de las fuerzas componentes.



Solución.

Nos fijamos en el triángulo OAC. Podemos calcular el ángulo COA con la Ley de cosenos de la siguiente manera,

$$115^2 = 215^2 + 275^2 - 2(215)(275)\cos(COA).$$

Despejando tenemos que $\cos(COA) = 0.9186$. Entonces el ángulo COA vale 23°16'. Ahora, en el triángulo OBC, calculamos el ángulo BOC con ayuda de la Ley de cosenos,

$$215^2 = 115^2 + 275^2 - 2(115)(275)\cos(BOC).$$

Despejando, $cos(BOC) = 0.6739$. Entonces el ángulo BOC vale 47°37'. Por lo tanto, el ángulo entre las dos fuerzas, que es el ángulo BOA vale 23°16'+47°37', que es 70°53'.

Autoevaluación

Solución de triángulos rectángulos especiales

1. Encuentre el valor exacto de $csc(45°)$.

a)$\frac{\sqrt{2}}{2}$ b)$\sqrt{2}$ c)$\sqrt{3}$ d)$\frac{1}{2}$ e)$\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. Encuentre el valor exacto de $tan(30°)$.

a)$\frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{1}{2}$ c)$\frac{2}{\sqrt{3}}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\sqrt{3}$

3. Encuentre el valor exacto de $cos(45°)$.

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $\sqrt{2}$ c)2 d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. Encuentre el valor exacto de $cos(30°)$.

a) $\frac{1}{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ d) $\sqrt{2}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

5. Encuentre el valor exacto de $sec(60°)$.

a) $\sqrt{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c)2 d) $\frac{1}{2}$ e) $\sqrt{3}$

Problemas de aplicación

1. Un puente sobre un río tiene 200 metros de largo. Las dos secciones del puente rotan hacia arriba formando un ángulo de 30° para dar paso a los barcos. Un motociclista quiere saltar de una sección a otra ¿Qué distancia debe saltar para llegar a salvo a la otra orilla?

a)27.89 b)26.79 c)32.4 d)24.34 e)19.98

2. Un hombre maneja 500 m a lo largo de un camino inclinado 20° con respecto a la horizontal. ¿A qué altura se encuentra con respecto al punto de partida?

a)180m b)196.3m c)150m d)186.32m e)171.1m

3. Si un niño de 1.55m produce una sombra de 1.22m de longitud en el suelo, encuentra el ángulo de elevación del sol.

a)24°31’ b)51°47’ c)60°12’ d)73°98’ e)100°32’

4. Dos edificios con techo plano se encuentran a una distancia de 60 m. Desde el techo del edificio más bajo, de 40 m de altura, el ángulo de elevación hasta el borde del techo del edificio más alto es de 40°. ¿Cuál es la altura del edificio más alto?

a)143m b)85.3m c)90.34m d)100m e)200m

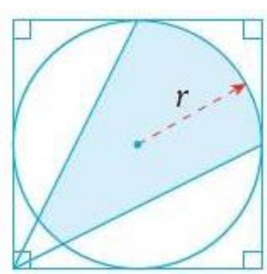
5. ¿Cuál es el perímetro de un triángulo isósceles cuya base mide 40 cm y cuyos ángulos de base miden 70^0?

a)99.78 cm b)102.56 cm c)45.67 cm d)134.78 cm e)156.95 cm

6. Encuentra el perímetro de un pentágono regular inscrito en un círculo de radio 4 cm.

a)30.54 cm b)23.51cm c)20.78 cm d)18.32 cm e)15 11 cm

7. Determine el área de la parte sombreada sabiendo que el radio del círculo r=3 u.



a)10.29 b)15.36 c)20.78 d)14.56 e)12.34

8. Encuentre la base y la altura de un triángulo isósceles cuyo ángulo en el vértice es igual a 65° y sus lados iguales de 415 cm.

a)b = 445.96 cm	b)b = 325.32 cm	c)b = 213.23 cm	d) b = 405.32 cm	e) b = 511.41 cm
h=350 cm	h = 250 cm	h = 350 cm	h = 250 cm	h = 350 cm

9. El radio de un círculo es de 21.4 m. Encuentre la distancia entre dos cuerdas paralelas del mismo lado del centro, subtendidas por ángulos centrales de 118°40' y 52°20'.

a)8.28 m b)5.23 m c)9.35 m d)6.54 m e) 11.23 m

Identidades trigonométricas

1. Utilizando identidades trigonométricas, identifique a cuál de las siguientes expresiones es equivalente la identidad $\sqrt{\frac{sec\theta - tan\theta}{sec\theta + tan\theta}}$.

a) $\frac{tan\theta}{sec\theta tan\theta}$ b) $\frac{sec\theta}{sec\theta tan\theta}$ c) $sec\theta tan\theta$ d)$\frac{1}{sec\theta tan\theta}$ e) $\frac{1}{\sqrt{sec\theta tan\theta}}$

2. Utilizando identidades trigonométricas, identifique a cuál de las siguientes expresiones es equivalente la identidad $sen\theta^2(1 + cot\theta^2)$.

a)$cos\theta$ b)1 c)$sen\theta$ d)2 e)$(sen\theta)^2$

3. Utilizando identidades trigonométricas, identifique a cuál de las siguientes expresiones es equivalente la identidad $(sen\theta + cos\theta)^2 + (sen\theta - cos\theta)^2$.

a) $cos\theta$ b)2 c)1 d) $sen\theta$ e) $(sen\theta)^2$

4. Utilizando identidades trigonométricas, identifique a cuál de las siguientes expresiones es equivalente la identidad $tan\theta + \frac{cos\theta}{1+sen\theta}$.

a)1 b)) $cos\theta$ c)$tan\theta$ d) $(sen\theta)^2$ e)$sec\theta$

Triángulos oblicuángulos

1. A y B son dos puntos localizados en los lados opuestos de un río. Desde A se traza una línea AC=275m y se miden los ángulos CAB = 125°40’ y ACB = 48°50’. Encuentra la longitud AB.

a)1456.21	b)3847.78	c)1898.45	d)2159.92	e)1389.90

2. Tres circunferencias de radios 115, 150 y 225 metros respectivamente son tangentes entre sí por la parte externa. Encuentra los ángulos del triángulo formado al unir los centros de las circunferencias.

a)54°12’	b)43°10’	c)32°10’	d)63°10’	e)134°23’
110°34’	61°20’	12°20’,	11°50’	24°19’
15°14’	75°30’	135°30’	105°	21°18’

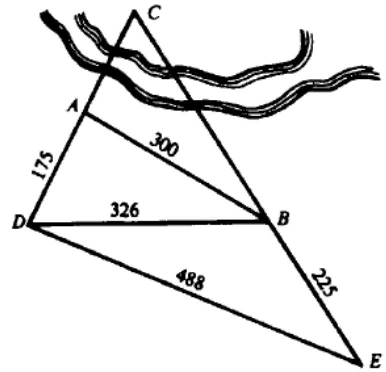
3. En un reloj, la manecilla de las horas y la manecilla de los minutos miden 0.7 y 1.2 cm respectivamente. Determina la distancia entre los extremos de las manecillas a la 1:30.

a) 1.21 cm	b) 0.9 cm	c) 2.34 cm	d)1.83 cm	e) 0.52 cm

4. Un poste emite una sombra de 10 m de largo cuando el ángulo de elevación del sol es de 30°. El poste está inclinado con un ángulo de 15° de la vertical con la dirección de su sombra. Encuentra la longitud del poste.

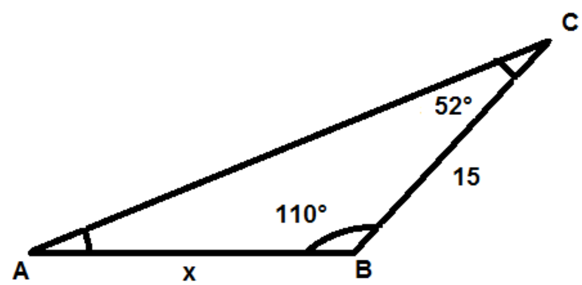
a)5.17	b)4.72	c)3.87	d)8.96	e)1.45

5. Se requiere calcular la distancia de un punto C a los puntos A y B, pero no se pueden medir directamente. La línea CA se prolonga de A hasta el punto D una distancia de 175 m, la prolongación de la línea CB llega hasta el punto E a una distancia de 225 m con respecto a B y se miden las distancias AB=300 m, DB=326 m y DE=488 m.



a) AC=98,BC=250	b) AC=125,BC=35	c) AC=85,BC=530	d)AC=145,BC=350	e) AC=195,BC=78

6. Encuentre el valor de x en la siguiente figura



a)24.56 b)57.34 c)78.16 d)12.54 e)38.25

7. En el triángulo ABC, a=132, c=212 y B=110°50'. Encuentre el ángulo C.

a)45°56' b)23°37 c)43°41' d)32°17' e)78°56'

8. En el triángulo ABC, el ángulo correspondiente al vértice A es 78°, el ángulo correspondiente al vértice C es 34° y el lado a opuesto al vértice A, es decir, a = 15. Encuentre la longitud del lado b.

a)15.16 b)14.21 c)13.56 d)11.32 e)10.89

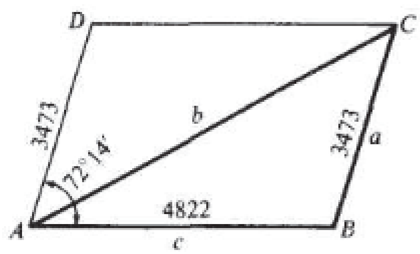
9. El radio de un círculo es de 21.4 m. Encuentre la longitud de la cuerda subtendida por un ángulo central de 110°40'.

a)21.3 m b)17.5 m c)35.2 m d)44.3 m e)56.9 m

10. Sobre un cuerpo actúan dos fuerzas de 17.5 y 22.5 lb. Si las direcciones de las fuerzas forman un ángulo de 50°10' entre sí, encuentre la magnitud de su resultante.

a)23.78 lb b)42.69 lb c)36.28 lb d)89.21 lb e)35.76 lb

11. Dos lados adyacentes de un paralelogramo miden 3473 y 4822 pies, respectivamente, y el ángulo entre ellos es de 72°14'. Encuentre la longitud de la diagonal más larga.



a) 1.8491 b) 4.2256 c) 2.9876 d)3.8261 e) 6.2356

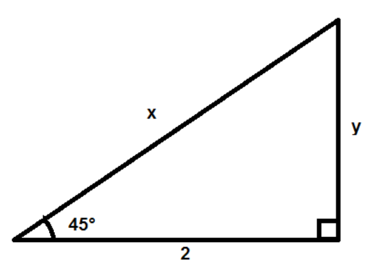
12. Dos barcos tienen equipos de radio cuyo alcance es de 200 km. Uno de los barcos se encuentra a 155 km en 42°10’ NE y el otro está a 165 km en dirección 45°10’ NO de una estación. Encuentre la distancia de separación entre los barcos y diga si pueden comunicarse entre sí directamente.

a)No, 222 km b) No, 342 km c) No, 452 km d) No, 290 km e) No, 322 km

Resuelve los siguientes ejercicios para verificar que realmente hayas adquirido los conocimientos básicos correspondientes esta unidad.

13.

En la siguiente figura encuentre los valores de *x* y de *y*.



a) $x = \sqrt{3}, y = 2$ b) $x = \frac{\sqrt{2}}{2}, y = \frac{1}{2}$ c) $x = \frac{1}{2}, y = 1$ d) $x = 1, y = 2$ e) $x = 1, y = \frac{2}{\sqrt{2}}$

14. Encuentre el valor exacto de $sec(45°)$.

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{3}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

15. Una rueda de 5 pies de diámetro, sube por un plano inclinado de 18°20'. ¿Cuál es la altura desde el centro de la rueda hasta la base del plano cuando ha rodado 5 pies?

a)3.21 pies b)5.23 pies c)1.54 pies d)4.07 pies e)7.32 pies

16. Una pared de 15 pies de altura, está a 10 pies de una casa. Encuentre la longitud de la escalera más corta que toque el borde superior de la pared y que alcance una ventana a 20.5 pies del piso.

a)12.43 pies b)9.45 pies c)5.23 pies d)10.54 pies e)11.41 pies

17. Se desea cercar una finca triangular cuyos vértices son los puntos A, B y C, pero al empezar el trabajo se descubre que la marca B ha desaparecido. El título de propiedad indica que la distancia de B a C es de 480 metros, la distancia de A a C es de 250 metros, y el ángulo A es de 120°. Determine la posición de B obteniendo la distancia de A a B.

a)405.12 m b)578.23 m c)303.39 m d)189.21 m e)231.98 m

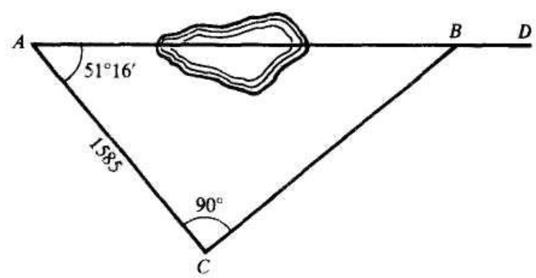
Resolver los siguientes problemas

18. Un hombre maneja 500 m a lo largo de un camino inclinado 20° con respecto a la horizontal. ¿A qué altura se encuentra con respecto al punto de partida?
Resp. 170 m;
19. Un árbol quebrado por el viento forma un ángulo recto con el suelo. Si la parte quebrada forma un ángulo de 50° con el piso y la copa del árbol se eleva ahora a 20 píes desde la base, ¿qué altura tenía el árbol?
Resp. 55 pies.

20. Dos caminos rectos se cortan formando un ángulo entre ellos de 75°, Encuentre la distancia más corta desde un camino hasta una estación de gasolina situada en el otro camino a 1000 m del punto de intersección.
 Resp. 3 730 m
21. Dos edificios con techo plano se encuentran a una distancia de 60 m. Desde el techo del edificio más bajo, de 40 m de altura, el ángulo de elevación hasta el borde del techo del edificio más alto es de 40°. ¿Cuál es la altura del edificio más alto?
 Resp. 90 m.
22. Una escalera, cuya base está de un lado de la calle, forma un ángulo de 30° con el piso cuando su parte superior descansa contra un edificio, y forma un ángulo de 40° con el piso cuando descansa contra un edificio al otro lado de la calle. Si la escalera mide 50 pies de largo, ¿cuál es el ancho de la calle?
 Resp. 82 pies.
23. ¿Cuál es el perímetro de un triángulo isósceles cuya base mide 40 cm y cuyos ángulos de base miden 70^0?
 Resp. 157 cm.
24. Para calcular el ancho de un rio, un topógrafo instala su base en C en una orilla y mira a un punto B en la orilla opuesta; luego, girando un
 ángulo de 90°, mide una distancia *CA* = 225 m. Finalmente, instalando la base en A, mide < *CAB* de 48°20'. Encuentre el ancho del río.

Resp. 253 m.

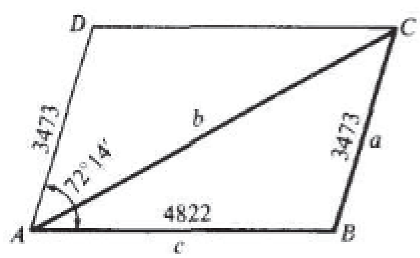
25.
 En la Figura, la línea *AD* atraviesa un pantano. Para localizar un punto en esta línea, un topógrafo se desvía un ángulo de 51°16' en *A* y mide una distancia de 1 585 pies hasta el punto C. Luego, se desvía un ángulo de 90° en C y traza una línea *CB.* Si *B* está sobre *AD,* ¿a qué distancia estará C para alcanzar B?



26. Encuentre la base y la altura de un triángulo isósceles cuyo ángulo en el vértice es igual a 65° y sus lados iguales de 415 cm.
 Resp. base = 446 cm, altura = 350 cm.
27. La base de un triángulo isósceles es de 15.90 pulgadas y los ángulos de la base miden 54°28'. Encuentre los lados iguales y la altura.
 Resp. lado = 13.68 pulgadas, altura = 11.13 pulgadas.
28. El radio de un círculo es de 21.4 m. Encuentre (a) la longitud de la cuerda subtendida por un ángulo central de 110°40' y (b) la distancia entre dos cuerdas paralelas del mismo lado del centro, subtendidas por ángulos centrales de 118°40' y 52°20'.
 Resp. (a) 35.2 m, (b) 8.29 m.
29. Demuestre que la base b de un triángulo isósceles es $b = 2asen\frac{\theta}{2}$, donde

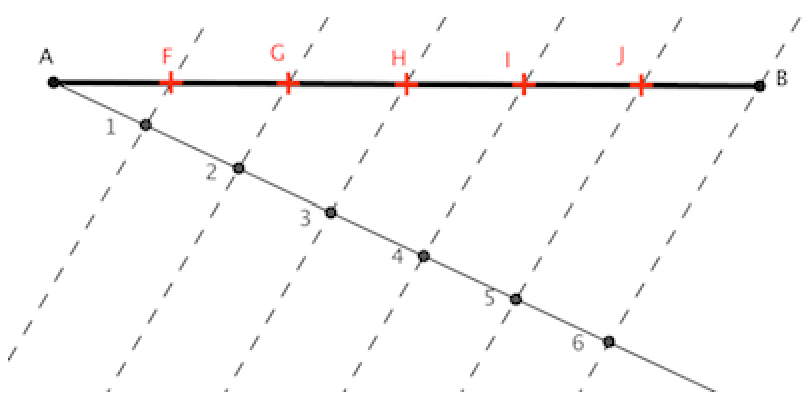
a es la longitud de sus lados iguales y θ su ángulo en el vértice.

30. Demuestre que el perímetro *P* de un polígono regular de *n* lados inscrito en un círculo de radio *r* está dado por $P = 2nr \operatorname{sen}(180° / n)$.
31. Una rueda de 5 pies de diámetro, sube por un plano inclinado de 18°20'. ¿Cuál es la altura desde el centro de la rueda hasta la base del plano cuando ha rodado 5 pies?
    Resp. 3.95 pies.
32. Una pared de 15 pies de altura, está a 10 pies de una casa. Encuentre la longitud de la escalera más corta que toque el borde superior de la pared y que alcance una ventana a 20.5 pies del piso.
    Resp. 42.5 pies
33. Sobre un cuerpo actúan dos fuerzas de 17.5 y 22.5 Ib. Si las direcciones de las fuerzas forman un ángulo de 50°10' entre sí, encuentre la magnitud de su resultante y el ángulo que forma con la fuerza más grande.
    Resp. La resultante es una fuerza de 36.3 Ib y el ángulo con respecto a la fuerza mayor es de 21°40'.
34. Dos lados adyacentes de un paralelogramo miden 3473 y 4822 pies, respectivamente, y el ángulo entre ellos es de 72°14'. Encuentre la longitud de la diagonal más larga.



Unidad 2

Elementos básicos de geometría analítica



Elementos Básicos de Geometría Analítica

Propósitos: Mostrar una visión global del método de la Geometría Analítica como el medio para resolver problemas de corte euclidiano reduciéndolos a problemas algebraicos. Proporcionar los elementos que servirán en unidades posteriores para emplear el método en situaciones más complejas**.**

Objetivos Generales de la unidad

Objetivo Conceptual. Los alumnos reconocerán la relevancia que tienen los conceptos primarios de la Geometría Analítica como la representación numérica de un punto en un sistema de coordenadas rectangulares, la localización de un segmento rectilíneo, la distancia entre dos puntos y la longitud de un segmento rectilíneo, ángulo de inclinación y pendiente de un segmento rectilíneo, condiciones de paralelismo y perpendicularidad de un segmento rectilíneo, razón en que un segmento rectilíneo es dividido por uno de sus puntos y las coordenadas del punto que divide al segmento en una razón dada.

APRENDIZAJES.

Al finalizar la Unidad el Alumno:

1. Representa la ubicación de un punto en el plano utilizando un sistema de referencia cartesiano y viceversa.

2. Localiza un segmento en el plano cartesiano y proporciona la información suficiente para que otro alumno lo pueda hacer.

3. Deduce la fórmula para determinar la longitud de un segmento, dados sus puntos extremos y la aplica en diferentes situaciones.

4. Comprende el concepto de ángulo de inclinación de un segmento.

5. Calcula el ángulo de inclinación a partir de las coordenadas de los extremos del segmento.

6. Localiza un segmento dadas condiciones necesarias y suficientes, distintas a su determinación por sus puntos extremos.

7. Localiza los puntos de división de un segmento.

8. Obtiene la expresión algebraica y la gráfica de un lugar geométrico.

UNIDAD 2

ELEMENTOS BÁSICOS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

Introducción

Para acceder a un piso de un centro comercial, basta con elegir el número del piso en un elevador o para determinar la temperatura en un termómetro de mercurio basta con localizar la marca sobre la escala determinada. En ocasiones basta con la elección de un solo número y relacionarla con un punto de una determinada escala para tener la información necesaria para tomar decisiones, pero no siempre es así. A veces necesitamos más que un punto para localizar un punto en un plano, por ejemplo, al tratar de ubicar la posición exacta de un banco o la posición exacta de un objeto que cuelga del techo en una habitación.

En esta unidad, te proponemos una serie de actividades para que comprendas las propiedades de un sistema coordenado.

Presentación

Al finalizar esta unidad el alumno será capaz de:

- Manejar algebraicamente algunos conceptos básicos de la geometría euclidiana y algunos lugares geométricos con la finalidad de introducir el método analítico.

Para conseguir esta ambiciosa meta, te proponemos una serie de actividades de aprendizaje, teoría y prácticas que están seguidas de acuerdo a una secuencia lógica propuesta en el programa de la asignatura. Se recomienda seguirlas en el orden que se presentan, sin embargo, puedes estudiar donde consideres necesario, pero recuerda que debes comprender los conceptos antecedente que se requieren para su entendimiento.

Conceptos clave

Punto: Es una figura geométrica que se determina mediante las distancias ortogonales a los ejes principales, que se indican con dos letras o números: (x, y) en el plano; y con tres en el espacio (x, y, z).

Coordenadas: Son un tipo de coordenadas ortogonales usadas para la representación gráfica de una relación matemática.

Ordenada al origen: Distancia donde corta la recta al eje de las ordenadas al origen de referencia cartesiana.

Plano: Superficie que se determina con solo tres puntos o una recta y un punto.

Segmento dirigido: Es un segmento de recta donde tiene importancia la dirección de su análisis.

Lugar geométrico: Es el conjunto de puntos que cumplen con ciertas condiciones.

Ordenadas: Es la coordenada vertical en un sistema de referencia rectangular.

Abscisas: Es la coordenada horizontal en un sistema de referencia rectangular.

Pendiente: Es la inclinación de una recta con respecto al eje de las abscisas.

Razón: Es una relación entre dos cantidades, generalmente se expresa como fracción.

Punto medio: Es el punto que se encuentra a la misma distancia de dos puntos extremos de un segmento de recta.

Colineal: Que se pueden alinear en línea recta.

Trisección: Que dividen un segmento en tres partes congruentes.

Paralelismo: Se dice que dos rectas son paralelas cuando tienen pendientes iguales.

Perpendicularidad: Se dice que dos rectas son perpendiculares cuando sus pendientes son recíprocas y de signo contario.

Ángulo de inclinación: Es la medida del ángulo que una recta forma con el eje de las abscisas.

Sugerencias

Este contenido está dirigido a los alumnos que desean estudiar de manera autodidacta y a su ritmo. Se recomienda seguir las actividades de aprendizaje y repasar la teoría. Seguir los ejemplos ayudará a adquirir destreza.

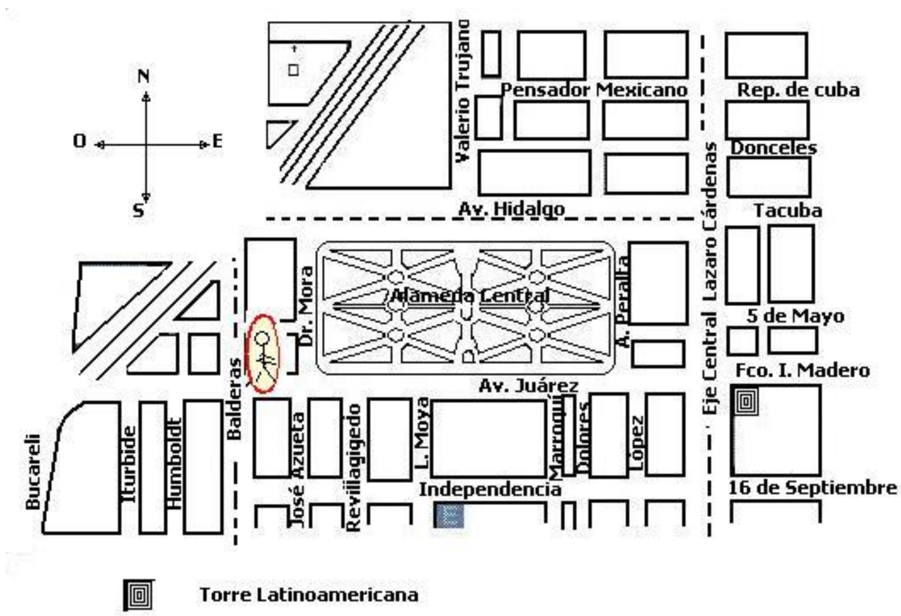
En caso de tener preguntas, se sugiere preguntar al profesor o acudir a asesorías con dudas específicas. No está de más el hacer algunas recomendaciones a los estudiantes para que su estudio sea eficaz: leer con atención cada párrafo y comprender lo que se pide, trabajar en un lugar bien ventilado, iluminado y silencioso, sentarse cómodamente en una silla con respaldo y en una mesa libre de obstáculos y tener una libreta de notas para realizar todos los ejercicios propuestos para adquirir seguridad en esta asignatura. Probablemente alguna de estas recomendaciones no sean factibles por las condiciones de confinamiento sanitario que estamos viviendo, pero en lo posible, es mejor tratar de respetarlas.

Recuerda que lo más importante es tener una actitud positiva, el deseo y la intención de aprender.

Actividad de aprendizaje teórico-práctica

El punto en el plano cartesiano

En el siguiente mapa del centro de la ciudad de México una persona se encuentra ubicada en la intersección de las calles de Balderas y Avenida Juárez, ¿Hacia dónde debe dirigirse para llegar a la Torre Latinoamericana?



Solución

La respuesta sería: "*debe caminar en línea recta sobre la Avenida Juárez hacia el este y recorrer siete calles"*.

¿Y si se quiere dirigir a la intersección de la calle de Iturbide y Avenida Juárez?

En este caso se le indicará que: "*debe ir en línea recta sobre la Avenida Juárez hacia el oeste y recorrer dos calles".*

Ahora, supongamos que se quiere dirigir a la intersección de la calle de Donceles y Eje Central

En este caso se le indicará que *debe dirigirse hacia el este por Avenida Juárez y recorrer siete calles y después ir hacia el norte y recorrer por la acera este del eje central tres calles.*

Se debe hacer notar que el recorrido que debe realizar la persona depende del lugar en que se encuentre ubicado.

Elige la opción correcta:

Observar que la unidad de medición en este caso sería (una calle/ metros) ____________________.

Se puede decir que para localizar un punto en una línea recta o en un plano, se requiere inicialmente de un punto de referencia.

También se requiere un sistema de referencia, en el ejemplo anterior, se utilizaron los puntos cardinales (norte, sur, este, oeste), sin embargo, no siempre es el adecuado, por lo que, como se verá en el desarrollo del tema se requerirá de un sistema de referencia numérico.

COORDENADAS EN DOS DIMENSIONES

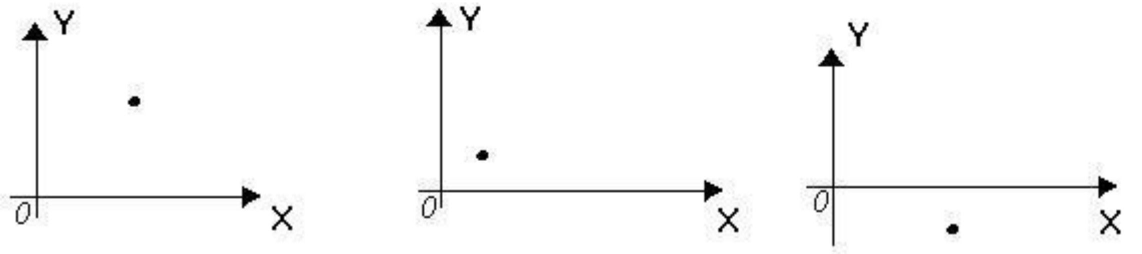
Consideraremos el problema de localizar puntos en dos dimensiones (en un plano). El plano puede ser esta hoja, el pizarrón, un mapa u otro cualquiera.

Ejemplo 2.1.

Localizar en un plano el punto mostrado en la figura:

Para localizar el punto, como en el caso de una dimensión, se requiere hacerlo de manera precisa a través de un sistema de referencia.

Una de las formas para localizar el punto en un plano es utilizando dos rectas numéricas orientadas, una horizontal y otra vertical (perpendiculares entre sí) las cuales se intersectan en el punto cero de cada una de ellas, a estas rectas numéricas se les nombrara, en particular, *X* al eje horizontal y *Y* al eje vertical. La orientación de las rectas se dará con una flecha que indicará el sentido positivo.



Observar que dependiendo de donde se elija el punto de referencia (cero) la intersección de las rectas numéricas perpendiculares (ejes), la localización del punto cambia. Por ello es importante que una vez que se establezcan los ejes, estos no se cambien, esto es, debemos establecer el sistema de referencia en forma ***absoluta*** para localizar puntos en una misma situación.

Plano cartesiano

Las recta X y Y generan un plano, al cual llamaremos plano cartesiano.

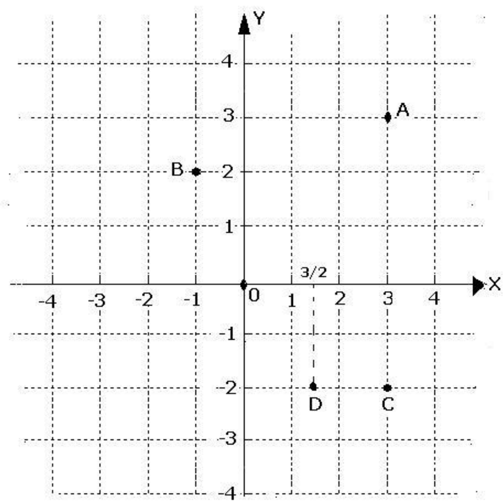
Nota: En forma descriptiva, es el conjunto de todos los puntos del plano y se representa de la siguiente manera

$$\Re^2 = \Re \; x \; \Re = \{(x,y) \mid x \in \Re, \; y \in \Re\}$$

Las dos rectas se extienden al infinito y a cada punto del plano le corresponde un solo par ordenado (x, y); de tal manera que todos los puntos del plano quedan “ocupados” por las parejas ordenas de $\Re^2$.

Es costumbre representar el punto P como $P(x, y)$ ó simplemente con la pareja ordenada (x, y). Los números x y y se llaman coordenadas del punto *P*: en particular a la coordenada x se le llama la ABSCISA del punto P y a la coordenada y se le llama la ORDENADA del punto P.

Ejemplo 2.2. En la figura, indicar qué coordenadas le corresponden a los puntos indicados. Además, escribir también la abscisa y la ordenada de cada uno de los puntos.



***Solución*.**

Al punto A le corresponde la pareja ordenada $(3,\ 3)$, La abscisa es 3 y la ordenada es 3. El punto A se puede representar como $A\ (3,\ 3)$.

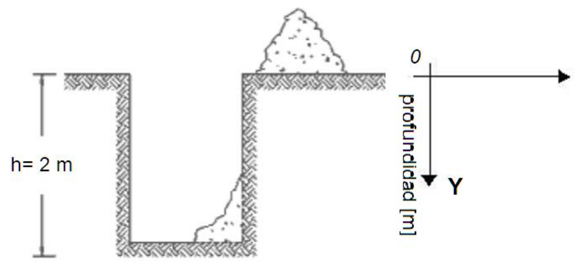
Al punto B le corresponde la pareja ordenada $(-1, 2)$, la abscisa es -1 y la ordenada es 2. El punto B se puede representar como $B(-1,\ 2)$.

Al punto C le corresponde la pareja ordenada $(3, -2)$. la abscisa es 3 y la ordenada es –2. El punto C se puede representar como $C(3, -2)$.

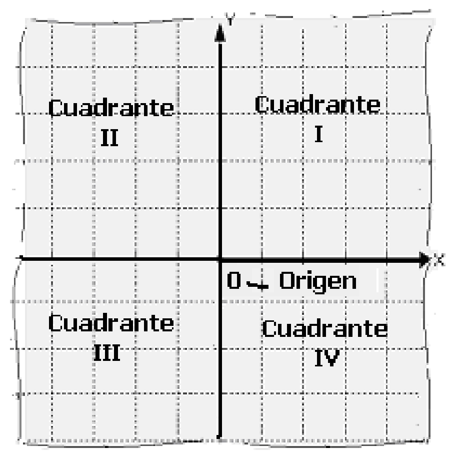
Y al punto D le corresponde la pareja ordenada $\left(\frac{3}{2}, -2\right)$, la abscisa es $\frac{3}{2}$ y la ordenada es -2. El punto D se puede representar como $D(\frac{3}{2}, -2)$.

Observar que la pareja es ***ordenada*** en el estricto sentido de la palabra, es decir, el primer elemento del par es el que le corresponde a la abscisa y el segundo elemento del par es el que le corresponde a la ordenada.

Es importante no olvidar nunca el colocar el sentido positivo de los ejes mediante flechas, ya que dependiendo del problema que queramos estudiar y representar, el sentido será diferente. De esta forma se facilitará la comprensión del problema al no trabajar con números negativos, como en el caso de una excavación.



En un plano, un sistema de coordenadas cartesianas queda dividido en 4 regiones (ver la siguiente figura). A estas regiones se les nombra CUADRANTES y se numeran siempre en el sentido contrario al movimiento de las manecillas de un reloj empezando en el cuadrante donde todos los puntos tienen las dos coordenadas positivas.



Todos los puntos del cuadrante I tienen parejas ordenadas con signos positivos $(+\ ,\ +)$, en el cuadrante II las coordenadas de los puntos tienen los signos $(-\ ,\ +)$, en el cuadrante III $(-\ ,\ -)$ y en el cuadrante IV $(+\ ,\ -)$. El origen tiene coordenadas $(0,0)$.

Se observa también que todos los puntos que se encuentran sobre el eje X son de la forma $P(x,0)$, esto es, tienen ordenada cero. Y todos los puntos sobre el eje Y son de la forma $P(0,y)$, esto es, tienen abscisa cero.

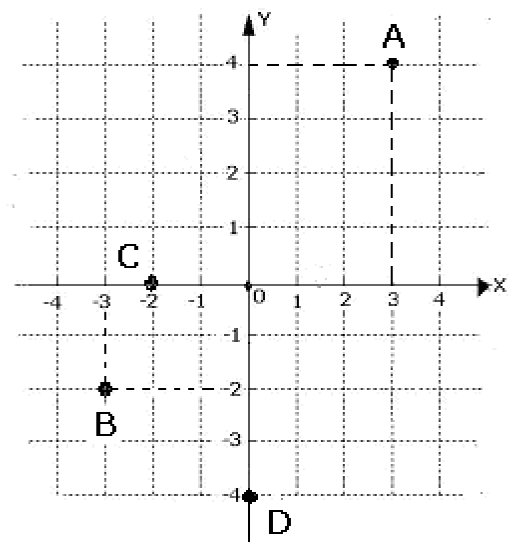
Ejemplo 2.4.

Localizar es un sistema $0-XY$ (plano cartesiano) los siguientes puntos:

$A\,(3,\,4),\ B(-3,-2),\ C(-2,0)\ \text{y}\ D(0,-4)$

.

Solución:



Segmentos dirigidos

Un segmento dirigido es el segmento al que se le asigna una dirección. Por lo tanto, en un segmento con extremos A y B se pueden especificar dos direcciones:

El segmento dirigido que va de A a B, es decir, el segmento $\overrightarrow{AB}$. En este caso, A es el origen o punto inicial, y el punto B es el extremo o punto final.

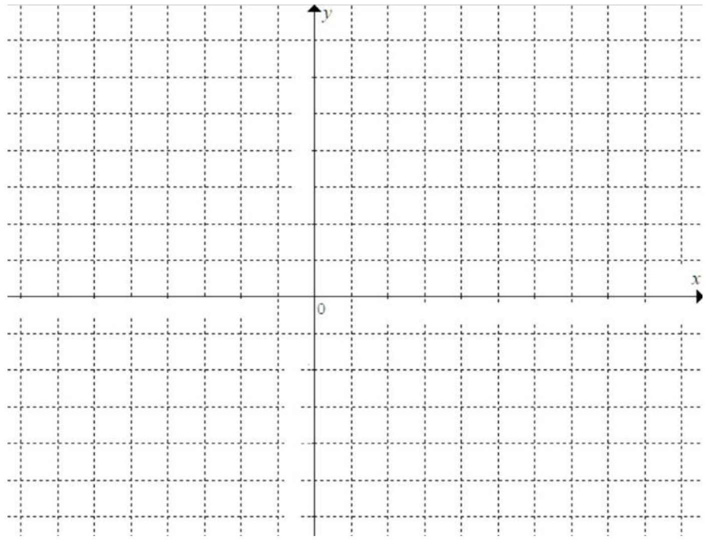
El segmento dirigido que va de B a A, es decir, el segmento $\overrightarrow{BA}$. En este caso, B es el origen o punto inicial, y el punto A es el extremo o punto final.

Autoevaluación

Ejercicio 2.1.

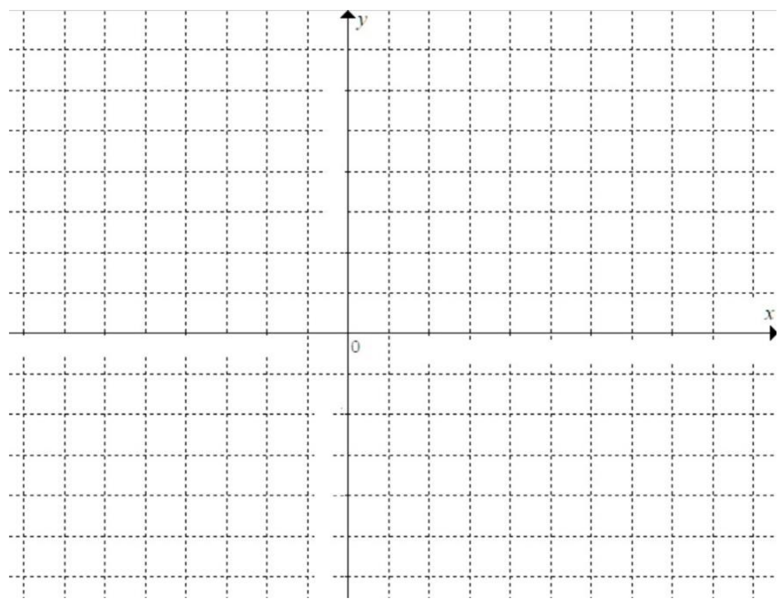
Dados los puntos A(1,1), B(-1,-5), C(-1,3), D(3,-2), E(-2,3) y F(0,0), Ubica en el plano cartesiano los segmentos dirigidos que se solicitan:

a) $\overrightarrow{AB}$
b) $\overrightarrow{DE}$
c) $\overrightarrow{EF}$
d) $\overrightarrow{FA}$
e) $\overrightarrow{BA}$
f) $\overrightarrow{ED}$



Ejercicio 2.2.

Ubica los siguientes puntos en el siguiente plano cartesiano A(0,5), B(5,-2), C(-3,5/3) y anota su nombre con letra.



Ejercicio 2.3.

En el mapa del ejemplo 2.1 considerar que una persona se localiza inicialmente en la intersección de las calles de Revillagigedo y Avenida Juárez. Contestar las siguientes preguntas:

a) ¿Hacia dónde se le debe indicar que debe dirigirse para llegar a la Torre Latinoamericana?
b) ¿Y si se quiere dirigir a la intersección de la calle de Iturbide y Avenida Juárez?
c) ¿Y si se quiere dirigir a la intersección de la calle de Donceles y Eje central?

Ejercicio 2.4.

Localizar los puntos $A(1),\ P(5)$ y $Q(-3)$ en un sistema de referencia $0-X$.

Ejercicio 2.5.

Localizar, en un sistema de coordenadas $0-X$, los puntos $A(-1),\ B(\sqrt{2}),\ \mathrm{C}(\pi),\ D\left(\frac{9}{4}\right),\ E(-9.5),\ 0(0).$

Ejercicio 2.6.

Señalar en un sistema de coordenadas $0-X$ el lugar donde se encuentran todos los puntos $P(x)$ que satisfacen:

a) $x > 0$ b) $x > \frac{11}{2}$

c) $x < 0$ d) $x < -4$

Ejercicio 2.7.

Localizar, en un sistema de coordenadas cartesiano $0-XY$, los puntos $A(3,-5),\ B(2,\ 6),\ C(-3,4),\ D(-4,-2).$

Ejercicio 2.8.

Localizar, en un sistema de coordenadas cartesiano $0-XY$ los puntos: $A(0,7),\ B(0,-3)\ C(0,2).$

Ejercicio 2.9.

Localizar los puntos: $P(-5,\ 0),\ \ Q(-3,\ 0),\ \ R(6,\ 0)$ en un sistema de coordenadas cartesiano $0-XY$.

Ejercicio 2.10.

Señalar el cuadrante del plano donde se encuentran todos los puntos $P(x, y)$ que satisfacen:

$a)\ x > 0,\ y < 0$ $b)\ x < 0,\ y > 0$ $c)\ x > 0,\ y > 0$

$d)\ x < 0,\ y < 0$

Ejercicio 2.11.

Señalar en cada inciso las regiones de puntos que cumplen las siguientes condiciones:

$a)\ P(x,\ 0)$ donde $x\ >\ 3$ $\qquad$ $b)\ P(0,y)$ donde $y\ <\ -1$

Ejercicio 2.12.

Localizar, en el plano $0-XY,$ los puntos siguientes: $A(1,\ 1),\ B(3,\ 3),\ C(-2,-2),\ D(4,4).$

Ejercicio 2.13.

Señalar, en un sistema $0-XY,$ el lugar donde se encuentran todos los puntos $P(x,y)$ tales que $x=y.$ (**Nota**: este lugar es el conjunto de todos los pares ordenados que cumplen con la condición de que la abscisa es igual a la ordenada, este a su vez, es un subconjunto del plano cartesiano).

Ejercicio 2.14.

Donde están localizados todos los puntos que corresponden a las parejas ordenadas $P(x,y)$ de tal manera que para los números reales $x,\ y$ ($x,y\in\Re$) se cumpla la relación $y=\dfrac{x}{2}$

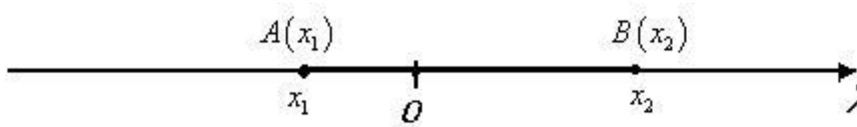
DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS EN UNA DIMENSIÓN

Se considera que es conveniente trabajar este tema como un antecedente para la distancia entre dos puntos en un plano cartesiano, el trabajar con este tema permite que el alumno comprenda el motivo de restar dos cantidades para encontrar la longitud de un segmento y a la vez comprende la importancia de manejar adecuadamente los signos.

Si se tienen los puntos A y B localizados en un sistema unidimensional, sabemos que la distancia entre el punto A y el punto B es la longitud del segmento AB.

Se quiere expresar la distancia entre dos puntos en una dimensión $A(x_1)$ y $B(x_2)$ en términos de sus coordenadas x_1 y x_2

De acuerdo con la geometría, la distancia entre dos puntos es siempre un número no-negativo (es decir, positivo ó cero). Utilizando la recta numérica, se tiene lo siguiente:



En la recta numérica, se observa que la longitud el segmento AB es la distancia que existe entre los puntos A y B, esta distancia es igual a la DIFERENCIA de sus coordenadas $(x_2 - x_1)$

Se debe tener cuidado en el manejo de la diferencia de las coordenadas, ya que, la diferencia $(x_2 - x_1)$ puede ser positiva ó negativa, dependiendo de cuáles sean las cantidades x_1 y x_2. Para evitar esto, en lugar de efectuar una simple diferencia, se debe trabajar con el VALOR ABSOLUTO de ella, luego entonces, la distancia entre los puntos A y B es $|x_2 - x_1|$.

Por ejemplo, si los puntos son $A(5)$ y $B(2)$, entonces la diferencia de las coordenadas es $2-5=-3.$ (observar que la diferencia es negativa). Al aplicar el valor absoluto, la distancia entre $A(2)$ y $B(5)$ es $|2-5| = |-3| = 3.$

NOTA: El valor absoluto de un número se define como $|x| = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

De acuerdo con lo anterior se escribe la siguiente:

DEFINICIÓN. La distancia entre dos puntos $A(x_1)$ y $B(x_2)$ cualesquiera en un sistema de coordenadas unidimensional $0-X$. está dada por $|x_2 - x_1|$

Ejemplo 2.5. Hallar la distancia entre los puntos $A(-3)$ y $B(7)$.

Solución

De acuerdo con la expresión $|x_2 - x_1|$ se tiene

$$dAB = |\ 7-(-3)\ | = |\ 10\ | = 10 \text{ unidades}$$

Un caso especial es cuando uno de los puntos es el origen.

Suponer que queremos hallar la distancia del origen $0(0)$ al punto $A(x)$. Al aplicar la expresión $|x_2 - x_1|$ se tiene $d = |x-0| = |x|$. Lo cual nos muestra que la distancia del origen a un punto A, es únicamente el valor absoluto de la coordenada del punto A.

Ejemplo 2.6. Hallar la distancia del punto $P(-25)$ al origen.

Solución

$$d = |\ -25\ | = 25$$

Por otra parte, se observa que el signo del número $x_2 - x_1$ indica la posición relativa de los puntos A y B, esto es, el signo indicará cual de ellos está a la derecha y cual a la izquierda del otro.

Distancia dirigida

De acuerdo con lo anterior; si $A(x_1)$ y $B(x_2)$ son dos puntos cualesquiera, se define la DISTANCIA DIRIGIDA del segmento AB (en este orden) al número $dAB = x_2 - x_1$.

Por lo tanto, podemos escribir lo siguiente:

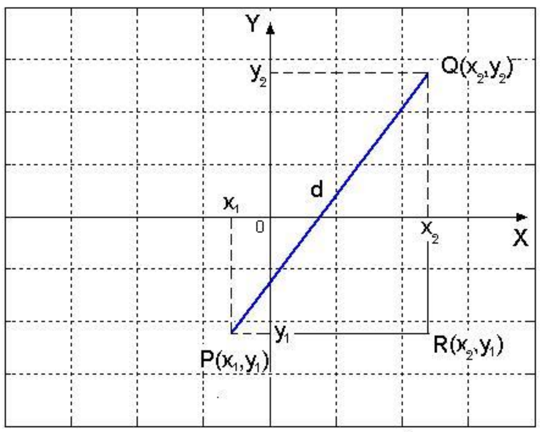
$$dAB = -\ dBA \text{ ya que } dAB = x_2 - x_1 \text{ y } dBA = x_1 - x_2$$

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS EN EL PLANO CARTESIANO

Si tenemos dos puntos en el plano cartesiano P y Q la distancia entre los puntos es la longitud del segmento PQ.

Se requiere expresar la distancia entre los puntos $P(x_1, y_1)$ y $\mathrm{Q}(x_2, y_2)$ en términos de sus coordenadas.

El punto P define los puntos $(x_1,\ 0)$ en el eje horizontal X y otro punto $(0, y_1)$ en el eje vertical Y. De igual manera, el punto Q define los puntos $(x_2, 0)$ y $(0, y_2)$ en los ejes horizontal y vertical respectivamente.



La distancia entre los puntos P y Q es la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo PQR, donde PQ es la hipotenusa y PR y QR son los catetos.

Al utilizar el Teorema de Pitágoras

$$d = \sqrt{PR^2 + QR^2}$$

Para escribir la distancia d (longitud del segmento PQ) en términos de las coordenadas de los puntos P y Q, se escriben las longitudes de los catetos PR y QR. Estas son distancias unidimensionales, por lo tanto

$$PR = |\ x_2 - x_1\ | \quad \text{y} \quad QR = |\ y_2 - y_1\ |$$

Al sustituir en la expresión para d

$$d = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}$$

Finalmente, eliminando los signos de valor absoluto en la expresión anterior:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

la longitud del segmento PQ es la distancia entre los puntos P y Q.

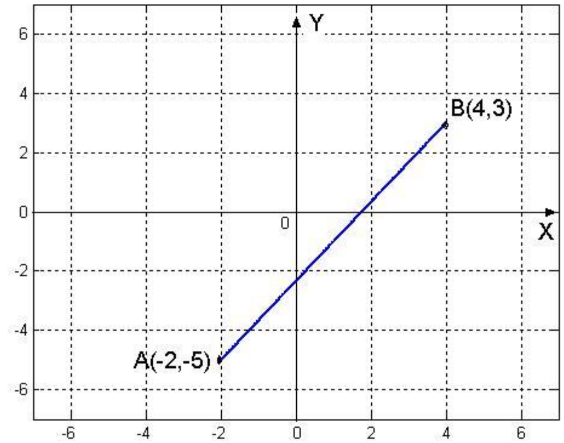
Sugerencias de actividades teórico-prácticas

Se sugiere que el alumno realice las siguientes actividades teórico prácticas por sí mismo y que verifique la respuesta con la aquí obtenida. De esta manera adquirirá la confianza necesaria.

Actividad 1. Calcular la distancia del punto $A(-2,-5)$ al punto $B(4,3)$.

Solución

Grafiquemos para comprender el ejercicio con mejor claridad:



Al aplicar el teorema anterior e identificando $P(x_1, y_1) \equiv A(-2,-5)$ y $Q(x_2, y_2) \equiv B(4,3)$,

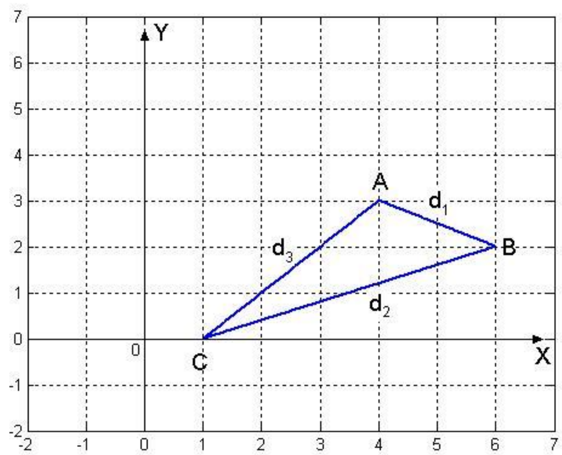
$$d = \sqrt{\left(4-(-2)\right)^2 + \left(3-(-5)\right)^2} \;=\; 10 \text{ unidades}$$

Una forma de mostrar la importancia de la expresión para calcular la distancia entre dos puntos, es aplicándolo a problemas de diversa índole.

Actividad 2. Perímetro de un triángulo. Calcular el perímetro del triángulo cuyos vértices son los puntos $A(6,2)$, $B(4,3)$, $C(0,1)$.

Solución

Será más ilustrativo representar el problema en el plano cartesiano:



Calcular las longitudes de los segmentos (lados del triángulo) AB, BC y CA:

Representar la longitud del segmento AB por d_1, aplicando la expresión para la distancia entre dos puntos con $A(6,2)$ y $B(4,3)$

$$d_1 = \sqrt{(4-6)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

Con calcular d_2 la longitud del segmento BC, las coordenadas correspondientes son $B(4,3)$ y $C(0,1)$, por lo tanto:

$$d_2 = \sqrt{(0-4)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Y para d_3 la longitud del segmento CA, las coordenadas respectivas son $C(0,1)$ y $A(6,2)$, por lo que

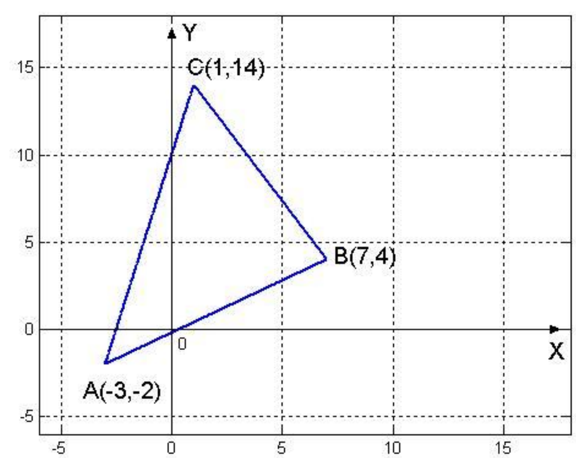
$$d_3 = \sqrt{(6-0)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{36+1} = \sqrt{37}$$

El perímetro P es la suma de las tres distancias (longitudes de los lados) encontradas.

$$P = \sqrt{5} + 2\sqrt{5} + \sqrt{37} \text{ unidades}$$

Actividad 3. Clasificación de triángulos. Los puntos $A(-3,-2)$, $B(7,4)$ y $C(1,14)$ son los vértices de un triángulo. Determinar a que tipo de triángulo corresponde (rectángulo, equilátero o isósceles).

Solución. Graficar el triángulo en el plano:



Para determinar qué tipo de triángulo se forma, se deben conocer las longitudes de sus lados:

Para el segmento AB, las coordenadas correspondientes a sus extremos son $A(-3,-2)$; $B(7,4)$ y la longitud del lado AB es

$$\sqrt{\left(7-(-3)\right)^2+\left(4-(-2)\right)^2} \quad = \quad \sqrt{100+36} \quad = \quad \sqrt{136} \text{ unidades}$$

Para el segmento BC las coordenadas de sus extremos son $B(7,4)\quad y\quad C(1,14)$ y la longitud del segmento es:

$$\sqrt{(1-7)^2+\ (14-4)^2} \ = \ \sqrt{36+100} \ = \ \sqrt{136} \text{ unidades}$$

Y para el segmento AC, con extremos en los puntos $A(-3,-2)\quad ;\quad C(1,14)$

$$\sqrt{\left(1-(-3)\right)^2+\left(14-(-2)\right)^2} \quad = \quad \sqrt{16+256} \quad = \quad \sqrt{272} \text{ unidades}$$

Se observa que las longitudes de los segmentos AB y BC son iguales, se concluye que el triángulo es un ***triángulo isósceles***.

También de los resultados aritméticos obtenidos, se observa lo siguiente

$$\sqrt{(AB)^2+\ (BC)^2}=\sqrt{136+136}=\sqrt{272}$$

que es exactamente igual al cuadrado de la longitud del segmento AC, por lo que de acuerdo con el Teorema de Pitágoras, el triángulo también es un ***triángulo rectángulo.***

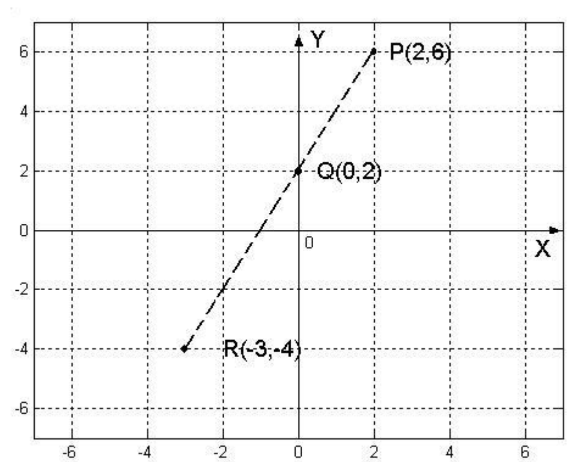
En conclusión, ***el triángulo ABC es un triángulo isósceles y rectángulo.***

Actividad 4. Determinar si los puntos $P(2,6),\quad Q(0,2)$ y $R(-3,\text{-}4)$ son colineales.

Nota: Puntos colineales. Los tres puntos son colineales si están sobre una misma línea recta.

Solución

Tal vez se pueda observar gráficamente. marcar los puntos en el plano cartesiano y unirlos mediante segmentos de recta



Gráficamente, no podemos aseverar que los tres puntos son colineales.

De manera analítica, los tres puntos serán colineales si la suma de las longitudes de dos de los segmentos $PQ \;\; y \;\; QR$ es igual a la longitud del segmento PR.

La longitud del segmento PQ es

$$d_1 = \sqrt{(0-4)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \text{ unidades}$$

La longitud del segmento QR es

$$d_2 = \sqrt{(-3-0)^2 + (-4-2)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \text{ unidades}$$

Y la longitud del segmento PR es:

$$d_3 = \sqrt{(-3-2)^2 + (-4-6)^2} = \sqrt{25+100} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5} \text{ unidades}$$

Es conveniente utilizar números irracionales en lugar de aproximaciones decimales. La suma de las longitudes de los segmentos $PQ \;\; y \;\; QR$ es

$$PQ + QR = 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 5\sqrt{5} \quad \text{unidades}$$

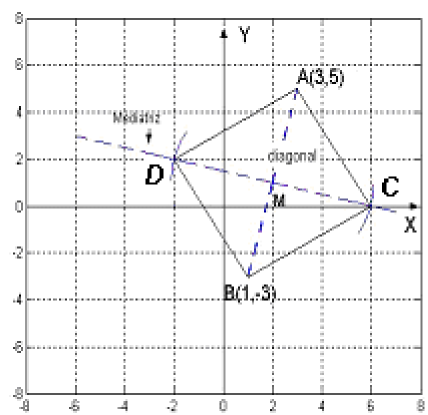
que es igual a la longitud del segmento PR

Por lo tanto, los puntos $P(2,6)$, $Q(0,2)$ y $R(-3,-4)$ están sobre una misma línea, ***son colineales.***

Actividad 5. Área de un cuadrado a partir de conocer los extremos de una de sus diagonales.
Los vértices opuestos de un cuadrado son los puntos $A\ (3,\ 5)$ y $B\ (1,-3)$, calcular su área.

Solución:

Graficar los puntos dados y construir el cuadrado correspondiente a la diagonal dada (***construcción geométrica con regla y compás)***



El área de un cuadrado es $A = (lado)^2$

Representemos con ℓ a la longitud de uno de los catetos del triángulo rectángulo (ADB o ACB), observar que ℓ es la longitud de cada uno de los lados del cuadrado, entonces, utilizando el Teorema de Pitágoras:

$$\ell^2 + \ell^2 = (AB)^2 \qquad \therefore \quad 2\ell^2 = (AB)^2$$

Por otro lado, el Área S del cuadrado es $S = \ell^2$, entonces $A = \dfrac{(AB)^2}{2}$ y en consecuencia basta calcular $(AB)^2$:

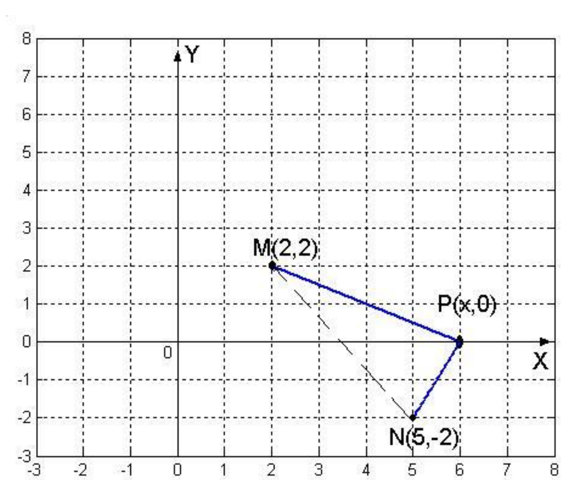
$$S = \frac{(AB)^2}{2} = \frac{(1-3)^2 + (-3-5)^2}{2} = \frac{4+64}{2} = 34 \quad \text{unidades cuadradas}$$

El área del cuadrado es $A = 34$ unidades cuadradas.

Ejemplos de manejo algebraico y ecuaciones de segundo grado

Ejemplo 2.7. Dados dos puntos $M(2,2)$ y $N(5,-2)$, hallar en el eje de las abscisas, un punto P de modo que el ángulo MPN sea recto.

Haciendo una gráfica del problema. Marcando el punto P en algún lugar sobre el eje horizontal. ***Se sugiere construir el ángulo recto con regla y compás.***



Se quiere que el ángulo formado por los segmentos MP y PN sea un ángulo recto; en otras palabras que el ángulo MPN sea de 90^0.

Si se traza el segmento auxiliar MN, se tiene la condición de que el triángulo MPN es triángulo rectángulo. De acuerdo con el teorema de Pitágoras:

$$(MP)^2 + (PN)^2 = (MN)^2 \text{ ....(1)}$$

Se desea calcular las coordenadas del punto P que cumpla con la condición establecida.

El punto P está sobre el eje de las abscisas (eje X), entonces sus coordenadas son de la forma $(x, 0)$ y el problema se reduce a calcular la abscisa x.

Aplicando la expresión para calcular la distancia entre dos puntos, calcular las longitudes de los segmentos $MP,\ NP\ y\ MN$.

Las coordenadas de los extremos del segmento MP son $M(2,2)$ y $P(x,0)$, la longitud d_1 al cuadrado es:

$$d_1^2 = (x-2)^2 + (0-2)^2 = x^2 - 4x + 4 + 4 = x^2 - 4x + 8$$

La longitud d_2 al cuadrado del segmento NP con extremos $N(5,-2)$ y $P(x,0)$ es:

$$d_2^2 = (x-5)^2 + (0+2)^2 = x^2 - 10x + 25 + 4 = x^2 - 10x + 29$$

Y la longitud d_3 al cuadrado del segmento MN con extremos $M(2,2)$ y $N(5,-2)$ es:

$$d_3^2 = (2-5)^2 + (2+2)^2 = 9 + 16 = 25$$

Al sustituir las expresiones anteriores en la expresión (1):

$$x^2 - 4x + 8 + x^2 - 10x + 29 = 25$$

Reduciendo términos semejantes:

$$2x^2 - 14x + 12 = 0$$

se tiene una ecuación de segundo grado con una incógnita.

Aplicando la fórmula general para soluciones de ecuaciones de 2º grado:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Y utilizando $a = 2$; $b = -14$ y $c = 12$

$$x = \frac{-(-14) \pm \sqrt{196 - 96}}{4} = \frac{14 \pm 10}{4}$$

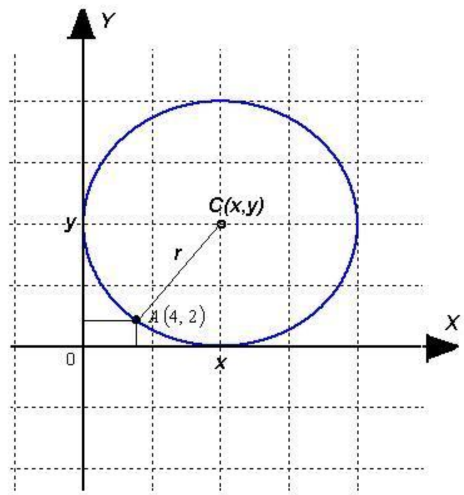
Se obtienen dos soluciones: $x_1 = 6$ y $x_2 = 1$

Se observa que el proceso analítico proporciona dos resultados para la abscisa x, por lo que existen dos puntos en el eje X que cumplen con las condiciones del problema, estos son:

$$P_1(6, 0) \text{ y } P_2(1, 0)$$

Ejemplo 2.8. Aplicación inversa con el uso de una circunferencia y el concepto de tangencia. Se ha trazado una circunferencia tangente a los ejes coordenados, La circunferencia pasa por el punto $A(4,2)$ Determinar su centro C y su radio r.

Solución. Graficar



Se requiere calcular las coordenadas del punto C y la longitud del radio r

De acuerdo con la figura, $x = y = r$ porque la circunferencia es tangente a ambos ejes coordenados; la distancia del centro a los puntos de la circunferencia es la misma. Por lo tanto, se requiere calcular $x(\text{ó } y)$ para conocer el punto C.

La longitud del segmento AC es la longitud del radio, entonces:

$$r = \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2}$$

Y en virtud de que $x = y = r$ entonces al sustituir en la expresión anterior

$$x = \sqrt{(x-4)^2 + (x-2)^2}$$

Al elevar ambos miembros de la ecuación al cuadrado:

$$x^2 = (x-4)^2 + (x-2)^2$$

Y al desarrollar los binomios al cuadrado:

$$x^2 = x^2 - 8x + 16 + x^2 - 4x + 4$$

Y simplificar:

$$x^2 - 12x + 20 = 0$$

Las raíces de la ecuación de segundo grado son:

$$x_1 = 10 \quad , \quad x_2 = 2$$

En conclusión, existen dos circunferencias que satisfacen el problema.

Una circunferencia tiene centro en $C(10, 10)$ y radio $r = 10$ unidades y la otra circunferencia, es la que tiene centro en $C(2,2)$ y radio $r = 2$ unidades.

Ejemplo 2.9. Aplicación Cálculo del Área de un triángulo con la fórmula de Herón.

Calcula el área del triángulo cuyos vértices son $A(-2,6)$, $B(1,-7)$ y $C(6,8)$.

Solución. La *fórmula de Herón* está en términos de los lados del triángulo sin la necesidad de calcular su altura.

$$\boldsymbol{A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

Donde a, b y c son los lados del triángulo y s (la cantidad s se le conoce como el *semiperímetro*) se calcula como:

$$\boldsymbol{s = \frac{a+b+c}{2}}$$

Al desarrollar la fórmula de Herón, nos damos cuenta de que es equivalente a la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{A = \frac{1}{4}\sqrt{(a^2+b^2+c^2)^2 - 2(a^4+b^4+c^4)}}$$

Así pues, para calcular el área del triángulo, procedemos a encontrar las longitudes de los segmentos AB, BC y CA:

$d(A,B) = \sqrt{(-2-1)^2 + (6-(-7))^2} = \sqrt{178}$ unidades

$d(B,C) = \sqrt{(1-6)^2 + (-7-8)^2} = \sqrt{250}$ unidades

$d(C,A) = \sqrt{\left(6-(-2)\right)^2 + (8-6)^2} = \sqrt{68}$ unidades

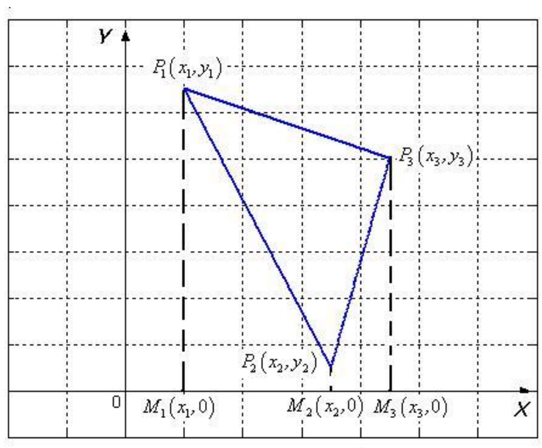
Ahora, sustituimos los valores en la fórmula de Herón:

$$A = \frac{1}{4}\sqrt{(178+250+68)^2 - 2(178^2+250^2+68^2)}$$

Así pues, A=55 unidades cuadradas.

Área de un triángulo

Considerar un triángulo con vértices en los puntos $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$ y $P_3(x_3,y_3)$, se quiere calcular su área en términos de las coordenadas de los vértices.



Se observa en la figura que el área del triángulo $P_1P_2P_3$ es igual al área del trapecio $M_1P_1P_3M_3$ menos la suma de las áreas de los trapecios $M_1P_1P_2M_2$ y $M_2P_2P_3M_3$, esto es

$$\text{Área } \Delta P_1P_2P_3 = \text{Área } \square M_1P_1P_3M_3 - \text{Área } \left(\square M_1P_1P_2M_2\right) - \text{Área } \square M_2P_2P_3M_3$$

Las áreas de los trapecios son $$A = \frac{altura \text{ x } \left(base1 + base2\right)}{2}$$

$$\text{Area } \Delta P_1P_2P_3 = \frac{1}{2}(x_3 - x_1)(y_1 + y_3) - \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(y_1 + y_2) - \frac{1}{2}(x_3 - x_2)(y_2 + y_3) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x_3y_1 + \cancel{x_3y_3} - \cancel{x_1y_1} - x_1y_3 - x_2y_1 - \cancel{x_2y_2} + \cancel{x_1y_1} + x_1y_2 - x_3y_2 - \cancel{x_3y_3} + \cancel{x_2y_2} + x_2y_3\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_2y_1 - x_3y_2\right)$$

El resultado se puede expresar como el valor absoluto del determinante

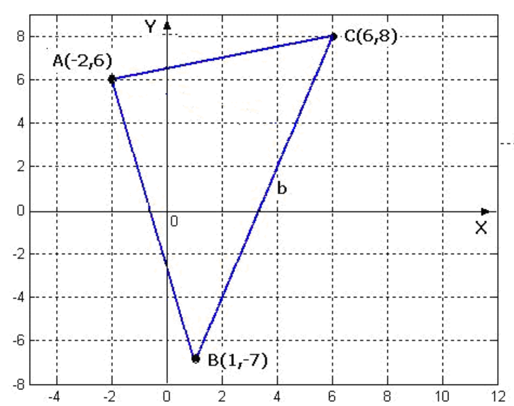
$$\text{Área } \Delta P_1P_2P_3 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Nota: Se puede seleccionar un punto como base y el determinante se recorre en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Ejemplo 2.10. Aplicación directa. Hallar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos $A(-2,6)$, $B(1,-7)$ y $C(6,8)$

Solución.

El triángulo es



El Área del triángulo ABC es

$$Area\ \Delta ABC = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Al identificar $P_1(x_1, y_1) \cong A(-2,6)$, $P_2(x_2, y_2) \cong B(1,-7)$ y $P_3(x_3, y_3) \cong C(6,8)$ se tiene

$$Area\ \Delta ABC = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & 6 & 1 \\ 1 & -7 & 1 \\ 6 & 8 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left(-2(-7-8)-6(1-6)+1(8+42)\right) = \frac{110}{2} = 55\ \mathrm{u}^2$$

Nota: *Si se intercambian dos renglones, esto es, si los puntos se identifican en otro orden, probablemente el determinante sea menor que cero, es por ello que debemos considerar el valor absoluto.*

EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN

Ejercicio 2.15.

Calcular a) $d\left(\overline{AB}\right)$, b) $d\left(\overline{BA}\right)$, si los puntos A y B se localizan en $A(5)$ y $B(1)$.

Ejercicio 2.16.

Demostrar que los puntos $A(0,-1)$, $B(3,5)$, $C(7,2)$, $D(4,-2)$ son los vértices de un cuadrado.

Ejercicio 2.17.

Hallar el perímetro del triángulo cuyos vértices están en los puntos $A(-3,6)$, $B(1,-8)$ y $C(9,2)$.

Ejercicio 2.18.

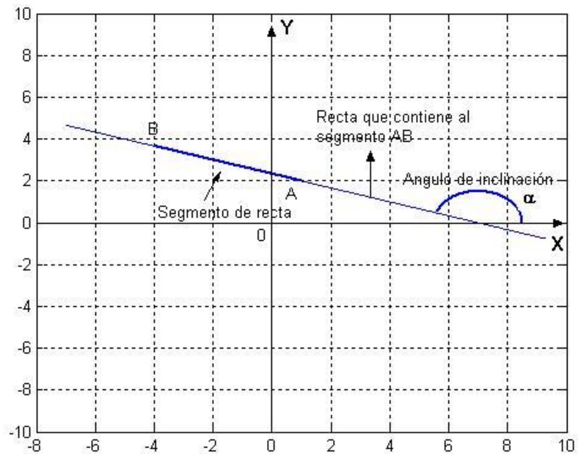
La longitud de un segmento es 10 unidades y un extremo se localiza en el punto $A(7,-3)$. Si el otro extremo es el punto *B* y tiene abscisa 4, hallar su ordenada.

Ejercicio 2.19.

Hallar el área del triángulo cuyos vértices están en los puntos $A(-3,6)$, $B(1,-8)$ y $C(9,2)$.

Angulo de inclinación de un segmento de recta

El ángulo que forma la recta, que contiene al segmento de recta, con la dirección positiva del eje X se llama ***ángulo de inclinación (α).***



La medida del ángulo de inclinación se establece de acuerdo a lo que establece la trigonometría, esto es, se mide en dirección contraria a como giran las manecillas de un reloj.

En general, se tienen los siguientes valores para el ángulo de inclinación

$$\begin{cases} 0^0 & \text{segmento de recta horizontal} \\ 0^0 < \alpha < 90^0 & \text{inclinacion con angulo agudo} \\ 90^0 & \text{segmento de recta vertical} \\ 90^0 < \alpha < 180^0 & \text{inclinacion con angulo obtuso} \end{cases}$$

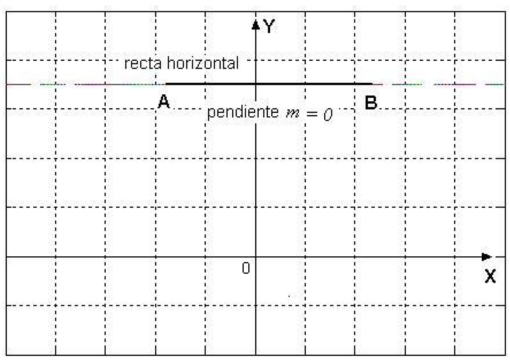
Pendiente de un segmento de recta

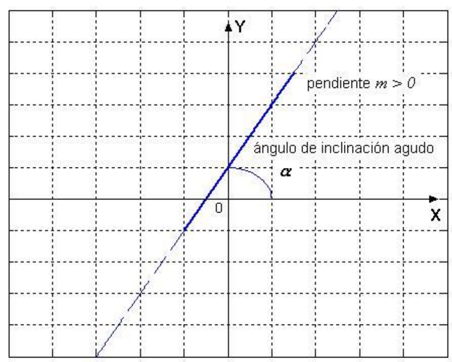
Definición. La pendiente (m) de un segmento de recta, se define como la tangente del ángulo de inclinación

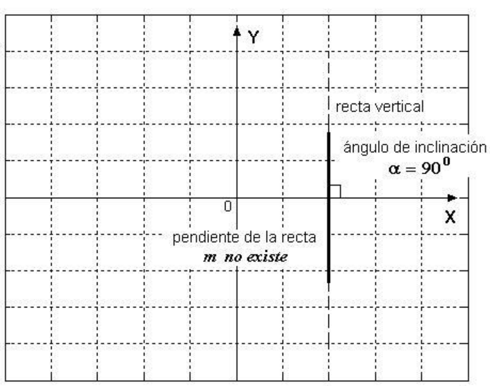
$$m = \tan \alpha$$

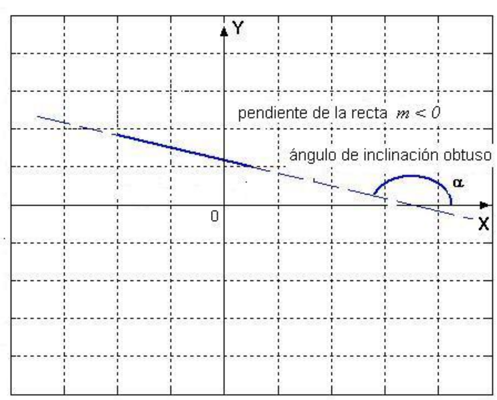
Para la pendiente de una recta (segmento de recta) se tienen los siguientes casos:

- Si el ángulo de inclinación es $\alpha = 0^0$ (segmento horizontal), la pendiente de la recta que contiene al segmento de recta es $m = tan\,0^0 = 0$.
- Si el ángulo de inclinación es agudo $0^0 < \alpha < 90^0$, la pendiente de la recta que contiene al segmento de recta es positiva $m = tan\,\alpha > 0$.
- Si el ángulo de inclinación es $\alpha = 90^0$ (segmento vertical), la pendiente de la recta que contiene al segmento no existe, o en su caso se dice que la pendiente es infinita $m = tan\,90^0 \to \infty$.
- Si el ángulo de inclinación es obtuso $90^0 < \alpha < 180^0$, la pendiente de la recta que contiene al segmento de recta es negativa $m = tan\,\alpha < 0$.



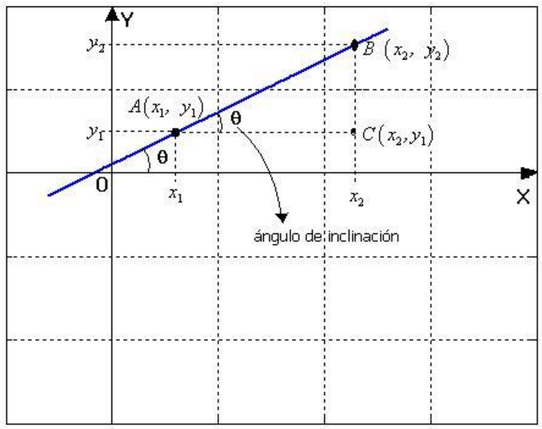






Pendiente de un segmento de recta cuando se conocen dos puntos del segmento.

Considerar un segmento de recta del cual se conocen dos puntos cualesquiera de él $A(x_1,\ y_1)$ y $B\ (x_2,\ y_2)$.



En la figura se trazan los segmentos AC y BC para formar el triángulo rectángulo *ACB*. El punto *C* tiene coordenadas $C(x_2,y_1)$

La pendiente del segmento es $m\ =\ tg\ \ \alpha\ =\ \dfrac{BC}{AC}$ donde BC y AC son *distancias dirigidas*, de aquí que $BC = y_2 - y_1$ y $AC = x_2 - x_1$.

Por lo tanto, la pendiente m del segmento AB es:

$$m = \frac{y_2\ -\ y_1}{x_2\ -\ x_1} \qquad x_1\ \neq\ x_2$$

La expresión anterior permite calcular la pendiente de la recta que pasa por dos puntos dados o bien es la pendiente de un segmento cuando se conocen sus puntos extremos.

El ángulo de inclinación de un segmento cuyos extremos son los puntos $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ es:

$$\boldsymbol{\theta = ang\ tan^{-1}(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1})}$$

Ejemplo 2.11. Hallar la pendiente de la recta que pasa por los puntos $A\ (-5,\ 1)$ y $B\ (3,\ -4)$.

Solución. Al identificar $P(x_1, y_1) \equiv A(-5,\ 1)\ \ y\ \ P(x_2,\ y_2)\ \equiv B(3,\ -4)$ y sustituir en la expresión de pendiente dados dos puntos, se tiene

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4-1}{3-(-5)} = \frac{-5}{8}$$

Observa que no importa cuál de los puntos se escoja como $P_1(x_1, y_1)$ y cual como $P_2(x_2,\ y_2)$ el resultado será el mismo.

Ejemplo 2.12. Aplicación directa. Hallar la pendiente de un segmento de recta que tiene un ángulo de inclinación de 45º,

Solución

La pendiente del segmento de recta es

$$m\ =\ tg\ \ 45°\ =\ 1$$

Sugerencias de actividades teórico-prácticas

Actividad 1. Encuentra el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos $(4{,}5)$ y $(-1,-2)$.

Solución. Aplicando directamente la fórmula que acabamos de desarrollar, el ángulo de inclinación es el siguiente:

$$\boldsymbol{\theta = ang\ tan^{-1}(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1})}$$

$$\theta = ang\ tan^{-1}\left(\frac{-2-5}{-1-4}\right) = 54.56°$$

En una recta, a la tangente del ángulo de inclinación se le llama *pendiente*. La pendiente es un elemento que cobra fundamental importancia al estudiar la ecuación de la recta. La pendiente en el ejemplo anterior es

$$m = \tan(54.56°) = 1.4$$

EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN

2.20. Los vértices de un triángulo son $A(3,8)$, $B(2,-1)$, $C(6,-1)$. Si D es el punto medio del lado BC, calcular la longitud de la mediana AD.

2.21. Encontrar las coordenadas de los puntos medios de los lados del triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1,3)$, $B(-2,-4)$ y $C(1,-2)$.

2.22. El extremo de un segmento AB es el punto $A(1,-9)$ y su punto medio es el punto $M(-1,-2)$. Hallar las coordenadas del otro extremo (punto B).

2.23. Dos vértices adyacentes de un paralelogramo son los puntos $A(-3,5)$, $B(1,7)$ y el punto de intersección de sus diagonales es $M(1,\ 1)$. Encontrar las coordenadas de los otros dos vértices.

2.24. Un cuadrilátero tiene vértices en los puntos $A(-3,7)$, $B(6,6)$, $C(-4,-5)$ y $D(4,-6)$. Hallar los puntos medios de sus diagonales.

2.25. Hallar el punto medio y los puntos de trisección del segmento cuyos extremos se localizan en los puntos A(2,-2) y B(10,15).

2.26. Un triángulo tiene vértices en los puntos Hallar la longitud y pendiente de sus medianas.

2.27. Si tres vértices de un paralelogramo son los puntos $A\ (3,\ -5)$, y $C\ (-16,\ 3)$, determinar el cuarto vértice D opuesto al vértice B.

2.28. Una recta pasa por los puntos $M_1(-12,\ -13)$ y $M_2(-1,\ -5)$. Hallar en esta recta un punto cuya abscisa es igual a 3.

2.29. Una recta pasa por los puntos $M(2,-3)$ y $\mathrm{N}(-6,5)$. Hallar en esta recta el punto cuya ordenada es igual a -5.

2.30. Una recta pasa por los puntos $A(7,\ -3)$, $B(2,\ -6)$. Hallar el punto de intersección de esta recta con el eje de abscisas.

2.31. Una recta pasa por los puntos $A(5,\ 2)$, $B(-4,\ -7)$. Hallar el punto de intersección de esta recta con el eje de las ordenadas.

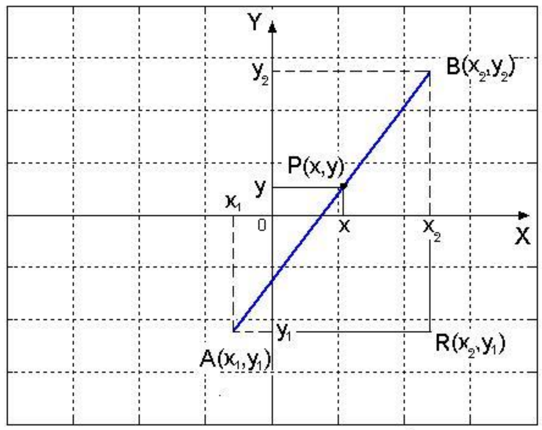
2.32. Un segmento tiene pendiente –4 y un extremo se localiza en el punto A(2,7). El otro extremo tiene ordenada –1, hallar su abscisa.

2.33. Un triángulo tiene vértices en los puntos A(6,2), B(-4,5) y C(0,-8). Hallar la medida de sus ángulos interiores.

2.34. Un segmento de recta tiene extremos en A(-2,5) y B(1,2), Un segundo segmento forma un ángulo de 45^0 con el primero y tiene un extremo en C(0,7) y el otro extremo en el punto D cuya ordenada es 6, hallar la abscisa del punto D.

RAZON DE DIVISIÓN DE UN SEGMENTO POR UN PUNTO

Consideremos dos puntos cualesquiera A y B y otro punto P situado sobre el segmento de recta AB.



El punto P divide al segmento AB en dos segmentos; el segmento AP y el segmento PB. Al comparar las longitudes de estos segmentos por medio de un cociente, se dice que se tiene una razón.

$$\frac{AP}{PB} \quad \text{ó} \quad \frac{BP}{PA}$$ (No necesariamente son iguales)

La razón (ó comparación de las dos partes) en que P divide a AB podría ser cualquiera de ellas ($\frac{AP}{PB}$ ó $\frac{BP}{PA}$). Para evitar la ambigüedad, se usará la siguiente convención:

Segmento dirigido La dirección del segmento AB se establecerá por el orden en que se escriban los puntos extremos del segmento.

El considerar el segmento AB dirigido, significará que la distancia entre sus puntos extremos es una ***distancia dirigida*** y por lo tanto se establecerá que la distancia medida en sentido contrario, tendrá signo contrario al que le asigne a la distancia del segmento AB.

En otros términos, si la longitud del segmento AB es positiva, la medida de la longitud del segmento BA será negativa.

De acuerdo a esta convención, establecemos la siguiente definición:

Definición. La razón r en que el punto P divide al segmento AB (en este orden) está dada por:

$$r = \frac{AP}{PB}$$

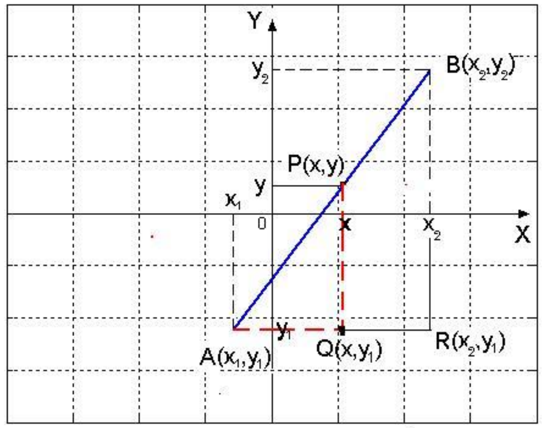
AP y PB ***son segmentos dirigidos.***

NOTA: Observar que la definición anterior solamente tiene sentido si los tres puntos A, B y P son colineales.

Expresión para las coordenadas del punto que divide a un segmento de recta cuando la razón se define como $r = \frac{AP}{PB}$

En forma general se encontrarán las coordenadas del punto $P(x, y)$ que divide al segmento AB con extremos en los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ en la razón $r = \frac{AP}{PB}$

Considerar que el segmento AB tiene sus extremos en las coordenadas $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ respectivamente y que el punto P que divide al segmento AB en la razón r tiene coordenadas (x, y). Construir los segmentos PQ y AQ y observar que los triángulos APQ y ABR son semejantes.



En los triángulos semejantes APQ y ABR, existe proporcionalidad entre sus lados respectivos

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QR}$$

Y como se sabe que el punto P divide al segmento AB en la razón $r = \frac{AP}{QB}$, entonces el punto Q divide al segmento AR en la misma razón:

$$r = \frac{AQ}{QR} \text{ …………..(2)}$$

Como AQ y QR son segmentos dirigidos en una dimensión, entonces, de acuerdo a la convención del concepto de distancia dirigida, sus longitudes son respectivamente:

$$AQ = x - x_1 \quad \text{y} \quad QR = x_2 - x$$

Sustituyendo en la expresión (2); se tiene:

$$r = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$$

Recordar que lo que se quiere calcular son las coordenadas del punto P que divide al segmento AB, por lo que debemos despejar a x de la ecuación anterior.

$$r(x_2 - x) = x - x_1$$

Distribuyendo el producto:

$$rx_2 - rx = x - x_1$$

Agrupando términos:

$$x + rx = x_1 + x_2$$

Finalmente, la abscisa del punto P es:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}$$

De manera análoga para y, establecemos la correspondiente proporción en los triángulos semejantes APQ y ABR

$$\frac{AP}{PB} = \frac{PQ}{BR}$$

Las longitudes PQ y BR son respectivamente

$$PQ = y - y_1 \quad \text{y} \quad BR = y_2 - y$$

La razón r es entonces

$$r = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

La ordenada del punto P es:

$$y = \frac{y_1 \quad + \quad ry_2}{1 \quad + \quad r}$$

Finalmente, las coordenadas del punto ***P*** que dividen al segmento *AB* en la razón dada *r* son

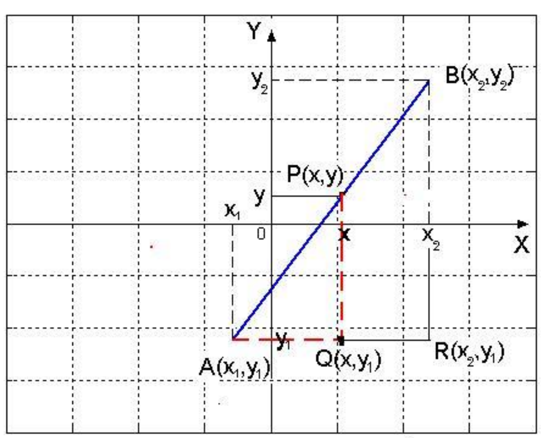
$$P\left(\frac{x_1 + rx_2}{1+r},\ \frac{y_1 + ry_2}{1+\ r}\right) \qquad \text{(I)}$$

La expresión (I) se utiliza con la razón definida al inicio del tema.

Expresión para las coordenadas del punto que divide a un segmento de recta cuando la razón se define considerando la semejanza de los triángulos ARB y AQP (ver figura).

En este caso la razón se define de la siguiente manera:

$$r = \frac{AB}{AP} \quad \text{o} \quad r = \frac{AB}{PB}$$



La relación de proporcionalidad es: $\frac{RA}{QA} = \frac{RB}{QP} = \frac{AB}{AP}$

Al sustituir las coordenadas correspondientes, para los segmentos horizontales se tiene

$$\frac{x_2 - x_1}{x - x_1} = r$$

de donde $x_2 - x_1 = rx - rx_1$

Finalmente $x = \frac{x_2 + x_1(r-1)}{r}$

Para los segmentos verticales se tiene:

$$\frac{y_2 - y_1}{y - y_1} = r$$

por lo que $y_2 - y_1 = ry - ry_1$

Finalmente $y = \frac{y_2 + y_1(r-1)}{r}$

Las coordenadas del punto *P* que divide al segmento AB en la razón $r = \frac{AB}{AP}$ o $r = \frac{AB}{PB}$ es

$$P\left(\frac{x_2 + x_1(r-1)}{r}, \frac{y_2 + y_1(r-1)}{r}\right) \quad \text{(II)}$$

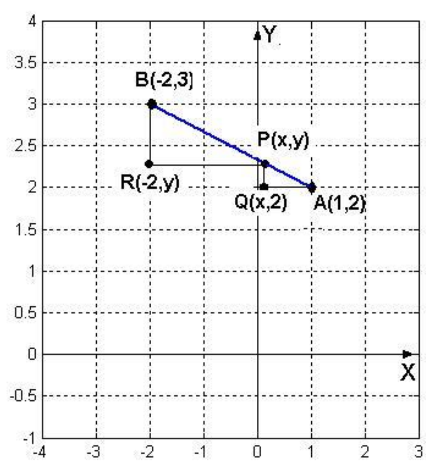
En el texto se utilizará la primera expresión obtenida (I), esto es

$$P\left(\frac{x_1 + rx_2}{1+r}, \ \frac{y_1 + ry_2}{1+\ r}\right)$$

Ejemplo 2.13. Resolver utilizando el concepto de semejanza. Encontrar las coordenadas del punto que divide al segmento cuyos extremos son los puntos $A(1,\ 2)$, $B(-2,3)$ en la razón $r = \dfrac{BP}{PA} = 2$

Solución.

Graficar



El punto P esta el segmento BA, de tal manera que la longitud del segmento BP es igual al doble de la longitud del segmento PA.

Los triángulos BRP y PQA son semejantes; por lo que la proporción correspondiente de sus lados respectivos es:

$$\frac{RP}{QA} = \frac{BR}{PQ} = \frac{BP}{PA} = 2 \text{ ....(*)}$$

La longitud dirigida del segmento RP es $x-(-2)$ y la longitud del segmento QA es $1-x$

Al sustituir en la expresión (*)

$$\frac{x-(-2)}{1-x} = 2$$

De donde $$x+2 = 2(1-x) = 2-2x$$

Al resolver se obtiene la abscisa del punto P, esta es $x=0$.

Para encontrar la ordenada se utiliza la otra parte de la proporción.

La longitud dirigida del segmento BR es $3-y$ y la longitud del segmento PQ es $y-2$

Al sustituir en la expresión (*) se tiene:

$$\frac{3-y}{y-2} = 2$$

De donde $$3-y = 2(y-2) = 2y-4$$

Al resolver se tiene la ordenada del punto P , esta es $\frac{7}{3}$.

El punto P que divide al segmento BA en la razón $r = 2$ es $P\left(0, \frac{7}{3}\right)$

Ahora, se resolverá el ejemplo, aplicando directamente la expresión correspondiente.

Para calcular la abscisa x del punto P , se utiliza $x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}$; identificando x_1 con la abscisa del punto B y x_2 con la abscisa del punto A .

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{l + r} = \frac{-2 + 2\ (1)}{1+2} = \frac{-2 + 2}{3} = 0$$

Y para la ordenada y se utiliza $y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}$; donde x_1 y x_2 se identifican con $y_1 = 3$; $y_2 = 2$ ordenadas de los puntos B y A respectivamente.

$$y = \frac{y_1 + ry_2}{l + r} = \frac{3 + 2\ (2)}{1+2} = \frac{3 + 4}{3} = \frac{7}{3}$$

Finalmente, el punto que divide al segmento BA en la razón $r = 2$ es:

$$P\left(0,\ \frac{7}{3}\right)$$

Aspectos importantes respecto al concepto de ***razón de división*** de un ***segmento de recta.***

1. El punto de división debe estar sobre la recta que contiene al segmento que se va a dividir.
2. De acuerdo con el punto anterior, el punto P puede estar ***fuera*** del segmento de recta.
3. Como todos los segmentos involucrados en la definición: $r = \frac{AP}{PB}$ son dirigidos, entonces r puede resultar ***positiva o negativa***.

Ejemplo 2.14. Uso de una razón negativa. Los puntos extremos de un segmento son $A(2,4)$ y $B(8,-4)$. Hallar el punto $P(x, y)$ que divide a este segmento en la razón $\frac{BP}{PA} = -2$.

La razón negativa $r = -2$ tiene sentido en virtud de la convención de segmentos dirigidos, sin embargo, al querer graficarlo tenemos la incertidumbre de donde ubicarlo, para ello, primero resolvemos el ejercicio en forma analítica y después lo ilustramos gráficamente.

Solución

Para encontrar las coordenadas del punto P que divide al segmento BA en la razón $r = -2$; observamos que las coordenadas (x_1, y_1) corresponden a las coordenadas del punto B y en consecuencia las coordenadas (x_2, y_2) corresponden a las coordenadas del punto A.

Aplicamos las expresiones correspondientes; para la abscisa:

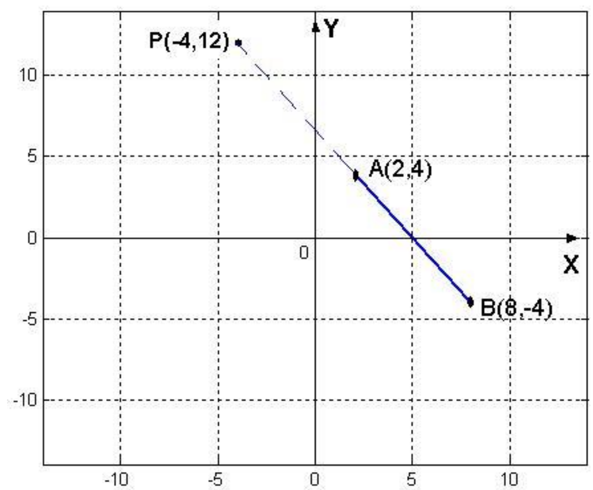
$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r} = \frac{8 + (-2)(2)}{1 + (-2)} = \frac{8 - 4}{-1} = -4$$

y para la ordenada

$$y = \frac{y_1 + r y_2}{1+r} = \frac{-4 \ + \ (-2)(4)}{-1} \ = \ \frac{-4 \ - \ 8}{-1} = 12$$

El punto buscado es $P(-4,\ 12)$; divide al segmento BA en la razón $r = -2$.

La gráfica correspondiente es



Observar que la longitud del segmento PA tiene dirección contraria a la del segmento BA .

Ejemplo 2.15. División de un segmento en tres partes iguales. Hallar los puntos de trisección del segmento cuyos extremos son los puntos $A\ (-2{,}3)$ y $B\ (6{,}\text{-}3)$.

Solución

Antes de resolver el ejercicio se debe considerar lo siguiente:

Es importante establecer lo que significa el vocablo ***trisección***. Para este caso en particular, ejemplificarlo en un segmento de recta cualquiera y calcular las razones correspondientes.

Los puntos P y Q dividen al segmento AB en tres partes iguales (puntos de trisección).

La longitud del segmento AP es la tercera parte de la longitud del segmento AB; y la longitud del segmento PB es dos terceras partes de la longitud del segmento AB, entonces el punto P divide al segmento AB en la razón

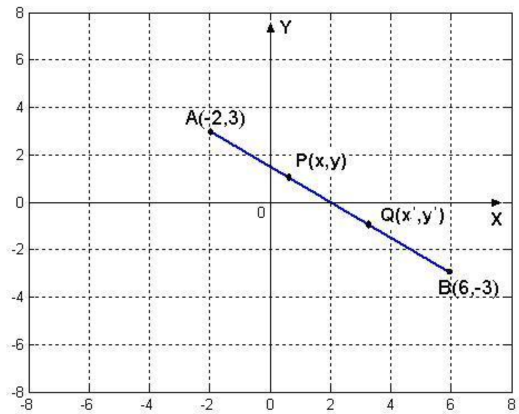
$$r = \frac{AP}{PB} = \frac{\frac{1}{3}AB}{\frac{2}{3}AB} = \frac{1}{2};$$

Por otra parte, el punto Q divide al segmento AB en la razón

$$r = \frac{AQ}{QB} = \frac{\frac{2}{3}AB}{\frac{1}{3}AB} = 2$$

La longitud del segmento AQ es las dos terceras partes de la longitud del segmento AB; y la longitud del segmento QB es la tercera parte de la longitud del segmento AB, entonces el punto Q divide al segmento AB en la razón $r = 2$

Una vez realizado lo anterior, procedemos a graficar el segmento de recta AB, e indicamos en forma aproximada los puntos de trisección P y Q.



Calcular primero las coordenadas (x, y) del punto P. El punto P divide al segmento AB en la razón:

$$r = \frac{AP}{PB} = \frac{\frac{1}{3}L}{\frac{2}{3}L} = \frac{1}{2}$$

L es la longitud del segmento AB.

Al sustituir en la expresión $x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}$, se tiene:

$$x = \frac{-2 + \frac{1}{2}(6)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{-2 + 3}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

Y al utilizar $y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}$, se obtiene la ordenada

$$y = \frac{3 + \frac{1}{2}(-3)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{3 - \frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} = 1$$

Por lo tanto, las coordenadas del punto P son $P\left(\frac{2}{3},\ 1\right)$.

Para calcular las coordenadas del punto Q. Se tiene que la razón en Q divide al segmento AB es

$$r = \frac{AQ}{QB} = \frac{\frac{2}{3}L}{\frac{1}{3}L} = 2$$

Al sustituir en las expresiones correspondientes

$$x' = \frac{x_1 + rx_2}{l + r} = \frac{-2 + 2\,(6)}{1 + 2} = \frac{10}{3}$$

$$y' = \frac{y_1 + ry_2}{l + r} = \frac{3 + 2\,(-3)}{1 + 2} = \frac{-3}{3} = -1$$

Las coordenadas del punto Q son $Q\left(\frac{10}{3},\ -1\right)$.

Los puntos que trisecan al segmento AB son: $P\left(\frac{2}{3},\ 1\right)$ y $Q\left(\frac{10}{3},\ -1\right)$

PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO DE RECTA

Un caso particular de un punto P que divide a un segmento de recta en la razón $r=1$, es el ***punto medio de un segmento de recta.***

En este caso del punto medio de un segmento de recta, divide al segmento AB en la razón $r=1$

$$r = \frac{AP}{PB}; \quad \text{donde} \quad AP = PB \quad \therefore \quad r = 1$$

En este caso las expresiones obtenidas

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} \quad \text{y} \quad y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}$$

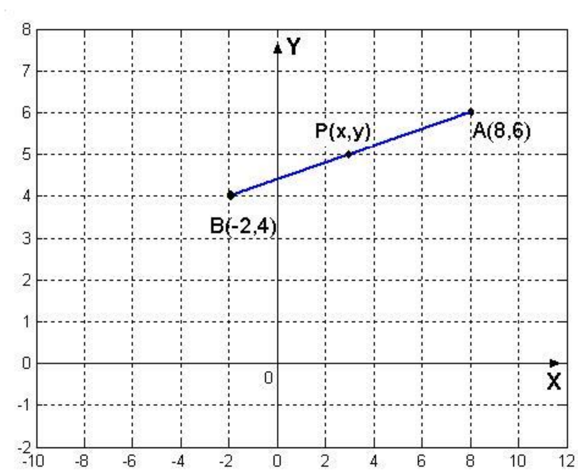
se transforman en

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad \text{y} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Ejemplo 2.16. Aplicación directa. Encontrar las coordenadas del punto medio del segmento cuyos extremos son los puntos $A(8,6)$, $B(-2,\ 4)$.

Solución

Graficar el segmento de recta AB



Al aplicar las expresiones $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ y $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$; identificando las coordenadas (x_1, y_1) con las coordenadas del punto $A(8,6)$ y las coordenadas (x_2, y_2) con las coordenadas del punto $B(-2,\ 4)$. ***Observar que la identificación de coordenadas en este caso es indistinta.***

La abscisa del punto medio es

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{8 + (-2)}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Y la ordenada del punto medio es

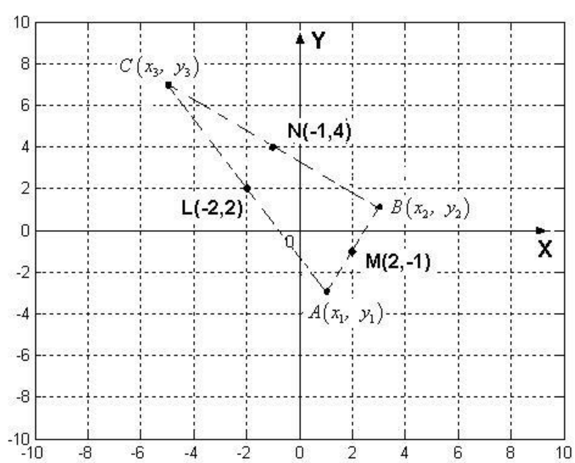
$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{6+4}{2} = 5$$

Luego, el punto medio del segmento de recta AB es $P(3,5)$.

Ejemplo 2.17. Aplicación inversa y manipulación algebraica. Los puntos medios de los lados de un triángulo son los puntos $M(2,-1)$, $N(-1,4)$ y $L(-2,\ 2)$. Encontrar las coordenadas de los vértices del triángulo.

Solución

Indicar en un gráfico los puntos medios dados y suponer que los vértices del triángulo están localizados en los puntos $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ y $C(x_3,\ y_3)$,



Encontrar primero las abscisas de los puntos A, B y C, esto es, x_1, x_2 y x_3.

Como M es punto medio de del lado AB, entonces al aplicar la expresión $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$; donde el valor de la abscisa del punto medio es $x=2$, se tiene:

$$2 = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{; de donde } x_1 + x_2 = 4 \text{.........(1)}$$

Ahora, N es punto medio del lado BC, la abscisa del punto N es $x=-1$, entonces:

$$-1 = \frac{x_2 + x_3}{2} \text{, por lo tanto } x_2 + x_3 = -2 \text{.........(2)}$$

y L es el punto medio del lado AC, la abscisa es $x=-2$; por lo tanto

$$-2 = \frac{x_1 + x_3}{2} \text{, de donde } x_1 + x_3 = -4 \text{.........(3)}$$

Las ecuaciones (1), (2) y (3) es un sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas:

$x_1 + x_2 = 4$ (1)

$x_2 + x_3 = -2$ (2)

$x_1 + x_3 = -4$ (3)

Solución del sistema de ecuaciones por eliminación

Al restar la ecuación (2) de la ecuación (1)

$$x_1 - x_3 = 6 \text{……………………….(4)}$$

Al sumar las ecuaciones (3) y (4)

$$2x_1 = 2 \qquad \text{de donde} \qquad x_1 = 1$$

Al sustituir en la ecuación (1) obtenemos:

$$x_2 = 4 - 1 = 3$$

Y al sustituir x_2 en ecuación (2) $x_3 = -5$

Las abscisas de los vértices del triángulo son

$$x_1 = 1 \ ; \ x_2 = 3 \ ; \ x_3 = -5$$

Ahora para obtener las ordenadas de los puntos A, B y C, utilizamos la expresión $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ y como M, N y L son puntos medios de los segmentos AB, BC y CB respectivamente, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas:

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = -1; \qquad y_1 + y_2 = -2 \text{…………..(5)}$$

$$\frac{y_2 + y_3}{2} = 4; \qquad y_2 + y_3 = 8 \text{…………….(6)}$$

$$\frac{y_1 + y_3}{2} = 2; \qquad y_1 + y_3 = 4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

Resolvemos por suma y resta

A la ecuación (5) le restamos la ecuación (6)

$$y_1 - y_3 = -10 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

A la ecuación (8) le sumamos la ecuación (7)

$$2y_1 = -6 \qquad \text{por lo tanto} \qquad y_1 = -3$$

Sustituyendo en ecuación (8) $y_3 = 7$

Y al sustituir y_1 en ecuación (5):

$$-3 + y_2 = -2 \qquad \text{se tiene} \qquad y_2 = 1$$

Finalmente, los vértices del triángulo son los puntos $A(1,-3)$, $B(3,1)$, $C(-5,7)$.

LUGARES GEOMÉTRICOS EN EL PLANO CARTESIANO

En esta sección se trata brevemente el tema de lugares geométricos, el tema requiere de una base de conocimientos matemáticos, que regularmente a estas alturas no se tiene, por lo que su desarrollo será limitado, pero a la vez se proporcionará lo necesario para su comprensión.

DEFINICIÓN. El conjunto de puntos en el plano, y solamente aquellos puntos cuyas coordenadas satisfagan una ecuación, se llama ***GRÁFICA*** de la ecuación o bien, su ***LUGAR GEOMÉTRICO.***

PROBLEMAS DE LA GEOMETRÍA

En la Geometría Analítica existen dos problemas fundamentales:

PROBLEMA 1. Dada la condición o condiciones que deben cumplir los puntos de un lugar geométrico, determinar su ecuación.

PROBLEMA 2. Dada una ecuación interpretarla geométricamente, esto es, conocida una ecuación, construir su gráfica correspondiente.

Primer problema fundamental de la geometría analítica

Vamos a considerar el primer problema fundamental de la geometría analítica, a saber:

Dada una figura geométrica, o la condición que deben cumplir los puntos de la misma, determinar su ecuación.

Para poder resolver el primer problema fundamental de la Geometría Analítica necesitamos la gráfica de una curva o bien las condiciones que deben cumplir los puntos que la componen.

De esta manera decimos que una curva está bien definida, si la descripción de ésta es de tal naturaleza que sea posible identificarla de una manera exacta de entre los demás objetos de su clase. Así, consideramos que estamos definiendo una curva plana del tipo M por medio de una propiedad P que únicamente posee M.

Generalmente, se define una curva como el lugar geométrico de todos aquellos puntos $P(x,y)$, que satisfacen una o más condiciones geométricas dadas.

Ejemplos para obtener ecuaciones de lugares geométricos

Nota. *Es importante mostrar que en cada uno de los siguientes ejercicios se obtiene una relación que contiene las variables* x e y *denominadas ecuaciones con dos variables.*

Ejemplo 2.17. Hallar la ecuación del conjunto de puntos $P(x,y)$, tal que equidistan de los puntos $A(3,-5)$ y $B(-2,7)$

Es conveniente realizar un gráfico donde se muestren los puntos $A(3,-5)$ y $B(-2,7)$ para intentar marcar los puntos que equidistan (están a la misma distancia) de estos dos puntos.

Se mostrará que los puntos que cumplen con esta condición están sobre la mediatriz del segmento determinado por los extremos A y B.

Solución analítica

La distancia del punto P al punto A es:

$$dPA=\sqrt{(x-3)^2+(y-(-5))^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y+5)^2}$$

La distancia del punto P al punto B es:

$$dPB=\sqrt{\left(x-(-2)\right)^2+(y-7)^2}=\sqrt{(x+2)^2+(y-7)^2}$$

La condición es que las dos distancias son iguales (equidistan):

$$\sqrt{(x-3)^2+(y+5)^2}=\sqrt{(x+2)^2+(y-7)^2}$$

Al elevar al cuadrado ambos miembros de la expresión y simplificando se tiene:

$$x^2-6x+9+y^2+10y+25=x^2+4x+4+y^2-14y+49$$

$$5x-12y+10=0$$

Ejemplo 2.18. Hallar la ecuación del conjunto de puntos $P(x,y)$l que equidistan 5 unidades del punto fijo $A(3,-5)$.

Solución

La distancia del punto P al punto A es

$$dPA=\sqrt{(x-3)^2+\left(y-(-5)\right)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y+5)^2}$$

La condición es que esta distancia es siempre igual a 5

$$dPA = \sqrt{(x-3)^2 + (y-(-5))^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y+5)^2} = 5$$

de donde

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y+5)^2} = 5$$

elevando al cuadrado ambos miembros y simplificando, se tiene

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 10y + 25 = 25$$

Finalmente, la ecuación del lugar geométrico

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y + 9 = 0$$

Segundo problema fundamental de la geometría analítica

El segundo problema fundamental de la geometría analítica establece:

Dada una ecuación interpretarla geométricamente, esto es, conocida una ecuación, construir su gráfica correspondiente.

En este instante, se supone que ya se tiene el concepto de una ecuación con dos variables, la cual, se puede expresar como una relación $S(x,y) = 0$ la cual en general depende de las dos variables x e y.

Es importante hacer énfasis que se está trabajando con el conjunto de los números reales $\Re$, por lo que existe un número infinito de pares de valores de x e y que satisfacen la ecuación $S(x,y)=0$ (al sustituir los pares ordenados se cumple la igualdad). Cada uno de tales pares de valores son las coordenadas (x, y) de un punto del plano.

Además, cualquier punto cuyas coordenadas satisfacen la ecuación, pertenece a la gráfica de la ecuación.

Nota: *En este momento restringiremos la gráfica con una tabulación y su representación en el plano cartesiano.*

Ejemplo 2.19. Encontrar parejas de puntos que satisfacen la ecuación $y-3x-2=0$ y graficar.

Solución:

Para encontrar puntos que satisfacen la ecuación, vamos a efectuar una tabulación, para ello, debemos dar valores a la variable x y encontrar los de y utilizando la ecuación dada.

Un ejemplo para encontrar valores de y, analicemos el caso de $x = -3$; sustituimos en la ecuación dada

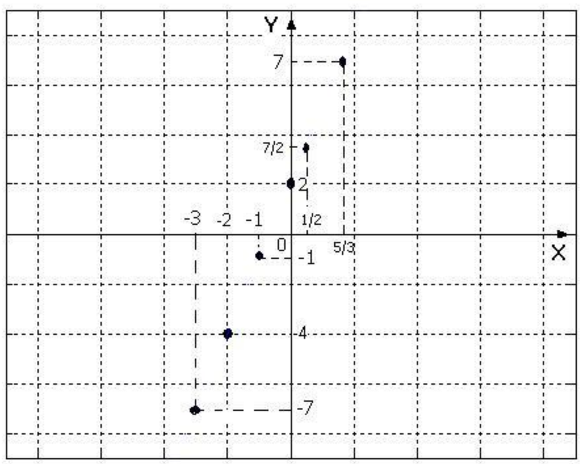
$$y=3(-3)+2; \quad y=-9+2 \quad \therefore \quad y=-7$$

La tabulación para algunos valores es:

x	y	$Puntos$
-3	-7	$A\ (-3.\ -7)$
-2	-4	$B\ (-2,\ -4)$
-1	-1	$C\ (-1,\ -1)$
0	2	$D\ (0,\ 2)$

1/2	*7/2*	$E\ (\frac{1}{2},\ \frac{7}{2})$
5/3	*7*	$F\ (\frac{5}{3},\ 7)$

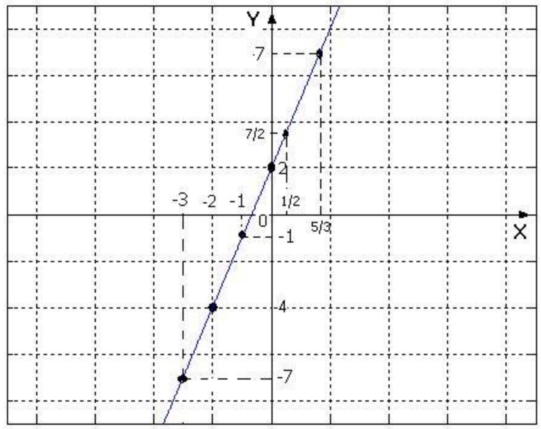
En la tabla anterior se muestra que en la tabulación, uno de los puntos es la pareja ordenada es $(-3,\ -7)$, y que el punto se ha nombrado como A. Entonces, el punto es $A(-3,-7)$. Así, cada par de valores correspondientes es tomado como las coordenadas de un punto diferente, esto nos permite trazar varios puntos en nuestro sistema de coordenadas cartesiano como se muestra en la figura siguiente. Se recomienda graficar únicamente los puntos obtenidos.



Nota: Los valores asignados a la variable x fueron tomados arbitrariamente del conjunto de los números reales. Se recomienda comprobar los valores encontrados para la variable y.

¿Se debe dibujar una línea CONTINUA que pase por todos los puntos marcados?

La respuesta es ***si***, ya que al hacer esto, establecemos que en la gráfica, entre dos puntos sucesivos cualesquiera, existe una infinidad de puntos que satisfacen a la ecuación y debido a la imposibilidad de determinar esta gran variedad de valores, suponemos que la gráfica de la ecuación es continua y se determina unir los puntos.



El lugar geométrico de la ecuación $y-3x-2=0$ corresponde como se puede observar a una ***línea recta.***

Actividad de aprendizaje teórico-práctica 2

Encontrar parejas de puntos que satisfacen la ecuación $x^2+y^2-49=0$ y graficar.

Solución. Para encontrar valores de y, despejemos la variable y.

$$y=\pm\sqrt{}$$

$$y=\pm\sqrt{49-x^2}$$

La tabulación para algunos valores es:

x	y	$Puntos$
-8		
-7		
-6	$\pm\sqrt{13}$	$B\left(-6,\sqrt{13}\right)$ $C\left(-6,-\sqrt{13}\right)$
-4	$\pm\sqrt{\quad}$	$D\left(-4,\quad\right)$ $E\left(-4,-\quad\right)$
0		$F(0,\ )$ $G(0,\ )$
5		$H\left(5,\quad\right)$ $I\left(5,\quad\right)$

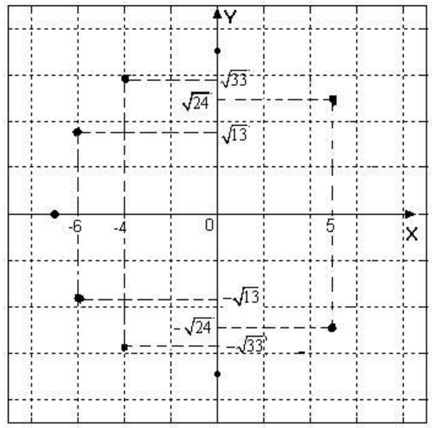
x	y	$Puntos$
-8	*No hay imagen*	*No hay punto*
-7	0	$A(-7,0)$
-6	$\pm\sqrt{13}$	$B\left(-6,\sqrt{13}\right)$ $C\left(-6,-\sqrt{13}\right)$
-4	$\pm\sqrt{33}$	$D\left(-4,\sqrt{33}\right)$ $E\left(-4,-\sqrt{33}\right)$
0	± 7	$F(0,7)$ $G(0,-7)$
5	$\pm\sqrt{24}$	$H\left(5,\sqrt{24}\right)$ $I\left(5,-\sqrt{24}\right)$

Observar que para un valor de x se obtienen dos valores para y, también se muestra que para algunos valores de x no se tienen valores de y, por ejemplo, para $x=8$

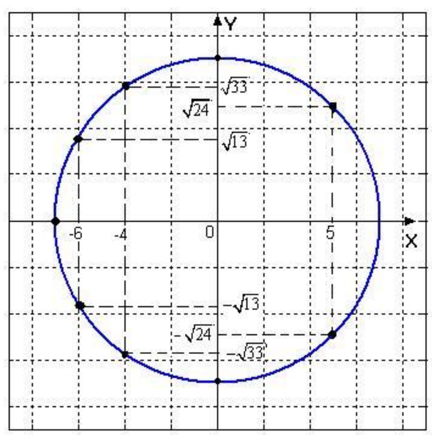
$$y=\pm\sqrt{49-64}=\pm\sqrt{-15}\notin\Re$$

La expresión $\sqrt{-15}\notin\Re$ significa que $\sqrt{-15}$ no es número real.

Gráfica de los puntos



Los puntos se pueden unir y obtener todos los puntos que equidistan 7 unidades del origen. El lugar geométrico que corresponde a la ecuación $x^2 + y^2 - 49 = 0$ es una ***circunferencia*** con centro en el origen y radio 7:



La gráfica es el lugar geométrico que corresponde a la ecuación $x^2 + y^2 - 49 = 0$.

Nota. Observa que los valores que se le pueden asignar a la variable x están restringidos al intervalo $-7 \le x \le 7$.

Unidad 3

La recta y su ecuación cartesiana

La recta y su ecuación cartesiana

Propósitos: Al finalizar, el alumno será capaz de obtener la ecuación cartesiana de la recta, dados diversos elementos definitorios.
Resolverá problemas geométricos en diversos contextos, a fin de que se avance en la comprensión del método analítico**.**

Objetivos Generales de la unidad

Objetivo Conceptual. Los alumnos percibirán a los sistemas de coordenadas como la noción fundamental para realizar el estudio analítico de los lugares geométricos.

APRENDIZAJES.

Al finalizar la Unidad el Alumno:

1. Describe a una recta como un lugar geométrico, identificando los elementos que la definen.

2. Entiende a la pendiente de una recta como un invariante.

3. Obtiene la ecuación de una recta dadas dos condiciones.

4. Determina el ángulo que se forma cuando dos rectas se cortan, en términos de sus pendientes.

5. Determina cuando dos rectas son paralelas, perpendiculares o ninguna de las dos a partir de sus ecuaciones.

6. Dadas las ecuaciones de una recta, será capaz de encontrar las ecuaciones de rectas paralelas y/o perpendiculares a ella.

7. Identifica y transita en las diferentes formas de la ecuación de la recta (ordinaria o canónica, general y simétrica).

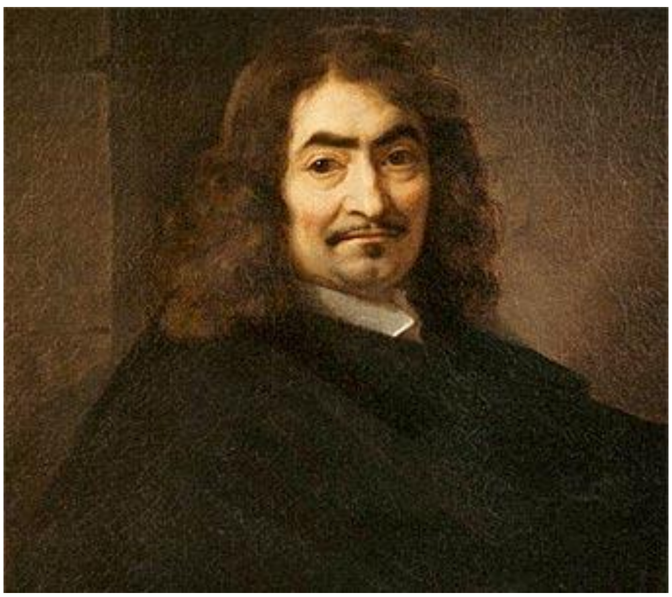
8. Resuelve problemas de corte euclidiano usando geometría analítica.

UNIDAD 3

ELEMENTOS BÁSICOS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

Introducción

Para localizar una librería o un restaurante, generalmente se necesita ubicar el nombre de la calle Londres y la calle Zapata, por ejemplo. De esta manera podemos fácilmente localizar el lugar buscado. Es decir, basta con determinar la intersección de dos lugares y listo. Se requiere de un sistema de referencia y una escala adecuada. Indudablemente que el conocimiento de estos conocimientos se los debemos a personajes tan lúcidos como los franceses René Descartes (1596-1650) y Pierre de Fermat (1601- 1655).



René Descartes

Pierre de Fermat

Antes del siglo XVII, el álgebra y la geometría eran ciencias distintas e independientes. En 1637 Descartes introdujo ideas para unificar estas ramas de las matemáticas: el uso de un sistema coordenado. A este sistema de ideas se le conoce actualmente como Geometría Analítica, la cual combina sistemas coordenados y el álgebra para estudiar la geometría. De manera independiente, en 1636, Fermat propuso un sistema de coordenadas similar al empleado por Descartes.

En esta unidad, te proponemos una serie de actividades para que comprendas los aprendizajes propuestos.

Presentación

Al finalizar esta unidad el alumno será capaz de:

- Obtener la ecuación cartesiana de la recta dados diversos elementos definitorios y resolverá problemas geométricos en diversos contextos para avanzar en la comprensión del método analítico.

Para conseguir esta ambiciosa meta, te proponemos una serie de actividades de aprendizaje, teoría y prácticas que están seguidas de acuerdo con una secuencia lógica propuesta en el programa de la asignatura. Se recomienda seguirlas en el orden que se presentan, sin embargo, puedes estudiar donde consideres necesario, pero recuerda que debes comprender los conceptos antecedentes que se requieren para su entendimiento.

Conceptos clave

Punto: Es una figura geométrica que se determina mediante las distancias ortogonales a los ejes principales, que se indican con dos letras o números: (x, y) en el plano; y con tres en el espacio (x, y, z).

Coordenadas: Son un tipo de coordenadas ortogonales usadas para la representación gráfica de una relación matemática.

Ordenada al origen: Distancia donde corta la recta al eje de las ordenadas al origen de referencia cartesiana.

Plano: Superficie que se determina con solo tres puntos o una recta y un punto.

Segmento dirigido: Es un segmento de recta donde tiene importancia la dirección de su análisis.

Lugar geométrico: Es el conjunto de puntos que cumplen con ciertas condiciones.

Ordenadas: Es la coordenada vertical en un sistema de referencia rectangular.

Abscisas: Es la coordenada horizontal en un sistema de referencia rectangular.

Pendiente: Es la inclinación de una recta con respecto al eje de las abscisas.

Razón: Es una relación entre dos cantidades, generalmente se expresa como fracción.

Punto medio: Es el punto que se encuentra a la misma distancia de dos puntos extremos de un segmento de recta.

Colineal: Que se pueden alinear en línea recta.

Trisección: Que dividen un segmento en tres partes congruentes.

Paralelismo: Se dice que dos rectas son paralelas cuando tienen pendientes iguales.

Perpendicularidad: Se dice que dos rectas son perpendiculares cuando sus pendientes son recíprocas y de signo contario.

Ángulo de inclinación: Es la medida del ángulo que una recta forma con el eje de las abscisas.

Sugerencias

Este contenido está dirigido a los alumnos que desean estudiar de manera autodidacta y a su ritmo. Se recomienda seguir las actividades de aprendizaje y repasar la teoría. Seguir los ejemplos ayudará a adquirir destreza.

En caso de tener preguntas, se sugiere preguntar al profesor o acudir a asesorías con dudas específicas. No está de más el hacer algunas recomendaciones a los estudiantes para que su estudio sea eficaz: leer con atención cada párrafo y comprender lo que se pide, trabajar en un lugar bien ventilado, iluminado y silencioso, sentarse cómodamente en una silla con respaldo y en una mesa libre de obstáculos y tener una libreta de notas para realizar todos los ejercicios propuestos para adquirir seguridad en esta asignatura. Probablemente alguna de estas recomendaciones no sea factible de llevarse a cabo por las condiciones de confinamiento sanitario que estamos viviendo, pero en lo posible, es mejor tratar de respetarlas.

Recuerda que lo más importante es tener una actitud positiva, el deseo y la intención de aprender.

Actividad de aprendizaje teórico-práctica

El concepto de recta

Determina cuales de los siguientes puntos pertenecen a la recta cuya ecuación es $5x-y-6=0$*:* $(2,4)$, $(3,9)$, $(1,-1)$, $(-2,-16)$,$(5,19)$, $(-6,-36)$, $(4,2)$, $(-1,4)$, $(9, 12)$, $(7, 8)$. *Graficar.*

Solución

Para determinar qué puntos pertenecen al lugar geométrico de la ecuación $5x-y-6=0$, debemos sustituir las coordenadas de cada uno de ellos en la expresión y aquellos que satisfacen la expresión algebraica (se tiene una igualdad) pertenecen a la línea recta.

Al sustituir el punto $(2,4)$ en la ecuación se tiene:

$$\begin{aligned}&5(2)-4-6=0\\&10-6-4=0\\&\therefore \quad 0=0\end{aligned}$$

Sustituyendo cada uno de ellos, se encuentra que los puntos que pertenecen al lugar geométrico de la ecuación son $(2,4)$, $(3,9)$, $(1,-1)$, $(-2,-16)$,$(5,19)$, $(-6,-36)$ y los puntos que no pertenecen son $(4,2)$, $(-1,4)$, $(9, 12)$, $(7, 8)$.

En este ejemplo, es importante mostrar que los puntos que pertenecen a la línea recta, al tomar dos cualesquiera de ellos, deben tener la misma pendiente

Para la pareja de puntos $(3,9)$, $(1,-1)$ tenemos

$$m=\frac{9+1}{3-1}=\frac{10}{2}=5$$

Para la pareja de puntos $(-2,-16)$,$(5,19)$ tenemos

$$m=\frac{-16-19}{-2-5}=\frac{-35}{-7}=5$$

Para la pareja de puntos $(3,9),\ (5,19)$ tenemos

$$m=\frac{19-9}{5-3}=\frac{10}{2}=5$$

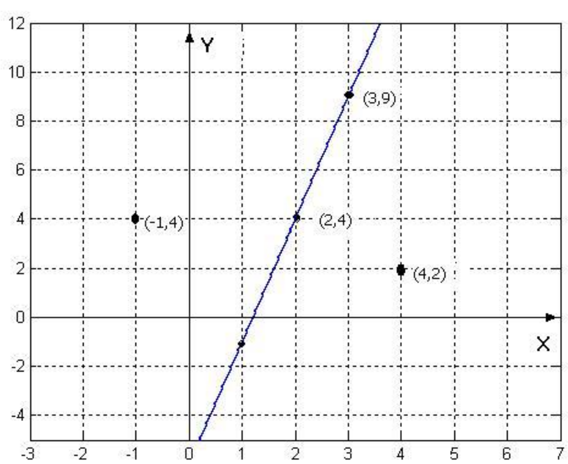
Las parejas de puntos elegidas satisfacen la condición de línea recta, por lo tanto, todas las parejas de puntos que satisfacen la ecuación proporcionan la misma pendiente $m=5$

Observemos que ocurre con la pareja de puntos $(2,4),\ (4,2)$. Recordemos que el punto $(4,2)$ no satisface la ecuación $5x-y-6=0$, en este caso:

$$m=\frac{2-4}{4-2}=\frac{-2}{2}=-1$$

la pendiente no es 5, los puntos $(2,4),\ (4,2),\ (3,9)$ no son colineales.

Recordemos que la gráfica de una línea recta se puede realizar conociendo dos puntos de ella

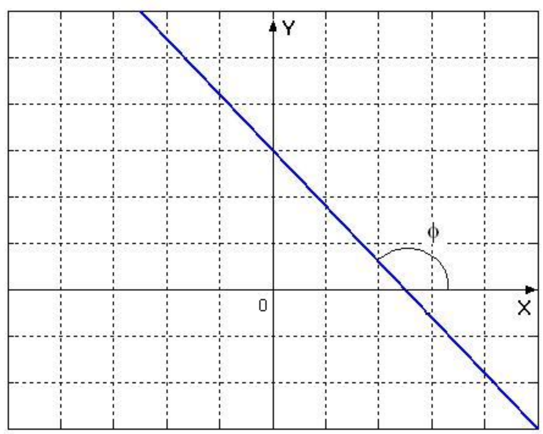


La línea recta como lugar geométrico y su ecuación cartesiana

***Definición*.** En la geometría euclidiana, la línea recta se define como un conjunto de puntos sucesivos tales que todos ellos son colineales.

En la geometría analítica debemos localizar todos y cada uno de los puntos que pertenecen a la línea recta. Para ello, debemos establecer un sistema de coordenadas, el cual, como se estableció en la unidad 2 debe ser un sistema absoluto, pues para cada sistema de coordenadas diferente, los puntos están ubicados en diferente lugar.

En particular usaremos un sistema de coordenadas cartesiano:

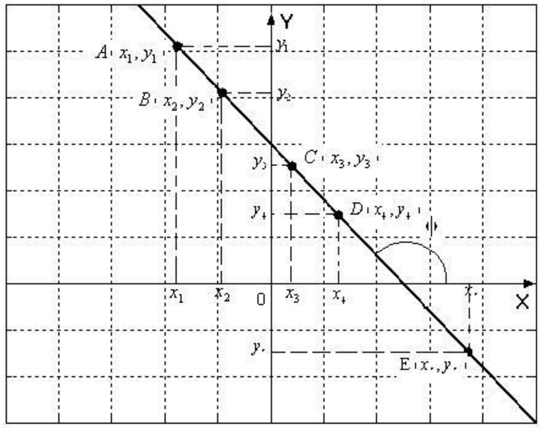


Observamos que el lugar geométrico (línea recta) forma un ángulo con respecto al eje +*X*, el cual se define como el ángulo de inclinación de la recta.

La línea recta es un lugar geométrico en el plano cartesiano, por lo tanto, tiene una ***ecuación cartesiana,*** la cual, de acuerdo, a uno de los principios fundamentales de la geometría analítica se puede determinar si se conoce la condición que cumplen todos y cada uno de estos puntos.

Consideremos varios puntos de la recta localizados en las coordenadas:

$$A(x_1, y_1),\ B(x_2, y_2),\ C(x_3, y_3), D(x_4, y_4)\ y\ E(x_5, y_5)\ .$$



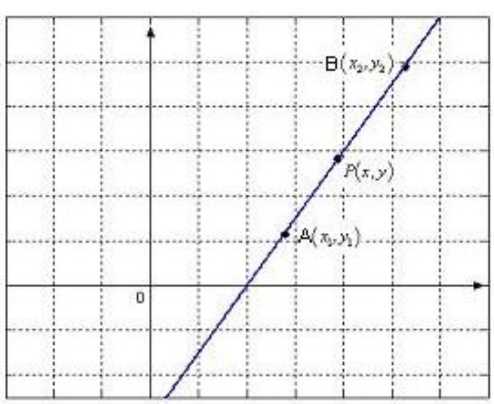
Se observa que todos los segmentos de recta AB, AC, DE, etc., forman parte de la línea recta en estudio, por lo tanto, tienen la misma inclinación y luego la misma pendiente, esto es:

$$m_{AB} = m_{AC} = m_{DE} = m_{AE} = \ldots\ldots$$

Con lo anterior podemos establecer la condición que cumplen todos y cada uno de los puntos de la recta, esta es, ***al considerar dos puntos cualesquiera del conjunto de puntos que pertenecen a la recta, su pendiente debe ser la misma.***

Ecuación cartesiana de la línea recta

Con la condición dada, consideremos que $P(x, y)$ representa a todos y cada uno de los puntos de la línea recta, entonces para encontrar la ecuación (relación entre las variables x y y) utilizamos dos puntos conocidos de ella, por ejemplo $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ como se muestra en la siguiente imagen:



De acuerdo a la condición que deben de cumplir los puntos se tiene que:

$$m_{AP} = m_{AB}$$

Al utilizar la expresión de pendiente para segmentos de recta cuando se conocen dos puntos la expresión anterior se convierte en:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

de donde

$$(y - y_1)(x_2 - x_1) = (x - x_1)(y_2 - y_1)$$

La cual representa la ecuación de la recta cuando se conocen dos puntos de ella.

Al simplificar la expresión anterior se tiene una expresión de la forma $Ax + By + C = 0$ donde A, B y C son constantes, en consecuencia, el lugar geométrico (gráfica) de la recta se define como el lugar geométrico de parejas de puntos ordenados tales que cumplen con la relación $Ax + By + C = 0$

Es importante hacer notar que para graficar una línea recta se requiere conocer únicamente dos puntos de ella.

Diversas representaciones algebraicas de la ecuación de la recta

Hasta el momento se ha mostrado que la expresión de la ecuación de la línea recta es de la forma general: $Ax + By + C = 0$, sin embargo, la ecuación se puede escribir en diferentes expresiones algebraicas, las cuales son de utilidad para obtener información de las mismas.

a) Ecuación de la línea recta conocidos dos puntos

Ejemplo 3.1. Encontrar la ecuación de la línea recta que pasa por los puntos $A(-5,7)$ y $B(4,\ 8)$ y escribirla en la forma general $Ax + By + C = 0$

Solución. Utilizamos la expresión algebraica

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Identificamos los puntos $P_1(x_1, y_1) = A(-5,\ 7)$ y $P_2(x_2, y_2) = B(\ 4,\ 8)$ de aquí $x_1 = -5,\ y_1 = 7,\ x_2 = 4\ y\ y_2 = 8.$

Sustituyendo en la expresión algebraica:

$$\frac{y-7}{x+5}=\frac{8-7}{4+5}$$

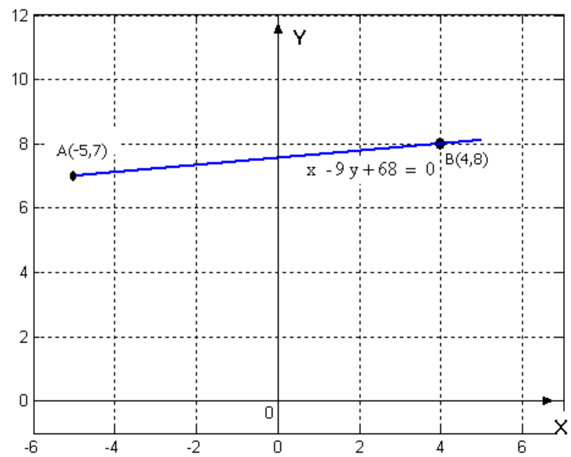
Y efectuando operaciones se obtiene:

$$\frac{y-7}{x+5}=\frac{1}{9}$$

$$(y\ -\ 7)(9)\ =\ (x\ +\ 5)(1)$$

Ecuación en su forma general $x - 9y + 68 = 0$.

La gráfica de la línea recta es:



Ejemplo 3.2. Encontrar la ecuación de la línea recta que pasa por los puntos $P(\ 6,\text{-}\ 4)\ y\ \ Q(5,\ 1)$ y escribirla en su forma general $Ax + By + C = 0$.

Solución. Utilizamos la expresión algebraica

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Identificamos los puntos $P_1(x_1, y_1) = A(6,-4)\ \ y\ \ P_2(x_2, y_2) = B\ (5,1)$ de aquí $x_1 = 6,\ \ y_1 = \text{-}4,\ x_2 = 5\ y\ y_2 = 1$.

Sustituyendo en la expresión anterior

$$\frac{y+4}{x-6} = \frac{1+4}{5-6}$$

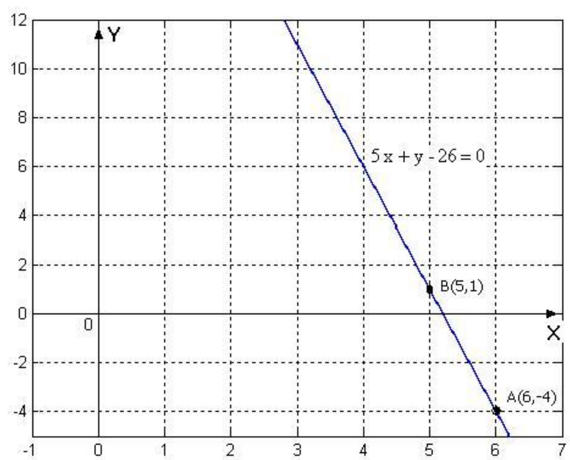
Haciendo operaciones se obtiene

$$\frac{y+4}{x-6}=\frac{5}{-1}$$

$$(y + 4)\ (-1) = (x-6)(5)$$

Ecuación en su forma general $5x + y - 26 = 0$.

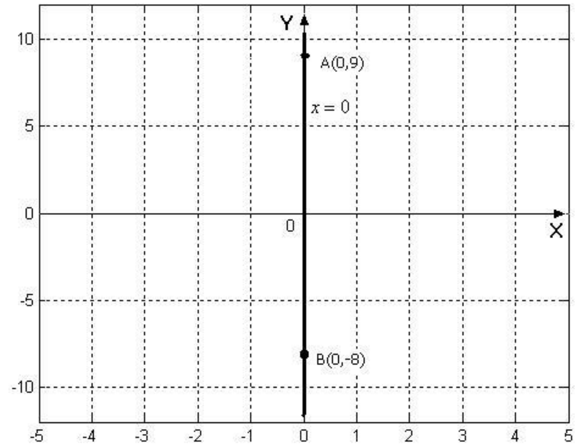
La gráfica de la línea recta es



Ecuaciones de líneas rectas horizontal y vertical

Ejemplo 3.3. Encontrar la ecuación de la línea recta que pasa por los puntos $A(0,\ 9)$ y $B(0,\ -8)$ y escribirla en la forma $Ax+By+C=0$

Solución. La gráfica es:



Observar que los puntos están sobre el eje *Y*, por lo que la línea recta es una recta vertical, por lo tanto, su pendiente no existe.

Si utilizamos la expresión algebraica:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Identificamos los puntos $P_1(x_1,y_1)=A(0,9)\quad y\quad P_2(x_2,y_2)=B\ (0,-8)$

Por lo tanto $x_1 = 0,\ y_1 = 9,\ x_2 = 0\ y\ y_2 = -8$.

Sustituyendo en la expresión $\dfrac{y-y_1}{x-x_1}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ se tiene:

$$\frac{y-9}{x-0} = \frac{-17}{0}$$

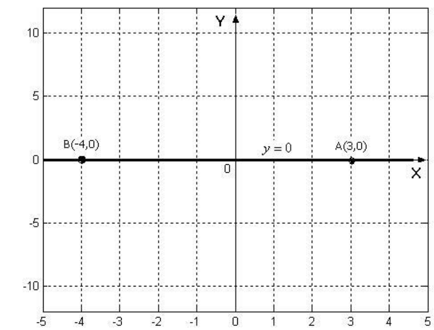
Observamos que el lado derecho de la expresión es una división entre cero, *la división entre cero no existe* (la pendiente de la recta no existe o se dice que es infinita), por lo tanto, el lado izquierdo tampoco debe existir, esto nos obliga a que el denominador del lado izquierdo también debe ser cero, por lo que

$$x-0 = 0$$

La ecuación es $x=0$, (observa que cada punto de la recta tiene abscisa $x=0$)

Ejemplo 3.4. Encontrar la ecuación de la línea recta que pasa por los puntos $P(3,\ 0)\quad y\quad Q(-4,\ 0)$.

Solución. La gráfica es:



Observa que los puntos están sobre el eje *X*, por lo que la línea recta es una recta horizontal, por lo tanto su pendiente es cero.

Al utilizar la expresión algebraica:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

y al hacer la identificación $P_1(x_1,y_1)=A(3,0)\quad y\quad P_2(x_2,y_2)=B(-4,0)$ se tiene:

$$x_1 = 3,\ \ y_1 = 0,\ \ x_2 = -4\ \ y\ \ y_2 = 0$$

Y al sustituir en la expresión matemática:

$$\frac{y-0}{x-3}=\frac{0-0}{-4-3}$$

Realizando operaciones:

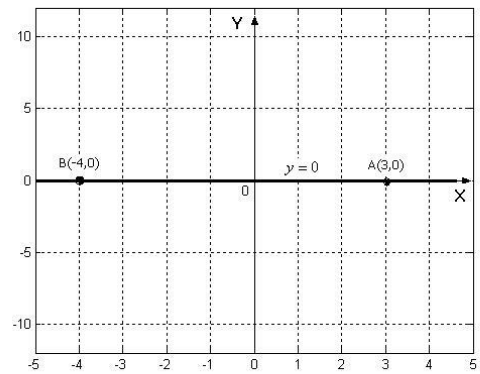
$$\frac{y-0}{x-3}=\frac{0}{-7}$$

$$(y-0)(-7)=(x-3)(0)$$

$$-7y=0$$

La ecuación de la línea recta es $y=0$.

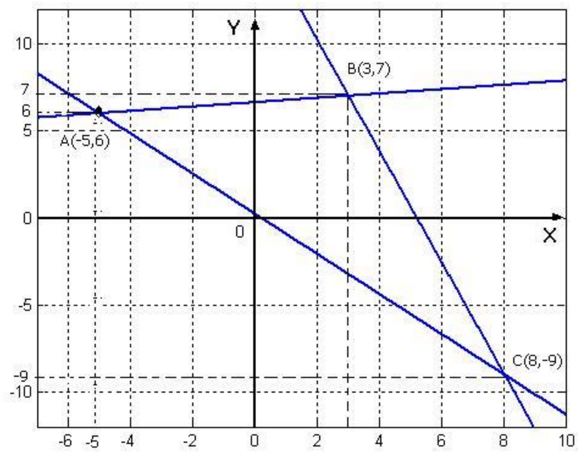
La gráfica de la línea recta coincide con el eje *X.*



Observar que en cada punto de la recta la ordenada es cero, esto es, $y=0$.

Ejemplo 3.5. Considerar los siguientes puntos $A(-5,6)$, $B(3,7)$ y $C(8,-9)$, como los vértices del triángulo ABC. Hallar las ecuaciones de las rectas que contienen a los lados del triángulo. Escribirlas en su forma general.

Solución. *Inicialmente graficamos el triángulo:*



Ahora encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B, para esto se aplica la expresión algebraica conocida:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Al identificar $P_1(x_1,y_1)=A(-5,6)$ y $P_2(x_2,y_2)=B(3,7)$ y sustituir en la expresión algebraica

$$\frac{y-6}{x+5}=\frac{7-6}{3+5}=\frac{1}{8}$$

De donde

$$8(y-6)=1(x-5)$$

$$8y-48=x-5$$

Ordenando términos se tiene la ecuación de la línea recta que pasa por los puntos A y B:

$$x-8y+53=0\ .$$

Siguiendo el mismo procedimiento para los otros lados del triángulo se tiene:

La ecuación de la recta que pasa por los puntos B y C:

$$16x+5y-83=0$$

La ecuación de la recta que pasa por los puntos C y A:

$$15x + 13y - 3 = 0\ .$$

b) Ecuación de la línea recta conocidos un punto y la pendiente

Sea $P_1(x_1, y_1)$ un punto del plano cartesiano XY por donde pasa la línea recta y m la pendiente de la línea recta; de acuerdo a la definición

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

En la expresión $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ es la pendiente m dada de la recta, esto es:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

Por lo tanto

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Esta expresión algebraica es la ecuación de la recta en su forma **punto pendiente.**

Ejemplos de la ecuación de la recta en la forma punto-pendiente.

Ejemplo 3.6. Hallar la ecuación general de la línea recta que corta al eje *X* en *x = 4* cuando su pendiente es $m = -6$.

Solución:

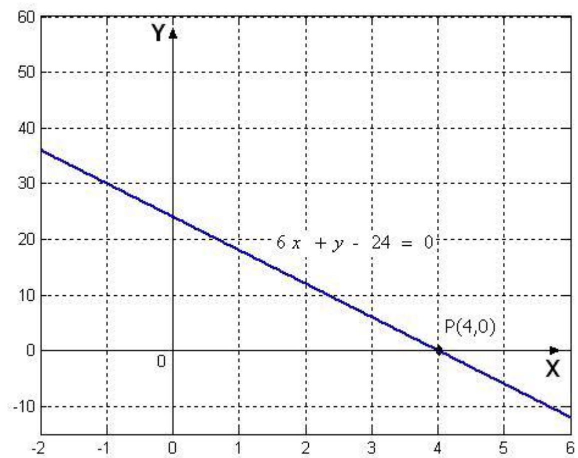
El punto dado, es un punto sobre el eje de las *X's*, entonces identificamos $P_1(x_1, y_1) = P(4,0)$, la pendiente es $m = -6$.

Al utilizar la expresión algebraica $y - y_1 = m(x - x_1)$**,** se obtiene la ecuación de la recta

$$y - 0 = -6(x - 4)$$

Al efectuar operaciones

$$6x + y - 24 = 0\,.$$



Ejemplo 3.7. Considerar el punto $P(-7,-11)$ un punto por el cual pasa la línea recta que tiene una pendiente $m = -\dfrac{3}{7}$, hallar la ecuación de la línea recta.

Solución

La pendiente de la recta es $m = -\frac{3}{7}$ y pasa por el punto $P_1(x_1, y_1) = P(-7, -11)$.

De los datos del ejemplo, la expresión algebraica de la línea recta que se puede utilizar es

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

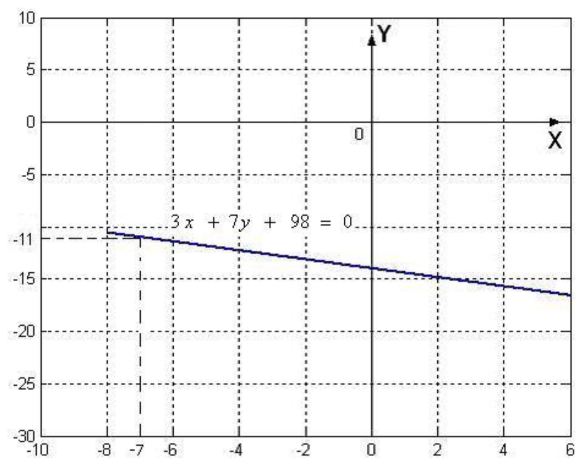
Sustituyendo los datos en la expresión algebraica se obtiene:

$$y + 11 = \left(-\frac{3}{7}\right)(x + 7)$$

Al efectuar operaciones:

$$7(y + 11) = -3(x + 7)$$

$$3x + 7y + 98 = 0.$$



c) Ecuación de la línea recta en su forma pendiente – ordenada al origen.

La ordenada al origen es el punto donde la recta interseca al eje coordenado *Y*, por lo que las coordenadas de un punto con estas características son $(0, b)$, y al utilizar la ecuación de la recta en su forma punto-pendiente

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

donde la pendiente de la recta es m .

Al sustituir las coordenadas del punto y la pendiente se tiene

$$y - b = m(x - 0)$$

De donde se obtiene la expresión de la recta en su forma ***pendiente-ordenada*** al origen.

$$y = mx + b$$

La ordenada al origen b puede ser positiva, cero o negativa,

Nota. Mostrar en cada ejemplo que la recta se puede trazar conociendo dos puntos de ella.

Ejemplo 3.8. Una recta tiene pendiente $m = -6$ y pasa por el punto $P(9,-4)$. Encontrar la ecuación de la línea recta y escribirla en su forma pendiente-ordenada al origen.

De acuerdo a los datos se aplica la expresión algebraica siguiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

para $m = -6$ y el punto $P_1(x_1, y_1) = P(9,-4)$.

Sustituyendo en la expresión algebraica se obtiene

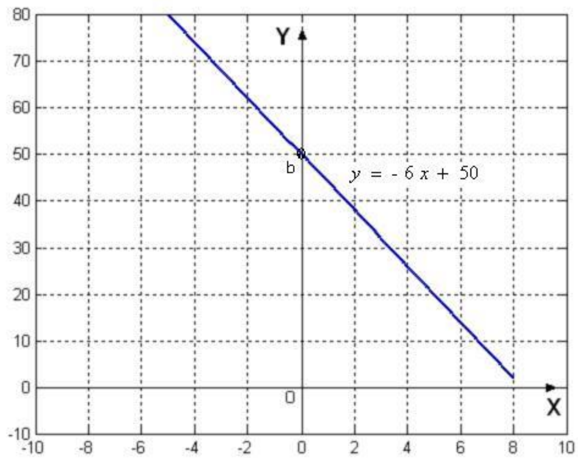
$$y + 4 = -6(x - 9)$$

Efectuando operaciones

$$y + 4 = -6x + 54$$

despejando la variable *y:*

$$y = -6x + 50$$



Ejemplo 3.9. Una recta pasa por los puntos $P(2, -3)$ y $Q(-1, 2)$. Encontrar la ecuación de la línea recta y escribirla en su forma pendiente-ordenada al origen.

Solución. De acuerdo a los datos (dos puntos de la recta conocidos) se utiliza la expresión algebraica siguiente:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Identificamos los puntos $P_1(x_1, y_1) = P(2, -3)$ y $P_2(x_2, y_2) = Q(-1, 2)$.

Sustituyendo los datos en la expresión algebraica se obtiene

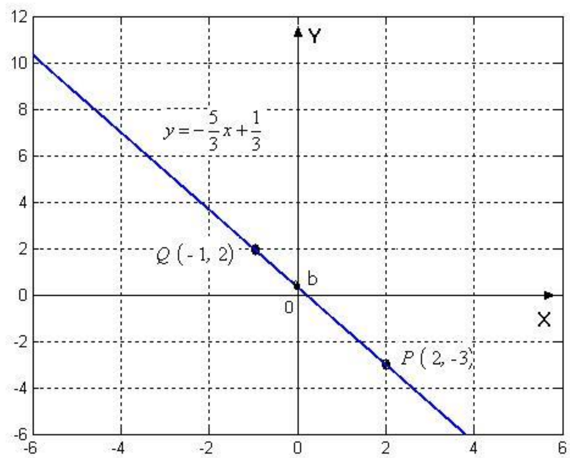
$$\frac{y+3}{x-2} = \frac{2+3}{-1-2}$$

efectuando operaciones

$$(-3)(y+3) = (5)(x-2)$$

despejando la variable *y:*

$$y = -\frac{5}{3}x + \frac{1}{3}$$



d) Ecuación de la línea recta conocidos un punto y ángulo de inclinación.

Ejemplo 3.10. Encuentre la ecuación general de la línea recta que pasa por el punto $P\,(-9{,}8)$ y que tiene un ángulo de inclinación de 32°.

Solución

La pendiente de la recta es $m = tg\,(\,32°\,) = 0.624869$ y pasa por el punto $P_1(x_1, y_1) = P(-9,8)$, entonces al utilizar la expresión algebraica:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

se obtiene

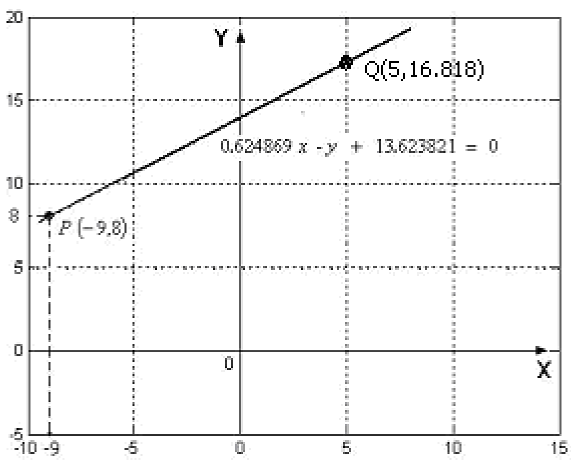
$$y - 8 = 0.624869\,(x + 9)$$

Y efectuando operaciones:

$$0.624869\,x\ -y\ +\ 13.623821=0$$

Para graficar se requieren dos puntos de la recta. Ya se conoce uno $P\,(-9{,}8)$, entonces se obtiene otro punto de la recta, por ejemplo, con $x=5$ en la ecuación, tenemos el punto $Q(5{,}16.818)$.

La gráfica de la línea recta es:



Ejemplo 3.11. Una línea recta tiene un ángulo de inclinación θ = 35° y pasa por el punto $P\,(\text{-}5{,}7)$. Hallar la ecuación de la línea recta y escribirla en su forma pendiente – ordenada al origen.

Solución De acuerdo a los datos, aplicamos la expresión algebraica siguiente:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

para $m\ =\ \tan\theta\ =\ \tan\ 35^0\ =\ 0.7002$ y $P_1(x_1,y_1)=P(-5,7)$.

Sustituyendo los datos en la expresión algebraica se obtiene

$$y - 7 = (0.7002)(x + 5)$$

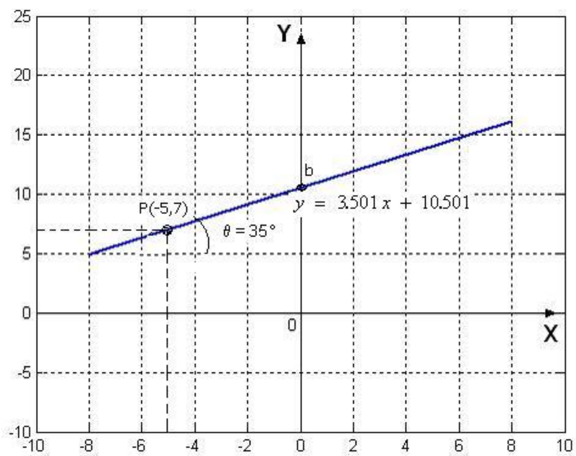
efectuando operaciones:

$$y - 7 = 0.7002\,x + 3.501$$

despejando la variable *y* se tiene la ecuación de la recta en su forma pendiente ordenada al origen:

$$y = 3.501\,x + 10.501$$

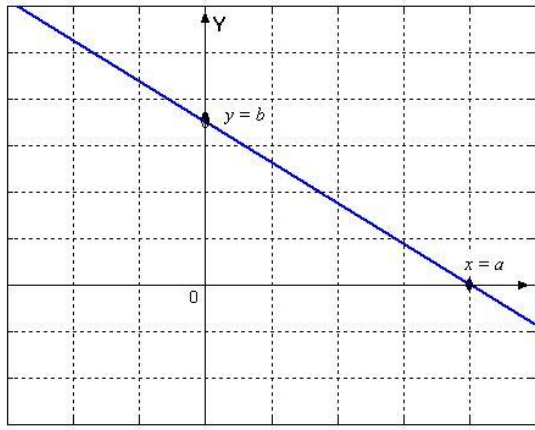
La gráfica es:



e) Ecuación de la línea recta en su forma simétrica

La ecuación de la línea recta en su forma ***simétrica***, se obtiene a partir de la intersección de la recta con los ejes coordenados.

Si consideramos que la recta interseca al eje de las *X´s* en el punto $P_1(a,0)$ y al eje de las *Y´s* en el punto $(0,b)$, ver gráfica



Utilizamos la definición de recta para encontrar su ecuación, esto es en la expresión:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Identificamos los puntos $P_1(\ x_1,y_1\ )=P(a,\ 0)\ \ y\ \ P_2(\ x_2,y_2\ )=Q(0,\ \mathrm{b})$.

Al sustituir se tiene:

$$\frac{y-0}{x-a}=\frac{b-0}{0-a}$$

$$-a(y-0)=b(x-a)$$

$$bx+ay=ab$$

dividiendo entre el producto ab se obtiene la expresión algebraica:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad a\neq 0,\ b\neq 0$$

Observamos que el denominador de la variable x es el valor de la abscisa *a* del punto sobre el eje *X* (abscisa al origen) y que el denominador de la variable y es la ordenada al origen *b*.

Ejemplo 3.12. Hallar la ecuación de la línea recta que tiene un ángulo de inclinación θ = 29° y que pasa por el punto $P(1,-3)$. Escribir la ecuación en su forma simétrica.

Solución. Aplicamos la expresión algebraica siguiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

La pendiente es $m = \tan\theta = \tan 29° = 0.5543$ y el punto $P_1(x_1, y_1) = P(1,-3)$.

Sustituyendo los datos en la expresión algebraica se obtiene

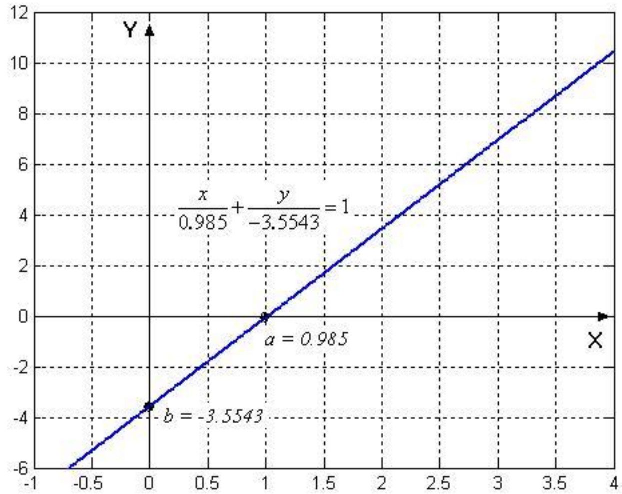
$$(y + 3) = (0.5543)(x-1)$$

Al efectuar operaciones:

$$y + 3 = 0.5543\,x - 0.5543$$

$$y - 3.501\,x = -3.5543$$

$$\frac{x}{0.985} + \frac{y}{-3.5543} = 1$$



Ejemplo 3.13. Hallar la ecuación de la línea recta que tiene pendiente $m=-2$ y pasa por el punto $P(-2,-3)$. Escribir la ecuación en su forma simétrica.

Solución. Al aplicar la expresión algebraica

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

con pendiente $m=-2$ y punto $P_1(x_1,y_1)=P(-2,-3)$. Se tiene

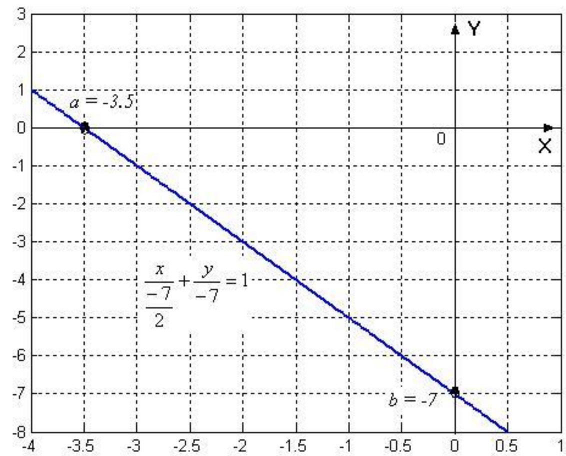
$$y+3=-2(x+2)$$

efectuando operaciones:

$$y+3=-2x-4$$

$$y=-2x-7$$

$$\frac{x}{\frac{-7}{2}}+\frac{y}{-7}=1$$



Ejemplo 3.14. Hallar la ecuación de la línea recta pasa por los puntos $P(-1,4)$ y $Q(3,-5)$. Escribir la ecuación en su forma simétrica.

Solución. De acuerdo a los datos se aplica la expresión algebraica siguiente:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Identificamos los puntos $P_1(x_1,y_1)=P(-1,\ 4)$ y $P_2(x_2,y_2)=Q(3,-5)$.

Sustituyendo los datos en la expresión algebraica se obtiene:

$$\frac{y-4}{x+1}=\frac{-5-4}{3+4}$$

efectuando operaciones:

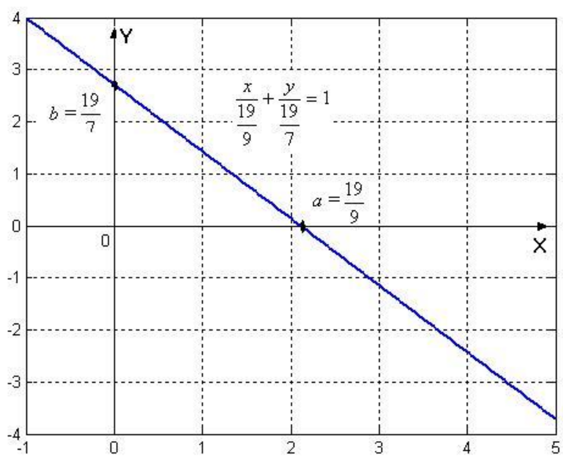
$$7(y-4)= \quad -9(x+1)$$

$$7\,y \;-\; 28 \;=-9\,x-9$$

$$7\,y \;=\; -\;9\,x \;+\;19$$

$$\frac{x}{\frac{19}{9}}+\frac{y}{\frac{19}{7}}=1$$

La gráfica es:



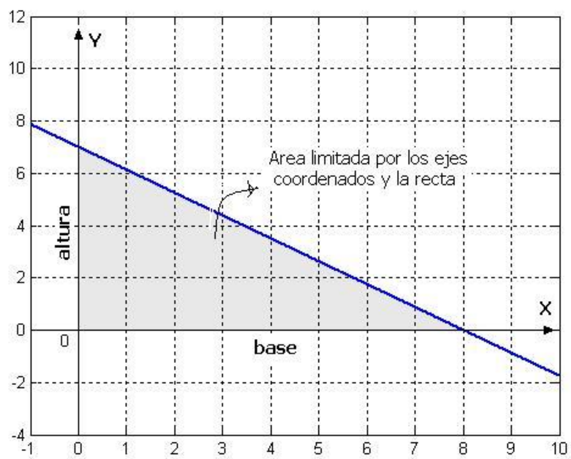
Ejemplo 3.15. Dada la ecuación de la recta $7x+8y=56$, encuentre el área limitada por la línea recta y los ejes de coordenadas.

Solución. Se procede a trazar la gráfica de la línea recta, para ello escribimos la ecuación en su forma simétrica, esta permite encontrar dos puntos de la recta:

$$\frac{7x}{56}+\frac{8y}{56}=\frac{56}{56}$$

$$\frac{x}{8}+\frac{y}{7}=1$$

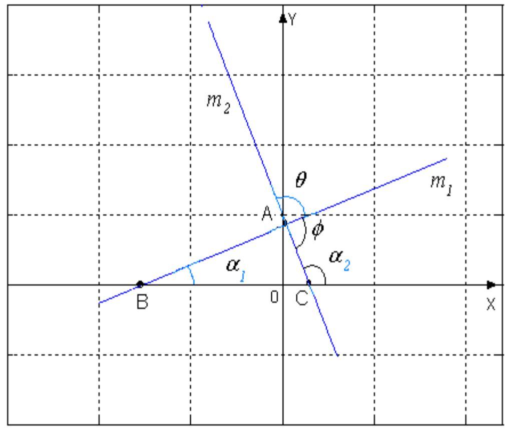
Las intersecciones con los ejes coordenados son los puntos $(8,0)$ y $(0,7)$



Se observa que el área pedida es $A=\frac{(b)(h)}{2}$, se identifica que $b=8$ y $h=7$. Con esto, el área es: $A=\frac{(8)(7)}{2}=28$ unidades cuadradas.

Ángulo comprendido entre dos segmentos de recta

Consideremos el caso de tener dos segmentos de recta con pendientes m_1 y m_2 respectivamente como se muestra en la figura:



Es importante medir los ángulos como lo establece la trigonometría, esto es, en sentido contrario a las manecillas del reloj.

El objetivo es encontrar el ángulo que forman los segmentos de recta.

Tratamiento geométrico.

Los intervalos de valores válidos para los ángulos $(\theta \text{ y } \phi)$ son:

$$0 \le \theta \le 180^0 \quad \text{y} \quad 0 \le \phi \le 180^0$$

En la figura observamos que si se calcula uno de ellos $(\theta \text{ o } \phi)$, el otro queda completamente determinando ya que los ángulos son suplementarios $\theta + \phi = 180^0$.

El punto de intersección de los segmentos y los puntos de intersección de cada uno de los segmentos con el eje horizontal, forma el triángulo *ABC*, en el cual se cumple la relación

$$\theta + \alpha_1 = \alpha_2$$

Con el uso de las pendientes, determinamos los ángulos de inclinación de cada uno de los segmentos, utilizando $m = tan\,\alpha$.

Se observa que α_1 es el ángulo de inclinación de la recta m_1, por lo tanto $\alpha_1 = ang\tan m_1$ y que α_2 es el ángulo de inclinación de la recta m_2, por lo tanto $\alpha_2 = ang\,tan\,m_2$.

Como $\theta = \alpha_2 - \alpha_1$

Entonces $\theta = ang\,tan\,m_2 - ang\,tan\,m_1$

Tratamiento analítico.

De acuerdo a la propiedad del ángulo externo (***la suma de los ángulos interiores de un triángulo, es igual al ángulo externo***) $\theta + \alpha_1 = \alpha_2$, luego $\theta = \alpha_2 - \alpha_1$

Aplicando la función tangente a ambos lados de la expresión $tan\,\theta = tan(\alpha_2 - \alpha_1)$ y utilizando relaciones trigonométricas:

$$tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{sen(\alpha_2 - \alpha_1)}{cos(\alpha_2 - \alpha_1)} = \frac{sen\alpha_2\, cos\,\alpha_1 - sen\alpha_1\, cos\,\alpha_2}{cos\,\alpha_2\, cos\,\alpha_1 + sen\alpha_2 sen\alpha_1}$$

dividiendo entre $cos\,\alpha_2\, cos\,\alpha_1$

$$= \frac{\frac{sen\alpha_2\, cos\,\alpha_1}{cos\,\alpha_2\, cos\,\alpha_1} - \frac{sen\alpha_1\, cos\,\alpha_2}{cos\,\alpha_2\, cos\,\alpha_1}}{\frac{cos\,\alpha_2\, cos\,\alpha_1}{cos\,\alpha_2\, cos\,\alpha_1} + \frac{sen\alpha_2 sen\alpha_1}{cos\,\alpha_2\, cos\,\alpha_1}} = \frac{tan\,\alpha_2 - tan\,\alpha_1}{1 + tan\,\alpha_2\, tan\,\alpha_1} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$$

Por lo tanto, si dos segmentos de recta tienen pendientes m_1 y m_2 respectivamente, entonces el ángulo entre los segmentos de recta es:

$$tan\,\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$$

Se deberá hacer la observación que $1+m_2m_1 \neq 0$, y si se considera pertinente trabajar el caso cuando $1+m_2m_1 \to 0$, entonces:

$$\lim_{1+m_2m_1\to 0} tan\,\theta = \lim_{1+m_2m_1\to 0} \frac{m_2-m_1}{1+m_2m_1} \to \infty$$

Lo anterior ocurre cuando el ángulo $\theta \to \frac{\pi}{2} = 90^0$.

Condiciones de paralelismo y perpendicularidad

De esta manera establecemos la ***condición de perpendicularidad*** para dos segmentos dados $1+m_2m_1 = 0$, la expresión es equivalente a:

$$m_2m_1 = -1 \qquad \text{o} \qquad m_2 = -\frac{1}{m_1} \qquad \text{o} \qquad m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

Esto es, las pendientes de dos segmentos de recta perpendiculares tienen pendientes recíprocas y de signo contrario.

La expresión no es válida para rectas paralelas a los ejes coordenados

$$m_2 = m_1 = 0$$

En el caso de que las rectas sean paralelas, se dice que el ángulo que forman es de $0^0 \quad \therefore \quad tan\,0^0 = 0$, por lo que la expresión $tan\,\theta = \frac{m_2-m_1}{1+m_2m_1} = 0$ se cumple sólo cuando el numerador es igual a cero, esto es

$$m_2 - m_1 = 0$$

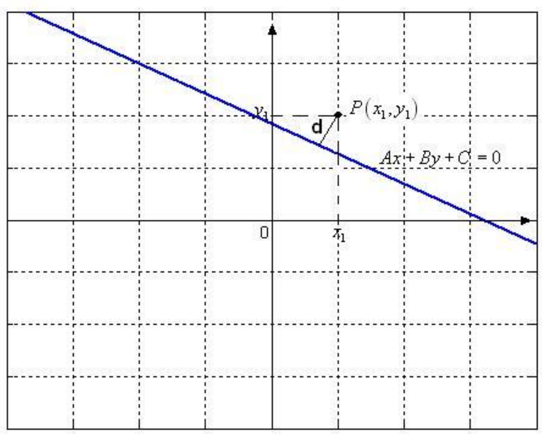
Lo cual equivale a $m_2 = m_1$

Esto es, las pendientes de dos segmentos de recta paralelas tienen pendientes iguales.

Distancia de un punto a una línea recta

Una de las aportaciones importantes de la ecuación de la recta en su forma normal es la de obtener la expresión algebraica de la distancia de un punto a una recta.

Se va encontrar la expresión que permite calcular la distancia de la recta cuya ecuación es la expresión algebraica $Ax + By + C = 0$ al punto de coordenadas $P(x_1, y_1)$ Observar la siguiente figura:



Como la ecuación de la recta en su forma general $Ax + By + C = 0$ es equivalente a la ecuación de la recta en su forma normal $x\cos(\omega) + ysen(\omega) - p = 0$, entonces, los coeficientes de ambas ecuaciones son proporcionales, es decir:

$$\cos(\omega) = Ak \quad , \quad sen(\omega) = Bk \quad \text{y} \quad -p = Ck$$

donde k es la constante de proporcionalidad.

El valor de k se puede obtener de la siguiente manera:

Las dos primeras igualdades se elevan al cuadrado y se suman:

$$\cos^2(\omega) = (Ak)^2$$

$$+$$

$$sen^2(\omega) = (Bk)^2$$

$$\cancelto{1}{\cos^2(\omega) + sen^2(\omega)} = (Ak)^2 + (Bk)^2$$

$$1 = (Ak)^2 + (Bk)^2$$

Al despejar k se obtiene

$$k = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Por lo tanto, los coeficientes que acompañan a las dos ecuaciones de la misma recta se encuentran relacionados mediante las siguientes expresiones

$$\cos(\omega) = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad sen(\omega) = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \text{y} \quad -p = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

O bien

$$A = \pm\sqrt{A^2 + B^2}\cos(\omega), \quad B = \pm\sqrt{A^2 + B^2}\,sen(\omega) \quad \text{y} \quad C = \pm\sqrt{A^2 + B^2}\,p$$

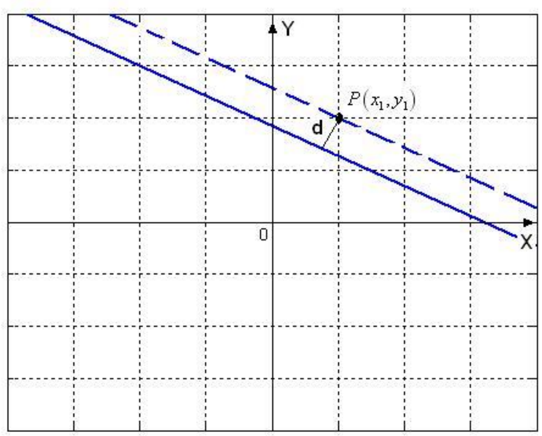
Al sustituir en la ecuación de la recta en su forma general $Ax+By+C=0$ se tiene la ecuación equivalente

$$x\left(\pm\sqrt{A^2+B^2}\cos(\omega)\right)+y\left(\pm\sqrt{A^2+B^2}sen(\omega)\right)+\left(\pm\sqrt{A^2+B^2}\,p\right)=0$$

Y al comparar con la ecuación de la recta en su forma normal $x\cos(\omega)+ysen(\omega)-p=0$ se obtiene la ecuación equivalente de la recta en su forma general

$$x\left(\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}\right)+y\left(\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}\right)+\left(\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}\right)=0.$$

Finalmente, para calcular la distancia *d* que hay de la recta $x\cos(\omega)+ysen(\omega)-p=0$ al punto $P(x_1,y_1)$, se requiere trazar una recta paralela a la que pase por el punto $P(x_1,y_1)$ y cuya ecuación normal es $x\cos(\omega)+ysen(\omega)-(p+d)=0$.



El punto $P(x_1,y_1)$ pertenece a la recta paralela, por lo tanto, satisface a la ecuación, esto es

$$x_1\cos(\omega)+y_1sen(\omega)-(p+d)=0,$$

Al despejar el valor de la distancia d se tiene:

$$d = x_1 \cos(\omega) + y_1 \operatorname{sen}(\omega) - p$$

Y al sustituir las expresiones

$$\cos\omega = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \operatorname{sen}\omega = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \quad -p = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

se tiene:

$$d = x_1\left(\frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}\right) + y_1\left(\frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}\right) + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

O bien:

$$d = \frac{\mathrm{A}\,x_1 + \mathrm{B}\,y_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

La cual es la expresión para calcular la distancia de un punto a una recta.

En resumen, se tiene que la distancia de una línea recta cuya ecuación en su forma general es $Ax + By + C = 0$ al punto P_1 cuyas coordenadas son (x_1, y_1) se calcula con la expresión algebraica siguiente:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

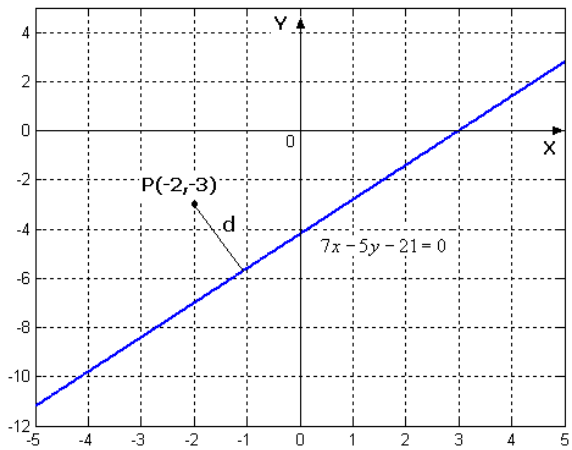
Resolución de problemas usando geometría analítica

a) Distancia de una recta a un punto

Ejemplo 3.16. Encontrar la distancia del punto $P(-2,-3)$ a la línea recta $7x-5y-21=0$.

Solución

Graficamos



En la expresión para calcular la distancia de un punto a una línea recta:

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

se sustituyen los coeficientes $A=7$, $B=-5$, $C=-21$ y las coordenadas del punto $P_1(x_1,y_1)=P_1(-2,-3)$.

$$d=\frac{|(7)(-2)+(-5)(-3)-21|}{\sqrt{(7)^2+(-5)^2}}$$

Realizando operaciones se tiene:

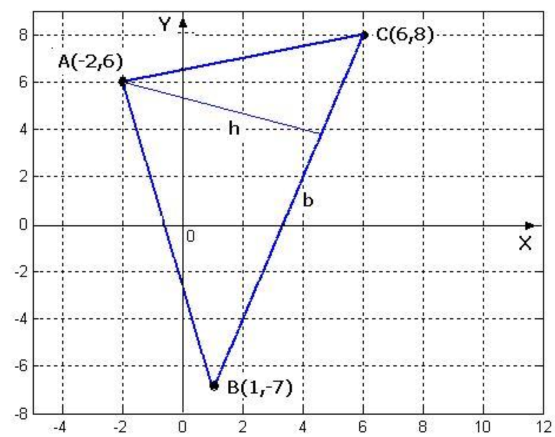
$$d=\frac{20}{\sqrt{49+25}}$$

Simplificando:

$$d = \frac{20}{\sqrt{74}} \text{ unidades.}$$

Ejemplo 3.17. Cálculo del área de un triángulo. El triángulo ABC tiene por vértices a los puntos $A(-2,6)$, $B(1,-7)$ y $C(6,8)$. Hallar el área del triángulo ABC.

Solución. Graficamos:



a).- Para calcular el área del triángulo ABC, utilizaremos la fórmula $A = \frac{bh}{2}$, donde b es la longitud de la base y h es la altura del triángulo ΔABC.

Para calcular la base b se aplica la expresión algebraica de la distancia entre dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$.

$$b = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Para este caso la base será el lado BC, luego se propone que $P_1(x_1, y_1) = B(1,-7)$ y $P_2(x_2, y_2) = C(6,8)$. Sustituyendo estos valores en la fórmula de distancia entre dos puntos.

$$b=\sqrt{(6-1)^2+(8+7)^2}$$

Haciendo operaciones se obtiene

$$b=\sqrt{25+225}$$

$$b=\sqrt{250}$$

Para calcular la altura h se aplica la expresión algebraica de la distancia de un punto $P_1(x_1, y_1)$ a la línea recta $Ax+By+C=0$.

$$h=d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

En este caso la línea recta será el lado BC, cuya ecuación se obtiene utilizando la expresión algebraica de la línea recta

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

que pasa por dos puntos $P_1(x_1, y_1)=B(1,-7)$ y $P_2(x_2, y_2)=C(6,8)$.

Sustituyendo estos valores en la fórmula de distancia entre un punto y una línea recta.

$$\frac{y+7}{x-1}=\frac{8+7}{6-1}$$

Haciendo operaciones se obtiene

$$(5)(y+7)=(15)(x-1)$$

$$3x-y-10=0$$

Con esto la altura h que es la distancia del punto $P_1(x_1,y_1)=A(-2,6)$ a la línea recta $3x-y-10=0$, es:

$$:\ h=d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

Y al utilizar $x_1=-2$, $y_1=6$, $A=3$, $B=-1$ y $C=-10$ .se obtiene:

$$h=d=\frac{|(3)(-2)+(-1)(6)-10|}{\sqrt{(3)^2+(-1)^2}}$$

Y al efectuar operaciones:

$$h=\frac{|-22|}{\sqrt{10}}$$

Por lo tanto el área del triángulo ABC es:

$$A = \frac{(\sqrt{250})\left(\frac{22}{\sqrt{10}}\right)}{2}$$ unidades cuadradas.

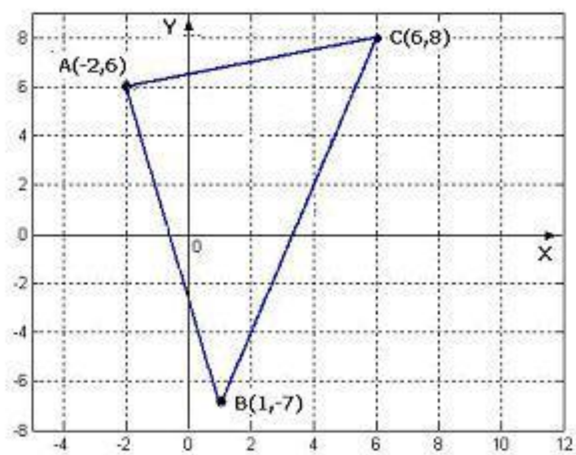
b) Cálculo de las ecuaciones de las rectas notables del triángulo

Ejemplo 3.18. Ecuación de bisectriz. El triángulo ABC tiene como vértices los puntos $A(-2,6)$, $B(1,-7)$ y $C(6,8)$. Hallar la ecuación de la línea bisectriz para el ángulo ABC.

Solución.

Nota. **La bisectriz es una recta que divide en dos partes iguales a un ángulo.**

Graficamos el triángulo dado:



Para encontrar la ecuación de la bisectriz del ángulo ABC, primero encontramos las pendientes de los lados AB y BC utilizando la fórmula de la pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

La pendiente del lado AB, se encuentra utilizando los puntos $P_1(x_1, y_1) = A(-2,6)$ y $P_2(x_2, y_2) = B(1,-7)$, al sustituir los datos en la fórmula de la pendiente se obtiene:

$$m_{AB} = \frac{-7-6}{1+2}.$$

$$m_{AB} = \frac{-13}{3}$$

Para la pendiente del lado BC, se utilizan los puntos $P_1(x_1, y_1) = B(1,-7)$ y $P_2(x_2, y_2) = C(6,8)$, la pendiente es:

$$m_{BC} = \frac{8+7}{6-1} = \frac{15}{5} = 3.$$

Ahora, se tiene la posibilidad de calcular el valor del ángulo ABC, aplicando la fórmula siguiente:

$$\angle ABC = \alpha = \arctan\left(\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}\right)$$

Para este caso, $m_2 = \dfrac{-13}{3}$ y $m_1 = 3$. Al sustituir en la expresión para un ángulo entre dos rectas se obtiene:

$$\angle ABC = \alpha = \arctan\left(\frac{\frac{-13}{3} - 3}{1 + \left(\frac{-13}{3}\right)(3)}\right)$$

Haciendo operaciones:

$$\angle ABC = \alpha = \arctan\left(\frac{-\frac{22}{3}}{-12}\right)$$

$$\angle ABC = \alpha = \arctan\left(\frac{11}{18}\right)$$

$$\angle ABC = \alpha = 31.4295°$$

Por lo tanto, el semi ángulo es:

$$\frac{\angle ABC}{2} = 15.7147°.$$

Para calcular la pendiente de la bisectriz del ángulo ABC, se utiliza en forma inversa la expresión:

$$\frac{\angle ABC}{2} = \arctan\left(\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}\right)$$

donde m_2 representa la pendiente de la bisectriz y m_1 la pendiente del lado BC del triángulo ABC. Se requiere la pendiente m_2.

Procedimiento para despejar m_2:

$$\tan\left(\frac{\angle ABC}{2}\right) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$$

$$(1 + m_2 m_1)\tan\left(\frac{\angle ABC}{2}\right) = m_2 - m_1$$

$$m_2\left(m_1 \tan\left(\frac{\angle ABC}{2}\right)-1\right)=-\tan\left(\frac{\angle ABC}{2}\right)-m_1$$

$$m_2=\frac{-\tan\left(\frac{\angle ABC}{2}\right)-m_1}{m_1 \tan\left(\frac{\angle ABC}{2}\right)-1}$$

Luego, para este caso, los datos son $\frac{\angle ABC}{2}=15.7147°$ y $m_1=3$, por lo que al sustituir y realizar operaciones:

$$m_2=\frac{-\tan(15.7147°)-3}{3\tan(15.7147°)-1}=\frac{-0.2813-3}{(3)(0.2813)-1}$$

$$m_2=\frac{-3.2813}{-0.1559}=21.0474$$

Ya se conoce la pendiente de la bisectriz y un punto por el cual pasa, con ello, la ecuación de la línea bisectriz para el ángulo ABC se encuentra utilizando:

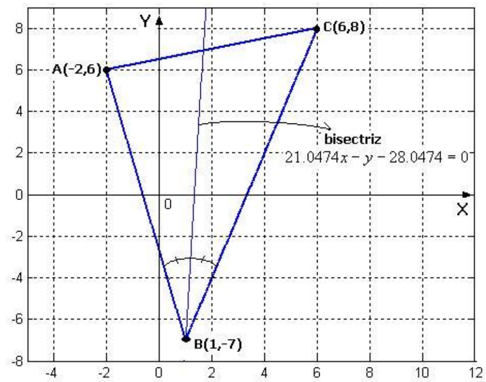
$$y-y_1=m(x-x_1)$$

Con $P_1(x_1,y_1)=B(1,-7)$ y $m=m_2=21.0474$.

Sustituyendo estos valores se tiene $y+7=21.0474(x-x_1)$, luego realizando operaciones, se obtiene la ecuación de la bisectriz del ángulo ABC:

$$21.0474x - y - 28.0474 = 0$$

La gráfica correspondiente es:



c) Cálculo de las medianas e intersección de rectas.

Ejemplo 3.19. Cálculo de las medianas de un triángulo y centroide. Considerando que el triángulo *ABC* tiene vértices en los puntos de coordenadas: $A(5,4),\ B(3,-5)\ \ y\ \ C(-2,7)$. Hallar:

a). Las ecuaciones de las líneas <u>medianas.</u>

b). El punto de intersección de las medianas.

Solución

Para encontrar las ecuaciones de las medianas, se requieren las coordenadas de los puntos medios de los lados del triángulo *ABC*, utilizando las expresiones algebraicas

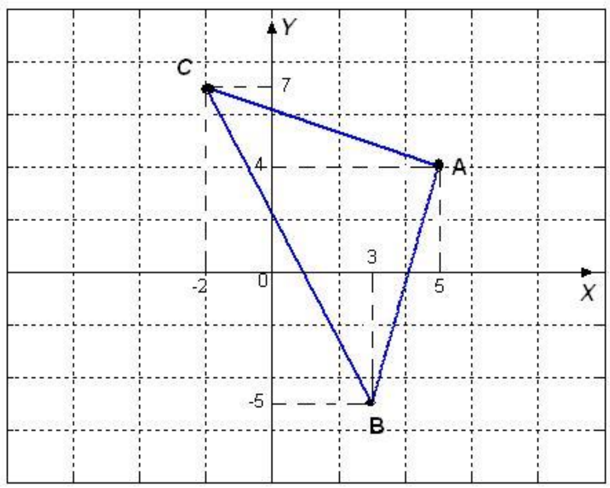
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad \text{y} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

y posteriormente se aplica la expresión algebraica de la línea recta

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

donde (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son coordenadas de dos puntos que pertenecen a la mediana.

Graficamos el triángulo dado:



a) Ecuaciones de las medianas

Ecuación de la mediana correspondiente al vértice C

Primero se encuentra el punto medio del segmento *AB.*

Con las coordenadas de los puntos $P_1(x_1, y_1) = A(5,4)$ y $P_2(x_{2,} y_2) = B(3,-5)$, y con las expresiones de las coordenadas del punto medio se tiene:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3+5}{2} = 4 \quad \text{y} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{-5+4}{2} = -\frac{1}{2}$$

El punto medio de la mediana correspondiente al vértice C es el punto $M\left(4, -\frac{1}{2}\right)$, Y como la mediana *CM* pasa por los puntos $C(-2,7)$, entonces se procede a encontrar su ecuación utilizando la expresión algebraica:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Al sustituir se tiene:

$$\frac{y-\left(-\frac{1}{2}\right)}{x-4}=\frac{7-\left(-\frac{1}{2}\right)}{-2-4}$$

Y al efectuar operaciones y reducir:

$$-6\left(y+\frac{1}{2}\right)=\frac{15}{2}(x-4)$$

$$-6y-3=\frac{15}{2}x-30$$

Multiplicando por 2 y escribiendo la ecuación en su forma general se tiene:

$$15x+12y-54=0$$

Que es la ecuación correspondiente a la mediana *CM.*

Ecuación de la mediana correspondiente al vértice A

Primero se encuentra el punto medio del segmento *AB.*

Con las coordenadas de los puntos $P_1(x_1,y_1)=B(3,-5)$ y $P_2(x_{2,}y_2)=C(-2,7)$, y con las expresiones de las coordenadas del punto medio se tiene

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{-5+7}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

El punto medio de la mediana correspondiente al vértice C es el punto $N\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

Y como la mediana *AN* pasa por los puntos $A(5,4)$, entonces se procede a encontrar su ecuación utilizando la expresión algebraica:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Al sustituir se tiene:

$$\frac{y-1}{x-\frac{1}{2}} = \frac{4-1}{5-\frac{1}{2}}$$

Y al efectuar operaciones y reducir:

$$\frac{9}{2}(y-1) = 3\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{9}{2}y - \frac{9}{2} = 3x - \frac{3}{2}$$

Multiplicando por 2; dividiendo entre 3 y escribiendo la ecuación en su forma general se tiene:

$$2x - 3y + 2 = 0$$

Que es la ecuación correspondiente a la mediana *AN.*

Ecuación de la mediana correspondiente al vértice B

Debemos encontrar el punto medio del segmento *AC.*

Identificamos en las expresiones del punto medio a $P_1(x_1, y_1)$ con el punto $A(5,4)$ y $P_2(x_{2,} y_2)$ con el punto $C(-2,7)$, con esto, las coordenadas del punto medio L del segmento AB son:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{5-2}{2} = \frac{3}{2} \quad \text{y} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{4+7}{2} = \frac{11}{2}$$

La mediana *AN* pasa por los puntos $B(3,-5)$ y $L\left(\frac{3}{2}, \frac{11}{2}\right)$

Aplicamos la expresión algebraica:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y+5}{x-3} = \frac{\frac{11}{2}+5}{\frac{3}{2}-3}$$

efectuando operaciones y reduciendo se tiene la ecuación de la mediana *AM:*

$$-\frac{3}{2}(y+5) = \frac{21}{2}(x-3)$$

Multiplicando por 2 y dividiendo entre 3:

$$-(y+5) = 7(x-3)$$

y escribiendo la ecuación en su forma general se tiene:

$$7x + y - 16 = 0$$

b).- Para hallar el punto de intersección de las medianas, se resuelve el sistema de ecuaciones siguiente:

$$15x + 12y - 54 = 0 \qquad E_1$$

$$2x - 3y + 2 = 0 \qquad E_2$$

$$7x + y - 16 = 0 \qquad E_3$$

Realizando las siguientes operaciones:

E_1 + 4E_2 = E'_2 ⇔ 23 x + 0 y -- 46=0 E'_2

E_2 + 3E_3 = E'_3 ⇔ 23 x + 0 y - 46 = 0 E'_3

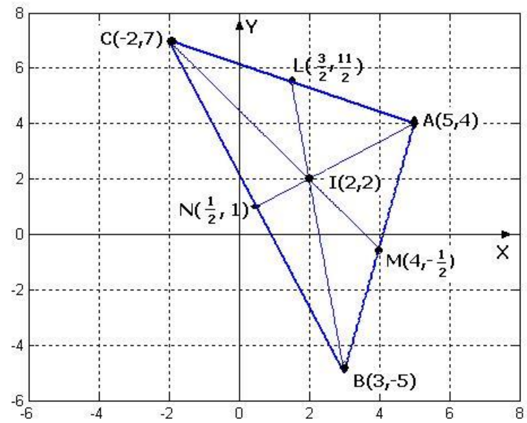
Con esto se obtiene el punto donde se intersecan las medianas, el punto es $I(2,2)$ y se le conoce con el nombre de CENTROIDE.

Se verifica la relación 1: 2 para la mediana correspondiente al vértice $B(3,-5)$

$$dIL = \sqrt{\left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(2 - \frac{11}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{49}{4}\right)} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{\sqrt{50}}{2}$$

$$dIB = \sqrt{(2-3)^2 + (2+5)^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50} = 2dIL$$

La gráfica correspondiente es:



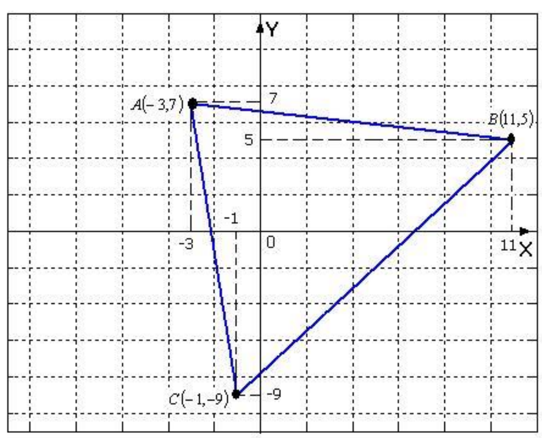
b) Ecuaciones de las mediatrices

Ejemplo 3.20. Circuncentro de un triángulo. Hallar las coordenadas del circuncentro del triángulo cuyos vértices son $A(-3,7)$, $B(11,5)$ y $C(-1,-9)$.

Solución.

***Nota. El* circuncentro es el punto de intersección de las mediatrices del triángulo.**

Graficamos los puntos dados para trazar el triángulo.



Para encontrar el circuncentro se requieren las ecuaciones de las mediatrices

Ecuaciones de las mediatrices

Para encontrar las ecuaciones de las mediatrices, se requiere conocer el punto medio y las pendientes de los lados del triángulo

Puntos medios de los lados del triángulo,

Para el lado AB, en las expresiones de punto medio

$$x_M = \frac{x_2 + x_1}{2} \quad \text{y} \quad y_M = \frac{y_2 + y_1}{2}$$

Identificamos $P_1(x_1, y_1) = A(-3,7)$ y $P_2(x_2, y_2) = B(11,5)$, por lo tanto

$$x_M = \frac{11 + (-3)}{2} = 4 \quad \text{y} \quad y_M = \frac{5+7}{2} = 6$$

El punto medio del lado AB es $PM_{AB}(4,6)$.

Y la pendiente del lado AB es:

$$m_{AB} = \frac{5-7}{11+3} = -\frac{1}{7}$$

La mediatriz m_1 es perpendicular al lado AB por lo que su pendiente es la recíproca con signo contrario de m_{AB}, esto es:

$$m_1 = -\frac{1}{m_{AB}} = -\frac{1}{-\frac{1}{7}} = 7$$

La mediatriz del lado AB es la recta que pasa por el punto $PM_{AB}(4,6)$ y tiene pendiente $m_1 = 7$

Al sustituir en $y - y_1 = m(x - x_1)$, se tiene su ecuación:

$$y - 6 = 7(x - 4)$$

Efectuando operaciones se obtiene la ecuación de la mediatriz del lado AB:

$$7x - y - 22 = 0$$

Para el lado BC, en las expresiones:

$$x_M = \frac{x_2 + x_1}{2} \quad \text{y} \quad y_M = \frac{y_2 + y_1}{2}$$

se identifican los puntos $P_1(x_1, y_1) = B(11,5)$ y $P_2(x_2, y_2) = C(-1,-9)$, por lo que

$$x_M = \frac{11 + (-1)}{2} = 5 \quad \text{y} \quad y_M = \frac{-9 + 5}{2} = -2$$

El punto medio del lado BC es $PM_{BC}(5,-2)$.

Y La pendiente del lado BC es:

$$m_{BC} = \frac{-9-5}{-1-11} = \frac{-14}{-12} = \frac{7}{6}$$

La mediatriz m_2 es perpendicular al lado BC por lo que su pendiente es la recíproca con signo contrario de m_{BC}, esto es:

$$m_2 = -\frac{1}{m_{BC}} = -\frac{1}{\frac{7}{6}} = -\frac{6}{7}$$

La mediatriz del lado BC es la recta que pasa por el punto $PM_{BC}(5,-2)$ y tiene pendiente $m_2 = -\frac{6}{7}$; su ecuación es:

$$y+2 = \left(-\frac{6}{7}\right)(x-5)$$

Haciendo operaciones se obtiene la ecuación de la mediatriz del lado BC:

$$6x+7y-28=0$$

Para el lado CA, en las expresiones de punto medio:

$$x_M = \frac{x_2 + x_1}{2} \quad \text{y} \quad y_M = \frac{y_2 + y_1}{2}$$

Identificamos $P_1(x_1, y_1) \equiv A(-3,7)$ y $P_2(x_2, y_2) \equiv C(-1,-9)$, por lo que

$$x_M = \frac{-3-1}{2} = -2 \quad \text{y} \quad y_M = \frac{-9+7}{2} = -1$$

El punto medio del lado CA es $PM_{CA}(-2,-1)$, y la pendiente del lado CA:

$$m_{CA} = \frac{-9-7}{-1+3} = -8$$

La mediatriz m_3 es perpendicular al lado CA por lo que su pendiente es la recíproca con signo contrario de m_{BC}, esto es:

$$m_3 = -\frac{1}{m_{CA}} = -\frac{1}{-8} = \frac{1}{8}$$

La mediatriz del lado CA es la recta que pasa por el punto $PM_{CA}(-2,-1)$ y tiene pendiente $m_3 = \frac{1}{8}$, al sustituir en $y - y_1 = m(x - x_1)$ se tiene su ecuación:

$$y + 1 = \left(\frac{1}{8}\right)(x + 2)$$

Haciendo operaciones se obtiene la ecuación de la mediatriz del lado CA:

$$x - 8y - 6 = 0$$

Solución del sistema de ecuaciones

Para encontrar las coordenadas del circuncentro, se resuelve el sistema de ecuaciones con dos incógnitas generado por las ecuaciones de las mediatrices, estas son:

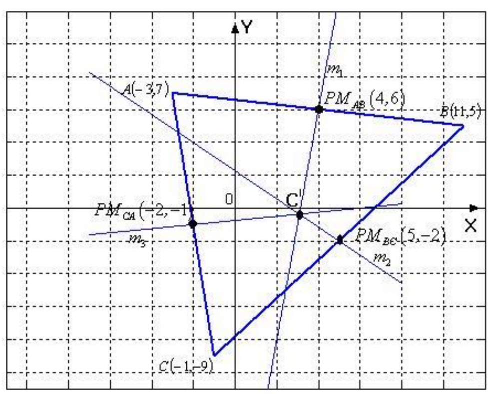
$$\begin{aligned} 7x - y &= 22 \qquad && E_1 \\ 6x + 7y &= 28 \qquad && E_2 \\ x - 8y &= 6 \qquad && E_3 \end{aligned}$$

Proponemos las operaciones $7E_1 + E_2 = E_1'$ y $E_2 - 6E_3 = E_2'$

$$55x + 0y = 182 \quad \text{y} \quad 0x + 55y = -8$$

De lo anterior se obtiene $x = \frac{182}{55}$ y $y = -\frac{8}{55}$

Las coordenadas del circuncentro son $C'\left(\frac{182}{55}, -\frac{8}{55}\right)$.



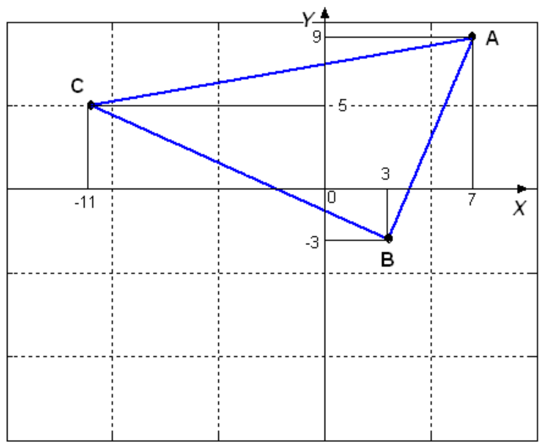
c) Ecuaciones de las alturas de un triángulo

Ejemplo 3.21. Ortocentro de un triángulo. Dados las coordenadas de los vértices $A(7,9)$, $B(3,-3)$ y $C(-11,5)$ del triángulo ABC, encuentra las coordenadas del ortocentro.

Solución.

Al punto de intersección de las alturas de un triángulo se le denomina el *ortocentro.*

Localizar los vértices en sistema de coordenadas.



a) Ecuación de las alturas

Para la altura correspondiente al vértice C se requiere la pendiente del lado AB,

Al identificar $P_1(x_1, y_1) \equiv A(7,9)$ y $P_2(x_2, y_2) \equiv B(3,-3)$ en la expresión

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

se tiene la pendiente

$$m_{AB} = \frac{-3-9}{3-7} = 3$$

La altura correspondiente al vértice $C(-11{,}5)$ es perpendicular al lado AB, por lo tanto, su pendiente es la recíproca con signo contrario de la pendiente del lado AB, esto es

$$m_{h_1} = -\frac{1}{m_{AB}} = -\frac{1}{3}$$

Ya se conoce el punto $C(-11{,}5)$ y la pendiente $m_{h_1} = -\frac{1}{3}$ de la altura, por lo tanto al sustituir en la expresión algebraica $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 5 = \left(-\frac{1}{3}\right)(x + 11)$$

La ecuación de la altura correspondiente al vértice C es:

$$x + 3y - 4 = 0$$

Ahora, la altura correspondiente al vértice *A,*

La pendiente para el lado BC cuyos extremos son $B(3,-3)$ y $C(-11{,}5)$ es:

$$m_{BC} = \frac{5+3}{-11-3} = -\frac{4}{7}$$

La pendiente de la altura que corresponde al vértice *A* y es perpendicular al lado BC es:

$$m_{h_2} = -\frac{1}{m_{BC}} = -\frac{1}{-\frac{4}{7}} = \frac{7}{4}$$

En la expresión $y - y_1 = m(x - x_1)$ se identifica $P_1(x_1, y_1) = A(7,9)$ y $m_{h_2} = -\frac{1}{m_{BC}} = \frac{7}{4}$.

Por lo que la ecuación de la altura es:

$$y - 9 = \left(\frac{7}{4}\right)(x - 7)$$

En su forma general:

$$7x - 4y - 13 = 0$$

Y para la altura correspondiente al vértice *B*, se debe encontrar la pendiente del lado CA, al identificar $P_1(x_1, y_1) = A(7,9)$ y $P_2(x_2, y_2) = C(-11,5)$, la pendiente es:

$$m_{BC} = \frac{5-9}{-11-7} = \frac{2}{9}$$

La pendiente de la altura que corresponde al vértice *B* y es perpendicular al lado CA es:

$$m_{h3} = -\frac{1}{m_{CA}} = -\frac{1}{\frac{2}{9}} = -\frac{9}{2}$$

La altura que corresponde al vértice *B* cuyas coordenadas son $B(3,-3)$ tiene pendiente $m_{h3} = -\frac{9}{2}$
, su ecuación es:

$$y+3=-\left(\frac{9}{2}\right)(x-3)$$

Y en forma general

$$9x+2y-21=0$$

b) Solución del sistema de ecuaciones

Las coordenadas del ortocentro es la intersección de las alturas del triángulo, por lo tanto, se debe resolver el sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas, esto es, resolver

$$\begin{aligned} x+3y&=4 && E_1\\ 7x-4y&=13 && E_2\\ 9x+2y&=21 && E_3 \end{aligned}$$

Al realizar las operaciones elementales operaciones elementales

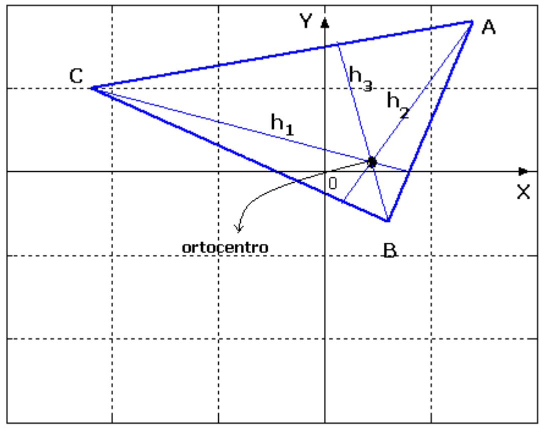
$$\begin{aligned} E_2^{'}&=E_2-7E_1\\ E_3^{'}&=E_3-9E_1 \end{aligned}$$

se obtiene el siguiente sistema equivalente:

$$\begin{aligned} x+3y&=4 && E_1\\ 0x-25y&=-15 && E_2^{'}\\ 0x-25y&=-15 && E_3^{'} \end{aligned}$$

Y de la ecuación $E_2^{'}$ o de la ecuación $E_3^{'}$ se obtiene el valor de la ordenada del ortocentro $y=\frac{3}{5}$ y al sustituir en la ecuación E_1, se obtiene el valor de la abscisa del ortocentro $x=\frac{11}{5}$, Las coordenadas son $\left(\frac{11}{5},\frac{3}{5}\right)$.

La gráfica del triángulo con sus alturas es:



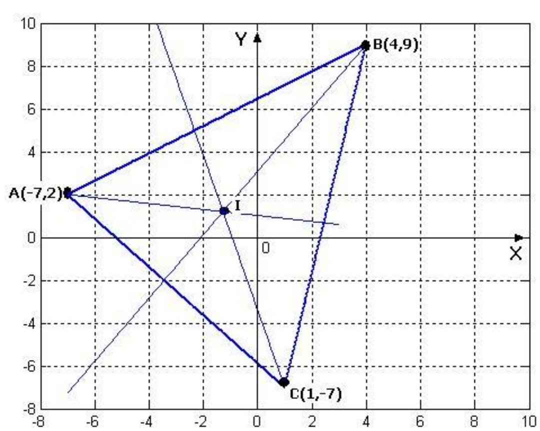
Actividad teórico práctica

Cálculo del Incentro de un triángulo. Encontrar las coordenadas del incentro del triángulo cuyos vértices son los puntos $A(-7,2)$, $B(4,9)$ y $C(1,-7)$.

Solución

Nota. **El incentro es el punto de intersección de las bisectrices del triángulo ABC.**

Inicialmente, se sugiere encontrar las pendientes de los lados del triángulo; con ellas obtener los semiángulos interiores del triángulo y de esta manera calcular las pendientes de las bisectrices.



a) Cálculo de las pendientes de los lados del triángulo ABC

Utilizando la expresión algebraica:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Para el lado AB, se tiene $P_1(x_1, y_1) = A(-7, 2)$ y $P_2(x_2, y_2) = B(4, 9)$, por lo tanto:

$$m_{AB} = \frac{9-2}{4+7} = \frac{7}{11}$$

Para el lado BC, se tiene $P_1(x_1, y_1) = B(4, 9)$ y $P_2(x_2, y_2) = C(1, -7)$

Por lo tanto:

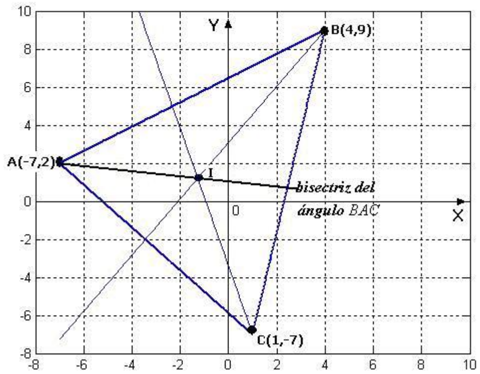
$$m_{BC} = \frac{-7-9}{1-4} = \frac{-16}{-3} = \frac{16}{3}$$

Para el lado AC, identificamos $P_1(x_1, y_1) = A(-7, 2)$ y $P_2(x_2, y_2) = C(1, -7)$.

La pendiente es $m_{AC} = \dfrac{-7-2}{1+7} = -\dfrac{9}{8}$.

b) Ecuaciones de las bisectrices

Bisectriz del ángulo interior BAC **:**



Para la bisectriz del ángulo interior BAC se tiene:

$$\angle BAC = \arctan\left(\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}\right)$$

donde $m_2 = m_{AB} = \frac{7}{11}$ y $m_1 = m_{AC} = -\frac{9}{8}$

Por lo tanto:

$$\angle BAC = \arctan\left(\frac{\frac{7}{11} + \frac{9}{8}}{1 + \left(\frac{7}{11}\right)\left(-\frac{9}{8}\right)}\right)$$

$$\angle BAC = \arctan\left(\frac{\frac{155}{88}}{1 - \frac{63}{88}}\right) = 80.83765295°$$

el semi ángulo es:

$$\frac{\angle BAC}{2} = 40.41882°$$

Para encontrar la pendiente de la bisectriz del ángulo BAC, utilizamos:

$$\frac{\angle BAC}{2} = arctg\left(\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}\right)$$

Donde:

$$m_2 = m_{Bisectriz\ \angle BAC}\ ,\ m_1 = m_{AC} = -\frac{9}{8}$$

$$\text{y } tg\left(\frac{\angle BAC}{2}\right) = tan\,40.41882° = 0.851633254$$

Sustituyendo se tiene:

$$0.851633254 = \frac{m_{Bisectriz\ \angle A} + \frac{9}{8}}{1 - \left(\frac{9}{8}\right) m_{Bisectriz\ \angle A}}$$

Despejando:

$$m_{Bisectriz\ \angle BAC} = \frac{0.851633254 - \frac{9}{8}}{1 + \left(\frac{9}{8}\right)(0.851633254)}$$

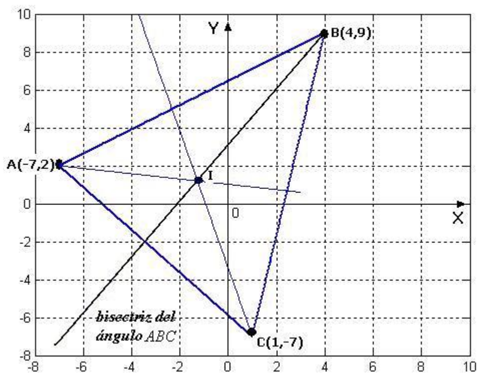
$$m_{Bisectriz\ \angle BAC} = \frac{-0.27336655}{1.958087411} = -0.139608961$$

La bisectriz del ángulo BAC pasa por el punto $P_1(x_1, y_1) \equiv A(-7, 2)$ y tiene pendiente $m = m_{Bisectriz\ \angle A} = -0.139608961$, por lo que su ecuación es:

$$y - 2 = -0.139608961(x + 7)$$

$$0.139608961x + y - 1.022737269 = 0$$

Bisectriz del ángulo interior ABC.



Para la bisectriz del ángulo interior ABC se tiene

$$\angle ABC = arctan\left(\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}\right)$$

donde $m_2 = m_{BC} = \frac{16}{3}$ y $m_1 = m_{AB} = \frac{7}{11}$

Por lo tanto

$$\angle ABC = arctg\left(\frac{\frac{16}{3} - \frac{7}{11}}{1 + \left(\frac{7}{11}\right)\left(\frac{16}{3}\right)}\right)$$

$$\angle ABC = arctg\left(\frac{\frac{155}{33}}{1 + \frac{112}{33}}\right) = 46.90915243299°$$

el semi ángulo es:

$$\frac{\angle ABC}{2} = 23.454576216498188°$$

Para encontrar la pendiente de la bisectriz del ángulo ABC, utilizamos

$$\frac{\angle BAC}{2} = arctg\left(\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}\right)$$

Donde $m_2 = m_{Bisectriz\ \angle ABC}$, $m_1 = m_{AB} = \frac{7}{11}$ y $tg\left(\frac{\angle ABC}{2}\right) = 0.43387001785749$

Al sustituir en $tg\left(\frac{\angle ABC}{2}\right) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$

Se obtiene:

$$0.43387001785749 = \frac{m_{Bisectriz\ \angle ABC} - \frac{7}{11}}{1+\left(\frac{7}{11}\right)m_{Bisectriz\ \angle ABC}}$$

Despejando:

$$m_{Bisectriz\ \angle ABC} = \frac{0.4338700178574+\frac{7}{11}}{1-\left(\frac{7}{11}\right)(0.43387001785749)}$$

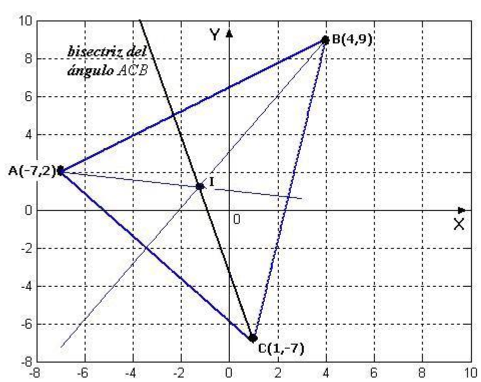
$$m_{Bisectriz\ \angle ABC} = \frac{1.0702336541574}{0.723900898} = 1.478425248$$

La ecuación de la bisectriz del ángulo ABC que pasa por el punto $P_1(x_1, y_1) \equiv B(4,9)$ y que tiene por pendiente $m = m_{Bisectriz\ \angle ABC} = 1.478425248$, es

$$y - 9 = 1.478425248(x-4)$$

Y en su forma general

$$1.478425248x - y + 3.086299006 = 0$$



De donde

$$\angle ACB = 180° - 46.90915243° - 80.83765295°$$

Para encontrar la ecuación de la bisectriz del ángulo interior ACB se la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo, es decir:

$$\angle ACB + \angle ABC + \angle BAC = 180° .$$

$$\angle ACB = 52.25319462°$$

Y el semi ángulo es:

$$\frac{\angle ACB}{2} = 26.12659731°$$

Por lo tanto, la pendiente de la bisectriz se calcula utilizando:

$$\left(\frac{\angle ACB}{2}\right) = ang\,tan\left(\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}\right)$$

Donde:

$$m_2 = m_{Bisectriz\ \angle ACB}, \quad m_1 = m_{BC} = \frac{16}{3} \quad \text{y} \quad tg\left(\frac{\angle ACB}{2}\right) = 0.490470695$$

Al sustituir en $tg\left(\frac{\angle ACB}{2}\right) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$ se tiene:

$$\therefore \qquad 0.490470695 = \frac{m_{Bisectriz\ \angle ACB} - \frac{16}{3}}{1 + \left(\frac{16}{3}\right) m_{Bisectriz\ \angle ACB}}$$

Despejando

$$m_{Bisectriz\ \angle ACB} = \frac{0.490470695 + \frac{16}{3}}{1 - \left(\frac{16}{3}\right)(0.490470695)}$$

$$m_{Bisectriz\ \angle ACB} = \frac{5.823804028}{-1,615843707}$$

$$m_{Bisectriz\ \angle ACB} = -3.604187709$$

La ecuación de la bisectriz del ángulo ACB que pasa por el punto $P_1(x_1, y_1) \equiv C(1,-7)$ y que tiene por pendiente $m = m_{Bisectriz\ \angle ACB} = -3.604187709$ es

$$y + 7 = -3.604187709(x-1)$$

En su forma general:

$$3.604187709x + y + 3.395812291 = 0$$

c) Solución del sistema de ecuaciones

Las coordenadas del incentro, se encuentran resolviendo el sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas que corresponden a las ecuaciones de las bisectrices:

$$\begin{array}{ll} y + 0.139608961x = 1.022737269 & E_1 \\ -y + 1.478425248x = -3.086299006 & E_2 \\ y + 3.604187709x + 0y = -3.395812291 & E_3 \end{array}$$

Aplicando el método de suma y resta con las siguientes operaciones elementales:

$$E_2^{'} = E_2 + E_1 \qquad E_3^{'} = E_3 - E_1 \quad .$$

$$\begin{array}{lr} y + 0.139608961x = 1.022737269 & E_1 \\ 0y + 1.618034209x = -2.063561737 & E_2^{'} \\ 0y + 3.464578748x + 0y = -4.41854956 & E_3^{'} \end{array}$$

De la ecuación $E_2^{'}$ se obtiene:

$$x = -1.275351118$$

Y al sustituir $x = -1.275349727$ en la ecuación $E_3^{'}$ se obtiene el valor de y

$$y = 1.200787518$$

Las coordenadas del incentro (punto de intersección de las bisectrices) son:

$$I\left(-1.2753, 1.20078\right).$$

Las distancias del incentro a cada uno de los lados del triángulo son iguales, con ello se puede inscribir una circunferencia al triángulo.

La ecuación del lado AB es:

$$\frac{y-9}{x-4} = \frac{7}{11}; \text{ de donde } \quad 11(y-9) = 7(x-4);$$

por lo tanto $7x - 11y + 71 = 0$

La distancia del incentro $I(-1.2753, 1.20078)$ a la recta $7x - 11y + 71 = 0$ es

$$d = \frac{|(7)(-1.2753)+(-11)(1.20078)+71|}{\sqrt{(7)^2+(11)^2}}$$

$$d = \frac{48.86432}{\sqrt{170}}$$

$$d = 3.747 \text{ u}$$

La ecuación de la recta BC es:

$$\frac{y+7}{x-1} = \frac{16}{3}; \quad \text{de donde} \quad 3(y+7)=16(x-1)$$

Por lo tanto

$$16x-3y-37=0$$

La distancia del incentro $I(-1.2753, 1.20078)$ a la recta $16x-3y-37=0$ es

$$d = \frac{|(16)(-1.2753)+(-3)(1.20078)-37|}{\sqrt{(16)^2+(-3)^2}}$$

$$d = 3.747 \text{ u}$$

Y la ecuación de la recta CA es:

$$\frac{y+7}{x-1} = -\frac{9}{8}; \quad \text{de donde} \quad -8(y+7)=9(x-1)$$

la ecuación es $9x + 8y + 47 = 0$

La distancia del incentro $I(-1.2753, 1.20078)$ a la recta $9x + 8y + 47 = 0$:

$$d = \frac{|(9)(-1.2753) + (8)(1.20078) + 47|}{\sqrt{(9)^2 + (8)^2}}$$

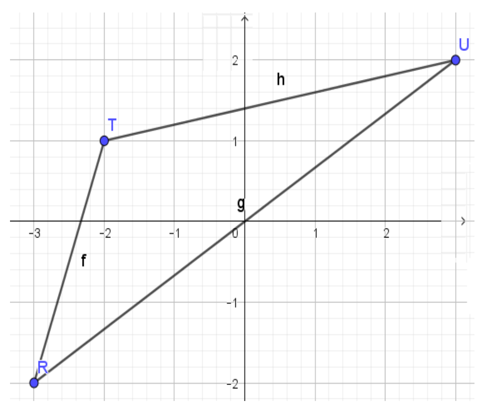
$$d = 3.747 \text{ u}$$

Se comprueba que las distancias son iguales.

AUTOEVALUACIÓN

Ejercicio 3.1.

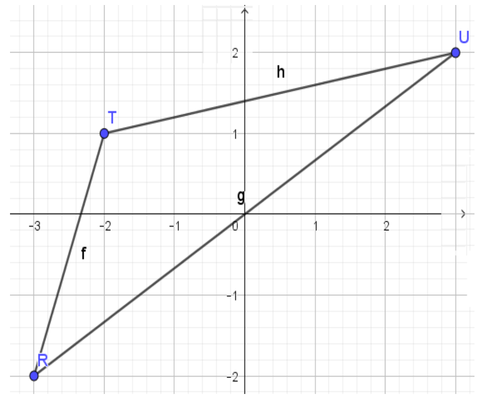
Obtén el ángulo interior R del triángulo definido por los puntos R(-3,-2), T(-2,1) y U(3,2).



a) 22.38^o
b) 17.37^o
c) 27.27^o
d) 37.87^o ok

Ejercicio 3.2.

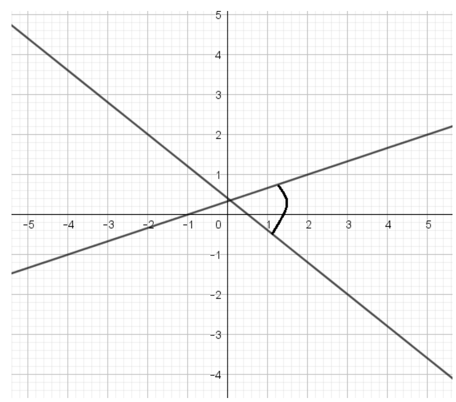
Obtén el ángulo interior T del triángulo definido por los puntos R(-3,-2), T(-2,1) y U(3,2).



a) 119.74^o ok
b) 117.34^o
c) 127.21^o
d) 128.87^o

Ejercicio 3.3.

Obtén la medida del ángulo señalado en la figura que forman las rectas $x - 3y + 1 = 0$ y $4x + 5y - 2 = 0$.



a) 127^o
b) 71.23^o
c) 57.09^o ok
d) 62.21^o

Ejercicio 3.4.

Determina la ecuación de la recta que es paralela al segmento que pasa por los puntos A(-4,6) y B(1,-3) y que pasa por el punto S(1,6).

a) $4x + 3y - 38 = 0$
b) $2x - y + 20 = 0$
c) $9x + 5y - 39 = 0$.
d) $4x + 3y - 6 = 0$

Ejercicio 3.5.

Determina la ecuación de la recta que es perpendicular al segmento que pasa por los puntos A(-4,6) y B(1,-3) y que pasa por el punto S(1,6).

a) $5x - 9y + 49 = 0$.
b) $2x - y + 20 = 0$
c) $9x + 5y - 39 = 0$
d) $4x + 3y - 6 = 0$

Ejercicio 3.6.

¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por el punto P(-6,2) y que es paralela a la recta $y = \frac{4}{3}x - 1$?

a) $4x + 3y - 6 = 0$
b) $4x + 3y + 30 = 0$
c) $4x - 3y + 30 = 0$ ok
d) $2x + y - 6 = 0$

Ejercicio 3.7.

¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por el punto P(-5,4) y es perpendicular a la recta $y = -\frac{5}{3}x + 2$?

a) $4x + 3y - 6 = 0$
b) $3x - 4y + 6 = 0$
c) $5x - y - 7 = 0$
d) $3x - 5y + 35 = 0$ ok

Ejercicio 3.8.

¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por el punto P(-4,5) y es paralela a la recta $3x - y - 5$?

a) $4x + 3y - 6 = 0$
b) $3x - y + 17 = 0$ ok
c) $5x - y - 7 = 0$
d) $3x - 5y + 35 = 0$

Ejercicio 3.9.

¿Cuál es la ecuación de la recta en la forma simétrica que pasa por el punto P(4,0) y Q(0,5) ?

a) $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$ ok
b) $y = -\frac{5}{4}x + 5$
c) $5x + 4y - 2 = 0$
d) $\frac{x}{5} + \frac{y}{4} = 1$

Ejercicio 3.10.

¿Cuál es la ecuación de la recta en la forma general que pasa por el punto P(4,0) y Q(0,5) ?

a) $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$
b) $y = -\frac{5}{4}x + 5$

c) $5x + 4y - 2 = 0$ ok
d) $5x + 4y - 20 = 0$

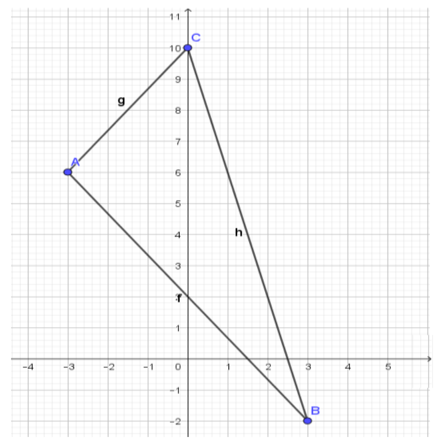
Ejercicio 3.11.

¿Cuál es la ecuación de la recta en la forma general equivalente a $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$?

a) $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$
b) $y = -\frac{5}{4}x + 5$
c) $5x + 4y - 2 = 0$
d) $5x + 4y - 20 = 0$ ok

Ejercicio 3.12.

Se tiene un terreno de forma triangular cuyos vértices se ubican en los puntos A(-3,6), B(3,-2) y C(0,10). Un arquitecto necesita la ecuación de la recta que pase por el punto A y sea perpendicular al lado BC, observe la imagen de la derecha.



a) $5x - y - 6 = 0$
b) $x - 4y + 27 = 0$ ok
c) $3x - 4y + 40 = 0$
d) $3x + 4y - 1 = 0$

Unidad 4

La parábola y su ecuación cartesiana

La parábola y su ecuación cartesiana

Propósitos: Al finalizar, el alumno será capaz de obtener la ecuación de una parábola a partir de su definición (foco y directriz) o de elementos necesarios y suficientes.
Identificará sus elementos a partir de la ecuación.
Resolverá problemas que involucren a la parábola y sus propiedades.

Objetivos Generales de la unidad

Objetivo Conceptual. Los alumnos percibirán a los sistemas de coordenadas como la noción fundamental para realizar el estudio analítico de los lugares geométricos.

APRENDIZAJES.

Al finalizar la Unidad el Alumno:

1. Identifica los elementos que definen la parábola.
2. Reconoce la simetría de la parábola.
3. Obtiene por inducción la definición de la parábola como lugar geométrico.
4. Deduce la ecuación de la parábola con vértice en el origen y fuera de él.
5. Entiende que un punto pertenece a una parábola sí y solo si, sus coordenadas satisfacen la ecuación correspondiente.
6. Determina el vértice, foco, directriz, el eje de simetría y el lado recto de la parábola, a partir de su ecuación cartesiana.
7. Grafica parábolas dadas sus ecuaciones y viceversa.
8. Transforma la ecuación general a la ordinaria para encontrar sus elementos.
9. Resuelve problemas que involucren la intersección de una recta con una parábola y entre parábolas.
10. Resuelve problemas de aplicación.
11. Valora su conocimiento sobre parábola.

UNIDAD 4

LA PARÁBOLA Y SU ECUACIÓN CARTESIANA

Introducción

Hemos comentado que los franceses René Descartes (1596-1650) y Pierre de Fermat (1601- 1655), se encontraron con la necesidad de resolver problemas que aquejaban en su época, tales como la comprensión del movimiento de los cuerpos celestes, el estudio de los proyectiles arrojados por los cañones, el conocimiento exacto del trayecto de los barcos, problemas sobre el estudio de la luz, etc. Problemas que antes del siglo XVII eran poco comprendidos. Así, gracias al estudio de fenómenos de aplicación práctica, se llegó al estudio físico y analítico de curvas complejas como la parábola.

Era conocida una teoría de las secciones cónicas por los griegos, pero nuestros personajes franceses no estuvieron satisfechos e idearon un método para involucrar al álgebra en la representación geométrica de estas curvas.

Cañón estadunidense de 6 libras modelo 1841

Losas de forma parabólica. Restaurante CDMX.

En esta unidad, te proponemos una serie de actividades para que comprendas los aprendizajes propuestos.

Presentación

Al finalizar esta unidad el alumno será capaz de:

- obtener la ecuación de una parábola a partir de su definición (foco y directriz) o de elementos necesarios y suficientes.

- Identificará sus elementos a partir de la ecuación.
- Resolverá problemas que involucren a la parábola y sus propiedades.

Para conseguir esta ambiciosa meta, te proponemos una serie de actividades de aprendizaje, teoría y prácticas que están seguidas de acuerdo con una secuencia lógica propuesta en el programa de la asignatura. Se recomienda seguirlas en el orden que se presentan, sin embargo, puedes estudiar donde consideres necesario, pero recuerda que debes comprender los conceptos antecedentes que se requieren para su entendimiento.

Conceptos clave

Punto: En el sistema de coordenadas cartesianas, se determina mediante las distancias ortogonales a los ejes principales, que se indican con dos números: (x, y) en el plano; y con tres en el espacio (x, y, z).

Coordenadas cartesianas: o coordenadas rectangulares (sistema cartesiano) son un tipo de coordenadas ortogonales usadas para la representación gráfica de una relación matemática o del movimiento o posición en física.

Foco: El foco de la parábola es un punto, respecto del foco al cual cada punto de la parábola posee la misma distancia hasta una recta llamada directriz.

Directriz: Una directriz se dice de aquello que marca las condiciones en que se genera algo.

Lado recto: Segmento de recta comprendido por la parábola, que pasa por el foco y es paralelo a la directriz. La longitud del lado recto es siempre 4 veces la distancia focal.

Vértice: Es el punto donde la parábola corta a su eje de simetría.

Eje de la parábola: Línea recta que divide a la parábola en dos partes congruentes. Pasa a través del vértice de la parábola y su foco.

Lugar geométrico: Es el conjunto de puntos que cumplen determinadas condiciones.

Eje focal: Línea recta que divide a la parábola en dos partes congruentes. Pasa a través del vértice de la parábola y su foco.

Ecuación general de la parábola: $Ax^2+Bx+Cx+D=0$ (horizontal) y $Ay^2+By+Cy+D=0$ (vertical)

Sugerencias

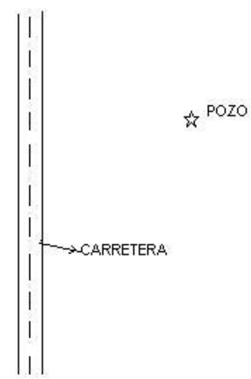
Este contenido está dirigido a los alumnos que desean estudiar de manera autodidacta y a su ritmo. Se recomienda seguir las actividades de aprendizaje y repasar la teoría. Seguir los ejemplos ayudará a adquirir destreza.

En caso de tener preguntas, se sugiere preguntar al profesor o acudir a asesorías con dudas específicas. No está de más el hacer algunas recomendaciones a los estudiantes para que su estudio sea eficaz: leer con atención cada párrafo y comprender lo que se pide, trabajar en un lugar bien ventilado, iluminado y silencioso, sentarse cómodamente en una silla con respaldo y en una mesa libre de obstáculos y tener una libreta de notas para realizar todos los ejercicios propuestos para adquirir seguridad en esta asignatura. Probablemente alguna de estas recomendaciones no sea factible de llevarse a cabo por las condiciones de confinamiento sanitario que estamos viviendo, pero en lo posible, es mejor tratar de respetarlas.

Recuerda que lo más importante es tener una actitud positiva, el deseo y la intención de aprender.

Actividad de aprendizaje teórico-práctica

La empresa constructora, MICA S. A. de C. V. necesita determinar la ubicación de 15 bodegas que se construirán en el estado de San Luis Potosí. La ubicación de las bodegas tiene la característica que la distancia de la carretera internacional (que por ciento en esa parte es recta) y la distancia a un pozo de agua ubicado cerca de la carretera el cual abastecerá de agua a estas filiales, es la misma. Un croquis de la ubicación de la carretera y el pozo se presenta en la figura de la derecha.



Actividades:

1.- Observa cuidadosamente el siguiente video: https://youtu.be/Lo-GkSgE8c4 (6.27 min.), donde se muestra paso a paso cómo construir una parábola en una hoja de papel, conocida una recta (directriz) y un foco. Realiza un diagrama de flujo donde se muestre a detalle el procedimiento de construcción.

2. En tu cuaderno dibuja una recta que represente la carretera y ubica un punto que represente el pozo. Para ubicar una de las bodegas sigue las siguientes instrucciones:

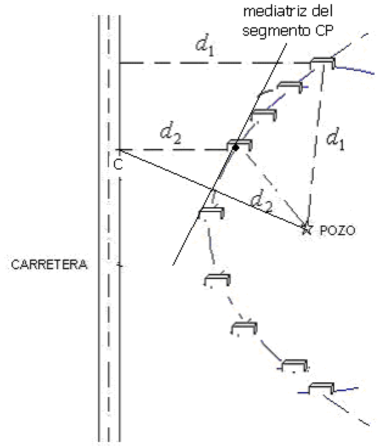
1). Con una abertura cualquiera del compás y haciendo centro en el punto en que se ubica al pozo, corta a la recta que representa la carretera en el punto C.

2) Desde este punto C traza una recta (d_2) perpendicular a la recta que simula la carretera.

3) Traza el segmento que une al punto de la carretera con el pozo y dibuja su mediatriz.

4) La intersección de la recta perpendicular y la mediatriz indica el punto P donde debe establecerse una bodega. Verifícalo comparando las distancias.

Realiza la misma operación hasta ubicar las 15 bodegas. Si se unen los puntos de la ubicación de las bodegas se observará que forman parte de una curva que se llama ___________.

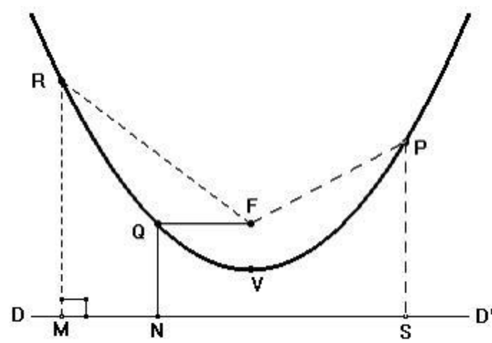


Definición de la Parábola como lugar geométrico

La Parábola es el lugar geométrico de todos los puntos en el plano (o la trayectoria de un punto), que equidistan de un punto fijo (foco) y de una recta fija (directriz).

En otras palabras, la distancia de cualquier punto de la parábola al foco (**F**) es igual a la distancia del punto a la directriz ($\overleftrightarrow{DD'}$).

$$RF = RM, \; QF = QN, \; PF = PS$$



Observación: El foco (F) no puede ser un punto sobre la directriz.

Elementos de una parábola

FOCO: Punto fijo (F) que nos indica la concavidad de la parábola.

DIRECTRIZ: Recta fija ($\overleftrightarrow{DD'}$)

EJE FOCAL O DE SIMETRIA: Recta perpendicular a la directriz ($\overleftrightarrow{VF}$) que pasa por el foco.

VERTICE: Punto (V) sobre el eje focal que se localiza en el punto medio entre el foco y la directriz.

DISTANCIA FOCAL: Distancia del foco al vértice (VF), se designa por la letra *p.* Es decir: VF = *p*

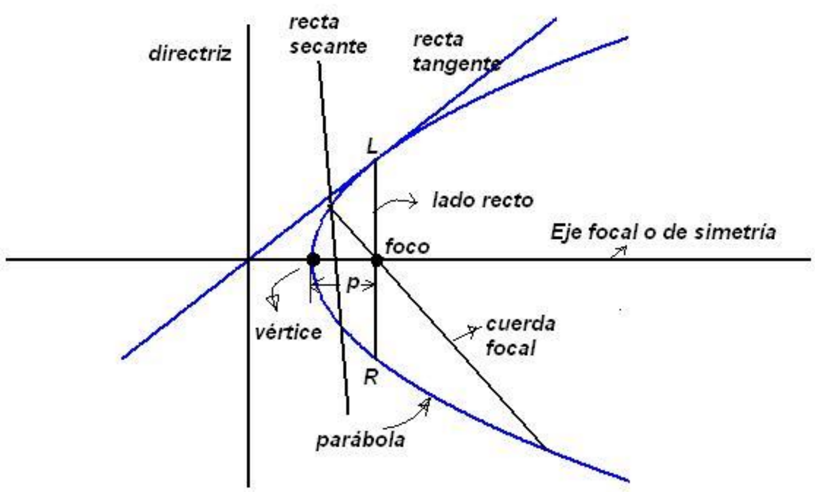
CUERDA: Segmento de recta que une dos puntos cualesquiera de la parábola.

CUERDA FOCAL: Segmento de recta que une dos puntos cualesquiera de la parábola y pasa por el foco.

LADO RECTO: Cuerda focal (LR) perpendicular al eje de la parábola.

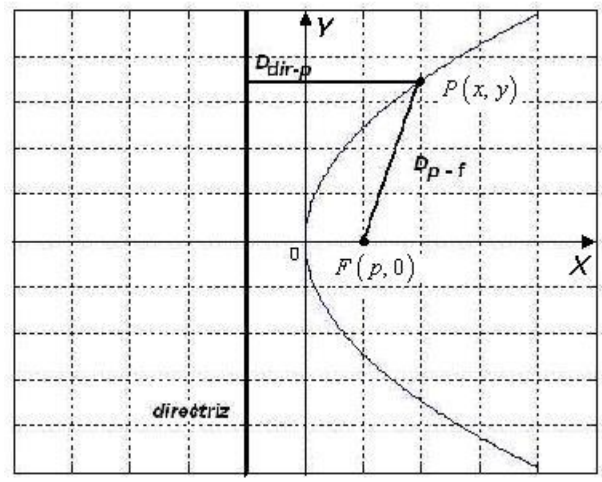
RECTA TANGENTE: Recta que toca a la parábola en un punto.

RECTA SECANTE: Recta que corta a la parábola en dos puntos



Ecuación cartesiana de la parábola.

Ecuación ordinaria de la parábola horizontal (eje de simetría el eje x) con vértice en el origen $V(0,0)$ y foco en el punto $F(p,0)$.



Como el foco de la parábola se encuentra en el punto $F(p,0)$, la directriz tiene por ecuación: $x + p = 0$.

Utilizando la definición de parábola se tiene que:

La distancia del foco a un punto cualquiera de la parábola $P(x,y)$ es igual a la distancia del punto $P(x,y)$ a la directriz.

Por lo tanto, la distancia del punto $P(x,y)$ al foco $F(p,0)$ es:

$$D_{pf} = \sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2}$$

Usando la fórmula para la distancia de un punto a una recta, la distancia del punto $P(x,y)$ a la directriz es:

$$D_{dirp} = \frac{x+p}{\sqrt{1}}$$

Como las distancias son iguales entonces:

$$\sqrt{(x-p)^2 + (y)^2} = x + p$$

Para eliminar el radical, se eleva al cuadrado ambos miembros de la expresión:

$$(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2$$

Desarrollando los binomios al cuadrado se tiene:

$$x^2 - 2xp + p^2 + y^2 = x^2 + 2xp + p^2$$

Al simplificar y despejar y^2, se obtiene la ***ecuación ordinaria de la parábola*** con eje de simetría el eje X .

$$y^2 = 4px$$

Observación: Si $p > 0$ la parábola se abre hacia la derecha.
Si $p < 0$ la parábola se abre hacia la izquierda.

Ecuación ordinaria de la parábola vertical (eje de simetría el eje y) con vértice en el origen $V(0,0)$ ***y foco en el punto*** $F(0,p)$***. La cual es***:

$$x^2 = 4py$$

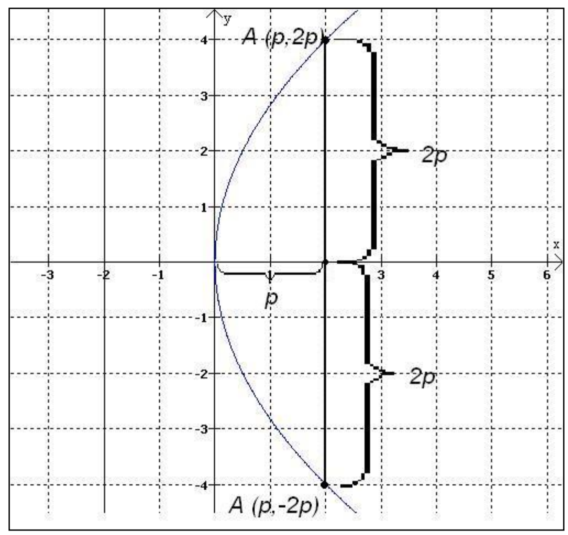
Observación: Si p > 0 la parábola se abre hacia arriba.
Si p < 0 la parábola se abre hacia abajo.

Cálculo de la longitud del lado recto (anchura focal) utilizando la ecuación cartesiana de la parábola.

El cálculo se realizará en particular para una parábola horizontal con vértice en el origen.

Como el foco se encuentra en el punto $F(p,0)$, los extremos del lado recto son los puntos L y R.

En virtud de que la abscisa de los puntos L y L' es $x = p$, al sustituir en la ecuación de la parábola se tiene:



$$y^2 = 4px = 4p(p) = 4p^2$$

En consecuencia, las ordenadas correspondientes de los extremos del lado recto son:

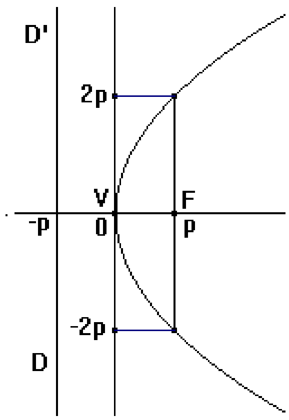
$$y = \pm\sqrt{4p^2} = \pm 2p$$

Los extremos del lado recto tienen coordenadas $L(p,2p)$ y $L'(p,-2p)$ y la distancia entre los dos puntos corresponde a la longitud buscada.

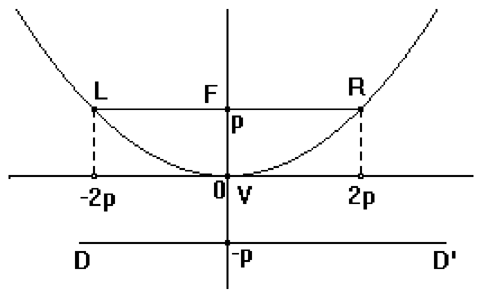
$$LR = \sqrt{(p-p)^2 + (2p-(-2p))^2} = \sqrt{16p^2} = |4p|$$ unidades.

En la solución de problemas relativos a la parábola con vértice en el origen se usa el siguiente esquema:

Parábola horizontal



Parábola vertical



Ecuación ordinaria (clásica):

$y^2 = 4px$

Si p > 0 la parábola se abre hacia la derecha.
Si p < 0 la parábola se abre hacia la izquierda.

Elementos

Vértice: $V(0,0)$

Foco: $F(p,0)$

Ecuación ordinaria (clásica):

$x^2 = 4py$

Si p > 0 la parábola se abre hacia arriba.
Si p < 0 la parábola se abre hacia abajo.

Elementos

Vértice: $V(0,0)$

Foco: $F(0,p)$

Ecuación del eje de simetría: $y = 0$

Ecuación de la directriz: $x = -p$

Lado recto (Anchura focal): $LR = |4p|$ u

Extremos del lado recto:

$L(p, 2p \quad R(p, -2p)$

Ecuación del eje de simetría: $x = 0$

Ecuación de la directriz: $y = -p$

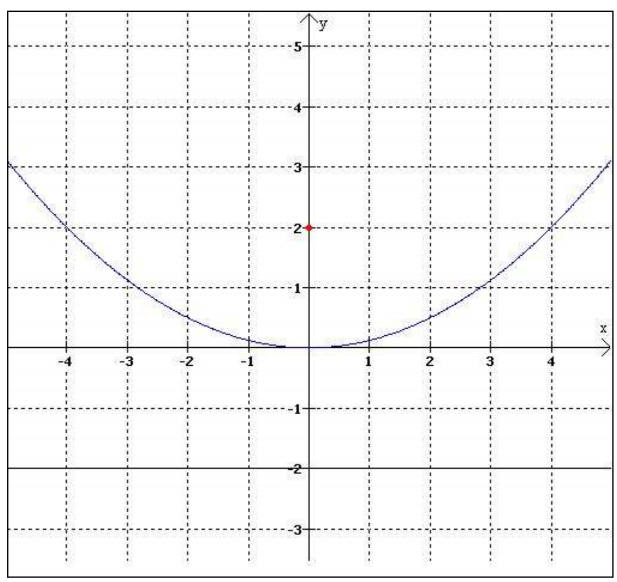
Lado recto (Anchura focal): $LR = |4p|$ u

Extremos del lado recto:

$L(-2p, p) \quad R(2p, p)$

Ejemplo 4.1. Obtener la ecuación de la parábola con foco en $F(0,2)$ y directriz $y = -2$

Solución:



Como el foco es $F(0, p)$ y la ecuación de la directriz:

$$y = -p,$$

De acuerdo al esquema, la parábola es vertical.

Como $p = 2$, sustituyendo en la ecuación $x^2 = 4py$ obtenemos la ecuación de la parábola buscada:

$$x^2 = 8y$$

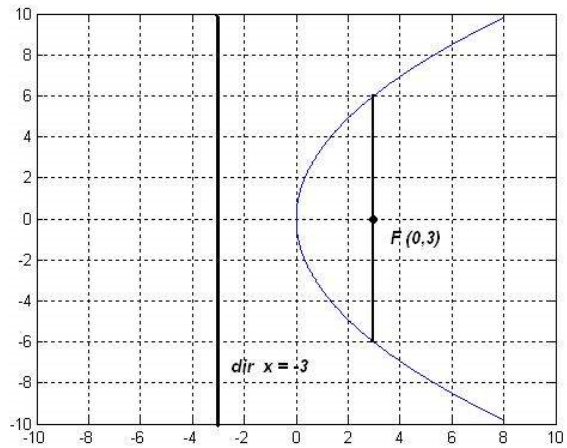
Ejemplo 4.2. Obtener la ecuación de la parábola con vértice en el origen y directriz $x = -3$

Solución:

Como la ecuación de la directriz es $x = -3$, de acuerdo al esquema, la parábola es horizontal y la directriz es de la forma $x = -p$, por lo tanto, $p = 3$.

Al sustituir en la expresión $y^2 = 4px$ se tiene la ecuación de la parábola:

$$y^2 = 4(3)x = 12x$$



Foco: $F(3,0)$

Extremos del lado recto:

$L(p,2p) = (3,3)$ y $R(p,-2p) = (3,-6)$

Lado recto: $LR = |4p| = |4(3)| = 12$ unidades

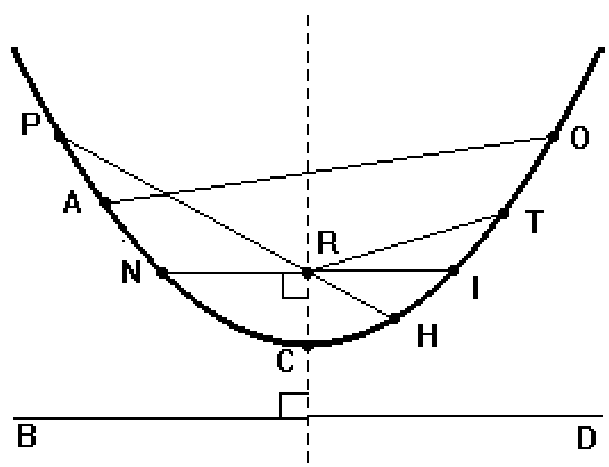
Actividad de aprendizaje teórico-práctica

Con base a la figura de la derecha, identifica los elementos de la parábola.

Foco:

Vértice:

Extremos del Lado Recto (Anchura focal):



Eje de simetría (eje focal):

Directriz:

Cuerda:

Cuerda Focal:

Radio Vector:

AUTOEVALUACIÓN

Ejercicio 4.1. Hallar la ecuación ordinaria de la parábola con vértice en el origen y foco en el punto $F(-3,0)$

a) $y^2 = -12x$ ok
b) $y^2 = -3x$
c) $y^2 = 12x$
d) $y^2 = 3x$

Ejercicio 4.2. Obtener la ecuación ordinaria de la parábola con vértice en el origen y directriz $x = 4$.

a) $y^2 = -12x$
b) $y^2 = 12x$
c) $y^2 = -16x$ ok
d) $y^2 = 16x$

Ejercicio 4.3. Determinar la ecuación ordinaria de la parábola con vértice en el origen y foco en $F(0, 4)$.

a) $y^2 = -16x$
b) $y^2 = -3x$
c) $x^2 = -16y$
d) $x^2 = 16y$ ok

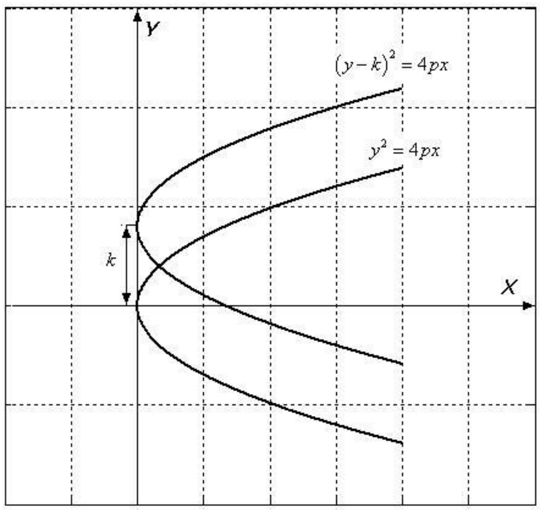
Ejercicio 4.4. Hallar la ecuación ordinaria de la parábola horizontal con vértice en el origen, abre a la derecha y anchura focal $LR = 6$.

a) $y^2 = -12x$
b) $y^2 = -6x$
c) $y^2 = 6x$ ok
d) $y^2 = 3x$

Obtención de la ecuación de la parábola con eje de simetría paralelo a uno de los ejes de coordenadas, con vértice en V(h, k).

Parábola Horizontal

Consideramos la parábola con vértice en el origen y foco en $F(p,0)$. Supongamos que la parábola se desplaza k unidades sobre el eje *Y*.



Al desplazar la parábola k unidades sobre el eje Y, como se observa en la figura, el vértice se encuentra ahora en $V(0,k)$.

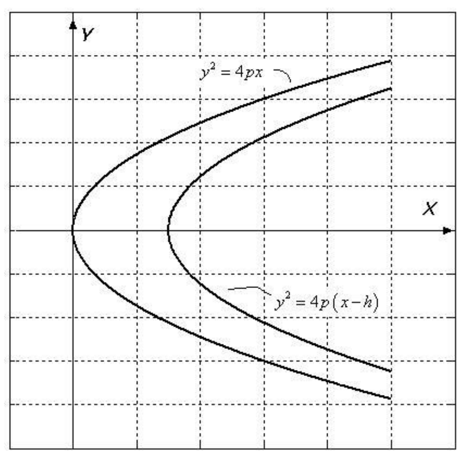
por lo que la ecuación queda como:

$$(y-k)^2 = 4px$$

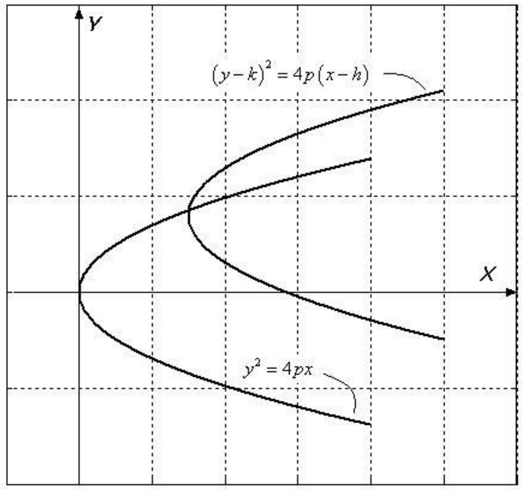
Si la parábola con vértice en el origen y foco en $F(p,0)$ se desplaza en el eje X, h unidades, en dirección del eje X como se muestra en la figura, el vértice se encontrará ahora en $V(h,0)$.

Tenemos que la ecuación de la parábola es:

$$y^2 = 4p(x-h)$$

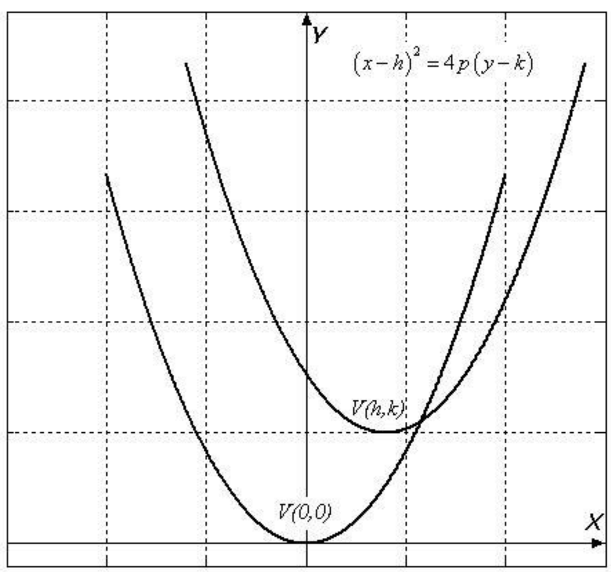


Ahora bien, si el desplazamiento se realiza tanto en el eje *X* como en el eje *Y*, *h* y *k* unidades respectivamente, la ecuación queda como $(y-k)^2 = 4p(x-h)$, la cuál es llamada la ***ecuación ordinaria o clásica*** de la parábola horizontal con vértice en $V(h,k)$.



Parábola Vertical.

Realizando el mismo procedimiento en la parábola de vértice en el origen y foco en $F(0, p)$, es decir trasladando la parábola en los ejes, X Y , *h* y *k* unidades respectivamente, la ecuación de la parábola será $(x-h)^2 = 4p(y-k)$.
la cuál es llamada la ecuación ordinaria o clásica de la parábola vertical con vértice en $V(h, k)$.



Ecuación ordinaria de la parábola Horizontal con vértice en V(h, k), a partir de la definición de lugar geométrico

Obtener la ecuación de la parábola con vértice en $V(h\ ,\ k)$, foco en $F(h\ +\ p,\ k)$ y directriz $x\ =\ h-p$.

Sea $P(x\ ,\ y)$ un punto cualquiera de la parábola, la distancia de punto al foco debe ser igual a la distancia del punto a la directriz:

$$D_{pf} = \sqrt{(x-(h-p))^2 + (y-k)^2} \qquad \text{y} \qquad D_{dir-f} = \frac{x-h+p}{\sqrt{1}}$$

igualando las distancias tenemos:

$$\sqrt{(x-(h-p))^2 + (y-k)^2} = x-h+p$$

desarrollando y despejando $(y – k)^2$ queda:

$$(y-k)^2 = x^2 + h^2 + p^2 + 2xh + 2xp + 2hp - x^2 - h^2 - p^2 - 2xh + 2xp - 2hp$$

reduciendo términos semejantes, tenemos:

$$(y-k)^2 = 4xp - 4hp$$

Factorizando:

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

Ecuación general de la parábola con eje de simetría paralelo a alguno de los ejes coordenados

Parábola horizontal

La ecuación de la parábola horizontal con vértice en $V(h\ ,\ k)$ y foco en $F(h + p\ ,\ k)$. está dada por la ecuación:

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

Desarrollando tenemos:

$$y^2 - 2ky + k^2 = 4px - 4ph$$

igualando a cero, queda la ecuación:

$$y^2 - 2ky + k^2 - 4px + 4ph = 0$$

ordenando tenemos:

$$y^2 - 4px - 2ky + k^2 + 4ph = 0$$

Sí definimos $D = -4p$; $E = -2k$ y $F = k^2 + 4ph$ entonces se tiene

$$y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

en caso de que alguno de los coeficientes fuera un número fraccionario, podemos volver entera la ecuación y tendríamos:

$$By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

esta ecuación se conoce como ***ecuación general de la parábola horizontal***.

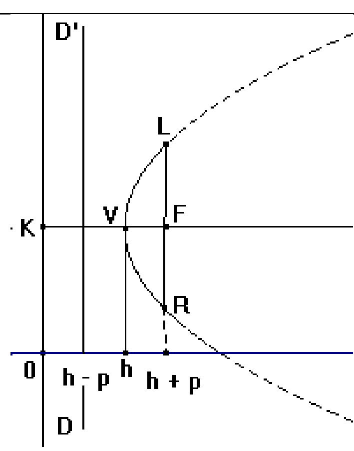
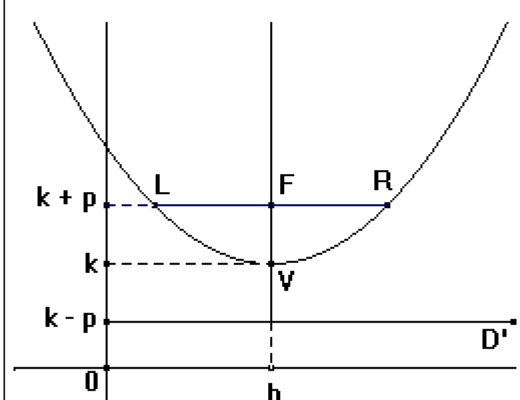
Parábola vertical

De manera similar se obtiene la ecuación general de la parábola vertical con vértice en $V(h\ ,\ k)$ y foco en $F(h,\ k\ +\ p\ )$.

$$Ax^2 + Dx + Ey + F \quad = 0$$

La siguiente tabla es un resumen de las ecuaciones y elementos de la parábola que ayuda en la solución de problemas y ejercicios relativos a la misma. Observa que la ecuación está dada cuando el vértice se encuentra en V (*h, k*), pero se puede usar el esquema para una parábola con vértice en el origen dándoles el valor cero a *h* y a *k*.

ESQUEMA DE LA PARÁBOLA

Parábola horizontal	***Parábola vertical***
Ecuaciones: Clásica: $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ General: $By^2 + Dx + Ey + F = 0$	Ecuaciones: Clásica: $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ General: $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$
 Si p > 0 la parábola se abre hacia la derecha Si p < 0 la parábola se abre hacia la izquierda	 Si p > 0 la parábola se abre hacia arriba (es cóncava hacia arriba) Si p < 0 la parábola se abre hacia abajo (es cóncava hacia abajo)

Elementos: Vértice: $V(h,k)$ Foco: $F(h+p,k)$ Ecuación del eje de simetría: $y=k$ Ecuación de la directriz: $x=h-p$ Anchura focal (lado recto): $LR=\|4p\|$	Elementos: Vértice: $V(h,k)$ Foco: $F(h,k+p)$ Ecuación del eje de simetría: $x=h$ Ecuación de la directriz: $y=k-p$ Anchura focal (lado recto): $LR=\|4p\|$
La ecuación general: $$By^2+Dx+Ey+F=0$$ Al llevarla a su forma clásica obtenemos: $$\left(y+\frac{E}{2B}\right)^2=-\frac{D}{B}\left(x-\frac{E^2-4BF}{4BD}\right)$$ De aquí se tiene: k = $-\frac{E}{2B}$ h = $\frac{E^2-4BF}{4BD}$ 4p = $-\frac{D}{B}$	**La ecuación general:** $$Ax^2+Dx+Ey+F=0$$ Al llevarla a su forma clásica obtenemos: $$\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2=-\frac{E}{A}\left(x-\frac{D^2-4AF}{4AE}\right)$$ Se tiene h = $-\frac{D}{2A}$ k = $\frac{D^2-4AF}{4AE}$ 4p = $-\frac{E}{A}$

Ejemplo 4.3. *Obtener la ecuación general de la parábola con vértice en* $V(-2,1)$ *y foco en F(1,1).*

Solución

Podemos observar que las ordenadas del vértice y del foco son iguales, las abscisas son diferentes. De acuerdo al esquema, la parábola es horizontal (Si se ubican en el plano el vértice y el foco, se puede observar esto). El vértice se encuentra ubicado en $V(h,k)$, por lo tanto $h=-2 \;\; y \;\; k=1$

El foco se encuentra en $F(h+p,k)=(1,1)$, entonces $h+p=1$, por lo tanto $p=3$.

Sustituyendo $h=-2, k=1$ y $p=3$, en la ecuación clásica de la parábola horizontal

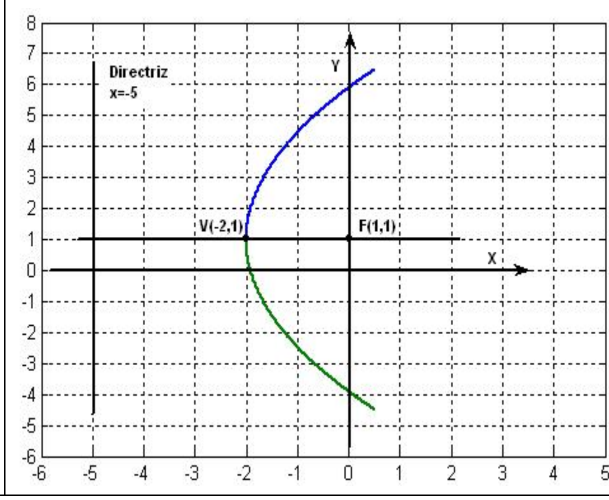
$$(y-k)^2=4p(x-h) \text{ se tiene:}$$

$$(y-1)^2=12(x+2)$$

Desarrollando e igualando a cero obtenemos la ecuación en su forma general:

$$y^2-12x-2y-23=0$$

Los elementos de la parábola son:

Vértice: $V(h,k)=(-2,1)$ Foco: $F(h+p,k)=(1,1)$ Ecuación del eje de simetría: $y=k$ $y=1$ Ecuación de la directriz: $x=h-p$ $x=-5$ Anchura focal(lado recto): $LR=\|4p\|=12$	

Ejemplo 4.4. Determinar la ecuación general de la parábola con foco en $F=(-2,2)$ y directriz $y=4$.

Solución.

Como la directriz $y = 4$, es una recta paralela al eje x, entonces el eje de simetría es paralelo al eje y, es decir la parábola es vertical, de acuerdo al esquema se tiene el foco en $F(h, k+p) = (-2, 2)$, por lo tanto $h = -2 \quad y \quad k + p = 2$

La ecuación de la directriz es de la forma $y = k - p = 4$, entonces $k - p = 4$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{aligned} k + p &= 2 \qquad (1) \\ k - p &= 4 \qquad (2) \end{aligned}$$

se obtienen los valores $k = 3 \quad y \quad p = -1$

Sustituyendo $h = -2, k = 3 \quad y \quad p = -1$, en la ecuación clásica de la parábola vertical:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k) \text{ se tiene:}$$

$$(x+2)^2 = -4(y-3)$$

Desarrollando e igualando a cero obtenemos la ecuación en su forma general:

$$x^2 + 4x + 4y - 8 = 0$$

Los elementos de la parábola son:

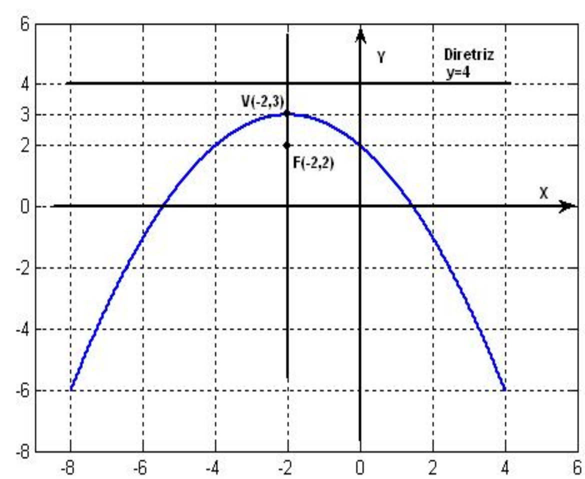
Vértice: $V(h,k) = (-2,3)$

Foco: $F = (-2,2)$.

Ecuación del eje de simetría: $x = h$
$x = -2$

Ecuación de la directriz: $y = 4$

Anchura focal(lado recto):
$LR = |4p| = 4$



AUTOEVALUACIÓN

En los siguientes ejercicios obtener la ecuación general de la parábola que cumple con las condiciones dadas.

Ejercicio 4.5. Hallar la ecuación general de la parábola con vértice en $V(4,-2)$ y foco en $F(4,5)$.

a) $x^2 - 8x - 28y - 40 = 0$ ok
b) $y^2 = -6x$
c) $y^2 - 8y - 28x - 40 = 0$
d) $y^2 = 3x$

Ejercicio 4.6. Hallar la ecuación general de la parábola con vertice en $V(-3,-2)$ y directriz $x = -5$.

a) $y^2 = -12x$
b) $y^2 + 4y - 8x - 20 = 0$ ok
c) $y^2 = 6x$
d) $y^2 = 3x$

Ejercicio 4.7. Hallar la ecuación general de la parábola con foco en $F(-1,3)$ y directriz $y = 7$.

a) $x^2 - 8x - 28y - 40 = 0$
b) $x^2 + 2x - 8y + 41 = 0$ ok
c) $y^2 - 8y - 28x - 40 = 0$
d) $y^2 + 2y - 8x + 41 = 0$

Ejercicio 4.8. Hallar la ecuación general de la parábola con extremos del lado recto en $L(-1,5)$, $R(-1,-11)$ y vértice en $V(-5,-3)$.

a) $x^2 - 8x - 28y - 40 = 0$
b) $x^2 + 2x - 8y + 41 = 0$
c) $y^2 - 8y - 28x - 40 = 0$
d) $9y^2 + 54y - 4x + 61 = 0$ ok

Ejercicio 4.9. Hallar la ecuación general de la parábola con eje de simetría paralelo al eje x, con vértice en $V(-5,-3)$ y pasa por el punto $P(4,-5)$.

a) $x^2 - 8x - 28y - 40 = 0$
b) $x^2 + 2x - 8y + 41 = 0$ ok
c) $y^2 + 6y - 16x - 71 = 0$
d) $y^2 + 2y - 8x + 41 = 0$

Transformación de la forma general de una parábola a su forma clásica

Ejemplo 4.5. Dada la ecuación de la parábola $9x^2 + 24x + 72y + 25 = 0$ transformarla en su forma clásica.

Solución: *Para realizar dicha transformación seguimos los siguientes pasos:*

1) Dividimos entre el coeficiente del término cuadrático:

$$x^2 + \frac{8}{3}x + 8y + \frac{25}{9} = 0$$

2) Agrupamos términos, los que contienen a la variable que esta elevada al cuadrado en el primer miembro y los que no la contienen en el segundo miembro:

$$x^2 + \frac{8}{3}x = -8y - \frac{25}{9}$$

3) Completamos el trinomio cuadrado perfecto:

$$x^2 + \frac{8}{3}x + \left(\frac{4}{3}\right)^2 = -8y - \frac{25}{9} + \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

$$x^2 + \frac{8}{3}x + \left(\frac{4}{3}\right)^2 = -8y - \frac{25}{9} + \frac{16}{9}$$

4) Factorizamos el trinomio cuadrado perfecto en el primer miembro y simplificamos en el segundo miembro:

$$\left(x + \frac{4}{3}\right)^2 = -8y - 1$$

5) En el segundo miembro sacamos como factor común el coeficiente de la variable:

$$\left(x + \frac{4}{3}\right)^2 = -8\left(y + \frac{1}{8}\right)$$

Obteniendo así la forma clásica de la parábola, cuyos elementos son:

$$V\left(-\frac{4}{3},-\frac{1}{8}\right),\ F\left(-\frac{4}{3},-\frac{1}{8}\right),$$

LR = 8; Directriz $y=\frac{15}{8}$; eje focal $x=-\frac{4}{3}$

AUTOEVALUACIÓN

Si aún persisten preguntas, te sugerimos que observes y analices el siguiente video: https://youtu.be/FupdiKyCifo.

Ejercicio 4.10. Dada la ecuación general de la parábola $y^2+5x-6y-11=0$ transformarla a su forma ordinaria y obtener sus elementos.

a) $(y-3)^2=-5(x-4)$ ok
$V(4,3);\ F(\frac{11}{4},3);\ x=\frac{21}{4}$

b) $(y+3)^2=-5(x+4)$
$V(4,3);\ F(\frac{11}{4},3);\ x=\frac{21}{4}$

c) $(y-3)^2=5(x-4)$
$V(4,3);\ F(\frac{11}{4},3);\ x=\frac{21}{4}$

d) $(y+3)^2=5(x+4)$
$V(-4,-3);\ F(\frac{11}{4},3);\ x=\frac{21}{4}$

Ejercicio 4.11. Dada la ecuación general de la parábola $x^2+4x+12y-8=0$ transformarla a su forma clásica y obtener sus elementos.

a) $(y-3)^2=-5(x-4)$
$V(4,3);\ F(\frac{11}{4},3);\ x=\frac{21}{4}$

b) $(x+2)^2=-12(y-1)$ ok
$V(-2,1);\ F(-2,4);\ y=-2$

c) $(x-2)^2=12(y+1)$
$V(2,-1);\ F(2,-4);\ y=2$

d) $(y+3)^2=5(x+4)$
$V(-4,-3);\ F(\frac{11}{4},3);\ x=\frac{21}{4}$

Ejemplo 4.12. Dada la ecuación general de la parábola $2x^2-10x-3y+8=0$ transformarla a su forma ordinaria y obtener sus elementos.

a) $(y-3)^2=-5(x-4)$
$V(4,3);\ F(\frac{11}{4},3);\ x=\frac{21}{4}$

b) $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{3}{2}(y+\frac{3}{2})$ ok
$V(\frac{5}{2},-\frac{3}{2});\ F(\frac{5}{2},-\frac{9}{8});\ y=-\frac{15}{8}$

c) $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{3}{2}(y-\frac{41}{2})$
$V(\frac{5}{2},\frac{41}{6});\ F(\frac{5}{2},\frac{173}{24});\ y=\frac{155}{24}$

d) $\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{3}{2}(x+\frac{41}{2})$
$V(-\frac{41}{2},-\frac{5}{2});\ F(-\frac{5}{2},-\frac{173}{24});\ x=\frac{155}{24}$

Ejercicio 4.13. Dada la ecuación general de la parábola $4y^2+48x+12y-159=0$ transformarla a su forma clásica y obtener sus elementos.

a) $\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=-12(x-\frac{25}{8})$
$V(\frac{25}{8},-\frac{3}{2});\ F(0,-\frac{3}{2});\ x=\frac{50}{8}$

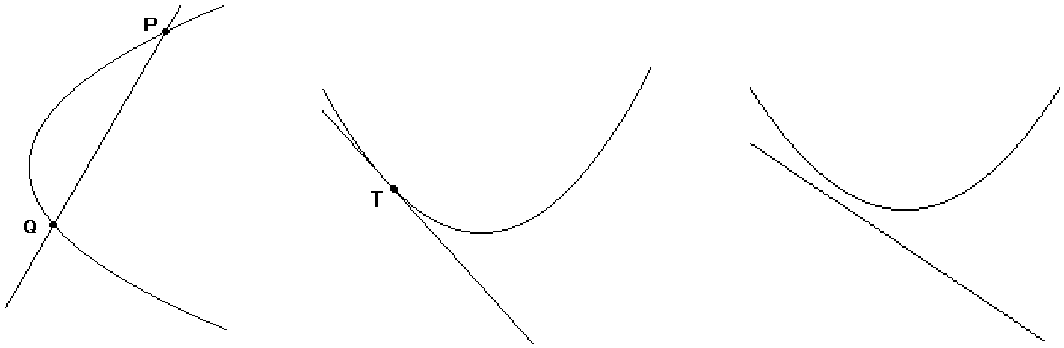
b) $(x+2)^2=-12(y-1)$
$V(-2,1);\ F(-2,4);\ y=-2$

c) $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{3}{2}(y-\frac{41}{2})$
$V(\frac{5}{2},\frac{41}{6});\ F(\frac{5}{2},\frac{173}{24});\ y=\frac{155}{24}$

d) $\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=-12(x-\frac{7}{2})$ ok
$V(\frac{7}{2},-\frac{3}{2});\ F(\frac{1}{2},-\frac{3}{2});\ x=\frac{13}{2}$

Intersección entre una recta y una parábola

Se tienen tres casos, la recta y la parábola se pueden cortar en dos puntos, un punto o no se cortan, como se muestra en las figuras siguientes:



La intersección se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones correspondiente.

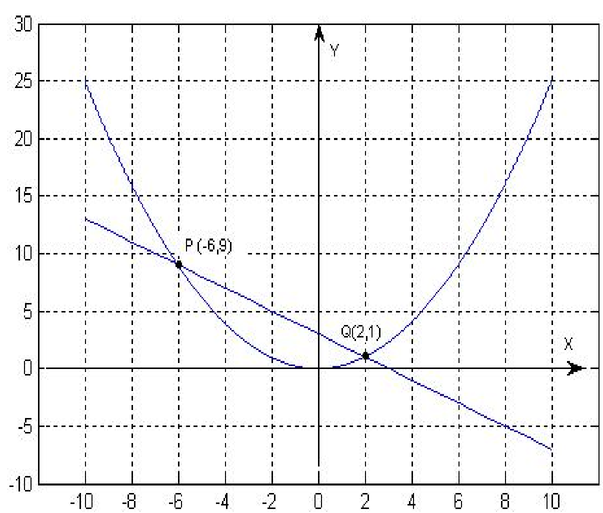
***Ejemplo 4.6*.** Hallar los puntos de intersección de la recta $x + y - 3 = 0$ con la parábola $x^2 - 4y = 0$

Solución.

Resolvemos el sistema:

$$x + y - 3 = 0 \qquad (1)$$

$$x^2 - 4y = 0 \qquad (2)$$



despejando de Ec. (1) la variable y, se tiene:

$$y = 3 - x \qquad (3)$$

Sustituyendo en Ec. (2):

$$x^2 - 4(3 - x) = 0$$

Desarrollando y ordenando:

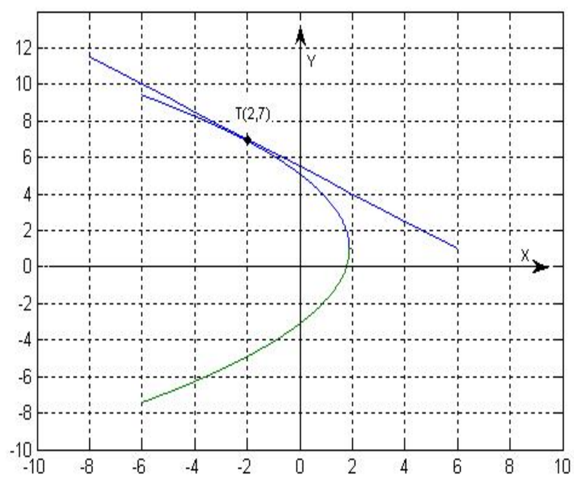
$$x^2 + 4x - 12 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado obtenemos $x_1 = -6 \quad y \quad x_2 = 2$

Sustituyendo en Ec. (3) se obtienen las ordenadas de los puntos. Esto quiere decir que la recta y la parábola se cortan en los puntos: $P(-6,9) \quad y \quad Q(2,1)$.

Ejemplo 4.7. Determinar los puntos de intersección de la recta $3x+4y-22=0$ con la parábola $y^2+9x-2y-17=0$

Solución. Resolvemos el sistema:



$$3x+4y-22=0 \qquad (1)$$

$$y^2+9x-2y-17=0 \qquad (2)$$

despejando de x de la Ec(1), se tiene

$$x = \frac{22-4x}{3}$$

Sustituyendo en Ec(2) se tiene

$$y^2+9\left(\frac{22 - 4y}{3}\right) - 2y - 17 = 0$$

Desarrollando y ordenando se tiene $y^2 - 14y + 49 = 0$

Resolviendo la ecuación de segundo grado obtenemos $x=-2$

Sustituyendo en Ec(3) se obtienen la ordenada del punto, Esto quiere decir que la recta es tangente a la parábola en el punto $T(-2,7)$,

Ejemplo 4.8. Determinar los puntos de intersección de la recta $x - y + 7 = 0$ con la parábola $x^2 + 6x + 6y - 3 = 0$

Solución.

Resolvemos el sistema:

$$x - y + 7 = 0$$

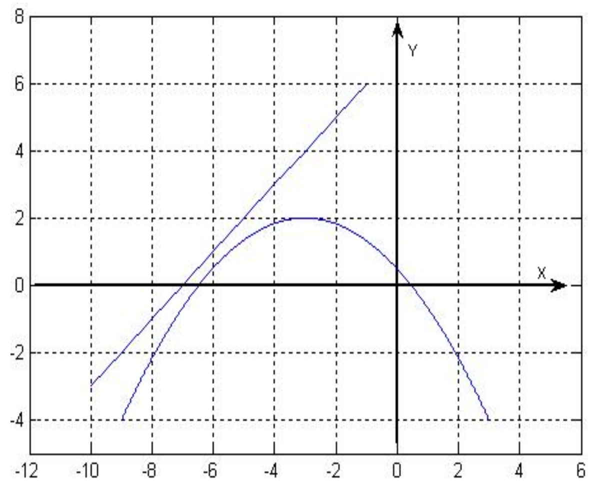
$$x^2 + 6x + 6y - 3 = 0$$

despejando de Ec(1) la variable y, se tiene
$y = x + 7$

Sustituyendo en Ec(2) se tiene
$x^2 + 6x + 6(x + 7) - 3 = 0$
Desarrollando y ordenando se tiene
$x^2 + 12x + 39 = 0$

Esta ecuación no tiene solución en los números reales debido a que:

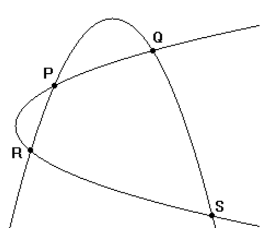
$$b^2 - 4ac = (12)^2 - 4(1)(39) = -12 < 0$$

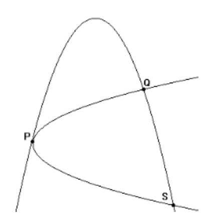


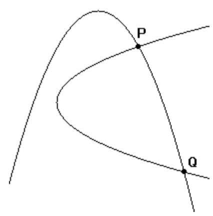
***Esto quiere decir que la recta y la parábola no se intersecan*.**

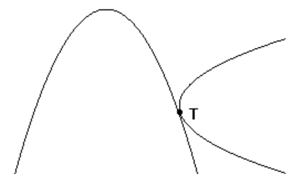
Posiciones relativas entre dos parábolas.

Se presentan cuatro casos, se pueden cortar en cuatro puntos, en tres, en dos, en uno, o no se cortan.









Para encontrar los puntos de intersección se resuelve el sistema correspondiente.

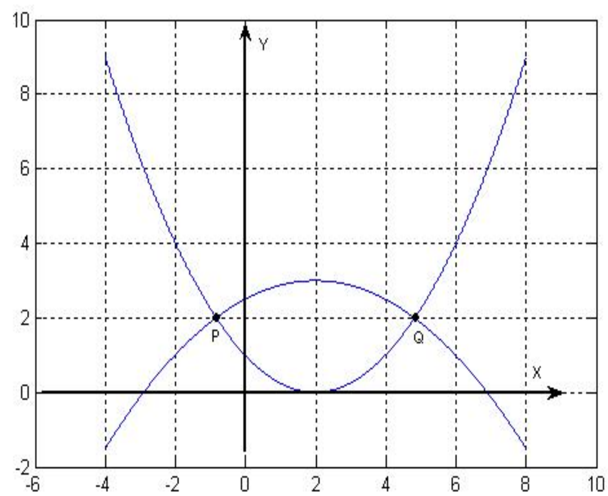
Ejemplo 4.9. Hallar los puntos de intersección de las parábolas:

$$x^2-4x+8y-20=0, \quad x^2-4x-4y+4=0$$

Solución. Resolviendo el sistema:

$$x^2-4x+8y-20=0 \qquad (1)$$
$$x^2-4x-4y+4=0 \qquad (2)$$

Efectuando la operación Ec. (1) – Ec. (2) tenemos:



$12y-24=0$, por lo tanto $y=2$

Sustituyendo en la ecuación (2) y simplificando, se obtiene:

$x^2-4x-4=0$ resolviendo la ecuación:

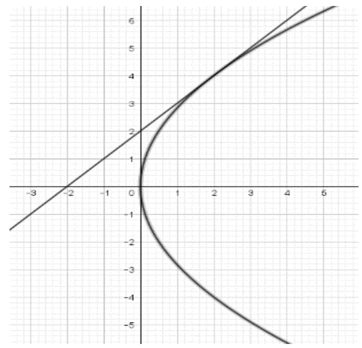
$x_1 = 2+2\sqrt{2}$ y $x_1 = 2-2\sqrt{2}$
entonces los puntos de intersección son:

$$P(2-2\sqrt{2},2) \quad y \quad Q(2+2\sqrt{2},2)$$

AUTOEVALUACIÓN

Ejercicio 4.14.

Determinar los puntos de intersección de la recta $x - y + 2 = 0$ con la parábola $y^2 - 8x = 0$ y graficar.

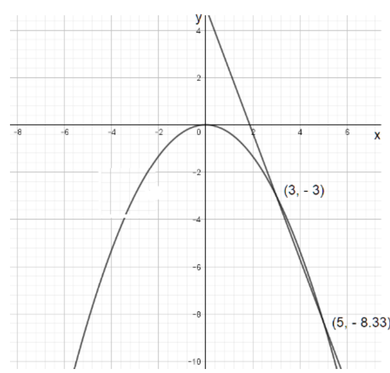


Solución:

$$p(2,4)$$

Ejercicio 4.15.

Hallar los puntos de intersección de la recta $8x + 3y - 15 = 0$ con la parábola $x^2 + 3y = 0$ y graficar.

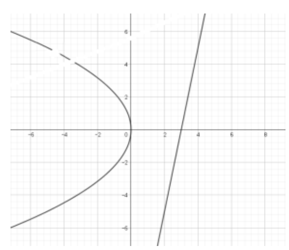


Solución:

$$p_2(5, -\frac{25}{3}), p_2(3, -3)$$

Ejercicio 4.16.

Obtener los puntos de intersección de la recta $5x - y - 15 = 0$ con la parábola $y^2 + 5x = 0$ y graficar.



Solución:

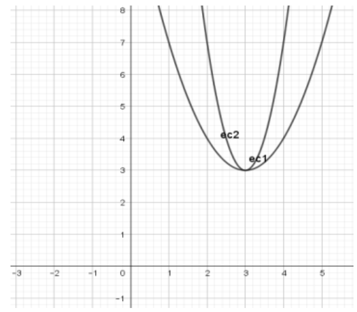
$$No\ se\ intersecan$$

Ejercicio 4.17.

Obtener los puntos de intersección de las parábolas

$ec1$: $4x^2 - 24x - y + 39 = 0$ y

ec2: $x^2 - 6x - y + 12 = 0$. Graficar.



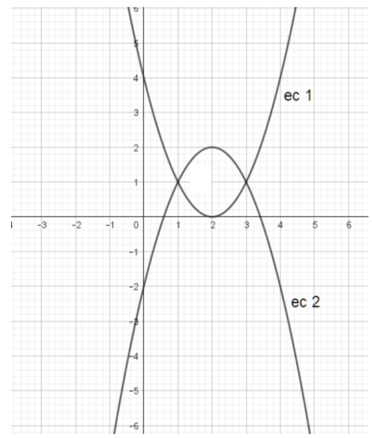
Solución:

$p \quad (3,3)$

Ejercicio 4.18.

Obtener los puntos de intersección de las parábolas:

$x^2 - 4x - y + 4 = 0,\ x^2 - 4x + y + 2 = 0$. Graficar.



Solución:

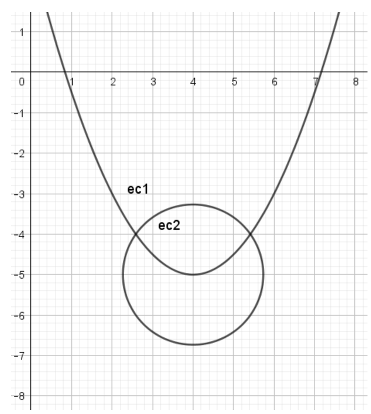
$p_2(1,1), p_2(3,1)$

Ejercicio 4.19.

Obtener los puntos de intersección de las curvas:

$x^2 - 8x - 2y + 6 = 0,\ x^2 - 8x + y^2 + 10y + 38 = 0$.

Graficar.



Solución:

$p_1(4 - \sqrt{2}, -4), p_2(4 + \sqrt{2}, -4)$

Unidad 5

La circunferencia y su ecuación cartesiana

La perturbación del agua formando una onda circular en su superficie.

La circunferencia, la elipse y sus ecuaciones cartesianas

Propósitos: Al finalizar, el alumno será capaz de obtener las ecuaciones cartesianas de la circunferencia y la elipse y trazar sus gráficas correspondientes, dado cualquier conjunto de elementos definitorios. Resolverá problemas donde tales curvas se presenten, con el fin de avanzar en la consolidación del método analítico y desarrollar su habilidad de reconocimiento de formas y estructuras.

Objetivos Generales de la unidad

APRENDIZAJES.

Al finalizar la Unidad el Alumno:

1. Deduce la ecuación ordinaria de la circunferencia e identifica sus elementos: radio y coordenada del centro.
2. Obtiene la ecuación general de la circunferencia.
3. Obtiene la ecuación ordinaria a partir de la ecuación general y determina el centro y el radio de una circunferencia.
4. Resuelve problemas de corte geométrico.
5. Obtiene la definición de elipse como lugar geométrico e identificará sus elementos.
6. Obtiene la ecuación cartesiana de una elipse, con ejes paralelos a los ejes coordenados.
7. Reconoce los tipos diferentes de simetría de la elipse.
8. Identifica el papel de los parámetros a, b y c en la gráfica de la elipse y los emplea en su construcción.
9. Determina los elementos de la elipse transformando la ecuación general a su forma ordinaria.
10. Resuelve problemas geométricos y en otros contextos.

UNIDAD 5

LA CIRCUNFERENCIA, LA ELIPSE Y SUS ECUACIONES CARTESIANAS

Introducción

Una roca lanzada al agua nos hace ver la generación de ondas concéntricas que vistas en planta simulan una circunferencia. Una figura muy singular que el ser humano ha utilizado de mil maneras para mejorar su calidad de vida al emplearla en múltiples artefactos como ruedas de vehículos, carátulas de relojes, en diseños arquitectónicos, para explicarse el universo, etc. Se atribuye a los babilonios (entre 2300 y 539 A de C.) el uso de la circunferencia para el estudio de las constelaciones, las cuales eran doce y para ello inventaron el zodiaco, que resultó de dividir un círculo en treinta partes iguales.

Posteriormente, durante mucho tiempo la humanidad creía que los planetas se movían de manera perfecta siguiendo una trayectoria circular alrededor de la Tierra, hasta que el alemán Johann Kepler descubrió gracias a sus estudios y observaciones astronómicas que la trayectoria era elíptica. Se le reconocen tres leyes: la primera de ellas dice que los planetas se mueven siguiendo una trayectoria elíptica, con el sol en uno de sus focos, la segunda que la línea que une al sol con el planeta barre áreas iguales en tiempos iguales y la tercera, publicada en 1618, nueve años después de las otras dos, relacionaba el tiempo con la distancia de los planetas.

Como podrás darte cuenta, estas singulares curvas son muy utilizadas en la actualidad y tienen una gran trascendencia en la vida de los seres humanos en la Tierra.

Diferentes tipos de rueda utilizados para transportar.

Johann Kepler (1571-1630).

En esta unidad, te proponemos una serie de actividades para que comprendas los aprendizajes propuestos.

Presentación

Al finalizar esta unidad el alumno será capaz de:

- Obtener las ecuaciones cartesianas de la circunferencia y la elipse y trazar sus gráficas correspondientes, dado cualquier conjunto de elementos definitorios.
- Resolver problemas donde tales curvas se presenten, con el fin de avanzar en la consolidación del método analítico y
- desarrollar su habilidad de reconocimiento de formas y estructuras.

Para conseguir esta ambiciosa meta, te proponemos una serie de actividades de aprendizaje, teoría y prácticas que están seguidas de acuerdo con una secuencia lógica propuesta en el programa de la asignatura. Se recomienda seguirlas en el orden que se presentan, sin embargo, puedes estudiar donde consideres necesario, pero recuerda que debes comprender los conceptos antecedentes que se requieren para su entendimiento.

Conceptos clave

Eje de simetría: Línea que divide a la circunferencia o a la elipse en dos partes iguales.

Focos: son los puntos ubicados en el eje mayor de la elipse y que son equidistantes de centro.

Eje mayor: Es la cuerda que contiene a los focos y al centro de la elipse, también se le conoce como eje focal, mide 2a.

Eje menor: Es la cuerda que contiene al centro de la elipse y es perpendicular al eje mayor o focal, 2b.

Semi eje mayor: La mitad del diámetro más grande de la elipse, a.

Semi eje menor: La mitad del diámetro más corto de la elipse, b.

Excentricidad de una elipse “e”: Es la razón c/a y siempre es menor que uno. Si la excentricidad es cero, se trata de una circunferencia.

Lado recto: Segmento de recta perpendicular al eje focal que pasa por uno de los focos. Sus puntos extremos están sobre la elipse. Mide: $2b^2/a$.

Radio: Segmento que va del centro a un lado de la elipse o circunferencia.

Radios vectores: Segmentos que van de un punto de la elipse a los focos.

Elipse vertical: Cuando el eje de la elipse es paralelo o coincide con el eje de ordenadas.

Elipse horizontal: Cuando el eje mayor de la elipse coincide o es paralelo al eje de las abcisas.

Vértices: Son los puntos de intersección de la elipse con los ejes mayor y menor. Son cuatro.

Sugerencias

Este contenido está dirigido a los alumnos que desean estudiar de manera autodidacta y a su ritmo. Se recomienda seguir las actividades de aprendizaje y repasar la teoría. Seguir los ejemplos ayudará a adquirir destreza.

En caso de tener preguntas, se sugiere preguntar al profesor o acudir a asesorías con dudas específicas. No está de más el hacer algunas recomendaciones a los estudiantes para que su estudio sea eficaz: leer con atención cada párrafo y comprender lo que se pide, trabajar en un lugar bien ventilado, iluminado y silencioso, sentarse cómodamente en una silla con respaldo y en una mesa libre de obstáculos y tener una libreta de notas para realizar todos los ejercicios propuestos para adquirir seguridad en esta asignatura. Probablemente alguna de estas recomendaciones no sea factible de llevarse a cabo por las condiciones de confinamiento sanitario que estamos viviendo, pero en lo posible, es mejor tratar de respetarlas.

Recuerda que lo más importante es tener una actitud positiva, el deseo y la intención de aprender.

Actividad de aprendizaje teórico-práctica

1.- Sobre una hoja blanca, colocar un alfiler (o sujetador de recados para pizarrones de corcho),

2.- Amarrar una cuerda de 20 cm de longitud en el alfiler (figura 1),

3.- Colocar un lápiz al final de la cuerda (figura 2) y manteniéndola tensa deslizar el lápiz hasta completar una vuelta.

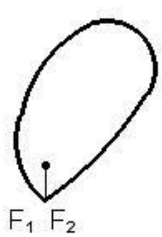


figura 1

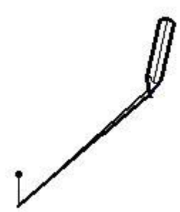
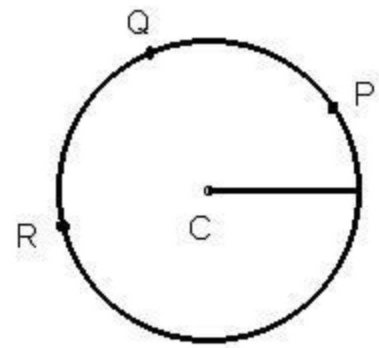


figura 2

4.-¿Cómo se llama la curva que acabas de dibujar? ________________________

5.- Ubica sobre la circunferencia tres puntos por ejemplo P, Q y R, y mide sus distancias de cada punto al centro C. ¿Qué característica tienen en común?_______________

6.- ¿Cuál es la condición (propiedad) que cumplen los puntos de la circunferencia?



Circunferencia

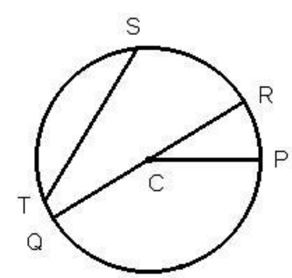
Definición. La circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos en el plano, que equidistan (se encuentran a una misma distancia) de un punto fijo llamado centro de la circunferencia. A la distancia constante se le llama radio de la circunferencia y se denota por r .

Elementos de la circunferencia

Radio: Segmento del centro a cualquier punto de la circunferencia: $\overline{CP}$

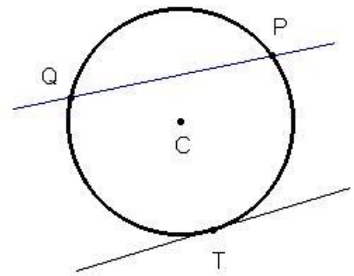
Cuerda: Segmento que une dos puntos de la circunferencia: $\overline{TS}$

Diámetro: Cuerda que pasa por el centro $\overline{QR}$



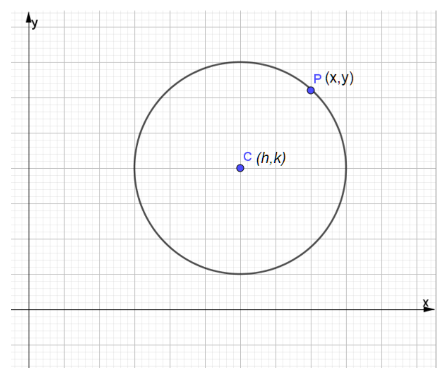
Recta secante: Recta que pasa (corta) por dos puntos de la circunferencia. La recta que pasa por los puntos P y Q es una recta secante.

Recta tangente: Recta que corta (toca) en un punto a la circunferencia. La recta que pasa por el punto T es una recta tangente.



Ecuación cartesiana de la circunferencia

Para la obtener la ecuación cartesiana de la circunferencia que tiene su centro *C(h,k)* en cualquier parte del primer cuadrante del sistema de referencia, nos apoyaremos en la imagen siguiente, donde se observa un punto *P*(x,y).



La distancia del centro *C(h,k)* al punto P(x,y), queda determinada por:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Sustituyendo valores y simplificando:

$$r^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2$$

Reordenando términos:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

A esta ecuación se le denomina **la forma ordinaria de la circunferencia** con centro en $C(h,k)$ y radio r .

Caso particular:

La ecuación ordinaria de la circunferencia con centro en el origen $C(0,0)$ $(h=0 \text{ y } k=0)$ **y radio** r **,** es:

$$x^2+y^2=r^2$$

AUTOEVALUACIÓN

Ejercicio 5.1. Hallar la ecuación ordinaria de la circunferencia con centro en (2,-3) y radio 2 unidades.

a) $(x-2)^2+(y+3)^2=4$ ok
b) $(x-2)^2+(y+3)^2=2$
c) $(x+2)^2+(y-3)^2=4$
d) $(x+2)^2+(y-3)^2=2$

Ejercicio 5.2. Hallar la ecuación ordinaria de la circunferencia con centro en (-1, 2) y radio 4 unidades.

a) $(x-1)^2+(y+2)^2=4$
b) $(x-2)^2+(y+1)^2=4$
c) $(x+1)^2+(y-2)^2=16$ ok
d) $(x+1)^2+(y-2)^2=4$

Ejercicio 5.3. Hallar la ecuación ordinaria de la circunferencia con diámetro MN, con M(-3,-3) y N(3,3).

a) $(x-2)^2+(y+3)^2=4$
b) $x^2+y^2=18$ ok
c) $(x+3)^2+(y-3)^2=9$
d) $x^2+y^2=3\sqrt{2}$

Ejercicio 5.4. La recta tangente a una circunferencia es $y=-x+3$. Si el centro de la circunferencia es el origen de coordenadas, ¿cuál es su radio r?

a) $r=\frac{9}{2}\ unidades$ ok
b) $r=2\ unidades$
c) $r=4\ unidades$
d) $r=\frac{3}{\sqrt{2}}\ unidades$

Ejercicio 5.5. La recta tangente a una circunferencia es $y = -x + 3$. Si el centro de la circunferencia es el origen de coordenadas, ¿cuál es su ecuación ordinaria?

a) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$

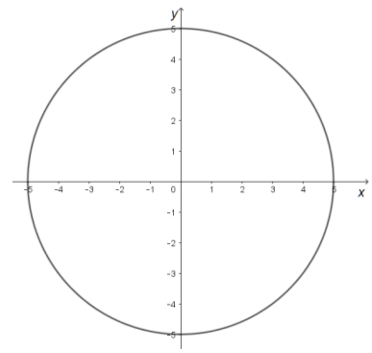
b) $x^2 + y^2 = \frac{3}{\sqrt{2}}$

c) $(x+3)^2 + (y-3)^2 = 9$

d) $x^2 + y^2 = \frac{9}{2}$ ok

Ejercicio 5.6.

Completa los elementos que faltan, de acuerdo a los datos y la figura anexa.



C (,   )

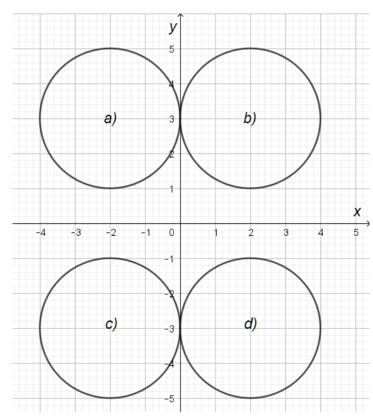
r =_____ unidades

Ecuación:

Ejercicio 5.7.

Elije la imagen que corresponde a la ecuación:

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4.$$



Solución: d)

Ecuación general de la circunferencia

La ecuación general de la circunferencia se obtiene a partir de desarrollar en la ecuación ordinaria o clásica de la circunferencia los binomios al cuadrado e igualarla a cero.

La forma clásica de la circunferencia es:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Al desarrollar se obtiene:

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

Si no existen coeficientes racionales en la ecuación anterior esta se puede escribir como:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$ D, E y F son números enteros.

Sí existen coeficientes racionales en la ecuación, esta se puede escribir como:

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$$

El coeficiente A es el número entero que corresponde al mínimo común múltiplo de los coeficientes racionales que existan en la expresión y D, E y F son números enteros.

Transformación de la ecuación de una circunferencia en su forma clásica a su forma general. Manejo algebraico.

Ejemplo 5.1. Obtener la forma general de la ecuación de la circunferencia: $(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 49$.

Solución:

Al desarrollar los binomios se tiene:

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 = 49$$

Al igualar a cero y simplificar:

$$x^2 + y^2 + 2x + 6y - 39 = 0$$

se obtiene la ecuación de la circunferencia en su forma general.

AUTOEVALUACIÓN

En los siguientes ejercicios obtener la ecuación general de la circunferencia que cumple con las condiciones dadas.

Ejercicio 5.8. Hallar la ecuación general de la circunferencia con centro en (2, -3) y radio 2.

a) $4x^2 + 4y^2 - 16x + 24y + 36 = 0$ ok
b) $4x^2 + 4y^2 - 16x + 24y + 40 = 0$
c) $4x^2 + 4y^2 - 12x + 22y + 36 = 0$
d) $2x^2 + 2y^2 - 16x + 24y + 36 = 0$

Ejercicio 5.9.

Encuentra la ecuación general de la circunferencia que pasa por los puntos: A(1, 0), B(1, - 4) y C(3, - 2).

a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ ok
b) $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 18 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$
d) $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 9 = 0$

Ejercicio 5.10.

Encuentra la ecuación general de la circunferencia que pasa por los puntos: A(- 5, - 4), B(3, 4) y C(- 5, 12).

a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 18 = 0$
c) $x^2 + y^2 + 10x - 8y - 23 = 0$ ok
d) $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 9 = 0$

Problemas de aplicación de la circunferencia

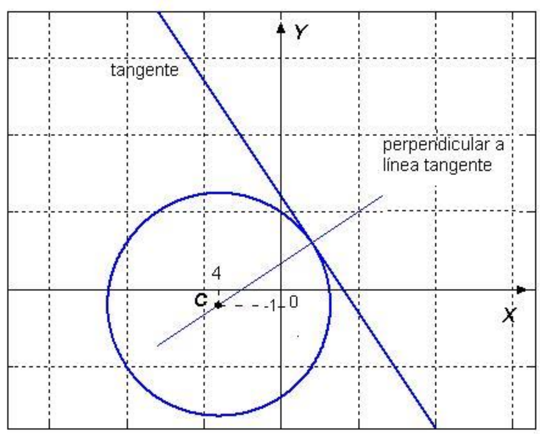
Ejemplo 5.2. Determinar la ecuación de la circunferencia con centro en el punto $C(-4,-1)$ y es tangente a la recta $3x+2y-12=0$.

Solución:

Geométricamente la circunferencia se puede trazar de la siguiente manera:

Se localiza el punto C y se traza la recta $3x+2y-12=0$ en el plano.

Por el punto C se construye una perpendicular a la recta dada. La circunferencia se construye haciendo centro en C y abriendo el compás hasta el punto de intersección de las rectas, como puede observarse en la siguiente figura:



Para resolver el problema en forma analítica se procede de la siguiente manera:

a) Obtener la ecuación de la recta perpendicular a la recta dada, que pase por el punto C.

La pendiente de la recta perpendicular a la recta tangente es la inversa y de signo contrario a la pendiente de la recta tangente $m=-\frac{3}{2}$; esto es $m_{\perp}=\frac{2}{3}$.

La ecuación de la recta que pasa por el centro $C(-4,-1)$ y tiene pendiente $m_{\perp}=\frac{2}{3}$ es:

$$2x-3y+5=0$$

b) Resolver el sistema de ecuaciones para obtener el punto de intersección *I*.

$$\begin{aligned} 2x-3y+5&=0 \qquad \mathrm{E}_1 \\ 3x+2y-12&=0 \qquad \mathrm{E}_2 \end{aligned}$$

Al efectuar las operaciones $2E_1+3E_2$ se obtiene:

$$13x-26=0 \qquad \therefore \qquad x=2$$

Y al sustituir en la ecuación E_1, $y=3$.

El punto de tangencia (intersección de la tangente y la perpendicular) es $I(2,3)$.

c) El radio es la distancia entre el centro y este punto I :

$$r=\sqrt{(2+4)^2+(3+1)^2}=\sqrt{36+16}=\sqrt{52} \text{ unidades.}$$

d) Finalmente la ecuación de la circunferencia con centro en el punto $C(-4,-1)$ y radio $r=\sqrt{52}$ es:

$$(x+4)^2+(y+1)^2=52$$

Se recomienda calcular la distancia de un punto a una recta, para obtener la ecuación de la circunferencia.

La distancia del centro $C(-4,-1)$ a la recta tangente $3x+2y-12=0$ es la longitud del radio, esta se obtiene por medio de la expresión:

$$d=\frac{\left|Ax_1+By_1+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}=r$$

Al sustituir las coordenadas del punto se tiene:

$$r=\frac{\left|3(-4)+2(-1)-12\right|}{\sqrt{(3)^2+(2)^2}}=\frac{26}{\sqrt{13}}=2\sqrt{13}\text{ unidades.}$$

El radio de la circunferencia es $r=2\sqrt{13}$, equivalente a $r=\sqrt{52}$ unidades.

Finalmente, la ecuación en su forma ordinaria o clásica es:

$$(x+4)^2+(y+1)^2=52$$

Ejemplo 5.3. Hallar la ecuación general de la circunferencia que pasa por los puntos $P(9,\,8),\ Q(2,\,9)\ y\ R(8,\,1)$.

Solución:

Para resolver este ejercicio usamos la ecuación de la circunferencia en su forma general con el coeficiente de los términos cuadráticos unitario:

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

Como los puntos pertenecen a la circunferencia, satisfacen su ecuación, esto es:

Punto $P(9,\ 8)$:

$$(9)^2 + (8)^2 + D(9) + E(8) + F = 0$$

Realizando operaciones:

$$9D + 8E + F = -145 \qquad (1)$$

Al sustituir las coordenadas del punto $\mathrm{Q}(2,\ 9)$ en la ecuación de la circunferencia se tiene:

$$(2)^2 + (9)^2 + D(2) + E(9) + F = 0$$

Simplificando:

$$2D + 9E + F = -85 \qquad (2)$$

Finalmente, para el punto $R(8,\ 1)$ se tiene:

$$(8)^2 + (1)^2 + D(8) + E(1) + F = 0$$

Simplificando:

$$8\mathrm{D} + E + F = -65 \qquad (3)$$

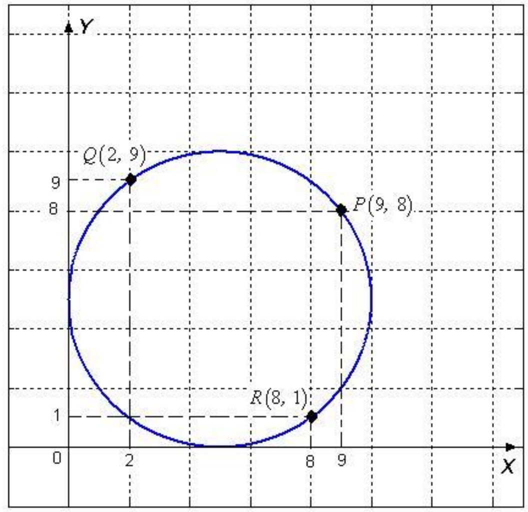
Al resolver el sistema de ecuaciones lineales 3x3 se obtiene $D = -10,\ E = -10\ y\ F = 25$
.

Por lo tanto, la ecuación general de la circunferencia que pasa por los tres puntos dados es:

$$x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$$

Nota que este problema es equivalente a encontrar la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo con vértices en los puntos: $P(9, 8)$, $Q(2, 9)$ y $R(8, 1)$.

La gráfica de la circunferencia es:



Ejemplo 5.4. Encontrar la ecuación general de la circunferencia que pasa por los puntos $P(1,-2)$, $Q(4, 1)$ y cuyo centro se encuentra sobre la recta cuya ecuación es $4x + 7y - 17 = 0$.

Solución

Para la obtener la circunferencia con procedimiento geométrico se procede de la siguiente manera.

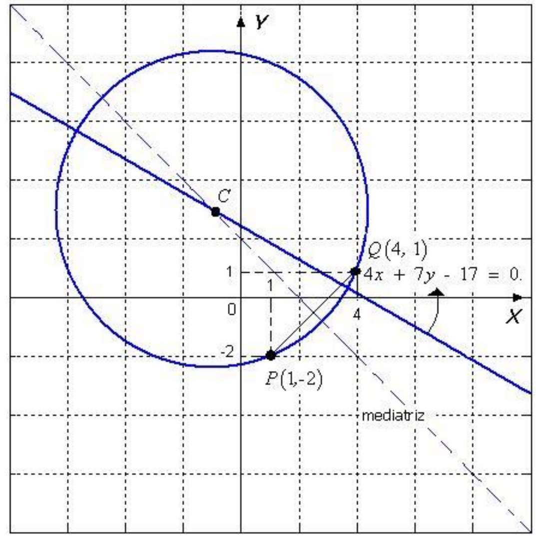
1) Localizar los puntos dados y la recta en un plano cartesiano.

2) Trazar el segmento $\overline{PQ}$

3) Construir la mediatriz del segmento $\overline{PQ}$
.

La intersección de la mediatriz con la recta dada es el centro de la circunferencia.

4) Con centro en el punto *C* y radio *CP*, trazar la circunferencia.



Analíticamente, se procede de la siguiente manera:

El centro de la circunferencia tiene coordenadas no conocidas $C(h, k)$, el punto pertenece a la recta cuya ecuación es $4x + 7y - 17 = 0.$, entonces, las coordenadas h, k satisfacen la ecuación, esto es

$$4h + 7k - 17 = 0 \qquad (1)$$

Por otro lado, el centro C(h, k) es un punto de la mediatriz del segmento PQ, es decir $CP = CQ$, por lo tanto

$$\sqrt{(h-1)^2 + (k+2)^2} = \sqrt{(h-4)^2 + (k-1)^2}$$

Al eliminar los radicales:

$$(h-1)^2 + (k+2)^2 = (h-4)^2 + (k-1)^2$$

Y al desarrollar y simplificar se obtiene la ecuación:

$$6h + 6k - 12 = 0$$

Y al dividir entre 6 $\quad h + k - 2 = 0 \quad$ (2)

Al resolver el sistema de ecuaciones (1) y (2) se tiene $h = -1, k = 3$, por lo tanto, el centro se localiza en el punto $C(-1, 3)$ y el radio es:

$$r = CP = \sqrt{(h-1)^2 + (k+2)^2} = \sqrt{(-1-1)^2 + (3+2)^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$$

La ecuación de la circunferencia en su forma clásica es:

$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 29$$

La ecuación general de la circunferencia es:

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y - 19 = 0$$

AUTOEVALUACIÓN

Ejercicio 5.11.

Determinar el centro y radio de la circunferencia $(x + 8)^2 + (y - 5)^2 = 45$

Ejercicio 5.12.

Determinar el centro y radio de la circunferencia $x^2 + y^2 = \frac{49}{4}$

Ejercicio 5.13.

Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es $C\left(\frac{5}{3}, -4\right)$ y longitud del radio igual a 2 unidades.

Ejercicio 5.14.

Obtener la ecuación de la circunferencia de radio igual a 5 cuyo centro es el punto de intersección de las rectas cuyas ecuaciones son $3x - 4y - 23 = 0;\quad 2x + 3y - 4 = 0$.

Ejercicio 5.15.

Hallar la ecuación de la circunferencia con centro en el punto $C(-4, 7)$ que es tangente al eje Y.

Ejercicio 5.16.

Hallar la ecuación de la circunferencia con centro en el punto $C(5, -5)$ que es tangente a la recta $5x - 12y - 34 = 0$.

Ejercicio 5.17.

Obtener la ecuación de la circunferencia, sí los extremos de uno sus diámetros son los puntos $P(-4, 5)$ y $Q(4, -5)$.

Ejercicio 5.18.

Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo diámetro es el segmento de la recta $3x - 5y + 15 = 0$, con extremos en los ejes de coordenadas.

Unidad 5

La elipse y su ecuación cartesiana

La majestuosa Plaza de San Pedro de forma elíptica en el Vaticano (1656-1667).

La circunferencia, la elipse y sus ecuaciones cartesianas

Objetivos Generales de la unidad

APRENDIZAJES.

Al finalizar la Unidad el Alumno:

1. Obtiene la definición de elipse como lugar geométrico e identificará sus elementos.

2. Obtiene la ecuación cartesiana de una elipse, con ejes paralelos a los ejes coordenados.

3. Reconoce los tipos diferentes de simetría de la elipse.

4. Identifica el papel de los parámetros a, b y c en la gráfica de la elipse y los emplea en su construcción.

5. Determina los elementos de la elipse transformando la ecuación general a su forma ordinaria.

6. Resuelve problemas geométricos y en otros contextos.

Actividad de aprendizaje teórico-práctica

1.- Sobre una hoja blanca, colocar dos alfileres (o sujetadores de recados para pizarrones de corcho), a una distancia que sea menor de 20 cm.

2.- Amarrar una cuerda de 20 cm de longitud en los alfileres (figura 1).

3.- Colocar un lápiz en el cordel (figura 2) y manteniendo tensa la cuerda deslizar el lápiz hasta completar una vuelta.

Figura 1

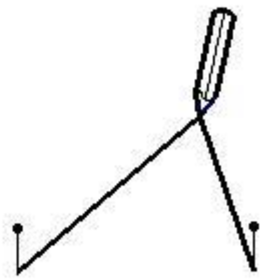


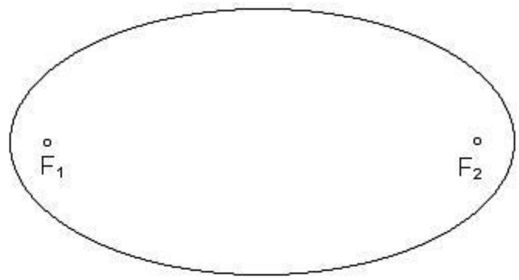
Figura 2

Elementos geométricos de la elipse

Con la curva dibujada señala los elementos que se piden.

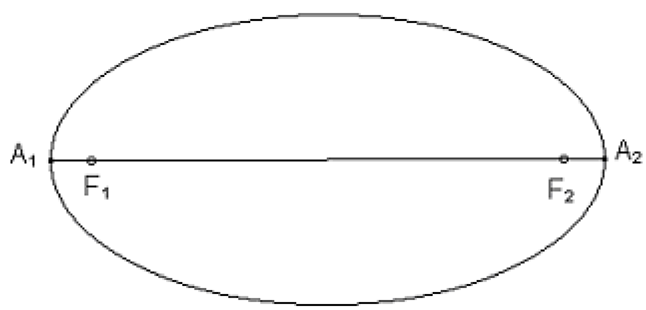
1.- ¿Cómo se llama la curva?, ¿Qué características tiene?

2.- Los puntos en donde se encontraban los alfileres se les llama ***focos de la elipse*** y los denotamos por F_1 y F_2



3.- A la distancia F_1F_2 le llamamos ***distancia focal*** y a esta distancia la denotamos por *2c*, es decir $F_1F_2 = 2c$

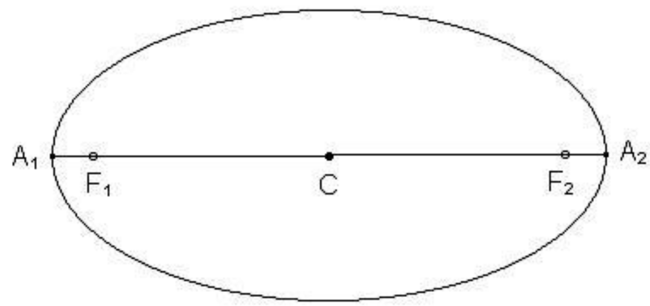
4.- Trazar un segmento que pase por F_1 y F_2 , hasta cortar a la curva en A_1 y A_2. Al segmento $\overline{A_1A_2}$ se le llama ***eje mayor de la elipse***. A A_1 y A_2 se les llama ***extremos del eje mayor***.



5.- Indica con respecto a qué eje, la curva es simétrica.

A la distancia A_1A_2 se le llama ***longitud del eje mayor*** y se denota por $2a$, es decir, la longitud del segmento $A_1A_2 = 2a$.

6.- Al punto medio entre los focos F_1 y F_2 (o entre los extremos del eje mayor A_1 y A_2) se le llama el ***centro de la elipse*** y se representa por C.



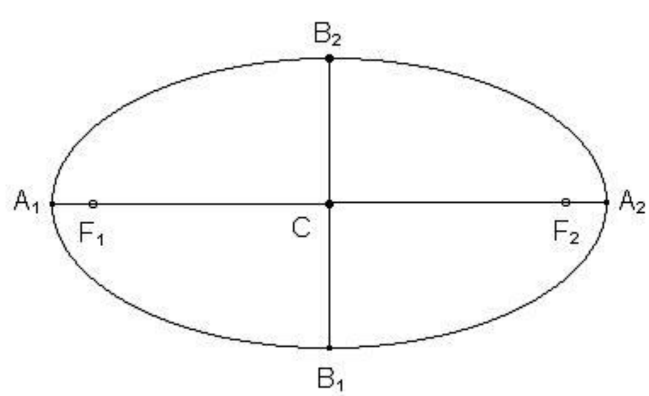
7.- ¿Es la elipse simétrica con respecto del centro?

Como C es punto medio de los segmentos $\overline{F_1F_2}$ y $\overline{A_1A_2}$, se tiene que:

$$F_1C = F_2C = c$$

$$A_1C = A_2C = a$$

8.- Trazar un segmento perpendicular al eje mayor, por el centro hasta cortar a la curva en dos puntos que llamaremos B_1 y B_2. Al segmento $\overline{B_1B_2}$ se le llama ***eje menor de la elipse***. B_1 y B_2 son los ***extremos del eje menor***.



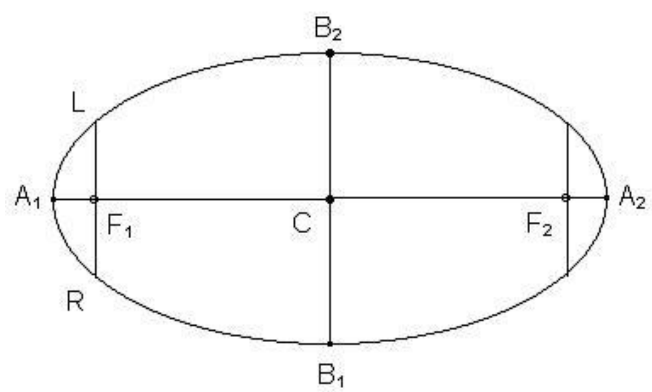
9.- ¿La curva es simétrica con respecto del eje menor?

A la distancia entre los extremos del eje menor B_1 y B_2 le llamamos longitud del eje menor y la denotamos por 2b. Es decir $B_1B_2 = 2b$.

Como C es el punto medio del segmento $\overline{B_1B_2}$ entonces se tiene que:

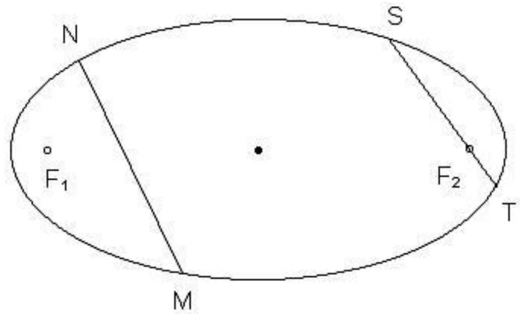
$$B_1C = B_2C = b$$

10.- Por los focos F_1 y F_2 se traza un segmento perpendicular al eje mayor, hasta cortar a la curva en dos puntos, que se representan, por ejemplo, con L y R, al segmento $\overline{LR}$ se le llama ***anchura focal o lado recto.*** L y R son los extremos del lado recto. En la elipse se tienen dos lados rectos.



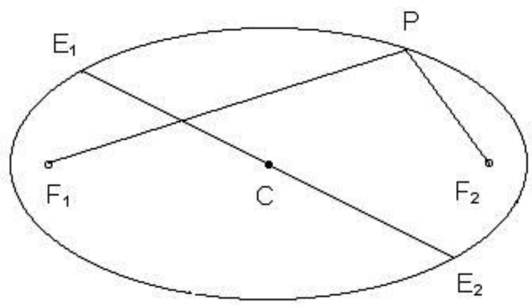
11.- Una cuerda es el segmento de recta que une dos puntos de la elipse, el segmento $\overline{MN}$ es una ***cuerda de la elipse***.

En particular, una cuerda que pasa por uno de los focos es una ***cuerda focal***. El segmento $\overline{ST}$ es una ______________________.

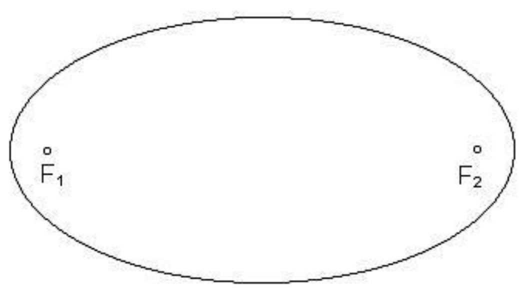


12.- Un ***diámetro*** es una cuerda que pasa por el centro. El segmento $\overline{E_1E_2}$ es un diámetro.

Si P es un punto de la elipse, los segmentos $\overline{F_1P}$ *y* $\overline{F_2P}$ que unen los focos F_1 y F_2 con el punto P se llaman ***radios vectores***.

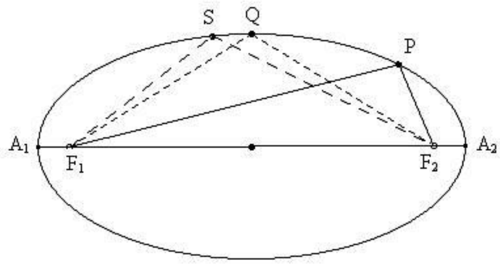


13.- A partir de la figura, señala todos los elementos de una elipse con lápices de diferentes colores.



La elipse

Definición. La elipse es el lugar geométrico del conjunto de puntos en el plano, cuya suma de distancias a dos puntos fijos (llamados focos) es una constante, igual a la longitud del eje mayor.



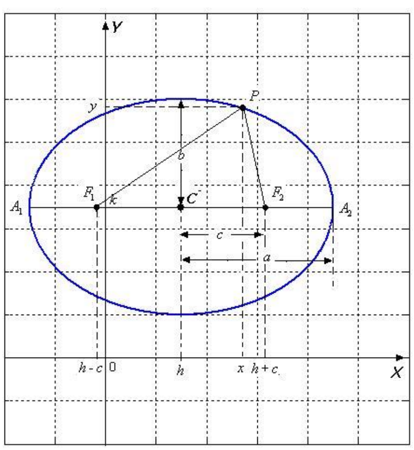
$$PF_1 + PF_2 = QF_1 + QF_2 = SF_1 + SF_2 = A_1A_2 = 2a$$

Observa que:

- La definición excluye los puntos que se encuentran en el segmento que une los extremos del eje mayor (vértices).
- La constante (2a) que se menciona en la definición debe ser positiva.
- La constante (2a) debe ser mayor que la distancia entre los focos.

Ecuación ordinaria de la elipse con ejes paralelos a los ejes cartesianos

a) Ecuación de la elipse horizontal (eje mayor paralelo al eje X) con centro en el punto de coordenadas C(h, k).



De la definición de elipse se tiene:

$$PF_1 + PF_2 = A_1A_2$$

$$PF_1 + PF_2 = 2a \text{ ....(1)}$$

Para obtener las distancias PF_1 y PF_2 se requiere conocer las coordenadas de los focos F_1 y F_2.

Se tiene que $CF_1 = CF_2 = c$

Por lo tanto $F_1(h\text{-}c, k)$ y $F_2(h+c, k)$

Las coordenadas del punto P son $P(x, y)$.

Por lo tanto,

$$PF_1 = \sqrt{\left[x-(h-c)\right]^2+(y-k)^2} = \sqrt{(x-h+c)^2+(y-k)^2}$$

$$PF_2 = \sqrt{\left[x-(h+c)\right]^2+(y-k)^2} = \sqrt{(x-h-c)^2+(y-k)^2}$$

Sustituyendo en la ecuación (1) se tiene:

$$\sqrt{(x-h+c)^2+(y-k)^2} + \sqrt{(x-h-c)^2+(y-k)^2} = 2a$$

Al despejar un radical:

$$\sqrt{(x-h+c)^2+(y-k)^2} = 2a - \sqrt{(x-h-c)^2+(y-k)^2}$$

Al elevar al cuadrado:

$$\left(\sqrt{(x-h+c)^2+(y-k)^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x-h-c)^2+(y-k)^2}\right)^2$$

$$(x-h+c)^2+(y-k)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-h-c)^2+(y-k)^2} + (x-h-c)^2+(y-k)^2$$

de donde:

$$(x-h+c)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-h-c)^2 + (y-k)^2} + (x-h-c)^2$$

Y al desarrollar:

$$(x-h)^2 + 2c(x-h) + c^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-h-c)^2 + (y-k)^2} + (x-h)^2 - 2c(x-h) + c^2$$

simplificamos usando la ley de cancelación de la suma:

$$2c(x-h) = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-h-c)^2 + (y-k)^2} - 2c(x-h)$$

$$4c(x-h) = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-h-c)^2 + (y-k)^2}$$

Al dividir la ecuación entre cuatro:

$$c(x-h) = a^2 - a\sqrt{(x-h-c)^2 + (y-k)^2}$$

Al despejar el radical:

$$a\sqrt{(x-h-c)^2 + (y-k)^2} = a^2 - c(x-h)$$

Y nuevamente se eleva al cuadrado:

$$\left(a\sqrt{(x-h-c)^2 + (y-k)^2}\right)^2 = \left[a^2 - c(x-h)\right]^2$$

Al desarrollar y realizar operaciones algebraicas:

$$a^2\left[(x-h-c)^2+(y-k)^2\right]=a^4-2a^2c(x-h)+c^2(x-h)^2$$

$$a^2(x-h-c)^2+a^2(y-k)^2=a^4-2a^2c(x-h)+c^2(x-h)^2$$

$$a^2(x-h)^2-2a^2c(x-h)+a^2c^2+a^2(y-k)^2=a^4-2a^2c(x-h)+c^2(x-h)^2$$

Y al factorizar en los dos miembros:

$$a^2(x-h)^2-c^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2=a^4-a^2c^2$$

$$\left(a^2-c^2\right)(x-h)^2+a^2(y-k)^2=a^2\left(a^2-c^2\right)$$

Como $a^2-c^2=b^2$, se tiene: $b^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2=a^2b^2$

Y al dividir entre a^2b^2:

$$\frac{b^2(x-h)^2}{a^2b^2}+\frac{a^2(y-k)^2}{a^2b^2}=\frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

Finalmente, al simplificar:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Se tiene la ecuación de la elipse en forma ordinaria con eje mayor paralelo al eje *X*, cuyo centro se encuentra en el punto $C(h,\,k)$.

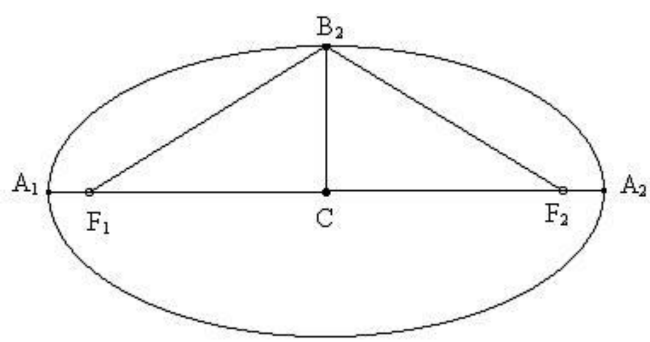
Caso particular. Elipse horizontal con centro en el origen C (0,0)

En este caso los valores de los parámetros h y k son cero, por lo tanto, la ecuación se reduce a la expresión:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Relación entre los parámetros a (longitud del semieje mayor), b (longitud del semieje menor) y c (longitud del centro al foco).

Considerar uno de los extremos del eje menor, por ejemplo B_2



De la definición de elipse tenemos que:

$$B_2F_1 + B_2F_2 = A_1A_2 = 2a \qquad \text{.....(1)}$$

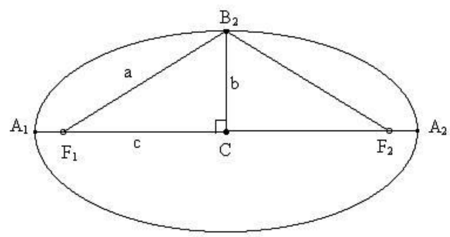
Los triángulos $\left(F_1CB_2 \ \ y \ \ F_2CB_2\right)$ son congruentes, por lo tanto $B_2F_1 = B_2F_2$ por ser lados correspondientes de los triángulos.

Entonces $$B_2F_1 + B_2F_2 = 2\left(B_2F_1\right)$$

Al sustituir en la ecuación (1)

$$2\left(B_2F\right) = 2a \quad \therefore \quad B_2F_1 = a$$

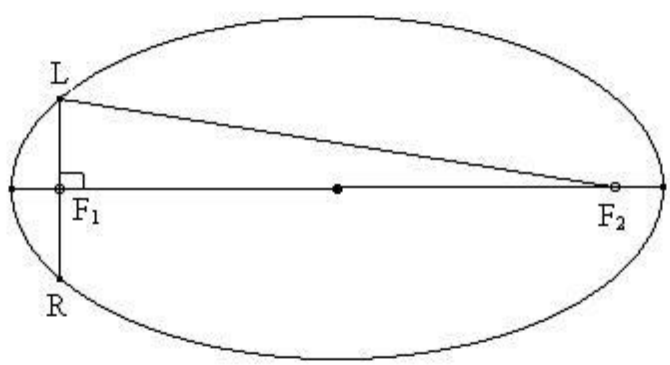
Por otro lado, se observa en la figura lo siguiente:



Y al aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo F_1CB_2 se obtiene la relación entre los parámetros a, b y c

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Longitud de la anchura focal o lado recto



En la figura se observa que la longitud del lado recto es $LR = 2\left(LF_1\right)$

Por la definición de elipse se tiene $LF_1 + LF_2 = 2a$

Despejando LF_2 se tiene $LF_2 = 2a - LF_1$ .....(1)

Al aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo LF_1F_2

$$(LF_1)^2 + (F_1F_2)^2 = (LF_2)^2$$

donde $F_1F_2 = 2c$

Por lo tanto

$$(LF_1)^2 + (2c)^2 = (LF_2)^2$$

$$(LF_1)^2 + 4c^2 = (LF_2)^2 \qquad \text{.....(2)}$$

Sustituyendo la ecuación (1) en la ecuación (2) se tiene:

$$(LF_1)^2 + 4c^2 = (2a - LF)_1^2$$

Al desarrollar el cuadrado del binomio:

$$\cancel{(LF_1)^2} + 4c^2 = 4a^2 - 4a(LF_1) + \cancel{(LF1)^2}$$

$$4c^2 = 4a^2 - 4a(LF_1)$$

Simplificando:

$$c^2 = a^2 - a(LF_1)$$

$$\therefore\ a(LF_1) = a^2 - c^2 = b^2$$

El valor de LF_1 es:

$$LF_1 = \frac{b^2}{a}$$

De donde, la anchura focal es:

$$LR = 2\left(LF_1\right) = \frac{2b^2}{a}$$

La excentricidad de la elipse

El obtener el cociente $\frac{c}{a}$, denominado excentricidad de la elipse, permite observar el comportamiento de la misma en lo que se refiere a su forma.

Para el estudio de la excentricidad conviene realizar diferentes dibujos de elipses con la misma longitud del eje mayor y con los focos primero cercanos a los extremos del eje mayor y posteriormente cercanos al centro para observar su comportamiento.

Geométricamente, el valor de la excentricidad está directamente relacionado con la redondez o alargamiento de la elipse.

Si los focos coinciden el valor de la distancia focal, c **es cero**, por lo cual también la ***excentricidad es cero*** y la elipse degenera en una ***circunferencia***. Si los valores de ***a y c son iguales*** la elipse degenera en un ***segmento de recta*** (el eje mayor).

Ecuación de la elipse vertical (eje mayor paralelo al eje Y) con centro en el punto C(h, k)

De manera análoga a como se obtuvo la ecuación de la elipse horizontal se obtiene la ecuación de la elipse vertical, esto es a partir de la definición de lugar geométrico de elipse.

La ecuación en su forma ordinaria o clásica es:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

Y su ecuación general de la elipse vertical es de la forma:

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \text{con} \quad A > B$$

Recuerda que la ecuación puede no representar la ecuación de una elipse.

Los elementos de una elipse vertical con centro en el punto $C(h,\ k)$ están localizados en los puntos dados por las siguientes expresiones:

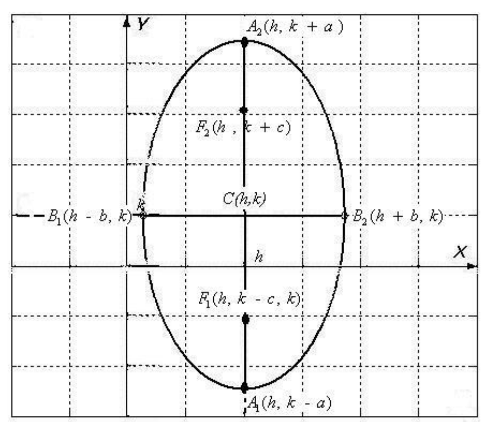
<table>
<tr>
<td>
Focos:
$F_1(h,\ k - c,\ k),\ \ F_2(h\ ,\ k + c)$

Extremos del eje mayor (vértices):

$A_1(h,\ k - a)\ ;\ A_2(h,\ k + a\ )$

Extremos del eje menor:

$B_1(h - b,\ k)\ ;\ B_2(h + b,\ k)$

Anchura focal: $LR = \dfrac{2b^2}{a}$
</td>
<td>
Figura de elipse vertical con centro en C(h,k)


</td>
</tr>
</table>

Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$ Area: $A = \pi ab$	

Ecuación de la elipse vertical con centro en el origen de coordenadas C(0, 0)

En este caso, los valores de h y k son igual a cero, por lo tanto la ecuación ordinaria o clásica de la elipse vertical se convierte en:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

La forma general en este caso es $Ax^2 + By^2 + F = 0$ en donde $A > B$. Observa que no contiene términos lineales.

Ejemplo 5.5. Obtener la ecuación de la elipse horizontal con centro en el punto $C(-4,4)$ .y cuyo eje mayor tiene una longitud de *34* y la del eje menor es *16.*

Solución:

La ecuación se obtiene si se tienen los parámetros h, k, a y b. Las coordenadas del centro son $C(4,-4)$ entonces $h = -4$ y $k = 4$ y como la longitud del eje mayor es *34,* entonces $a = \frac{34}{2} = 17$; y la longitud del eje menor es 16, entonces $b = \frac{16}{2} = 8$

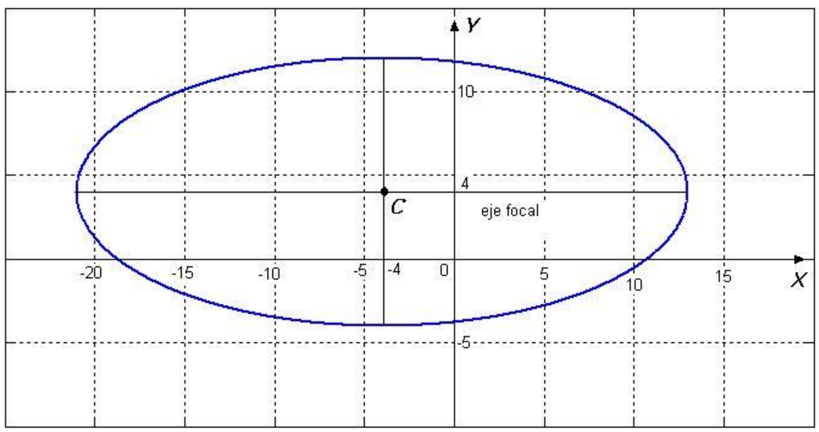
Al Sustituir en la ecuación: $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ se tiene:

$$\frac{\left(x-(-4)\right)^2}{17^2}+\frac{\left(y-4\right)^2}{8^2}=1$$

La ecuación ordinaria de la elipse es:

$$\frac{\left(x+4\right)^2}{289}+\frac{\left(y-4\right)^2}{64}=1$$

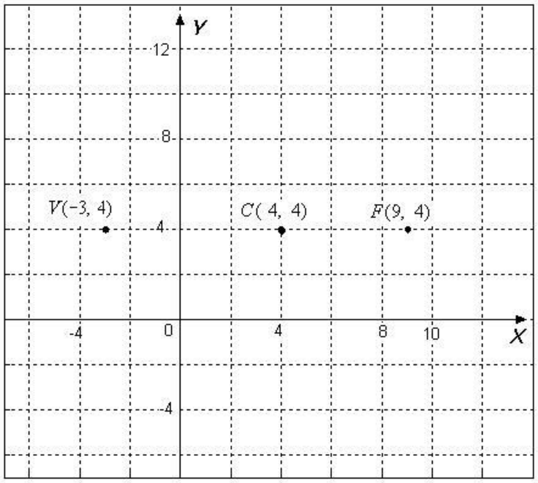
La grafica de la elipse es:



Ejemplo 5.6. *O*btener la ecuación de la elipse con centro en $C(\ 4,\ 4)$, un foco en $F(9,\ 4)$ y un vértice en $V(-3,\ 4)$

Solución:

Localiza los puntos en el plano cartesiano.



Podemos observar que la elipse, es horizontal, en donde $a = 7$ y $c = 5$, por lo tanto:

$$b^2 = a^2 - c^2 = 24$$

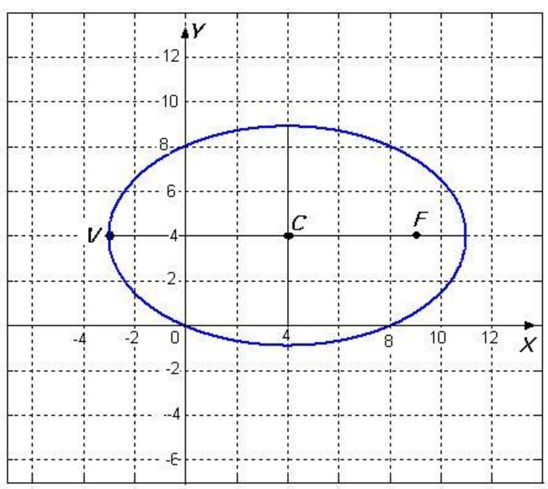
sustituyendo en:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Obtenemos:

$$\frac{(x-4)^2}{49} + \frac{(y-4)^2}{24} = 1$$

La grafica de la elipse es:



Ejemplo 5.7. Obtener los elementos de la elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ y graficar.

Solución:

La elipse tiene centro en el centro origen de coordenadas $C(0,0)$, es decir $h = 0$ y $k = 0$

Al comparar con la expresión $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, se observa que los valores de a^2 y b^2 son respectivamente 16 y 4, entonces:

$$a = \sqrt{16} = 4 \quad \text{y} \quad b = 2$$

Y usando la expresión $a^2 = b^2 + c^2$ encontramos el valor de la distancia del centro al foco.

Al sustituir a y b se tiene $16 = 4 + c^2$ de donde:

$$c = \sqrt{16-4} = \sqrt{12} = \sqrt{(4)(3)} = 2\sqrt{3}$$

Los focos se localizan en los puntos:

$$F_1(-c,0) \equiv F_1\left(-2\sqrt{3},0\right) \approx F_1(-3.46,0) \quad \text{y} \quad F_2(c,0) \equiv F_2\left(2\sqrt{3},0\right) \approx F_2(3.46,0)$$

Los extremos del eje mayor (vértices) se localizan en los puntos:

$$A_1(-a,\ 0) \equiv A_1(-4,\ 0) \qquad \text{y} \qquad A_2(a,\ 0) \equiv A_2(4,\ 0)$$

Los extremos del eje menor son los puntos:

$$B_1(0,-b) \equiv B_2(0,-2) \text{ y } B_2(0,\ b) \equiv B_2(0,\ 2)$$

La anchura focal o longitud del lado recto es: $LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(4)}{4} = 2$ unidades

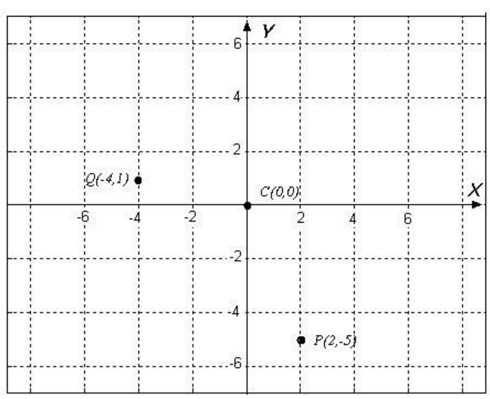
Su excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.86$

Y el área: $A = \pi ab = \pi(4)(2) = 8\pi \approx 25.13u^2$

Ejemplo 5.8. Hallar la ecuación de la elipse vertical con centro en el origen y que pasa por los puntos $P(2,-5)$ y $Q(-4, 1)$.

Solución

La representación de los puntos dados es:



La ecuación de una elipse vertical es de la forma

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}$$

Como el punto $P(2,-5)$ pertenece a la elipse entonces, sus coordenadas satisfacen la ecuación, esto es:

$$\frac{2^2}{b^2} + \frac{(-5)^2}{a^2} = 1$$

De donde
$$\frac{4}{b^2} + \frac{25}{a^2} = 1 \qquad ....(E_1)$$

El punto $Q(-4,\ 1)$. también pertenece a la elipse por lo tanto:

$$\frac{(-4)^2}{b^2} + \frac{1^2}{a^2} = 1$$

Desarrollando se tiene
$$\frac{16}{b^2} + \frac{1}{a^2} = 1 \qquad ....(E_2)$$

Al resolver el sistema de ecuaciones

Para encontrar a^2, se realizan las operaciones $4E_1 - E_2$ $\frac{16}{b^2} + \frac{100}{a^2} = 4$ $-\frac{16}{b^2} - \frac{1}{a^2} = -1$ ——————— $\frac{99}{a^2} = 3$	Para encontrar b^2, se realizan las operaciones $E_1 - 25E_2$ $\frac{4}{b^2} + \frac{25}{a^2} = 1$ $-\frac{400}{b^2} - \frac{25}{a^2} = -25$ ——————— $-\frac{396}{b^2} = -24$

de donde $a^2 = 33$	De donde $b^2 = \frac{33}{2}$

La ecuación en su forma ordinaria o clásica es:

$$\frac{x^2}{\frac{33}{2}} + \frac{y^2}{33} = 1$$

Para transformarla a su forma general, se realiza lo siguiente:

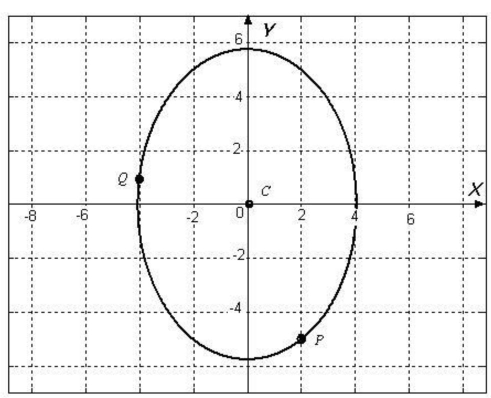
Efectuar la división del primer sumando del lado izquierdo de la ecuación

$$\frac{2x^2}{33} + \frac{y^2}{33} = 1$$

Y multiplicando por 33 la ecuación e igualando a cero se tiene

$$2x^2 + y^2 - 33 = 0$$

La gráfica es:



AUTOEVALUACIÓN

Ejercicio 5.19

Elige cuál es la definición de una elipse:

a) Es el lugar geométrico de todos los puntos en el plano, que equidistan de un punto fijo (foco) y de una recta fija (directriz).
b) Es el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan una distancia r (el radio) de un punto fijo C (el centro).
c) Es el lugar geométrico de los puntos en un plano, cuya suma de distancias hacia dos puntos fijos (los focos) en el plano es una constante positiva. ok
d) Es el lugar geométrico de cualquier par de puntos en el plano que tienen la misma pendiente.

Ejercicio 5.20

Obtener la excentricidad de la elipse cuyo eje mayor mide 26 y cuya distancia focal es de 8 unidades.

a) $e = \frac{4}{13}\,u$ ok
b) $e = \frac{12}{13}\,u$
c) $e = \frac{8}{13}\,u$
d) $e = \frac{6}{13}\,u$

Ejercicio 5.21

Obtener la excentricidad de la elipse cuyo eje mayor mide 26 y cuya distancia focal es de 8 unidades.

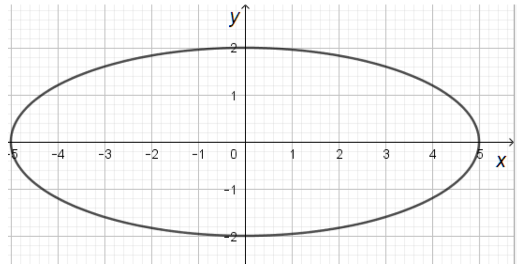
a) $e = \frac{4}{13}\,u$
b) $e = \frac{12}{13}\,u$ ok
c) $e = \frac{8}{13}\,u$
d) $e = \frac{6}{13}\,u$

Ejercicio 5.22

Identifica la ecuación de la elipse que corresponde a la gráfica.

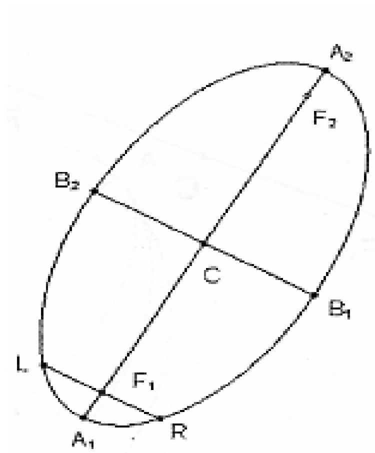
a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ ok

b) $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{5}=1$
c) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$
d) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{2}=1$



Ejercicio 5.24

Identifica los elementos de la elipse:



Extremos del eje mayor:

Extremos del eje menor:

Extremos del lado recto (anchura focal):

Focos:

Centro:

Ejercicio 5.25

Encuentra el centro de una elipse cuya ecuación general es:

$16x^2+25y^2-64x-150y-111=0$

a) $(-2,-3)$
b) $(2,3)$ ok
c) $(2,-3)$
d) $(-2,3)$

Ecuación general de la elipse horizontal

Para obtener la forma general de la ecuación de la elipse, simplemente se desarrollan los productos involucrados y se reduce a una expresión de la forma $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$

Esto es, la ecuación en su forma ordinaria o clásica es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Al desarrollar la expresión racional se tiene:

$$\frac{a^2(x-h)^2 + b^2(y-k)^2}{a^2b^2} = 1$$

Al desarrollar los productos notables y multiplicar por a^2b^2 se tiene:

$$a^2\left(x^2 - 2xh + h^2\right) + b^2\left(y^2 - 2yk + k^2\right)^2 = a^2b^2$$

de donde:

$$a^2x^2 - 2a^2xh + a^2h^2 + b^2y^2 - 2b^2yk + b^2k^2 - a^2b^2 = 0$$

Al ordenar términos en forma descendente de monomios de grado mayor en las variables se tiene:

$$a^2x^2 + b^2y^2 - 2a^2hx - 2b^2ky + a^2h^2 + b^2k^2 - a^2b^2 = 0$$

Al definir los coeficientes

$$A = a^2 \;;\; B = b^2 \;;\; C = -2a^2h \;;\; D = -2b^2k \;\text{ y }\; F = a^2h^2 + b^2k^2 - a^2b^2$$

Se escribe:

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Una ecuación cuadrática de la forma $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$ con $A < B$, representa (lugar geométrico), una elipse horizontal o un punto o no representa ningún conjunto de puntos en los números reales

La transformación de la forma general a la forma ordinaria (o clásica), se obtiene factorizando la expresión general.

Ejemplo 5.9. Transformar la ecuación de la elipse $\frac{(x-1)^2}{36} + \frac{(y+2)^2}{18} = 1$ a su forma general.

Solución:

Multiplicando la ecuación por 36 se tiene

$$(x - 1)^2 + 2(y + 2)^2 = 36$$

Al desarrollar e igualar a cero se tiene

$$x^2 - 2x + 1 + 2y^2 + 8y + 8 - 36 = 0$$

La ecuación en su forma general es:

$$x^2 + 2y^2 - 2x + 8y - 27 = 0$$

Ejemplos con ecuaciones de elipse con centro en el origen. Observar que no contienen términos lineales.

Ejemplo 5.10. Transformar la ecuación de la elipse $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{25} = 1$ a su forma general.

Solución:

Efectuar la operación racional

$$\frac{25x^2 + 49y^2}{(49)(25)} = 1$$

de donde:

$$25x^2 + 49y^2 = 1225$$

La ecuación general es:

$$25x^2 + 49y^2 - 1225 = 0$$

Ejemplos para transformar la ecuación cuadrática en forma general en forma clásica a partir de su ecuación general y determinar si pertenece a una elipse.

Ejemplo 5.11. Transformar a su forma clásica (ordinaria) la ecuación:

$$4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$$

Solución:

La expresión se puede escribir como $4x^2 + 9y^2 = 36$ al pasar el término independiente al segundo miembro.

Y al dividir la ecuación entre 36 se tiene:

$$\frac{4x^2}{36}+\frac{9y^2}{36}=1$$

Al simplificar, se tiene la ecuación en su forma clásica:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

Ejemplo 5.12. Transformar a su forma ordinaria la ecuación:

$$9x^2 + 16y^2 + 36x - 96y + 36 = 0$$

Solución:

1°) Agrupar los términos en x y los términos en y. El término independiente se pasa al segundo miembro:

$$9x^2 + 36x + 16y^2 - 96y = -36$$

2°) En los términos que contienen las variables x e y se factorizan los coeficientes de término cuadrático:

$$9(x^2 + 4x) + 16(y^2 - 6y) = -36$$

3°) Completar los trinomios cuadrados perfectos dentro de los paréntesis:

$$9\left[x^2+4x+\left(\frac{4}{2}\right)^2-\left(\frac{4}{2}\right)^2\right]+16\left[y^2-6y+\left(\frac{6}{2}\right)^2-\left(\frac{6}{2}\right)^2\right]=-36$$

$$9\left[\underline{x^2+4x+(2)^2}-4\right]+16\left[\underline{y^2-6y+(3)^2}-9\right]=-36$$

4°) Factorizar los trinomios cuadrados perfectos correspondientes aplicando la propiedad distributiva:

$$9\left[(x+2)^2-4\right]+\in 16\left[(y-3)^2-9\right]=-36$$

$$9(x+2)^2-36+16(y-3)^2-144=-36$$

Pasar los términos independientes al segundo miembro y simplificar:

$$9(x+2)^2+16(y-3)^2=144$$

5°) Dividir la ecuación entre el término independiente (144):

$$\frac{9(x+2)^2}{144}+\frac{16(y-3)^2}{144}=\frac{144}{144}$$

Finalmente, en el miembro del lado izquierdo se divide el numerador y el denominador del primer término entre 9 y el del segundo entre 16:

$$\frac{(x+2)^2}{16}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$$

Transformar la ecuación de una elipse vertical de su forma general a su forma ordinaria

Ejemplo 5.13. Escribir en su forma ordinaria la ecuación de la elipse:

$$3x^2 + 2y^2 + 24x - 12y + 60 = 0$$

Solución

1°) Agrupar los términos en x e y. El término independiente lo pasamos al segundo miembro:

$$3x^2 + 24x + 2y^2 - 12y = -60$$

2°) En los términos que contienen x e y se factorizan los coeficientes de los términos cuadráticos:

$$3(x^2 + 8x) + 2(y^2 - 6y) = -60$$

3°) Dentro de los paréntesis completamos los trinomios cuadrados perfectos:

$$3\left[x^2 + 8x + \left(\frac{8}{2}\right)^2 - \left(\frac{8}{2}\right)^2\right] + 2\left[y^2 - 6y + \left(\frac{6}{2}\right)^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2\right] = -60$$

$$3\left[\underline{x^2 + 8x + (4)^2} - 16\right] + 2\left[\underline{y^2 - 6y + (3)^2} - 9\right] = -60$$

4°) Se factorizan los trinomios cuadrados perfectos:

$$3\left[(x+4)^2 - 16\right] + 2\left[(y-3)^2 - 9\right] = -60$$

Y se aplica la propiedad distributiva:

$$3(x+4)^2 - 48 + 2(y-3)^2 - 18 = -60$$

Al pasar al segundo miembro los términos independientes y simplificar se tiene:

$$3(x+4)^2 + 2(y-3)^2 = 6$$

5°) Y al dividir la ecuación entre el término independiente (6):

$$\frac{3(x+4)^2}{6}+\frac{2(y-3)^2}{6}=\frac{6}{6}$$

Simplificando:

$$\frac{(x+4)^2}{2}+\frac{(y-3)^2}{3}=1$$

AUTOEVALUACIÓN

En los siguientes ejercicios obtener la ecuación general de la elipse que cumple con las condiciones dadas.

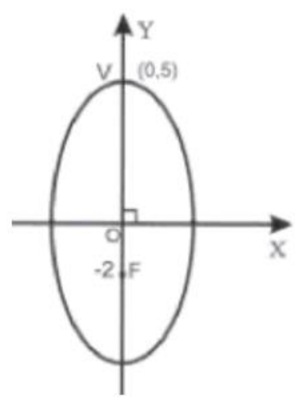
Ejercicio 5.26

Encuentra la ecuación general de una elipse cuyo origen coincide con el del sistema de referencia, su eje mayor coincide con el eje y, y las coordenadas de un foco son F(0, - 2) y un vértice V(0,5).

a) $16x^2+25y^2-111=0$
b) $16x^2+25y^2-525=0$
c) $25x^2+21y^2-525=0$ ok
d) $25x^2+21y^2-111=0$

Ejercicio 5.27

En la figura anexa se muestra una elipse con centro en el origen de referencia. Determina la ecuación general que la representa.



a) $16x^2+25y^2-525=0$
b) $25x^2+21y^2-111=0$
c) $16x^2+25y^2-525=0$
d) $25x^2+21y^2-525=0$ ok

Ejercicio 5.28

Encuentra la ecuación ordinaria de la elipse equivalente a la elipse cuya ecuación general es:

$x^2 + 2y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$

a) $\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1$
b) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$
c) $\frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(y+1)^2}{1} = 1$ ok
d) $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1$

Ejercicio 5.29

Encuentra la ecuación general de una elipse cuya ecuación ordinaria es:

$$\frac{(x-3)^2}{6} + \frac{(y-2)^2}{5} = 1$$

a) $5x^2 + 6y^2 - 30x - 24y + 39 = 0$ ok
b) $6x^2 + 5y^2 - 30x - 24y + 39 = 0$
c) $25x^2 + 21y^2 - 55 = 0$
d) $6x^2 + 5y^2 + 30x - 24y - 11 = 0$

Ejercicio 5.30

Encuentra la ecuación ordinaria de la elipse equivalente a la elipse cuya ecuación general es:

$5x^2 + 6y^2 - 30x + 24y + 39 = 0$

a) $\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1$
b) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$
c) $\frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(y+1)^2}{1} = 1$
d) $\frac{(x-3)^2}{6} + \frac{(y-2)^2}{5} = 1$ ok

Ejercicio 5.31

Encuentra la ecuación general de una elipse cuya ecuación ordinaria es:

$$\frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$$

a) $5x^2 + 6y^2 - 30x - 24y + 39 = 0$
b) $6x^2 + 5y^2 - 30x - 24y + 39 = 0$
c) $25x^2 + 4y^2 + 100x - 8y + 4 = 0$ ok
d) $6x^2 + 5y^2 + 30x - 24y - 11 = 0$

Ejercicio 5.32

Encuentra la ecuación ordinaria de la elipse equivalente a la elipse cuya ecuación general es:

$$25x^2 + 4y^2 + 100x - 8y + 4 = 0$$

a) $\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1$
b) $\frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$ ok
c) $\frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(y+1)^2}{1} = 1$
d) $\frac{(x-3)^2}{6} + \frac{(y-2)^2}{5} = 1$

Ejercicio 5.33

Determina mediante los coeficientes de x^2 y y^2, cuáles de las ecuaciones proporcionadas corresponden a elipses horizontales y cuáles a elipses verticales:

a) $5x^2 + 6y^2 - 30x - 24y + 39 = 0$
b) $6x^2 + 5y^2 - 30x - 24y + 39 = 0$
c) $25x^2 + 4y^2 + 100x - 8y + 4 = 0$ ok
d) $6x^2 + 5y^2 + 30x - 24y - 11 = 0$

a) horizontal b) vertical c) vertical d) vertical

Ejercicio 5.34

Determina mediante los coeficientes de x^2 y y^2, cuáles de las ecuaciones proporcionadas corresponden a elipses horizontales y cuáles a elipses verticales:

a) $x^2 + 4y^2 - 5x + 2y = 0$
b) $4x^2 + y^2 + x + y - 1 = 0$
c) $6x^2 + 12y^2 + 8x = 0$
d) $8x^2 + 3y^2 - 2y - 24 = 0$

e) horizontal f) vertical g) horizontal h) vertical

Ejercicio 5.35

Encuentra el centro, los semiejes mayor y menor de la elipse cuya ecuación general es:

$16x^2 + 4y^2 - 32x - 56y + 148 = 0$

a) $C(-1, -7)$; $a = 4$; $b = 2$
b) $C(1, 7)$; $a = 4$; $b = 2$ ok
c) $C(2, -3)$; $a = 4$; $b = 2$
d) $C(-2, 3)$; $a = 2$; $b = 4$

Ejercicio 5.36

Encuentra el centro, los semiejes mayor y menor de la elipse cuya ecuación general es:

$4x^2 + 2y^2 - 8x + 4y - 2 = 0$

a) $C(-1, -7)$; $a = 4$; $b = 2$
b) $C(1, -1)$; $a = 2$; $b = \sqrt{2}$ ok
c) $C(2, -3)$; $a = 4$; $b = 2$
d) $C(-2, 3)$; $a = 2$; $b = 4$

Problemas de aplicación de la elipse

Recta tangente a una elipse por un punto T que pertenece a ella.

Para obtener la recta a una elipse se usará como base la construcción geométrica siguiente:

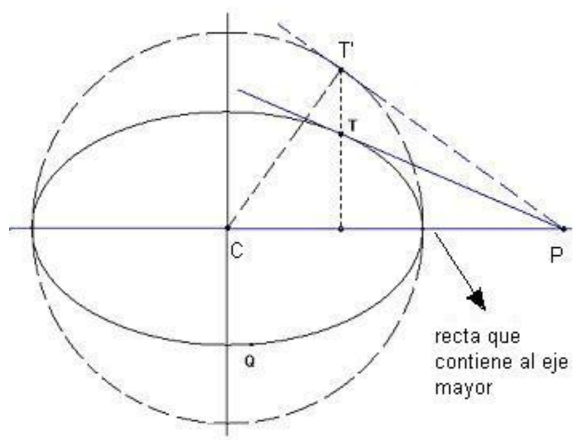
1) Con centro en el centro de la elipse C y diámetro la longitud del eje mayor, se traza una circunferencia.

2) Trazar una recta perpendicular al eje mayor que pase por el punto T, esta recta corta a la circunferencia en T´.

3) Construir el radio CT´.

4) Por el punto T´ trazamos la perpendicular al radio CT´. La recta corta a la recta que contiene al eje mayor en P.

5) La recta que pasa por P y T es la recta tangente a la elipse.



Ejemplo 5.14 Encontrar la ecuación de la recta tangente a la elipse $4x^2 + 9y^2 = 72$ en el punto de tangencia $T(3,\ 2)$.

Solución:

La ecuación de la elipse en su forma clásica es de la forma $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1$ de aquí se tiene que $a^2 = 18$, entonces $a = \sqrt{18}$

El centro de la elipse es el origen de coordenadas $C(0,0)$.

De acuerdo a la construcción realizada anteriormente, se encuentra la ecuación de la circunferencia de centro $C(0,0)$ y radio $r = \sqrt{18}$, esta es:

$$x^2 + y^2 = 18$$

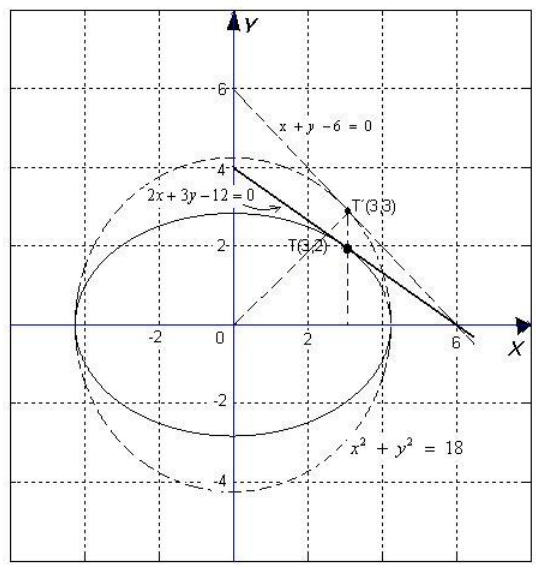
y para $x = 3$ (la abscisa del punto de tangencia) se tiene que $y = 3$, es decir el punto T´ tiene coordenadas $T´(3, 3)$.

La ecuación de la recta tangente a la circunferencia

$$x^2 + y^2 = 18$$

en el punto $T´(3, 3)$, es

$$\text{x} + y - 6 = 0.$$



Esta recta intersecta al eje X, en el punto $R(6, 0)$, por lo tanto, la ecuación de la recta tangente a la elipse, es la ecuación de la recta que pasa por los puntos $T(3, 2)$ y $R(6, 0)$, por lo tanto la ecuación de la tangente a la elipse es

$$2x + 3y - 12 = 0$$

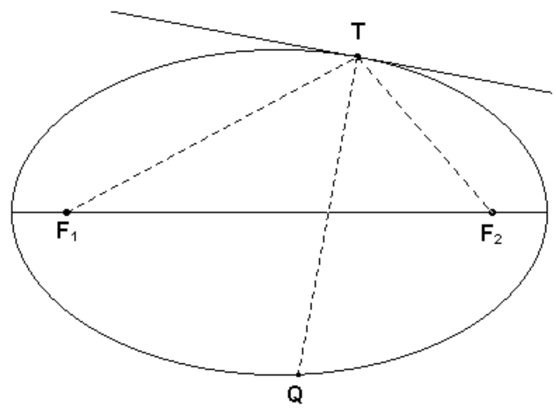
Ejemplo 5.15 Obtener la ecuación de la recta tangente a la elipse $2x^2 + 3y^2 = 30$ en el punto de tangencia $T(3,2)$

Para obtener la ecuación de la recta tangente, nos basaremos en la siguiente construcción.

1) Trazamos los segmentos F_1T y F_2T.

2) Construimos la bisectriz TQ del $<F_1TF_2$

3) Por el punto de tangencia T, trazamos la perpendicular a TQ. esta última recta, es la recta tangente a la elipse en el punto T



Solución: La ecuación de la elipse en su forma clásica está dada por $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{10}=1$,de aquí se tiene que $a^2=15, b^2=10$, por lo tanto $c^2=5$, entonces $c=\sqrt{5}$, como el centro de la elipse es $C(0,0)$, los focos se encuentran ubicados en $F_1(-\sqrt{5},0)$ y $F_2(\sqrt{5},0$.

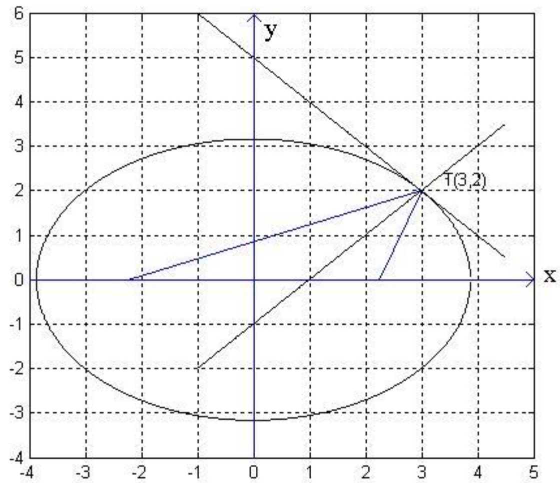
La recta que pasa por $T(3,2)$ y $F_1(-\sqrt{5},0)$, está dada por:

$$(3-\sqrt{5})x-2y+3\sqrt{5}-5=0\ .$$

La recta que pasa por $T(3,2)$ y $F_1(-\sqrt{5},0)$, está dada por:

$$(\sqrt{5}+3)x-2y-3\sqrt{5}-5=0\ .$$

Obtenemos la ecuación de la bisectriz del $<F_1TF_2$, considerando que los puntos de la bisectriz equidistan de los lados del triángulo.



La distancia del centro $C(h,k)$ a la recta $(3-\sqrt{5})x-2y+3\sqrt{5}-5=0$ es:

$$d_1=\frac{\left(3-\sqrt{5}\right)x-2y+3\sqrt{5}-5}{\sqrt{\left(3-\sqrt{5}\right)^2+\left(-2\right)^2}}$$

La distancia del centro $C(h,k)$ a la recta $(3+\sqrt{5})x-2y-3\sqrt{5}-5=0$ es:

$$d_2=\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)x-2y-3\sqrt{5}-5}{\sqrt{\left(\sqrt{5}+3\right)^2+\left(-2\right)^2}}$$

Para obtener la bisectriz del ángulo se resuelve la ecuación $d_1 = -d_2$

$$\frac{\left(3-\sqrt{5}\right)x-2y+3\sqrt{5}-5}{\sqrt{\left(3-\sqrt{5}\right)^2+\left(-2\right)^2}}=-\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)x-2y-3\sqrt{5}-5}{\sqrt{\left(\sqrt{5}+3\right)^2+\left(-2\right)^2}}$$

$$\frac{\left(3-\sqrt{5}\right)x-2y+3\sqrt{5}-5}{\sqrt{18-6\sqrt{5}}}=-\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)x-2y-3\sqrt{5}-5}{\sqrt{18+6\sqrt{5}}}$$

$$\left[\left(3-\sqrt{5}\right)x-2y+3\sqrt{5}-5\right]\left[18+6\sqrt{5}\right]=-\left[\left(3+\sqrt{5}\right)x-2y-3\sqrt{5}-5\right]\left[18-6\sqrt{5}\right]$$

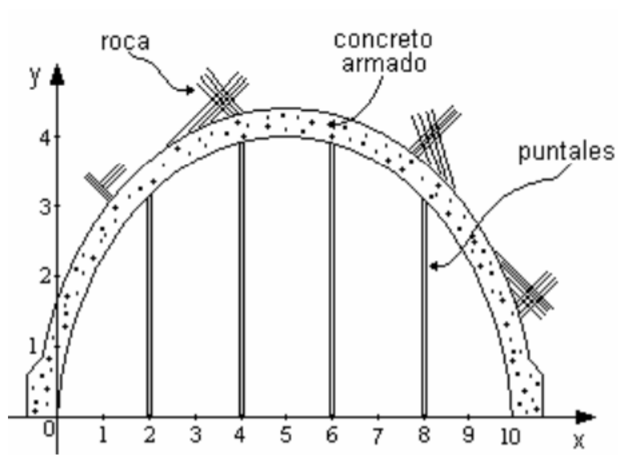
Simplificando obtenemos la ecuación de la bisectriz $x-y-1=0$

La recta tangente es perpendicular a la bisectriz y pasa por el punto $T(3,2)$, entonces la pendiente de la recta tangente es $m=1$.

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente es $x+y-5=0$.

Ejemplo 5.16

Un arco semi elíptico de concreto armado tiene un claro (distancia entre los apoyos) de 10 m, como se muestra en la imagen. Para construir dicho apoyo es necesario apuntalarlo desde el suelo cada dos metros. Se pide determinar la altura de cada puntal.



Solución

Determinamos los ejes coordenados como se muestra en la figura. Suponemos que el eje mayor está sobre el eje de las abscisas.

La ecuación que podría representar a la imagen:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Observamos que las escalas de las ordenadas y las abcisas no son iguales, sin embargo, nota que la elipse es horizontal.

Para este caso, 2a=10, por lo tanto, a=5 y b=4. Se puede afirmar que el centro de la elipse es: (5,0).

La ecuación será entonces:

$$\frac{(x-5)^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

La altura de los puntales se obtiene despejando “y” y considerando signo positivo de la raíz:

$$y=\frac{4}{5}\sqrt{10x-x^2}$$

Nota que los puntales están distribuidos de tal forma que conociendo que una elipse es simétrica con respecto al eje menor, podemos calcular solamente la altura de dos puntales, el posicionado a 2 y 4 metros, respectivamente.

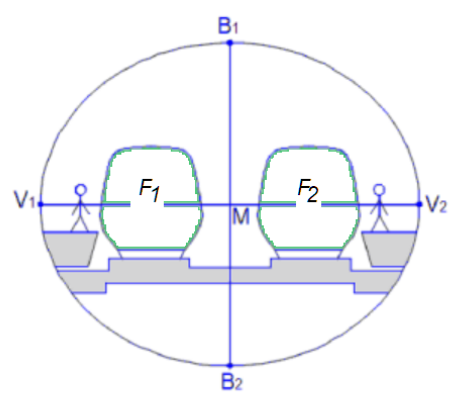
Si x= 2 m, y= 3.20 m

Si x= 4 m, y= 3.92 m

AUTOEVALUACIÓN

Ejercicio 5.37

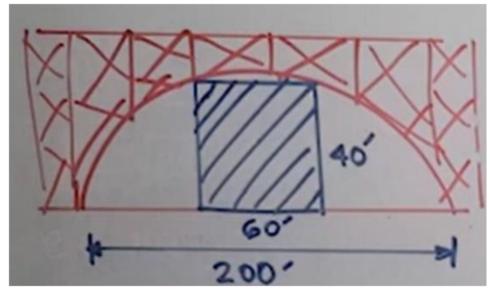
En la figura se muestra la sección elíptica de un tramo del metro de la CDMX, donde los vagones están situados en los focos. Si el eje mayor mide 10 m y un lado recto mide 3.6 m, encuentra la ecuación de una elipse que modele la sección.



a) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ b) $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{6}=1$ c) $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{10}=1$ d) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ ok

Ejercicio 5.39

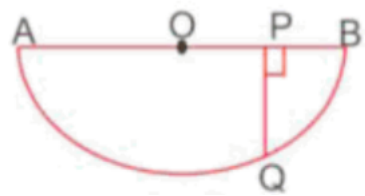
En la figura se muestra la sección elíptica de un tramo de un puente que se piensa construir. El río tiene un ancho de 200 pies, y se espera que cualquier embarcación con menos de 60 pies de ancho y hasta 40 pies de altura puedan pasar cómodamente debajo de él. Encuentra la ecuación ordinaria del arco.



a) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{42}=1$ b) $\frac{x^2}{1000}+\frac{y^2}{1764}=1$ c) $\frac{x^2}{10\,000}+\frac{y^2}{1\,760}=1$ ok d) $\frac{x^2}{11\,900}+\frac{y^2}{42}=1$

Ejercicio 5.40

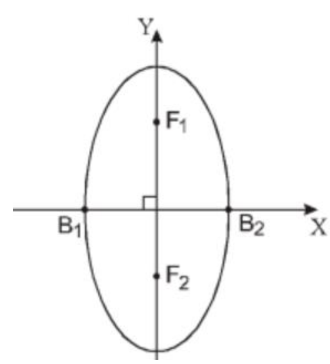
La figura representa un tramo de un canal de forma elíptica. Tiene una altura máxima de 40 m y un ancho de 100 m en la parte superior. Si OA=OB y OP= 30 m. Hallar la profundidad PQ.



a). $16\,m$ b). ok $32\,m$ c). $20\,m$ d). $24\,m$

Ejercicio 5.41

En la figura anexa se muestra una elipse con centro en el origen de referencia. $B_1B_2 = 4$ m, $F_1F_2 = 18$ m, Determina la ecuación general que la representa.



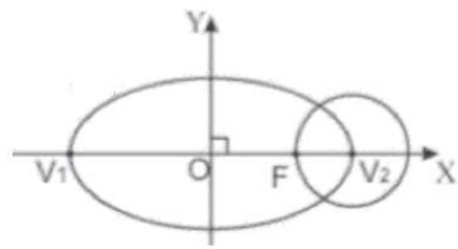
a) $85x^2+4y^2-340=0$ ok b) $25x^2+21y^2-111=0$

c) $16x^2 + 25y^2 - 525 = 0$

d) $85x^2 + 21y^2 - 525 = 0$

Ejercicio 5.42

En la figura anexa se muestra una elipse, cuya ecuación ordinaria es: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. V_1 y V_2 son los vértices y F uno de sus focos. Determina la ecuación general de la circunferencia con centro V_2.



a) $(x-5)^2 + y^2 = 4$ ok

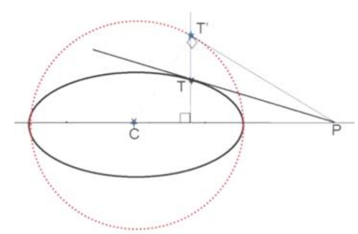
b) $(x-5)^2 + y^2 = 2$

c) $(x+5)^2 + y^2 = 4$

d) $(x-4)^2 + y^2 = 4$

Ejercicio 5.43

Calcular la ecuación de la recta tangente a la elipse $4x^2 + 9y^2 - 72 = 0$, en el punto T(3, 2).



a) $2x + 3y = 12$ ok

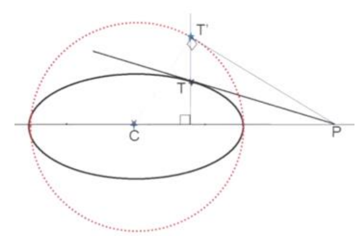
b) $2x + 3y = 14$

c) $3x + 2y = 12$

d) $3x + 4y = 12$

Ejercicio 5.44

Calcular la ecuación de la recta tangente a la elipse $2x^2 + 3y^2 - 14 = 0$, en el punto T(1, 2).



a) $2x + 3y = 12$

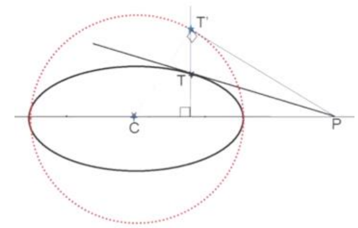
b) $x + 3y = 7$ ok

c) $3x + 2y = 12$

d) $3x + 4y = 12$

Ejercicio 5.45

Calcular la ecuación de la recta tangente a la elipse $2x^2 + 3y^2 - 30 = 0$, en el punto T(3, 2).



a) $2x + 3y = 12$

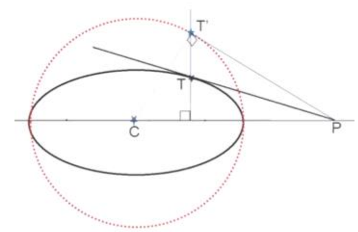
b) $x + 3y = 7$

c) $x + y = 5$ ok

d) $3x + 4y = 12$

Ejercicio 5.46

Calcular una ecuación de la recta tangente a la elipse $4x^2 + 9y^2 = 72$, desde el punto P(0, 4).



a) $2x + 3y = 12$ ok

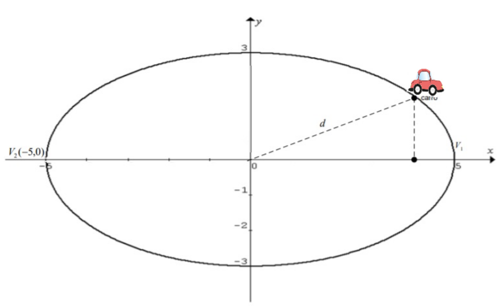
b) $2x - 3y = -12$ ok

c) $3x + 2y = 12$

d) $3x + 4y = 12$

Ejercicio 5.47

Una pista de autos tiene forma elíptica. El eje mayor mide 10 km, el eje menor mide 6 km. En determinado momento, un auto se ubica por encima de uno de los focos. Determina la distancia *d*, del auto al centro de la elipse.



a) $3.423\ km$

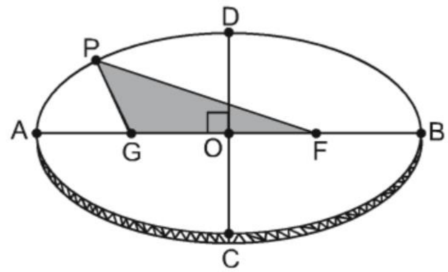
b) $4.386\ km$ ok

c) $5.217\ km$

d) $6\ km$

Ejercicio 5.48

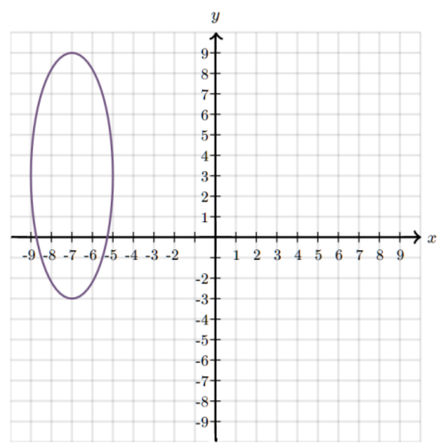
En la figura anexa se muestra una mesa en forma de elipse. Se hace un diseño triangular PFG para cubrirlo de vidrio oscuro. Si AB y CD son los ejes mayor y menor, respectivamente, F y G son los focos, OC= 4 m y FB= 2 m. Hallar el perímetro del diseño cubierto de vidrio oscuro.



a) $15\,m$
b) $16\,m$ ok
c) $18\,m$
d) $20\,m$

Ejercicio 5.49

En la figura anexa se muestra la gráfica de una elipse vertical. Determina su centro, su semi eje mayor y menor.



a) (-7,3), a=6 y b= 2 ok
b) (-7,3), a=6 y b= 4
c) (-7,3), a= 12 y b= 2
d) (7, -3), a=6 y b= 2

Ejercicio 5.50

Te recomendamos practiques más en la siguiente dirección electrónica gratuita con ejercicios interactivos de la elipse:
https://es.khanacademy.org/math/precalculus/x9e81a4f98389efdf:conics/x9e81a4f98389efdf:ellipse-center-radii/e/center-and-radii-of-an-ellipse-and-its-graph

BIBLIOGRAFÍA

Bibliografía básica

- BALEY D. JOHN Y SARELL GARY (2004). *Trigonometría*. 3ª Edición, México, McGraw Hill, 460 pp.
- FULLER, GORDON (1973). *Geometría Analítica*. México, 4ª. Impresión, CECSA, 263 pp.
- LARSON, RON Y FALVO C. DAVID (2012). *Trigonometría.* 8va Edición, México. CENGAGE Learning, 522 pp.

Bibliografía complementaria

- BARKOVICH, MATEO, *ET AL*. (2016). *Matemáticas III. Libro de trabajo para el bachillerato general.* México, Editorial trillas, 141 pp.
- BENITEZ, RENÉ (2014), *Geometría y trigonometría,* Trillas, México. 191 pp.
- EFIMOV, N. (1969). *Curso breve de Geometría analítica*, 2ª. Edición, Moscú, MIR, 244 pp.
- EGOAVIL VERA, JUAN RAÚL (2015). *Fundamentos de Matemática. Introducción al nivel universitario*. Bogotá, Ediciones de la U.
- ESPUIG, ALICIA (2011). Matemáticas. Prueba de acceso a ciclos formativos de GS. Barcelona, Editorial Marcombo, 342 pp.
- FERIA GOLLAZ, VÍCTOR (2005), Cuaderno de trabajo de Matemáticas V. UNAM, México, 125 pp.
- FLORES GARCÍA, CONRADO (1985). *Bloque 5; Módulo 7. Resolución de triángulos cualesquiera*, México, trillas, 82 pp.
- GEHRMANN, JAMES Y LESTER, THOMAS (1990). *Trigonometría*. México, SITESA, 299 pp.
- GUZMAN H., ABELARDO (2016). *Geometría y Trigonometría*. 28ª Reimpresión, México, Grupo Editorial Patria, 189 pp.
- GUZMAN HERRERA, ABELARDO (2003). *Cien problemas de geometría analítica*. 10ª Reimpresión, México, Publicaciones Cultural, 144 pp.
- JOHNSTON, C. L. (1978). *Plane Trigonometry. A new Approach.* Prentice Hall, USA.
- LEHMANN, CHARLES, (1968). *Geometría Analítica,* (traducción), Hispano Americana, México, 494 pp.
- LEZAMA Y NORIEGA, (1970) *Geometría analítica bidimensional.* Compañía Editorial Continental, México, 503 pp.

- MARTÍNEZ ORTIZ, FERNANDO R. (2014). Unidades Interactivas para bachillerato desarrolladas por la Dirección General de Evaluación Educativa de la UNAM, el Instituto de Matemáticas y el Proyecto Arquímides: **http://objetos.unam.mx/matematicas/leccionesMatematicas/02/2_171/index.html** (13 febrero de 2021).
- MUÑUZURI OJEDA, SALVADOR (2008), *Matemáticas V. Preparatoria. Exámenes resueltos.* Trillas, México, 319 pp.
- RUIZ BASTO, JOAQUÍN (2012). *Geometría Analítica. Serie Bachiller*, 2ª Edición, México, Grupo Editorial Patria, 365 pp.
- STEEN, FREDERICK Y BALLOU, DONALD (1966). *Geometría Analítica.* Publicaciones Cultural, 1ª. Edición, México, 260 pp.
- TORRES, CARLOS (1998). *Geometría Analítica*. México, Santillana,318 pp.
- VALIENTE B. SANTIAGO Y RUBIO R, SANTIAGO, (2000). *Trigonometría*. 2ª Edición, México, Limusa, Noriega Editores, 441 pp.
- VELASCO S. GABRIEL (2010), *Geometría y trigonometría*, Trillas, México, 295 pp.
- VELASCO, ANTONIANO (2016). *Curiosidades matemáticas. Sorpresas, paradojas, enigmas y maravillas del mundo de la matemática.* Limusa, México, 126 pp.
- WERNICK, WILLIAM (1970). *Geometría analítica*. México, Publicaciones Cultural, 335 pp.
- STEWART, IAN (2012). *Historia de las matemáticas* (traducción). Crítica, Barcelona, 308 pp.

BANCO DE REACTIVOS

Instructivo de uso

Los más de cien reactivos que aquí se presentan están organizados conforme a los aprendizajes y las temáticas planteadas en el programa vigente de matemáticas III. Son reactivos de diferentes tipos y modalidades que pueden ser fácilmente implementados en alguna plataforma electrónica como cuestionarios GOOGLE o Moodle. Cabe aclarar que están organizados de grado de dificultad bajo a alto, según el criterio del profesor que los elaboró. Sin embargo, consideramos que si el estudiante considera que posee la habilidad y los conocimientos necesarios, puede omitirlos y avanzar a reactivos más complicados. La complejidad radica en que se requiere de conocimientos antecedente para resolverlos. No quiere decir esto que los reactivos ubicados al inicio no requieran de conocimientos previos, nos referimos a que conceptualmente requieren de un nivel de abstracción superior que los otros, especialmente los denominados “problemas de aplicación”, donde el alumno deberá desarrollar la imaginación para comprender el contexto del ejercicio.

En cada reactivo se indica la respuesta correcta para que aquellos alumnos autodidactas vayan adquiriendo confianza en sí mismos al comprobar la solución. Por lo anterior se recomienda omitir la respuesta y “comprobarla” o corroborarla una vez realizados los cálculos necesarios para obtenerla en hojas por separado.

Cualquier posible error en alguna respuesta sería fabuloso nos las hicieran llegar para mejorar este trabajo.

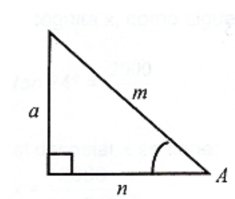
Aprendizajes: Comprende que el concepto de razón trigonométrica se deriva de la relación de los lados de un triángulo rectángulo y que son respectivamente invariantes en triángulos semejantes.

Tema: Razones trigonométricas para ángulos agudos de un triángulo rectángulo.

1.- Relaciona la función trigonométrica con su definición. Escribe en el paréntesis la letra que corresponda a la definición.

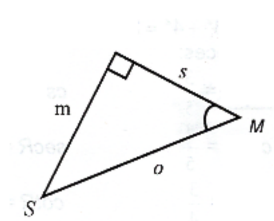
a) $sen\ A =$	(b) $\frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto}$
b) $cot\ A =$	(c) $\frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$
c) $tan\ A =$	(a) $\frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$

2.- Indica en el siguiente triángulo rectángulo, la hipotenusa, el cateto opuesto y el cateto adyacente del ángulo indicado.



Hipotenusa: *m*, cateto opuesto: *a*, cateto adyacente: *n*

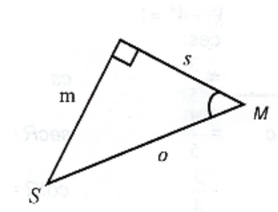
3.- Indica en el siguiente triángulo rectángulo, la hipotenusa, el cateto opuesto y el cateto adyacente del ángulo indicado.



Hipotenusa: *o*, cateto opuesto: *m*, cateto adyacente: *s*

4.-

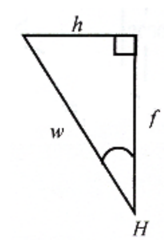
Indica en el siguiente triángulo rectángulo, la hipotenusa, el cateto opuesto y el cateto adyacente del ángulo indicado.



Hipotenusa: *o*, cateto opuesto: *m*, cateto adyacente: *s*

5.-

Indica en el siguiente triángulo rectángulo, la hipotenusa, el cateto opuesto y el cateto adyacente del ángulo indicado.



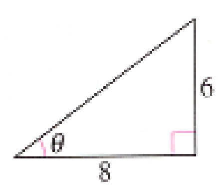
Hipotenusa: *w*, cateto opuesto: *h*, cateto adyacente: *f*

6.- Relaciona la función trigonométrica con su definición. Escribe en el paréntesis la letra que corresponda a la definición.

a) $cos\ A =$	(c) $\frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto}$
b) $sec\ A =$	(b) $\frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente}$
c) csc $A =$	(a) $\frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$

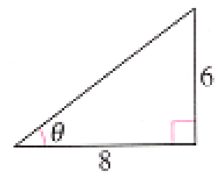
7.-

Encuentra el valor de la hipotenusa en el siguiente triángulo y posteriormente indica el valor de $csc\ \theta$



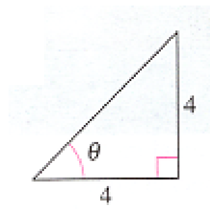
a) $\frac{5}{3}$ b) $\frac{5}{4}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{6}{10}$

8.-
Encuentra el valor de la hipotenusa en el siguiente triángulo y posteriormente indica el valor de $sen\ \theta$



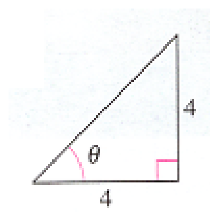
a) $\frac{5}{3}$ b) $\frac{5}{4}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{3}{5}$ **ok**

9.-
Encuentra el valor de la hipotenusa en el siguiente triángulo y posteriormente indica el valor de $sen\ \theta$



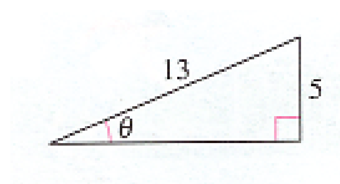
a) $\frac{5}{4}$ b) $\sqrt{2}$ c) 1 d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **ok**

10.-
Encuentra el valor de la hipotenusa en el siguiente triángulo y posteriormente indica el valor de $sec\ \theta$



a) $\frac{5}{4}$ b) $\sqrt{2}$ ok c) 1 d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

11.-
Encuentra el valor del cateto faltante, el ángulo θ en el siguiente triángulo y posteriormente indica el valor de las seis funciones trigonométricas de θ



a) $cateto =$ b) $\theta =$ c) $sen\ \theta =$ d) $cos\ \theta =$

e) $tan\ \theta =$ f) $cot\ \theta =$ g) $sec\ \theta =$ h) $csc\ \theta =$

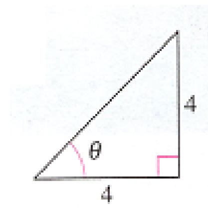
Resp.
a) $cat. = 12$ unidades b) $\theta = 22.63^o$ c) $sen\ \theta = \frac{5}{13}$ d) $cos\ \theta = \frac{12}{13}$

e) $tan\ \theta = \frac{5}{12}$ f) $cot\ \theta = \frac{12}{5}$ g) $sec\ \theta = \frac{13}{12}$ h) $csc\ \theta = \frac{13}{5}$

Aprendizajes: Determina el valor de las razones trigonométricas para los ángulos de 30º, 45º y 60º y emplea la calculadora para verificarlos.

Tema: Solución de triángulos rectángulos especiales.

1.-
Encuentra el valor de la hipotenusa en el siguiente triángulo y posteriormente indica el valor de las seis funciones trigonométricas de θ



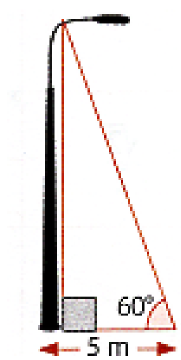
a) $hipotenusa =$ b) $\theta =$ c) $sen\,\theta =$ d) $cos\,\theta =$

e) $tan\,\theta =$ f) $cot\,\theta =$ g) $sec\,\theta =$ h) $csc\,\theta =$

Resp.
a) $hip. = 4\sqrt{2}$ unidades b) $\theta = 45^o$ c) $sen\,\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $cos\,\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $tan\,\theta = 1$ f) $cot\,\theta = 1$ g) $sec\,\theta = \sqrt{2}$ h) $csc\,\theta = \sqrt{2}$

2.-
Encuentra el valor de la altura del poste y la hipotenusa que se forma en el triángulo adjunto y posteriormente indica el valor de las seis funciones trigonométricas de 60^o



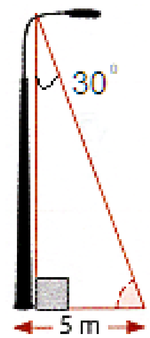
a) $altura =$ b) $hipotenusa =$ c) $sen\,\theta =$ d) $cos\,\theta =$

e) $tan\,\theta =$ f) $cot\,\theta =$ g) $sec\,\theta =$ h) $csc\,\theta =$

Resp.
a) $alt. = 5\sqrt{3}$ metros b) $hipotenusa = 10\,m$ c) $sen\,\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $cos\,\theta = \frac{1}{2}$

e) $tan\,\theta = \sqrt{3}$ f) $cot\,\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ g) $sec\,\theta = 2$ h) $csc\,\theta = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

3.- Encuentra el valor de la altura del poste y la hipotenusa que se forma en el triángulo adjunto y posteriormente indica el valor de las seis funciones trigonométricas de 30^o



a) $altura =$ b) $hipotenusa =$ c) $sen\ \theta =$ d) $cos\ \theta =$

e) $tan\ \theta =$ f) $cot\ \theta =$ g) $sec\ \theta =$ h) $csc\ \theta =$

Resp.

a) $alt. = 5\sqrt{3}$ metros b) $hip. = 10\ m$ c) $sen\ \theta = \frac{1}{2}$ d) $cos\ \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $tan\ \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ f) $cot\ \theta = \sqrt{3}$ g) $sec\ \theta = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ h) $csc\ \theta = 2$

4.- Se sabe que $cos\ \propto = \frac{1}{4}$, y que $270^o < \propto < 360^o$. Calcula $sen\ \propto =$

a) $sen\ \propto = -\frac{\sqrt{15}}{4}$ ok b) $sen\ \propto = -\frac{1}{\sqrt{15}}$ c) $sen\ \propto = 4$ d) $sen\ \propto = -\frac{4}{\sqrt{15}}$

5.- Se sabe que $cos\ \propto = \frac{1}{4}$, y que $270^o < \propto < 360^o$. Calcula $cot\ \propto =$

a) $sen\ \propto = -\frac{\sqrt{15}}{4}$ b) $sen\ \propto = -\frac{1}{\sqrt{15}}$ ok c) $sen\ \propto = 4$ d) $sen\ \propto = -\frac{4}{\sqrt{15}}$

6.- Se sabe que $cos\ \propto = \frac{1}{4}$, y que $270^o < \propto < 360^o$. Calcula $sec\ \propto =$

a) $sen\ \propto = -\frac{\sqrt{15}}{4}$ b) $sen\ \propto = -\frac{1}{\sqrt{15}}$ c) $sen\ \propto = 4$ ok d) $sen\ \propto = -\frac{4}{\sqrt{15}}$

7.- Se sabe que $cos\ \propto = \frac{1}{4}$, y que $270^o < \propto < 360^o$. Calcula $csc\ \propto =$

a) $sen\ \propto = -\frac{\sqrt{15}}{4}$
b) $sen\ \propto = -\frac{1}{\sqrt{15}}$
c) $sen\ \propto = 4$
d) $sen\ \propto = -\frac{4}{\sqrt{15}}$ **ok**

8.- Se sabe que $cos\ \propto = \frac{1}{4}$, y que $270^o < \propto < 360^o$. Calcula $tan\ \propto =$

a) $sen\ \propto = -\frac{\sqrt{15}}{4}$
b) $sen\ \propto = -\sqrt{15}$ ok
c) $sen\ \propto = 4$
d) $sen\ \propto = -\frac{4}{\sqrt{15}}$

9.- Se sabe que $sec\ \propto = 2$, y que $0^o < \propto < \frac{\pi}{2}$. Calcula $sen\ \propto =$

a) $sen\ \propto = -\frac{\sqrt{15}}{4}$
b) $sen\ \propto = -\frac{1}{\sqrt{15}}$
c) $sen\ \propto = 4$
d) $sen\ \propto = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ok

10.- Se sabe que $sec\ \propto = 2$, y que $0^o < \propto < \frac{\pi}{2}$. Calcula $tan\ \propto =$

a) $sen\ \propto = -\frac{\sqrt{15}}{4}$
b) $sen\ \propto = -\frac{1}{\sqrt{15}}$
c) $sen\ \propto = \sqrt{3}$ ok
d) $sen\ \propto = \frac{\sqrt{3}}{2}$

11.- Se sabe que $sec\ \propto = 2$, y que $0^o < \propto < \frac{\pi}{2}$. Calcula $cos\ \propto =$

a) $sen\ \propto = -\frac{\sqrt{15}}{4}$
b) $sen\ \propto = \frac{1}{2}$ ok
c) $sen\ \propto = 4$
d) $sen\ \propto = \frac{\sqrt{3}}{2}$

12.- Sin utilizar calculadora, calcula: $sen\ 2655^o =$

a) $sen\ 2655 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
b) $sen\ 2655 = \frac{1}{2}$
c) $sen\ 2655 = 4$
d) $sen\ 2655 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ok

13.- Sin utilizar calculadora, calcula: $cos\ 2655^o =$

a) $cos\ 2655 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ok
b) $cos\ 2655 = \frac{1}{2}$
c) $cos\ 2655 = 4$
d) $cos\ 2655 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

14.- Sin utilizar calculadora, calcula: $tan\ 2655^o =$

a) $tan\ 2655 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
b) $tan\ 2655 = \frac{1}{2}$
c) $tan\ 2655 = -1$ ok
d) $tan\ 2655 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

15.- Sin utilizar calculadora, calcula: $tan\ -840^o =$

a) $tan\ -840^o = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
b) $tan\ -840^o = \sqrt{3}$ ok
c) $tan\ -840^o = -1$
d) $tan\ -840^o = \frac{\sqrt{2}}{2}$

16.- Sin utilizar calculadora, calcula: $sen\ -840^o =$

a) $sen\ -840^o = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ok
b) $sen\ -840^o = \sqrt{3}$
c) $sen -840^o = -1$
d) $sen\ (-840^o) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

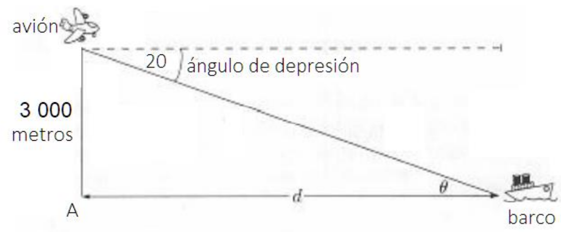
Aprendizajes: Resuelve problemas que involucren triángulos rectángulos.

Tema: Solución a problemas de aplicación:

- Ángulo de elevación.
- Ángulo de depresión.
- Distancias inaccesibles.
- Cálculo de áreas.

1.-

Un avión está volando por encima del océano y dispone de un altímetro que ofrece lecturas muy precisas. El aparato indica una altura de 3 000 metros sobre el océano. El piloto observa que el ángulo de depresión respecto a un barco es de 20º. ¿Cuál es la distancia horizontal *d* (sin decimales) medida desde ese barco hasta un punto “A” que se localiza directamente abajo del avión?

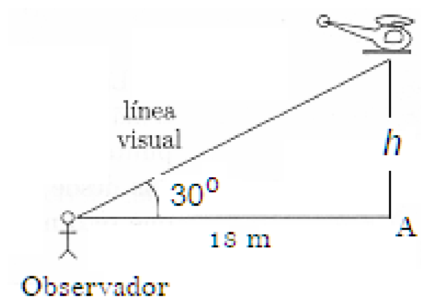


2 puntos.

a) 8 242 m b) 1 092 m c) 8 871 m d) 1 026 m

2.-

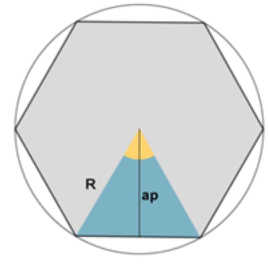
Una persona observa las maniobras de un helicóptero. El ángulo de elevación del observador al helicóptero es de 30º y se conoce que la distancia horizontal del observador a un punto “A” ubicado debajo del helicóptero es de 18 metros. Indica la distancia vertical “*h*” del helicóptero al punto “A”.



a) $h = 3\sqrt{3}$ m b) $h = 4\sqrt{3}$ m c) $h = 5\sqrt{3}$ m **d)** $\boldsymbol{h = 6\sqrt{3}}$ **m**

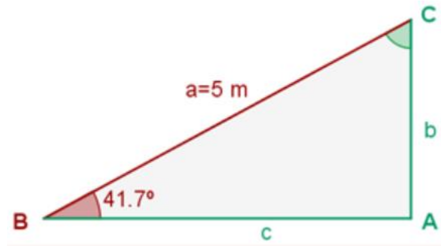
3.-

Encuentra el área “A” de un hexágono regular inscrito en un círculo de radio de 4 unidades.



a) $A = 10\sqrt{3}\,u^2$ b) $A = 18\sqrt{3}\,u^2$ c) $A = 20\sqrt{3}\,u^2$ **d)** $A = 24\sqrt{3}\,u^2$

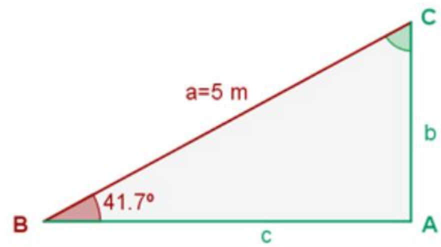
4.-
Encuentra el valor de b, del triángulo que se muestra en la figura:



Solución:

b = 3.3261 unidades

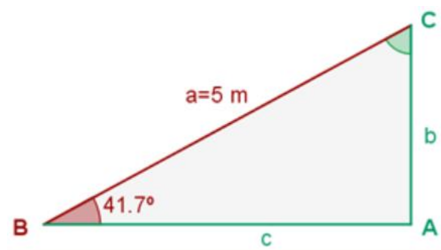
5.-
Encuentra el valor de c, del triángulo que se muestra en la figura:



Solución:

c = 3.7332 unidades

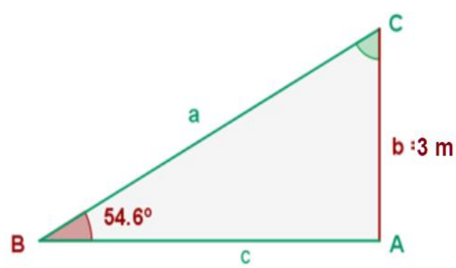
6.-
Encuentra el valor de C, del triángulo que se muestra en la figura:



Solución:

C = 48.3º

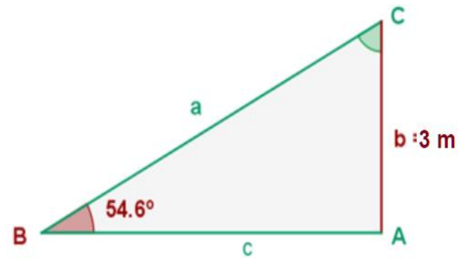
7.-
Encuentra el valor de C, del triángulo que se muestra en la figura:



Solución:

C = 35.4º

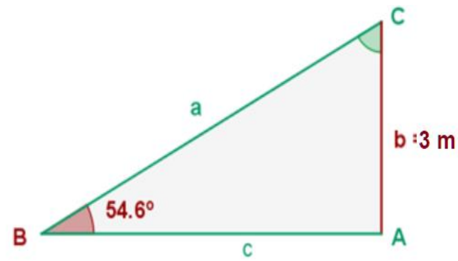
8.-
Encuentra el valor de c, del triángulo que se muestra en la figura:



Solución:

c = 2.1320 m

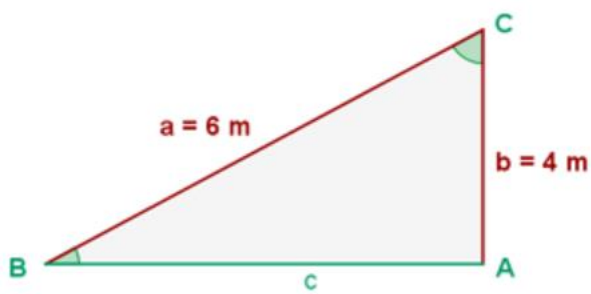
9.-
Encuentra el valor de a, del triángulo que se muestra en la figura:



Solución:

a = 3. 6803 m

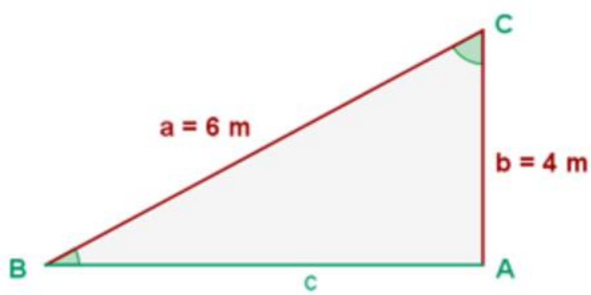
10.-
Encuentra el valor de B, del triángulo que se muestra en la figura:



Solución:

B = 41.8103º

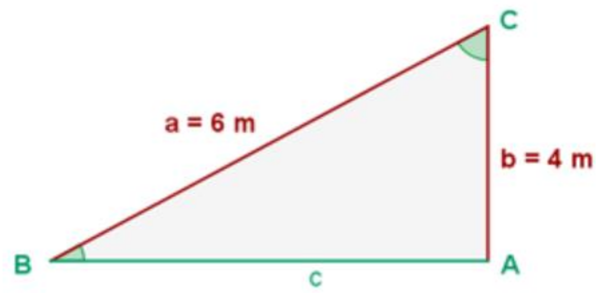
11.-
Encuentra el valor de C, del triángulo que se muestra en la figura:



Solución:

B = 41.1896º

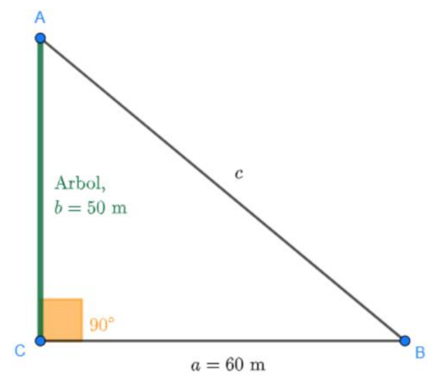
12.-
Encuentra el valor de c, del triángulo que se muestra en la figura:



Solución:

c = $2\sqrt{5}$ m

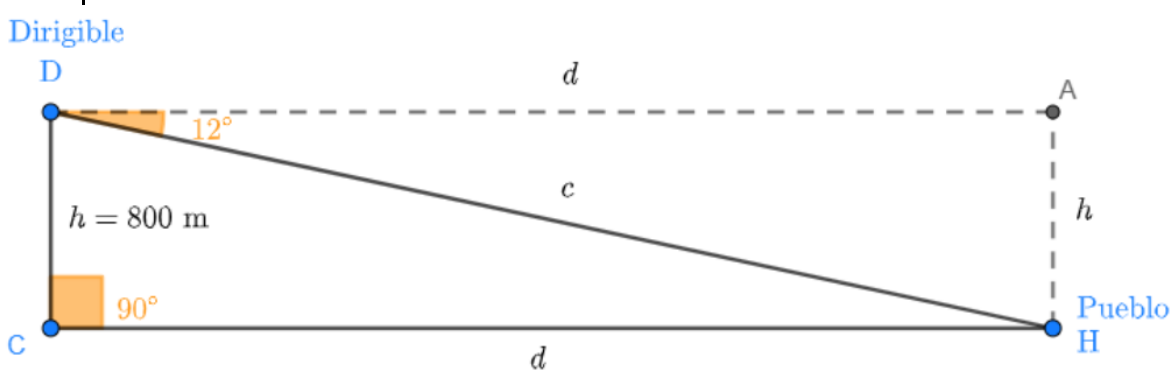
13.-
Un árbol de 50 m de altura proyecta una sombra de 60 m de longitud. Encuentra el ángulo de elevación del sol en ese momento. Ver la figura.



Solución:

B = 39.8056º

14.-
Un dirigible vuela a 800 m de altura en un determinado momento. Desde arriba se observa un pequeño pueblo a 12º de depresión. ¿Qué distancia en línea recta debe recorrer el dirigible, sin perder altura para estar exactamente sobre el pueblo? Dar la respuesta en km.

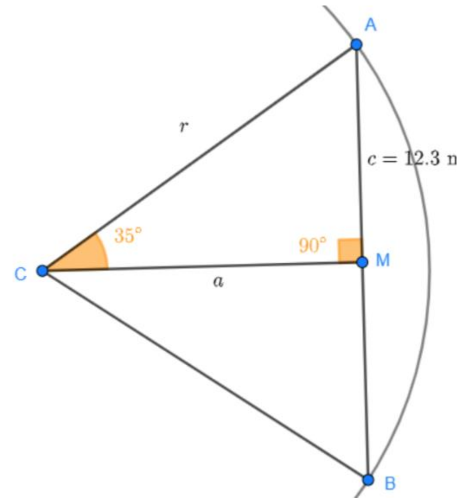


Solución:

d = 3.764 km

15.-

Hallar el radio de una circunferencia, donde una cuerda de 24.6 m tiene un arco de 70º. Ver la figura.

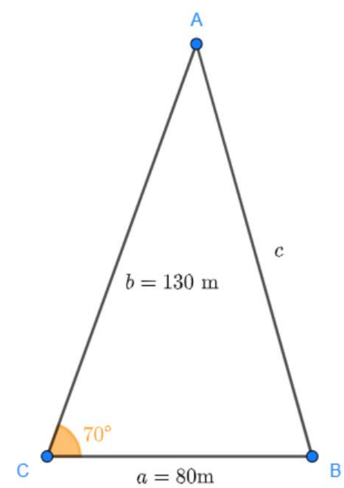


Solución:

r = 21.44 m

16.-

Hallar el área de un terreno triangular que tiene dos lados de 130 m de longitud y otro lado de 80 m, como se muestra en la figura. El ángulo entre los lados desiguales mide 70º.

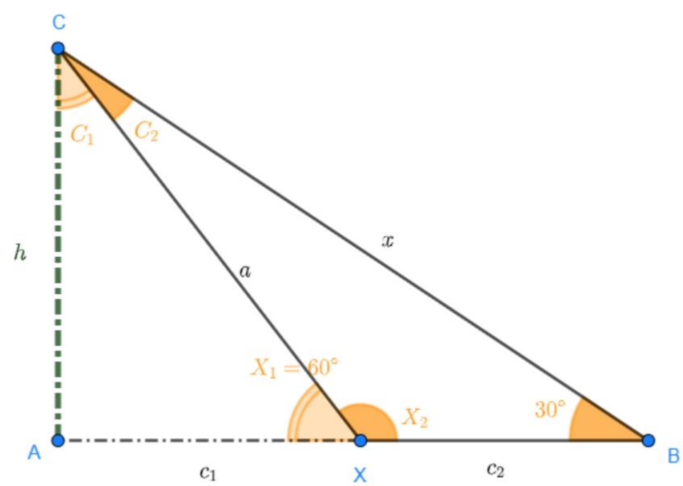


Solución:

A = 4 886.40 m^2

17.-

Hallar el área de un terreno triangular que tiene dos lados de 130 m de longitud y otro lado de 80 m, como se muestra en la figura. El ángulo entre los lados desiguales mide 70º.

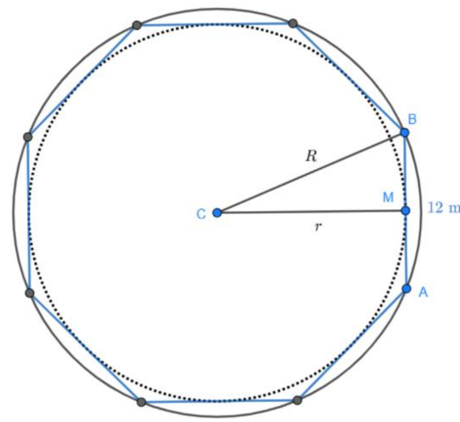


Solución:

A = 4 886.40 m^2

18.-

Un octágono regular tiene lados que miden 12 m. Encuentra el radio de la circunferencia inscrita (línea punteada).

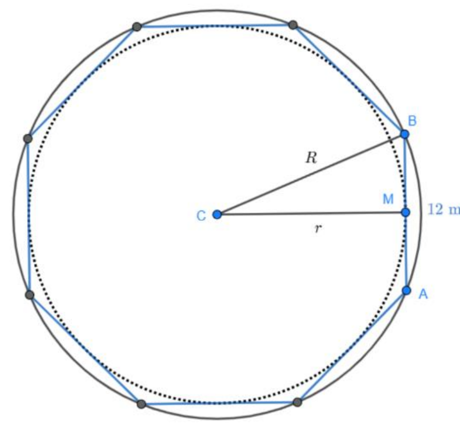


Solución:

r = 14.4853 m

19.-

Un octágono regular tiene lados que miden 12 m. Encuentra el radio de la circunferencia circunscrita (línea continua).



Solución:

R = 15.6788 m

Aprendizajes: Comprende la deducción de algunas identidades trigonométricas.

Tema: Identidades trigonométricas:

- Fundamentales.
- Recíprocas.
- Pitagóricas.

Te recomendamos veas el siguiente tutorial de introducción a las identidades trigonométricas: https://youtu.be/PbvKVSWyvpI

1.-
¿Cuál de las tres expresiones NO es una identidad trigonométrica?

a) $tan\,\theta \cdot cos\theta = sen\theta$
b) $sen^2\emptyset + cos^2\emptyset = 1$
c) $cos\beta = tan\beta \cdot sen\beta$ ok

2.-
Al reducir la siguiente expresión $sen\,\theta \cdot cot\theta$ a $cos\theta$, se utiliza la siguiente identidad:

a) $\frac{sen\theta}{cos\theta}$
b) $sen^2\theta + cos^2\theta = 1$
c) $\frac{1}{cos\theta}$
d) $\frac{cos\theta}{sen\theta}$ ok

3.-
¿Cuál expresión de la lista de la derecha forma una identidad fundamental con la expresión:

$$csc\,\theta =$$

a) $\frac{sen\theta}{cos\theta}$
b) $\frac{1}{sen\theta}$ ok
c) $\frac{1}{cos\theta}$
d) $\frac{cos\theta}{sen\theta}$

4.-
¿Cuál expresión de la lista de la derecha forma una identidad fundamental con la expresión:

$$cot\,\theta =$$

a) $\frac{sen\theta}{cos\theta}$
b) $\frac{1}{sen\theta}$
c) $\frac{1}{tan\theta}$ ok
d) $\frac{cos\theta}{sen\theta}$ ok

5.-
¿Cuál expresión de la lista de la derecha forma una identidad fundamental con la expresión:

$$csc\,\theta =$$

a) $\frac{sen\theta}{cos\theta}$
b) $\frac{1}{sen\theta}$ ok
c) $\frac{1}{cos\theta}$
d) $\frac{cos\theta}{sen\theta}$

6.-
¿Cuál expresión de la lista de la derecha forma una identidad fundamental con la expresión:

$$sen\ \theta =$$

a) $\frac{sen\theta}{cos\theta}$
b) $\frac{1}{csc\ \theta}$ ok
c) $\frac{1}{cos\theta}$
d) $\frac{cos\theta}{sen\theta}$

7.-
Al simplificar la expresión siguiente, resulta:

$$sen\ \theta + cot\ \theta \cdot cos\ \theta =$$

a) $\frac{sen\theta}{cos\theta}$
b) $csc\ \theta$ ok
c) $\frac{1}{cos\theta}$
d) $sec\ \theta$

8.-
Al simplificar la expresión siguiente, resulta:

$$\frac{2sen\ \theta}{tan2\theta} + \frac{sen^2\ \theta}{cos\ \theta} =$$

a) $\frac{sen\theta}{cos\theta}$
b) $csc\ \theta$
c) $\frac{1}{cos\theta}$
d) $cos\ \theta$ ok

9.-
Al simplificar la expresión siguiente, resulta:

$$2\left(cos^2\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}cos\theta\right) =$$

a) $\frac{sen\theta}{cos\theta}$
b) 1 ok
c) $\frac{1}{cos\theta}$
d) $cos\ \theta$

10.-
Al simplificar la expresión siguiente, resulta:

$$sen(x+y) \cdot sen(x-y) =$$

a) $\frac{sen\theta}{cos\theta}$
b) $sen^2x - sen^2y$ *ok*
c) $\frac{1}{cos\theta}$
d) $cos\ \theta$

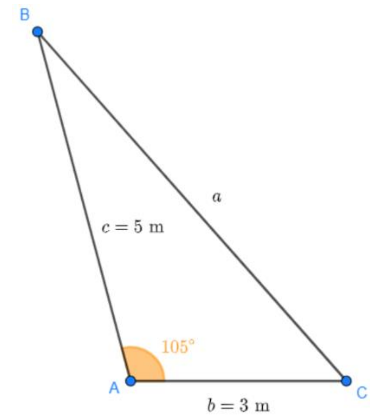
Aprendizajes: Comprende el proceso de deducción de las leyes de senos y de cosenos para resolver problemas sobre triángulos oblicuángulos.

Tema: Resolución de triángulos oblicuángulos:

- Ley de senos.
- Ley de cosenos.
- Problemas de aplicación.

1.-

Encuentra el valor de C, del triángulo que se muestra en la figura:

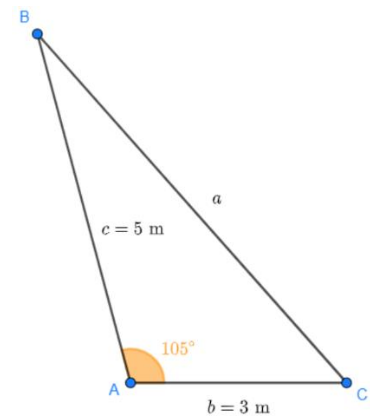


Solución:

C = 44.36º

2.-

Encuentra el valor de a, del triángulo que se muestra en la figura:



Solución:

B = 6.4626 m

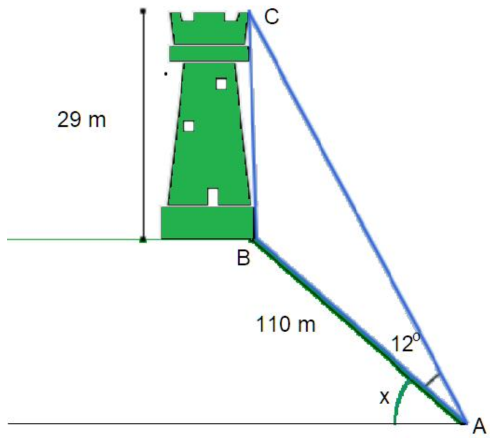
3.-

En un reloj, la manecilla de las horas y la manecilla de los minutos miden 0.7 y 1.2 cm, respectivamente. Determina la distancia entre los extremos de las manecillas a la 1:30.

a) 1.23 cm b) 4.51 cm c) 1.83 cm OK d) 2.21 cm

4.-
Una torre de 29 m de alto se encuentra en la cima de una colina. Desde una distancia de 110 m colina abajo, se mide el ángulo que se forma entre la base de la torre (Punto B) al punto C, que resulta ser de 12º. Encontrar el ángulo x de inclinación de la colina.

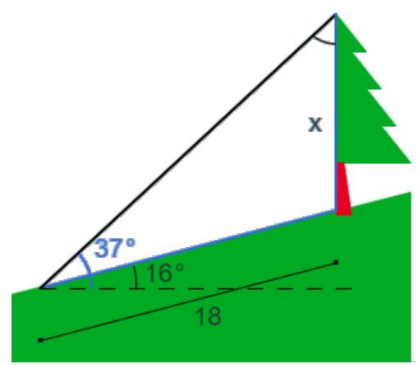
Utiliza cuatro puntos decimales para tus cálculos.



a)14.07º **b)25.94º** c)67.39º d)18.4º

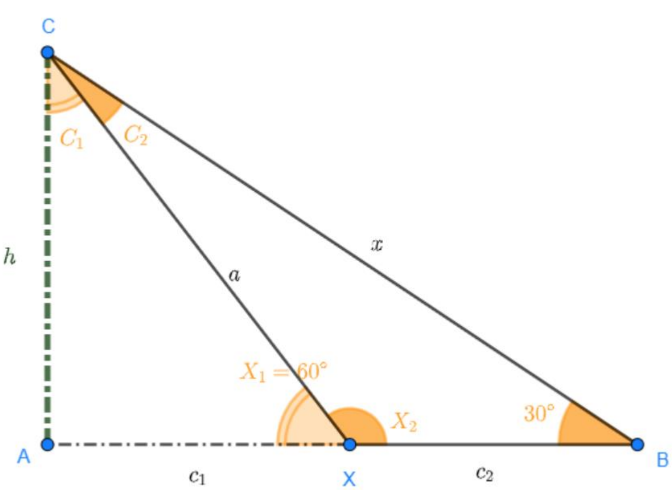
5.- Ley de senos.
Un árbol proyecta una sombra sobre una ladera colina abajo de 18 m. Si el ángulo de inclinación de la ladera es de 16º, con respecto a la horizontal, y el ángulo de elevación del sol es de 37º. ¿Cuál es la altura del árbol?

Utiliza cuatro puntos decimales para tus cálculos.



a)3.08 m b)5.94 m c)7.39 m **d)8.08 m**

6.-
Calcula la altura de un árbol, sabiendo que desde un punto del terreno se observa su copa en un ángulo de 30° sobre el nivel de la tierra, y si nos acercamos 10 m, entonces la copa se observa en un ángulo de elevación de 60° sobre la tierra.

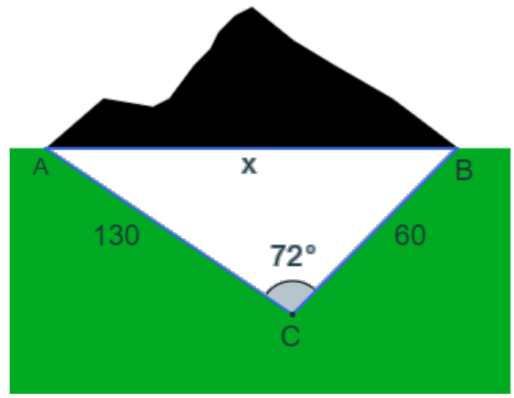


Solución:

h = $5\sqrt{3}$ m

7.- Ley de los cosenos.

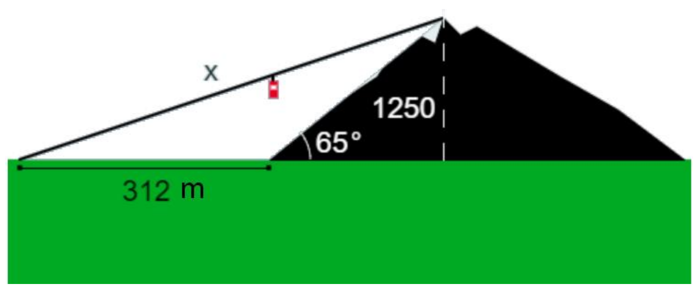
Para construir un túnel, una compañía de construcción necesita conocer la longitud total entre los puntos A y B para estimar costos. Contrata a un Ingeniero Topógrafo que decide medir las distancias de A y B a un punto C y el ángulo ACB, cuyas medidas son: 130 m, 60 m y 72º, respectivamente. ¿Cuánto mide la longitud del túnel?



a)93.08 m b)115.94 m **c)125.22 m** d)130.14 m

8.-

Desde la cima de una montaña de 1250 m de altura hasta un punto a 312 m de la base de ésta, se tiende un cable para sostener un teleférico. Si la montaña tiene una inclinación de 65º sobre la horizontal, ¿Cuál es la longitud más corta del cable que se necesita? Realiza tus cálculos con 4 cifras decimales. (3 puntos).

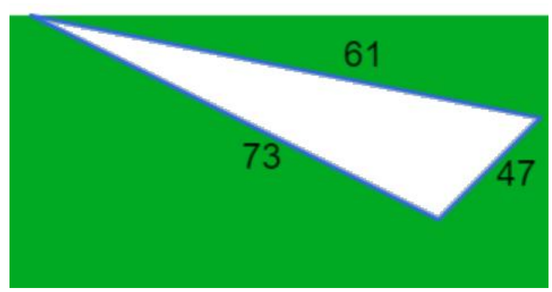


a)1 493.08 m **b)1 537.31 m** c)1 625.22 m d)1 730.14 m

9.-

Un campo triangular como el mostrado en la figura tiene lados de longitudes: 47 m, 61 m y 73 m. Encontrar el ángulo interno más grande.

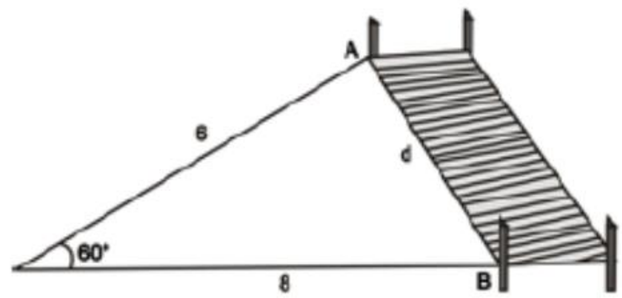
Utiliza cuatro puntos decimales para tus cálculos.



a)94.07^{O} b)39.82^{O} c)56.20^{O} **d)83.98^{O}**

10.-

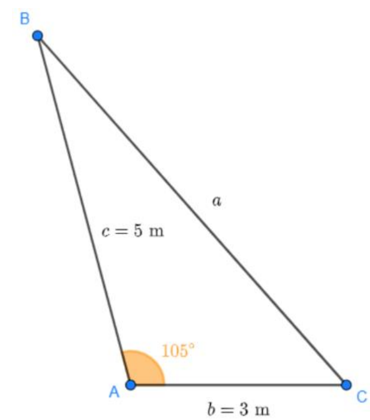
Dos barcos parten de los puntos A y B de un muelle. Un barco recorre 6 millas náuticas y otro, 8 millas náuticas como se observa en la imagen. Si las trayectorias forman un ángulo de 60º, ¿cuánto mide la distancia d?



a)10 millas náuticas	b)14 millas náuticas	c) 7.21 millas náuticas OK	d)12.17 millas náuticas

11.-

Encuentra el valor de B, del triángulo que se muestra en la figura:

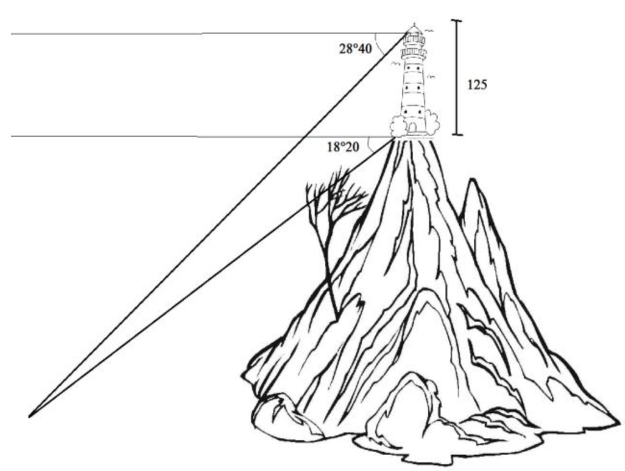


Solución:

B = 26.64º

12.-

Sobre un peñasco situado a la rivera de un río se encuentra una torre de 125 pies de altura. Desde lo alto de la torre, el ángulo de depresión de un punto situado en la orilla opuesta es de 28°40’ y desde la base de la torre, el ángulo de depresión del mismo punto es de 18°20’. Calcule cuánto mide el ancho del río.



a) 535 pies	b) 381 pies	c) 160.81 pies OK	d) 691.2 pies

13.-

Un poste emite una sombra de 10 m de largo cuando el ángulo de elevación del sol es de 30°. El poste está inclinado con un ángulo de 15° de la vertical con la dirección de su sombra. Encuentra la longitud del poste.

a) 5.17 m	b) 4.32 m OK	c) 3.17 m	d) 2.63 m

14.-

Se desea cercar una finca triangular cuyos vértices son los puntos A, B y C, pero al empezar el trabajo se descubre que la marca B ha desaparecido. El título de propiedad indica que la distancia de B a C es de 480 metros, la distancia de A a C es de 250 metros, y el ángulo A es de 120°. Determine la posición de B obteniendo la distancia de A a B.

a) 553.39 m OK	b) 428.12 m	c) 338.91 m	d) 271.12 m

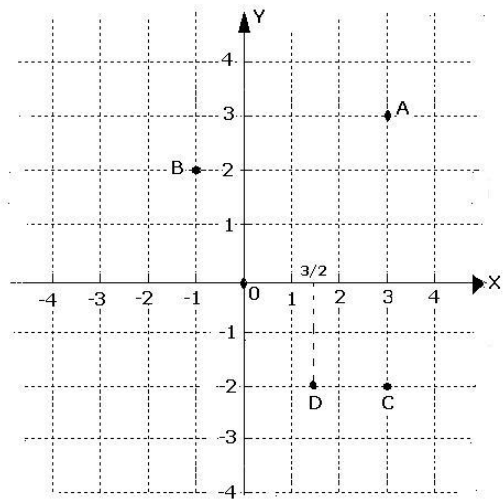
Aprendizajes: Representa la ubicación de un punto en el plano utilizando un sistema de referencia cartesiano y viceversa.

Tema: Representación de puntos en el plano de coordenadas rectangulares.

1.-

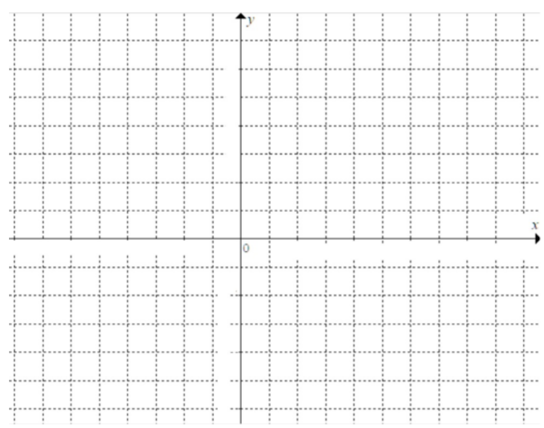
Escribe en la siguiente tabla las coordenadas de los puntos que se indican, según la figura adjunta.

Punto	x	y
A		
B		
C		
D		



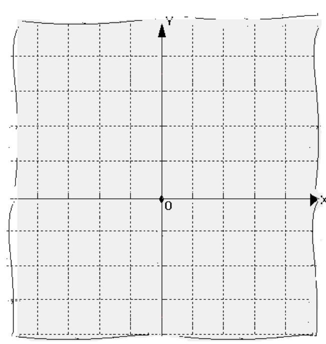
2.-

Las coordenadas de los vértices de un triángulo son A(-3,-2), B(3,4) y C(7,2). En la imagen anexa, dibuja el triángulo e indica sus vértices.

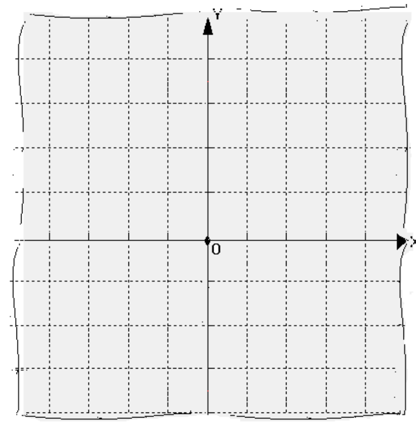


3.-

En la figura anexa, señala el nombre de los cuadrantes del sistema de referencia cartesiano.



4.-
En la figura anexa, señala los signos de las coordenadas de un punto cualquiera ubicado en cada uno de los cuatro cuadrantes.



5.- Indica el número de cuadrante en el que se ubica el punto A(-5,-3)
a) I b) II c) III d) IV ok

6.-
Asocia cada pareja ordenada con la descripción que corresponde a la relación entre sus dos elementos:

a) (3,1)

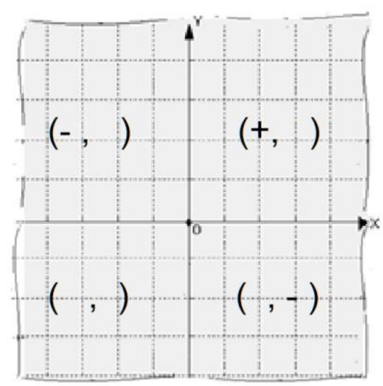
b) $(-5, 25)$

c) $(-\sqrt{4}, -2)$

I. La ordenada es el cuadrado de la abscisa.
II. La abscisa es igual a la ordenada.
III. La ordenada es un tercio de la abscisa.

Sol.
a) III; b) I; c) II

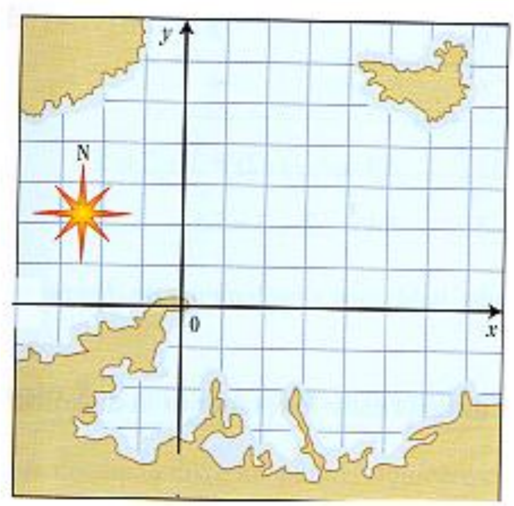
7.-
En la figura anexa, completa el esquema para identificar los signos de las parejas ordenadas de números, de acuerdo con el cuadrante en el que se ubiquen.



8.-

Un buque petrolero se mueve cerca de una costa. Se considera al mar como una superficie plana donde se ha superpuesto una retícula coordenada. Cada unidad en la figura representa 5 km en la realidad.

Si el barco sigue una trayectoria en la que se desplaza desde su punto de partida (situado en el origen) 10 km hacia al Oeste, 25 km hacia el Norte, 5 km hacia al Sur, 40 km hacia el Este, 35 km hacia el Sur y concluye su recorrido regresando 15 km hacia el Oeste.



a) ¿Cuáles son las coordenadas de los extremos de cada desplazamiento que realizó?

Respuesta: (-2,0), (-2,5), (-2,4), (6,4), (6,-3), (3,-3).

Sol. (0, 34.6)

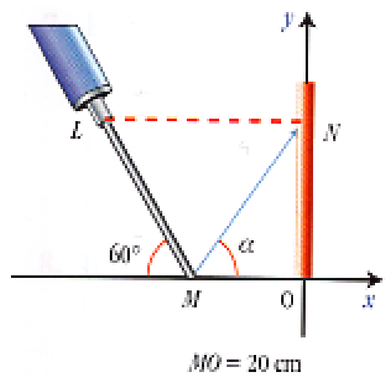
Aprendizajes: Localiza un segmento en el plano cartesiano y proporciona la información suficiente para que otro alumno lo pueda hacer.

Tema: Condiciones necesarias y suficientes para determinar un segmento:
Puntos extremos
Un extremo, la longitud y el ángulo de inclinación.

1.-

En la figura anexa se muestra un rayo láser que es disparado desde un punto *L*, de modo que choca contra una superficie en *M* y es desviado hacia el punto *N* donde traspasará una placa con componentes microelectrónicos, dispuesta en forma vertical.

a) ¿Cuáles son las coordenadas del punto donde choca el rayo (*M*) con la superficie reflejante?

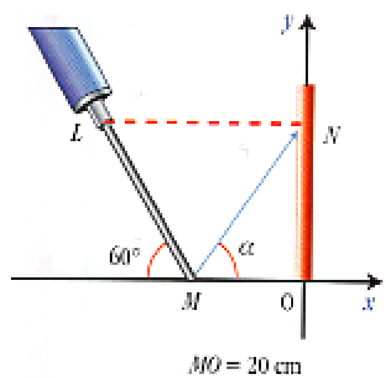


Sol. (-20,0)

2.-

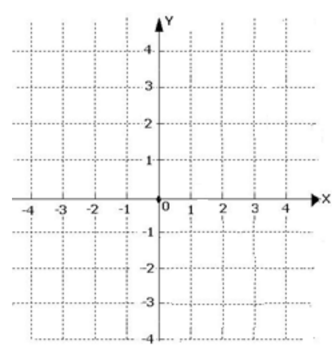
En la figura anexa se muestra un rayo láser que es disparado desde un punto *L*, de modo que choca contra una superficie en *M* y es desviado hacia el punto *N* donde traspasará una placa con componentes microelectrónicos, dispuesta en forma vertical.

a) ¿A qué altura sobre la superficie reflejante está el punto (*N*) de la placa donde atraviesa el láser?



3.-

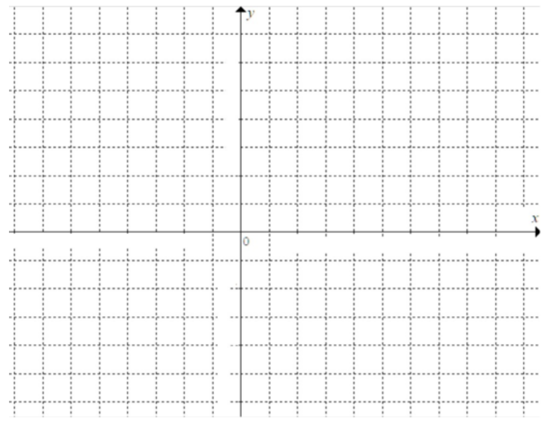
Determina las coordenadas de los puntos extremos del segmento de recta que está ´comprendido entre las intersecciones de la recta y=2x-4 con las rectas x=1 y x=4. Dibuja dicho segmento.



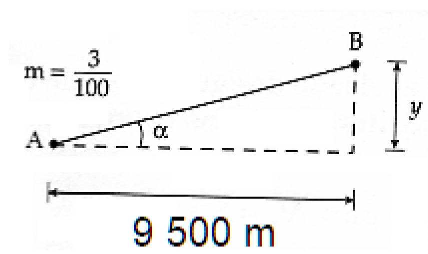
Solución:
(1,-2) y (4,4)

4.-
Determina las coordenadas de los puntos extremos del segmento de recta que está ´comprendido entre las intersecciones de la recta y=2x-1 con las rectas x=1 y x=4. Dibuja dicho segmento.

Solución:
(1,1) y (4,7)

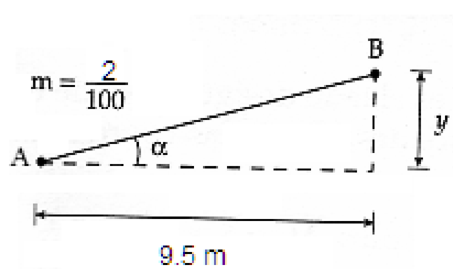


5.-
En la figura anexa, se muestra el perfil de un tramo de carretera. El punto A, se considera el nivel cero de elevación. Otro punto B sobre la misma carretera dista 9.5 km. Si la pendiente es ascendente del 3%, obtener las coordenadas del punto B, suponiendo que el origen del sistema de referencia coordenado está ubicado en el punto A.



Solución: (9 500, 285)

6.-
En la figura anexa, se muestra el perfil de un tramo de losa de azotea. El punto A, se considera el nivel cero de elevación. Otro punto B sobre la misma losa dista 9.5 m. Si la pendiente es ascendente del 2%, obtener las coordenadas del punto B, suponiendo que el origen del sistema de referencia coordenado está ubicado en el punto A.

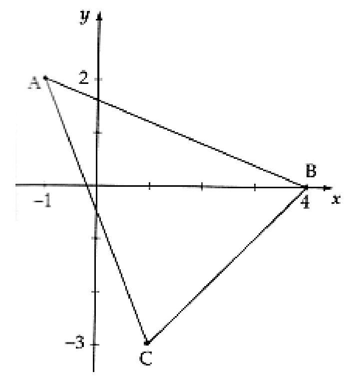


Solución: (9.5, 0.19)

Aprendizajes: Deduce la fórmula para determinar la longitud de un segmento dados sus puntos extremos y la aplica a diferentes situaciones.

Tema: Longitud de un segmento.

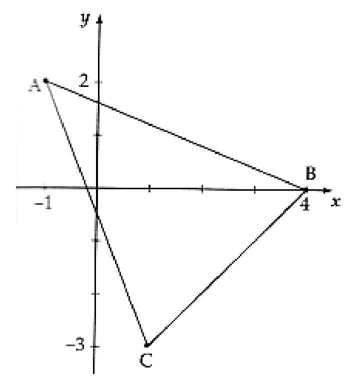
1.-
Determina la longitud del lado AB del triángulo que se muestra en la figura adjunta.



Solución:

$$\sqrt{29}\ unidades$$

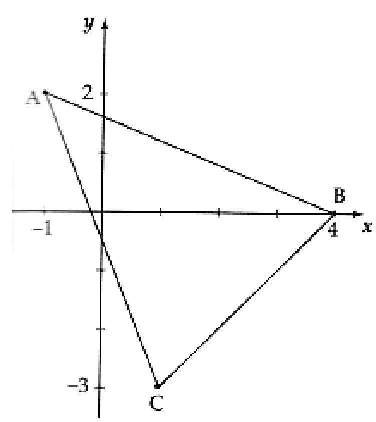
2.-
Determina la longitud del lado BC del triángulo que se muestra en la figura adjunta.



Solución:

$$\sqrt{18}\ unidades$$

3.-
Determina la longitud del lado AC del triángulo que se muestra en la figura adjunta.



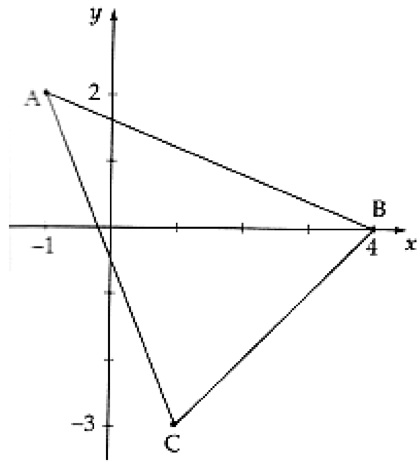
Solución:

$$\sqrt{29}\ unidades$$

4.-
Determina el perímetro del triángulo que se muestra en la figura adjunta, cuyos vértices son A(-1,2), B(4,0) y C(1,-3).

Solución:

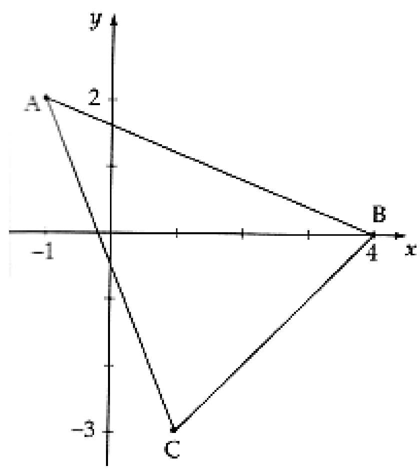
$$15\ unidades$$



5.-
Determina el área del triángulo que se muestra en la figura adjunta, cuyos vértices son A(-1,2), B(4,0) y C(1,-3).

Solución:

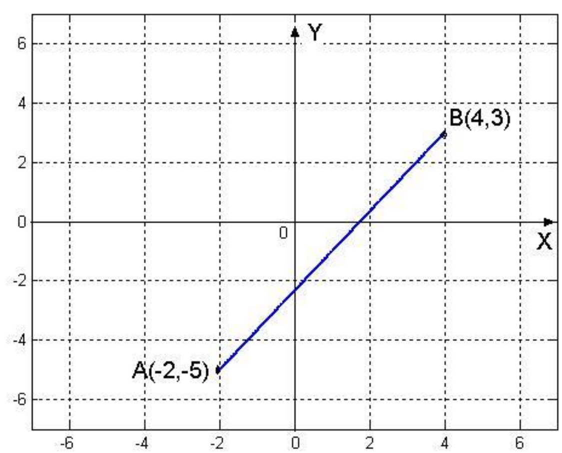
$$21.5\ u^2$$



6.-
Determina la longitud del segmento AB, que se muestra en la figura adjunta:

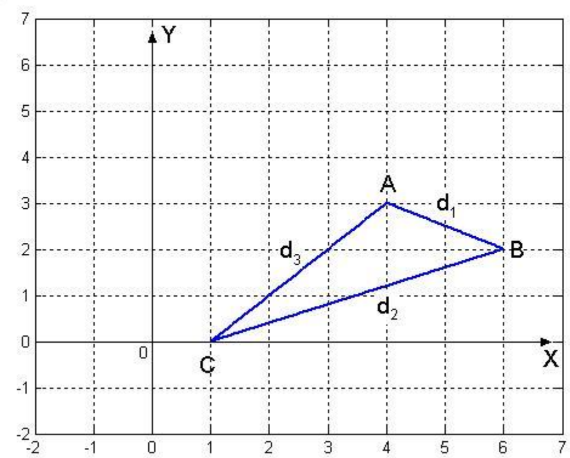
Solución:

$$10\ u$$



7.-

Determina el perímetro del triángulo que se muestra en la figura adjunta, cuyos vértices son A(-1,2), B(4,0) y C(1,-3).

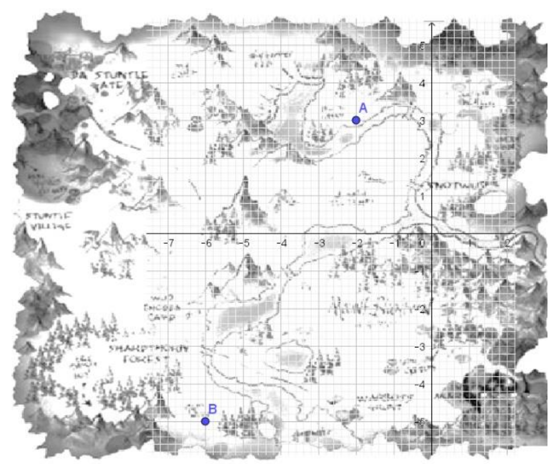


Solución:

$$\sqrt{37}\ unidades$$

8.-

El mapa de una región que contiene bosques valiosos se ha marcado utilizando el sistema de coordenadas rectangulares, de tal manera que cada unidad en cada eje representa 1 km. Al observar un desprendimiento de humo, una torre de control contra incendios determina que existe un incendio en la ubicación aproximada B(-6,-5). Si a un helicóptero ubicado en A(-2,3) se le ordena que vaya directamente al incendio, ¿Qué distancia debe recorrer?

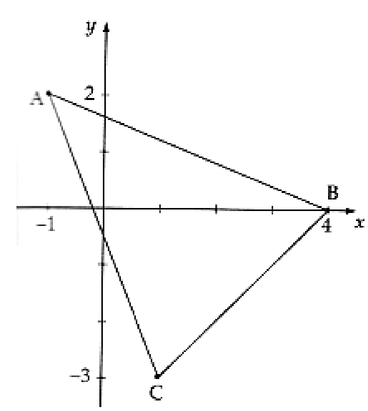


Solución:

$$\sqrt{80}\ km$$

9.-

Determina qué tipo de triángulo es el que se forma con los vértices A(-1,2), B(4,0) y C(1,-3).



Solución:

$$isósceles$$

10.- Demuestra que los puntos A(-2,3), B8-6,1) y C(-10,-1) son colineales.
Debes demostrar que d(AC)=d(AB)+d(BC)
Respuesta: sí son colineales

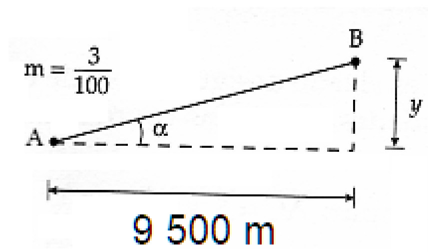
11.- Demuestra que el triángulos cuyos vértices son A(1,3), B(3,-1) y C(-5,-5) es un triángulo rectángulo.
Respuesta: sí es un triángulo rectángulo.

12.- ¿Qué tipo de triángulo se forma con los vértices $A(-3,-2),\ B(7,4)\ \ y\ \ C(1,14)$?
Respuesta: Isósceles

Aprendizajes: Comprende el concepto de ángulo de inclinación de un segmento. Calcula el ángulo de inclinación a partir de las coordenadas de los extremos de un segmento.

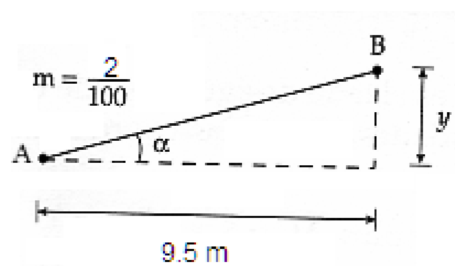
Tema: Ángulo de inclinación.
Pendiente.

1.-
En la figura anexa, se muestra el perfil de un tramo de carretera. El punto A, se considera el nivel cero de elevación. Otro punto B sobre la misma carretera dista 9.5 km. Si la pendiente es ascendente del 3%, obtener la distancia y, suponiendo que el origen del sistema de referencia coordenado está ubicado en el punto A.



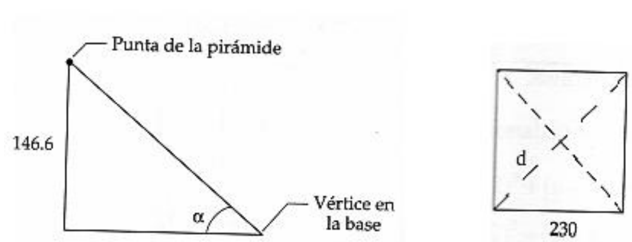
Solución: (y= 285 m)

2.-
En la figura anexa, se muestra el perfil de un tramo de losa de azotea. El punto A, se considera el nivel cero de elevación. Otro punto B sobre la misma losa dista 9.5 m. Si la pendiente es ascendente del 2%, obtener la distancia y, suponiendo que el origen del sistema de referencia coordenado está ubicado en el punto A.



Solución: (y= 0.19 m)

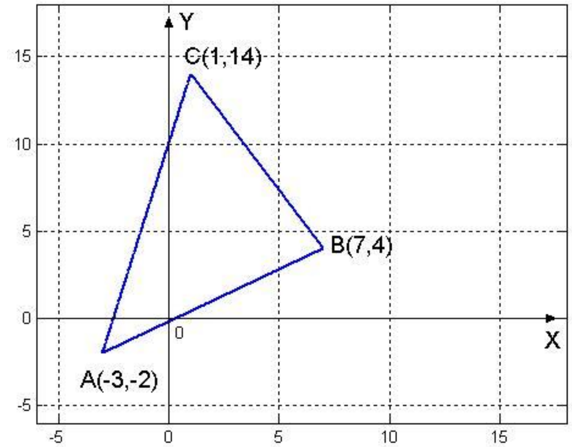
3.-
En la figura anexa, se muestra el perfil de la gran pirámide de Keops en Egipto. Se estima tiene una altura de 146.6 m y una base cuadrada de 230 m de lado. Se desea conocer, partiendo de la punta de la pirámide y bajando a uno de los vértices de la base cuadrada cuál es la pendiente m de la línea que se forma y el ángulo α que se forma con la horizontal.



Solución: (m= 0.9016 y $\alpha = 42.03^o$)

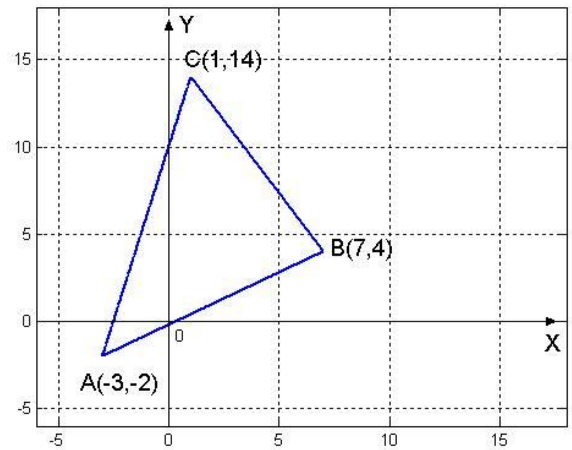
4.-
En la figura anexa, se muestra un triángulo que tiene vértices en los puntos $A(-3,-2)$, $B(7,4)$ y $C(1,14)$. Calcula la pendiente del lado *AB*.

Resp. $m = \frac{3}{5}$



5.-
En la figura anexa, se muestra un triángulo que tiene vértices en los puntos $A(-3,-2)$, $B(7,4)$ y $C(1,14)$. Calcula la pendiente del lado *BC*.

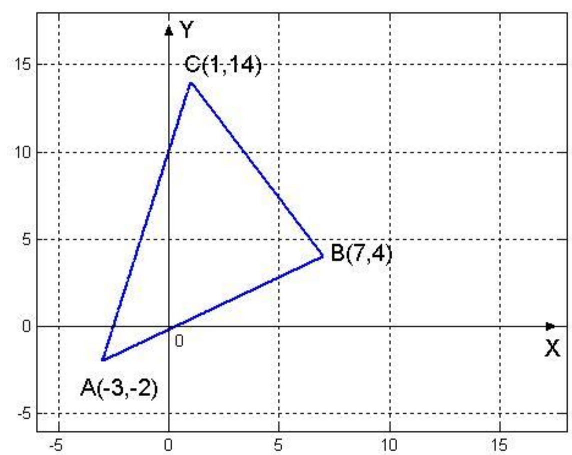
Resp. $m = -\frac{5}{3}$



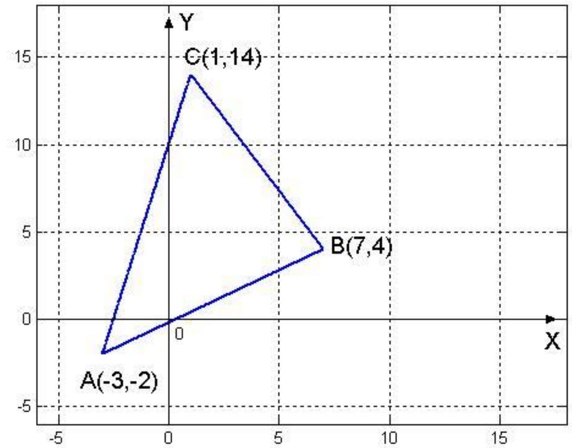
6.-

En la figura anexa, se muestra un triángulo que tiene vértices en los puntos $A(-3,-2)$, $B(7,4)$ y $C(1,14)$. Calcula la pendiente del lado *AC*.

Resp. $m = 4$



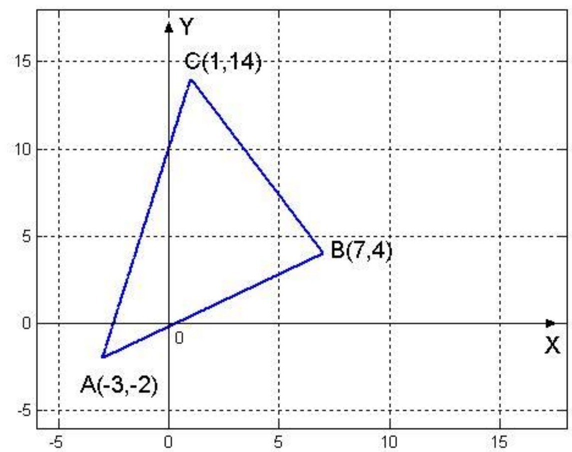
7.-
En la figura anexa, se muestra un triángulo que tiene vértices en los puntos $A(-3,-2),\ B(7,4)\ y\ C(1,14)$. Calcula la pendiente de la mediana que parte del vértice *A*. El punto medio del lado BC es (4,9).



En geometría las **medianas** o **transversales de gravedad** de un triángulo son cada uno de los tres segmentos que unen cada vértice con el punto medio de su lado opuesto.

Resp. $m = \frac{11}{7}$

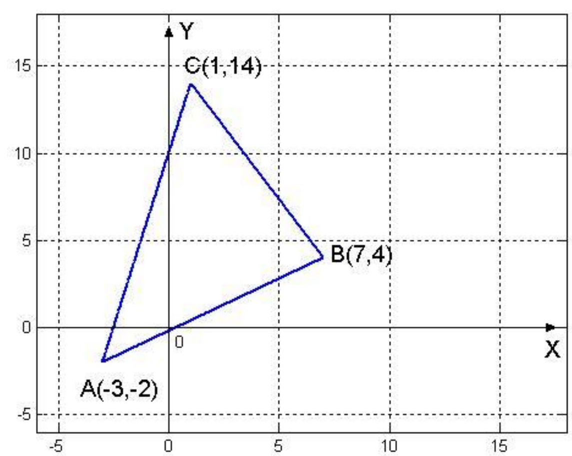
8.-
En la figura anexa, se muestra un triángulo que tiene vértices en los puntos $A(-3,-2),\ B(7,4)\ y\ C(1,14)$. Calcula la pendiente de la mediana que parte del vértice *B*. El punto medio del lado AC es (-1,6).



En geometría las **medianas** o **transversales de gravedad** de un triángulo son cada uno de los tres segmentos que unen cada vértice con el punto medio de su lado opuesto.

Resp. $m = -\frac{1}{4}$

9.-
En la figura anexa, se muestra un triángulo que tiene vértices en los puntos $A(-3,-2),\ B(7,4)\ y\ C(1,14)$. Calcula la pendiente de la mediana que parte del vértice *C*. El punto medio del lado AB es (2,1).

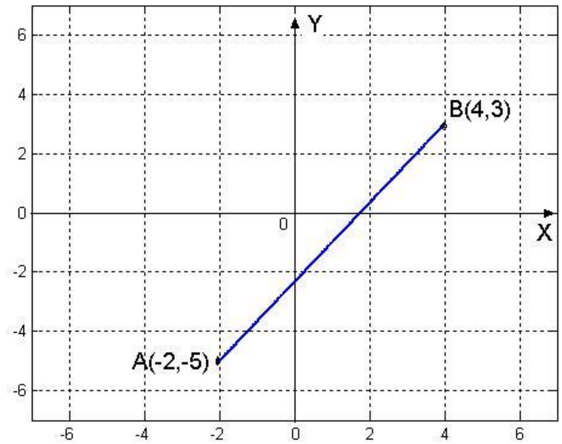


En geometría las **medianas** o **transversales de gravedad** de un triángulo son cada uno de los tres segmentos que unen cada vértice con el punto medio de su lado opuesto.

Resp. $m = -13$

10.-

Determina la pendiente del segmento AB, que se muestra en la figura adjunta:



Solución:

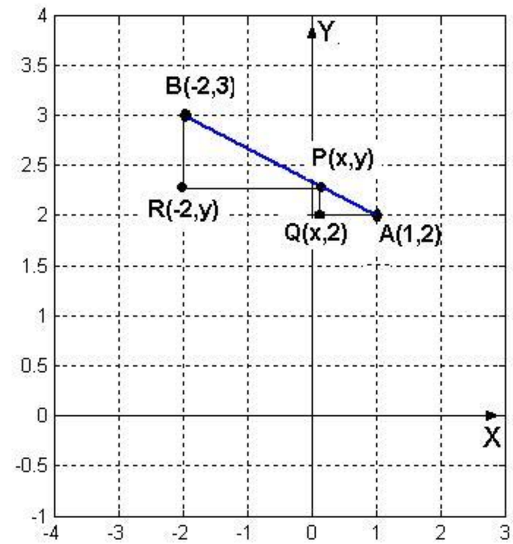
$$m = \frac{4}{3}$$

Aprendizajes: Localiza los puntos de división de un segmento.

Tema: Puntos especiales de un segmento.
Punto que divide a un segmento en una razón dada.
Punto medio

1.-
Encuentra las coordenadas del punto P que divide al segmento cuyos extremos son los puntos: $A(1,\ 2)$, $B(-2,3)$, en la razón

$$r = \frac{BP}{PA} = 2$$

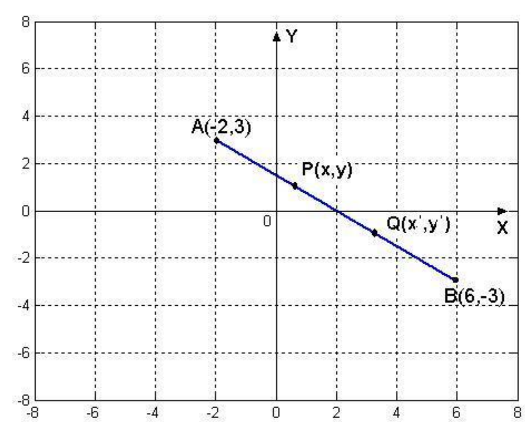


Solución:

$$P\left(0,\frac{7}{3}\right)$$

2.-

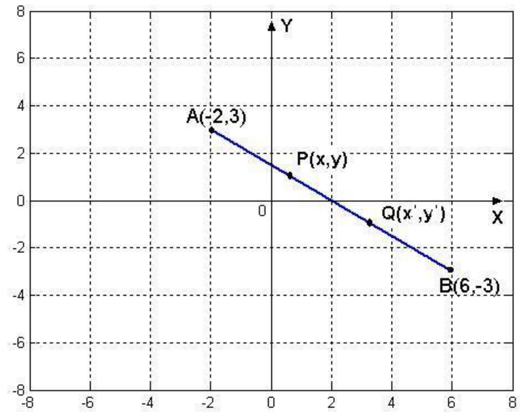
Un segmento cuyos extremos son las coordenadas de los puntos $A\ (-2,3)$ y $B\ (6,-3)$ se trisecta como muestra la figura anexa. Encuentra la abcisa del punto P.



a) $x_p = \frac{2}{3}$ ok
b) $x_p = \frac{3}{2}$
c) $x_p = \frac{10}{3}$
d) $x_p = \frac{1}{3}$

3.-

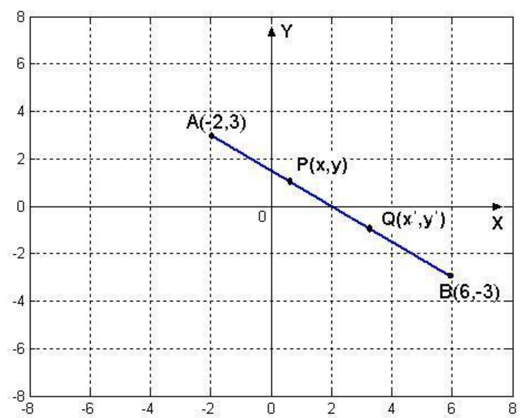
Un segmento cuyos extremos son las coordenadas de los puntos $A\,(-2{,}3)$ y $B\,(6{,}\text{-}3)$ se trisecta como muestra la figura anexa. Encuentra la abcisa del punto Q.



a) $x_q = \frac{2}{3}$
b) $x_q = \frac{3}{2}$
c) $x_q = \frac{10}{3}$ ok
d) $x_q = \frac{9}{3}$

4.-

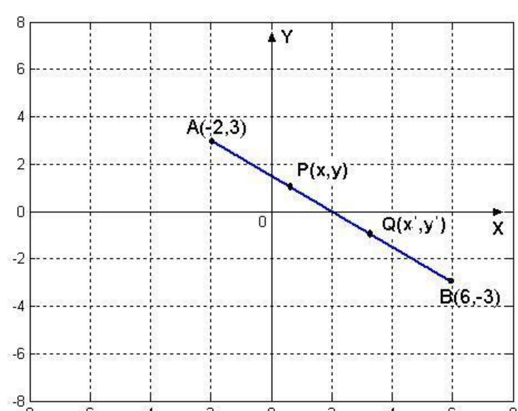
Un segmento cuyos extremos son las coordenadas de los puntos $A\,(-2{,}3)$ y $B\,(6{,}\text{-}3)$ se trisecta como muestra la figura anexa. Encuentra la ordenada del punto P.



a) $y_p = \frac{2}{3}$
b) $y_p = 1$ ok
c) $y_p = \frac{10}{3}$
d) $y_p = \frac{1}{3}$

5.-

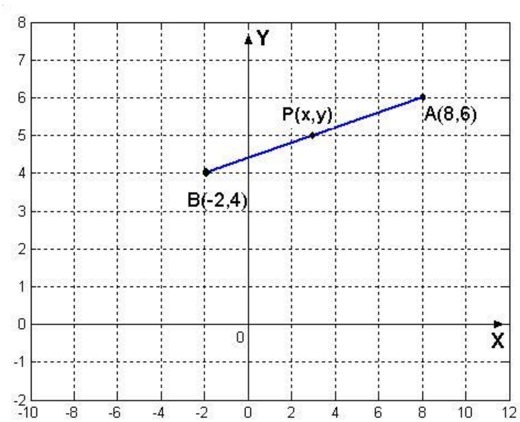
Un segmento cuyos extremos son las coordenadas de los puntos $A\,(-2{,}3)$ y $B\,(6{,}\text{-}3)$ se trisecta como muestra la figura anexa. Encuentra la ordenada del punto Q.



a) $y_q = \frac{2}{3}$
b) $y_q = \frac{3}{2}$
c) $y_q = -\frac{1}{3}$
d) $y_q = -1$ ok

6.-

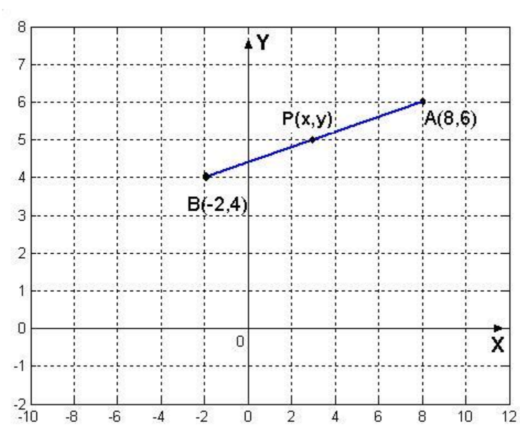
Un segmento cuyos extremos son las coordenadas de los puntos $A(8,6),\ B(-2,\ 4)$ se divide exactamente en dos partes iguales como muestra la figura anexa. Encuentra la abcisa del punto P.



a) $x_p = \frac{2}{3}$
b) $x_p = \frac{7}{2}$
c) $x_p = \frac{5}{2}$
d) $x_p = 3$ ok

7.-

Un segmento cuyos extremos son las coordenadas de los puntos $A(8,6),\ B(-2,\ 4)$ se divide exactamente en dos partes iguales como muestra la figura anexa. Encuentra la ordenada del punto P.



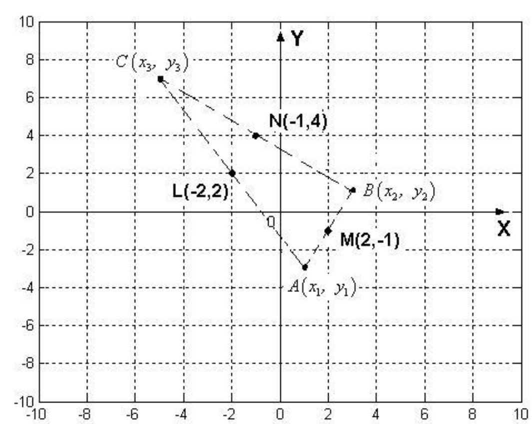
a) $y_p = 5$ ok
b) $y_p = \frac{9}{2}$
c) $x_p = \frac{11}{2}$
d) $x_p = \frac{28}{5}$

8.-

Los puntos medios de los lados de un triángulo son los puntos cuyas coordenadas son: $M(2,-1),\ \ N(-1,4)$ y $L(-2,\ 2)$.

Suponer que los vértices del triángulo están localizados en los puntos $A(x_1,\ y_1),\ B(x_2,\ y_2)$ y $C(x_3,\ y_3)$.

Encontrar la abcisa del vértice *A* del triángulo como se muestra en la figura anexa.



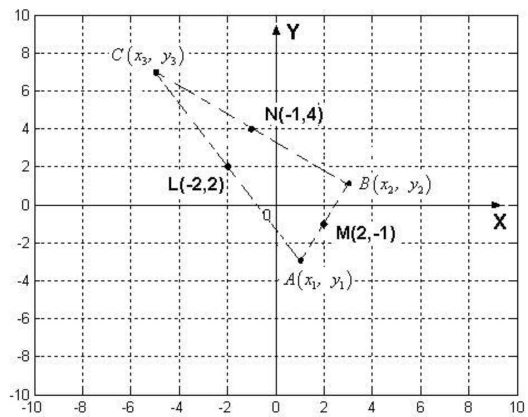
a) $x_1 = 1$ ok
b) $x_1 = 2$
c) $x_1 = \frac{1}{3}$
d) $x_1 = \frac{2}{3}$

9.-

Los puntos medios de los lados de un triángulo son los puntos cuyas coordenadas son: $M(2,-1)$, $N(-1,4)$ y $L(-2,\ 2)$.

Suponer que los vértices del triángulo están localizados en los puntos $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ y $C(x_3,\ y_3)$.

Encontrar la ordenada del vértice *A* del triángulo como se muestra en la figura anexa.



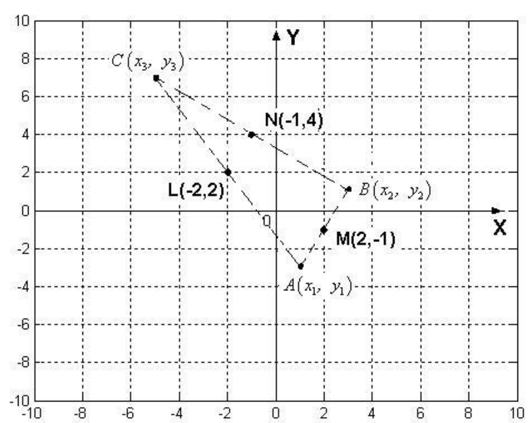
a) $y_1 = -\frac{2}{3}$
b) $y_q = 3$ ok
c) $y_q = \frac{8}{3}$
d) $y_q = -3$

10.-

Los puntos medios de los lados de un triángulo son los puntos cuyas coordenadas son: $M(2,-1)$, $N(-1,4)$ y $L(-2,\ 2)$.

Suponer que los vértices del triángulo están localizados en los puntos $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ y $C(x_3,\ y_3)$.

Encontrar la abcisa del vértice *B* del triángulo como se muestra en la figura anexa.



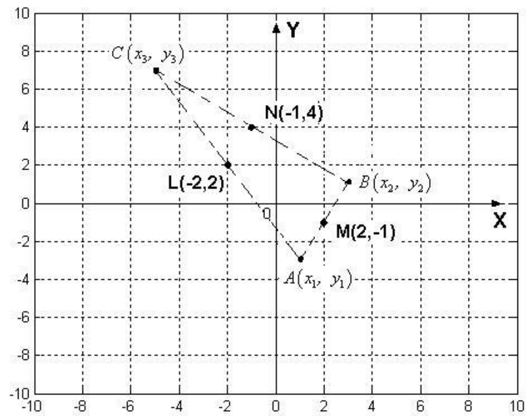
a) $x_2 = \frac{5}{2}$
b) $x_2 = 3$ ok
c) $x_1 = 2$
d) $x_1 = \frac{2}{3}$

11.-

Los puntos medios de los lados de un triángulo son los puntos cuyas coordenadas son: $M(2,-1)$, $N(-1,4)$ y $L(-2,\ 2)$.

Suponer que los vértices del triángulo están localizados en los puntos $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ y $C(x_3,\ y_3)$.

Encontrar la ordenada del vértice *B* del triángulo como se muestra en la figura anexa.



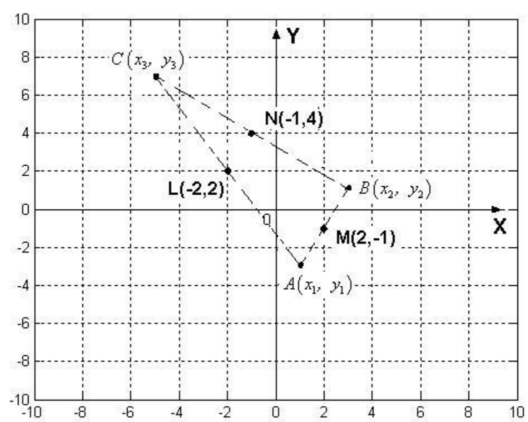
a) $y_2 = -\frac{2}{3}$
b) $y_2 = 3$
c) $y_2 = 1$ ok
d) $y_2 = -3$

12.-

Los puntos medios de los lados de un triángulo son los puntos cuyas coordenadas son: $M(2,-1)$, $N(-1,4)$ y $L(-2,\ 2)$.

Suponer que los vértices del triángulo están localizados en los puntos $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ y $C(x_3,\ y_3)$.

Encontrar la abcisa del vértice *C* del triángulo como se muestra en la figura anexa.



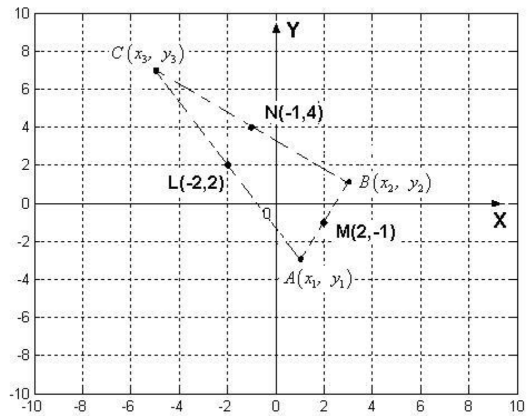
a) $x_3 = -\frac{9}{2}$
b) $x_3 = 7$
c) $x_3 = -5$ ok
d) $x_3 = -\frac{16}{3}$

13.-

Los puntos medios de los lados de un triángulo son los puntos cuyas coordenadas son: $M(2,-1)$, $N(-1,4)$ y $L(-2,\ 2)$.

Suponer que los vértices del triángulo están localizados en los puntos $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ y $C(x_3,\ y_3)$.

Encontrar la ordenada del vértice *C* del triángulo como se muestra en la figura anexa.



a) $y_3 = \frac{20}{3}$
b) $y_3 = -5$
c) $y_3 = 7$ ok
d) $y_3 = -7$

14. Encontrar las coordenadas de los puntos medios de los lados del triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1,3)$, $B(-2,-4)$ y $C(1,-2)$.

15. El extremo de un segmento AB es el punto $A(1,-9)$ y su punto medio es el punto $M(-1,-2)$. Hallar las coordenadas del otro extremo (punto B).

16. Un cuadrilátero tiene vértices en los puntos $A(-3,7)$, $B(6,6)$, $C(-4,-5)$ y $D(4,-6)$. Hallar los puntos medios de sus diagonales.

17. Hallar el punto medio y los puntos de trisección del segmento cuyos extremos se localizan en los puntos A(2,-2) y B(10,15).

Aprendizajes: Obtiene la expresión algebraica y la gráfica de un lugar geométrico.

Tema: Lugares geométricos en el plano cartesiano.

1. Una recta pasa por los puntos $M_1(-12,\ -13)$ y $M_2(-1,\ -5)$. Hallar en esta recta un punto cuya abscisa es igual a 3.

2. Una recta pasa por los puntos $M(2,-3)$ y $\mathrm{N}(-6,5)$. Hallar en esta recta el punto cuya ordenada es igual a -5.

3. Una recta pasa por los puntos $A(7,\ -3)$, $B(2,\ -6)$. Hallar el punto de intersección de esta recta con el eje de abscisas.

4. Una recta pasa por los puntos $A(5,\ 2)$, $B(-4,\ -7)$. Hallar el punto de intersección de esta recta con el eje de las ordenadas.

5. Los puntos $A(-3,-2)$, $B(7,4)$ y $C(1,14)$ son los vértices de un triángulo. Determinar a qué tipo de triángulo corresponde (rectángulo, equilátero etc.). (Isósceles)

6. Determinar si los puntos $P(2,6)$, $Q(0,2)$ y $R(-3,\text{-}4)$ son colineales. (Son colineales)

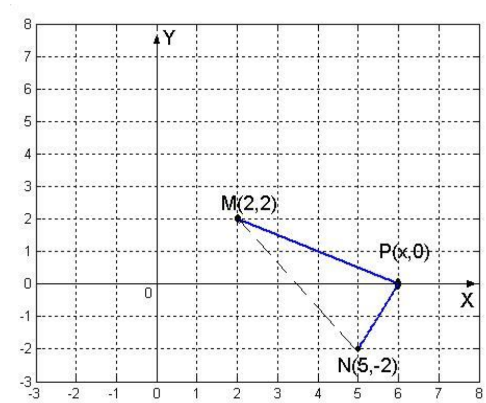
7. Área de un cuadrado a partir de conocer los extremos de una de sus diagonales. Los vértices opuestos de un cuadrado son los puntos $A\ (3,\ 5)$ y $B\ (1,\text{-}3)$, calcular su área. (34 u^2)

8.

Dados dos puntos $M(2,2)$ y $N(5,-2)$. Hallar en el eje de las abscisas, un punto P de modo que el ángulo MPN sea recto.

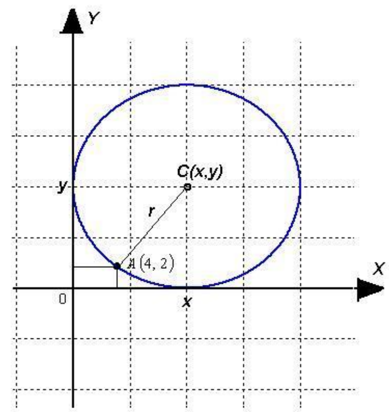
Solución:

$$P_1\,(6,0)\ \text{y}\ P_2\,(1,0)$$



9.

Se ha trazado una circunferencia tangente a los ejes coordenados, La circunferencia pasa por el punto $A(4,2)$ Determinar su centro C y su radio r.



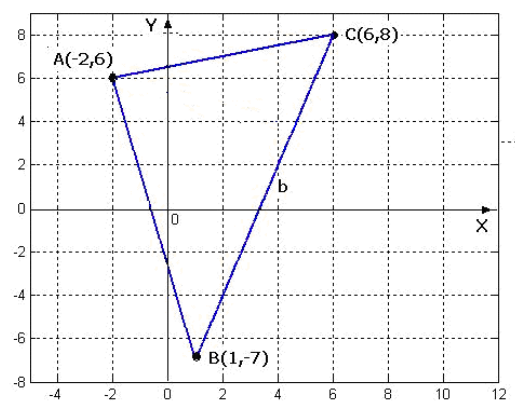
Solución:
Existen dos circunferencias que satisfacen el problema:

Una circunferencia tiene centro en $C(10,\ 10)$ y radio $r=10$

Y la otra circunferencia, es la que tiene centro en $C(2,2)$ y radio $r=2$.

10.

Hallar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos $A(-2,6)$, $B(1,-7)$ y $C(6,8)$.



Solución:

A= 55 u^2

Aprendizajes: Describe a la recta como un lugar geométrico, identificando los elementos que la definen.
Entiende a la pendiente de una recta, como un invariante.
Obtiene la ecuación de una recta, dadas dos condiciones.

Tema: Ecuación de la recta dados:

- Dos puntos.
- Un punto y la pendiente.
- La pendiente y la ordenada al origen.
- Un punto y el ángulo de inclinación.

1.-

Determinar cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la recta cuya ecuación es $5x - y - 6 = 0$:

(2,4)	(3,9)	(1,-1)	(-2, -16)	(5,19)	(-6, -36)	(4,2)	(-1,4)	(9,12)	(7,8)
si	si	si	si	si	si	no	no	no	No

2.-

Encuentra una fórmula que exprese la condición de que un punto P(x,y) está en la mediatriz del segmento A(1,7), B(-3,2).

a) $5x - y - 6 = 0$
b) $8x + 10y - 37 = 0$ ok
c) $5x + y - 6 = 0$
d) $8x + 10y + 37 = 0$

3.-

Encuentra una fórmula que exprese la condición de que un punto P(x,y) está en la mediatriz del segmento A(-4,-3), B(6,1).

a) $5x - y - 6 = 0$
b) $8x + 10y - 37 = 0$
c) $5x + 2y - 3 = 0$ ok
d) $8x + 10y + 37 = 0$

4.-

Encuentra una fórmula que exprese la condición de que un punto P(x,y) está en la mediatriz del segmento A(-4,2), B(5,-4).

a) $5x - y - 6 = 0$
b) $8x + 10y - 37 = 0$

c) $5x + y - 6 = 0$
d) $6x - 4y - 7 = 0$ ok

5.-
Encuentra una fórmula que exprese la condición de que un punto P(x,y) está en la mediatriz del segmento A(2,3), B(6,5).

a) $5x - y - 6 = 0$
b) $8x + 10y - 37 = 0$
c) $2x + y - 12 = 0$ ok
d) $6x - 4y - 7 = 0$

6.- ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por los puntos C(-3,6) y D(3,-2)?

a) $4x + 3y - 6 = 0$ ok
b) $3x - 4y + 6 = 0$
c) $3x - 4y + 6 = 0$
d) $2x + y - 6 = 0$

7.- ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por el punto A(-3,6) y tiene pendiente igual a 5?

a) $4x + 3y - 6 = 0$
b) $5x - y + 21 = 0$ ok
c) $3x - 4y + 6 = 0$
d) $2x + y - 6 = 0$

8.- ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por el punto C(2,3) y cuya pendiente es 5?

a) $4x + 3y - 6 = 0$
b) $3x - 4y + 6 = 0$
c) $5x - y - 7 = 0$ ok
d) $2x + y - 6 = 0$

9.- ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por el punto B(-3,-2) y cuya pendiente es $-\frac{2}{3}$?

a) $2x + 3y + 12 = 0$ ok
b) $3x - 4y + 6 = 0$
c) $5x - y - 7 = 0$
d) $2x + y - 6 = 0$

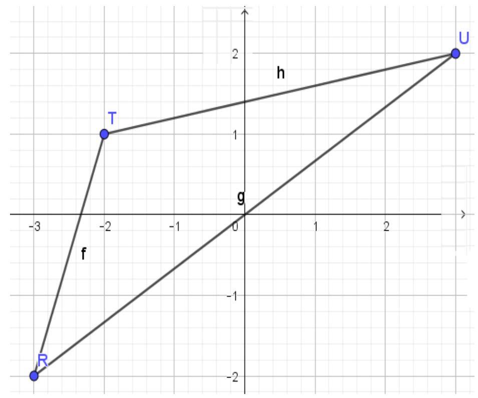
10.- ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por el punto B(0,-3) y cuyo ángulo de inclinación es de 30º?

a) $x - \sqrt{3}y - 3\sqrt{3} = 0$ ok
b) $3x - 4y + 6 = 0$
c) $5x - y - 7 = 0$
d) $2x + y - 6 = 0$

Aprendizajes: Determina el ángulo que se forma cuando dos rectas se cortan, en términos de sus pendientes.

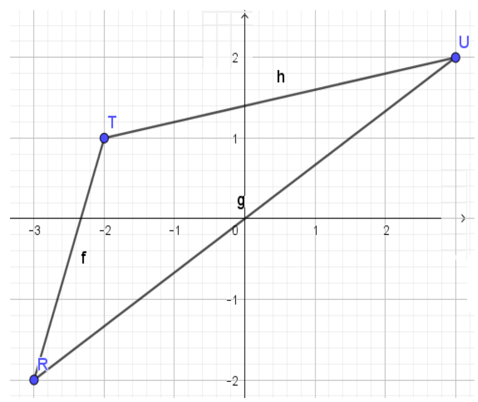
Tema: Ángulo entre dos rectas.

1.-
Obtén el ángulo interior R del triángulo definido por los puntos R(-3,-2), T(-2,1) y U(3,2).



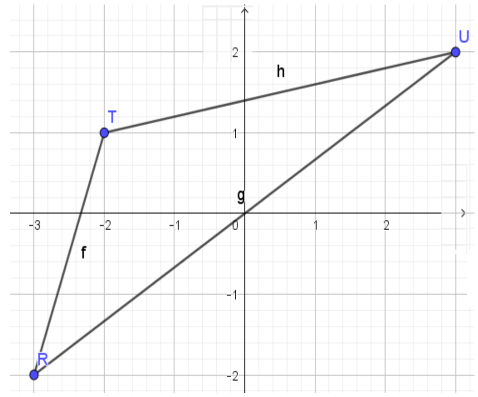
a) 22.38^o
b) 17.37^o
c) 27.27^o
d) 37.87^o ok

2.-
Obtén el ángulo interior T del triángulo definido por los puntos R(-3,-2), T(-2,1) y U(3,2).



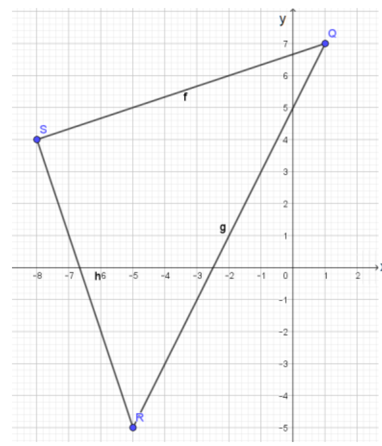
a) 119.74^o ok
b) 117.34^o
c) 127.21^o
d) 128.87^o

3.-
Obtén el ángulo interior U del triángulo definido por los puntos R(-3,-2), T(-2,1) y U(3,2).



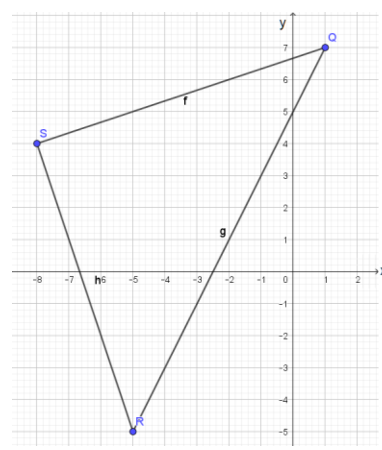
a) 22.38^o ok
b) 17.37^o
c) 27.27^o
d) 37.87^o

4.-
Obtén el ángulo interior en el vértice S del triángulo definido por los puntos Q(1,7), R(-5,-5) y S(-8,4).



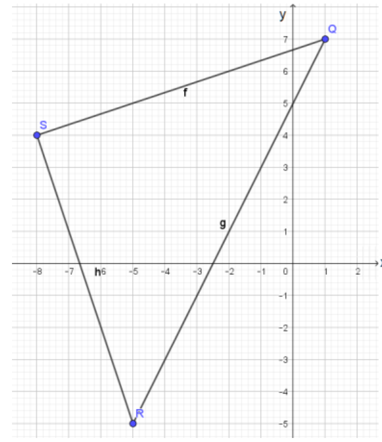
a) 45^o
b) 34^o
c) 90^o ok
d) 128^o

5.-
Obtén el ángulo interior en el vértice Q del triángulo definido por los puntos Q(1,7), R(-5,-5) y S(-8,4).



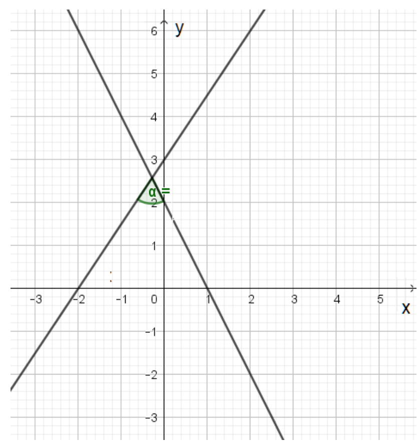
a) 45^o ok
b) 34^o
c) 90^o
d) 128^o

6.-
Obtén el ángulo interior en el vértice R del triángulo definido por los puntos Q(1,7), R(-5,-5) y S(-8,4).



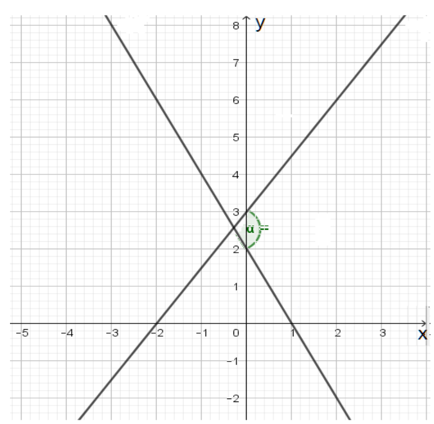
a) 50^o
b) 34^o
c) 90^o
d) 45^o ok

7.-
Obtén la medida del ángulo α que forman las rectas $3x-2y+6=0$ y $2x+y-2=0$, como se ilustra en la figura.



a) 55^o
b) 34^o
c) 60.26^o ok
d) 119.74^o

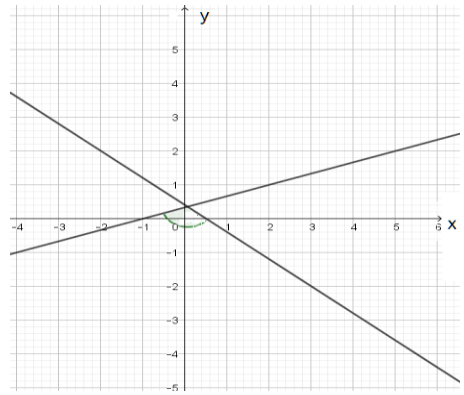
8.-
Obtén la medida del ángulo α que forman las rectas $3x-2y+6=0$ y $2x+y-2=0$, como se ilustra en la figura.



a) 55^o
b) 34^o
c) 60.26^o
d) 119.74^o ok

9.-

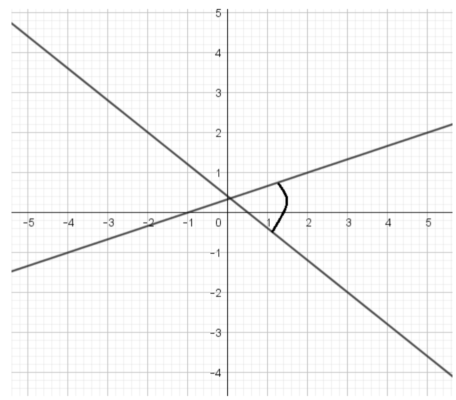
Obtén la medida del ángulo que forman las rectas $x-3y+1=0$ y $4x+5y-2=0$, y que se señala en la figura.



a) 127^o
b) 112.23^o
c) 132.26^o
d) 122.21^o ok

10.-

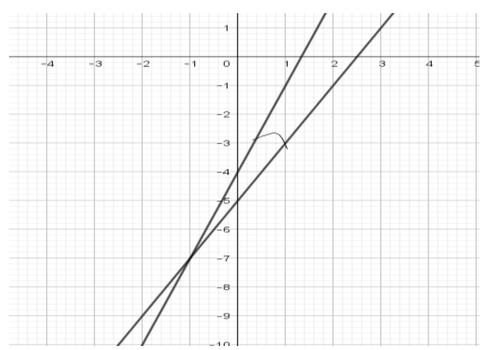
Obtén la medida del ángulo señalado en la figura que forman las rectas $x-3y+1=0$ y $4x+5y-2=0$.



a) 127^o
b) 71.23^o
c) 57.09^o ok
d) 62.21^o

11.-

Obtén la medida del ángulo señalado en la figura que forman las rectas:
$2x-y-5=0$ y $-3x+y+4=0$.



a) 8.13^o ok
b) 7.23^o
c) 7.09^o
d) 6.21^o

Aprendizajes: Determina cuándo dos rectas son paralelas, perpendiculares o ninguna de las dos, a partir de sus ecuaciones.
Dada la ecuación de una recta, el alumno es capaz de encontrar las ecuaciones de rectas paralelas y/o perpendiculares a ella.

Tema: Condiciones de paralelismo y perpendicularidad.

1.-
Determina la ecuación general de una recta que pasa por el punto A(-8,4) y es paralela a la recta $y - 2x + 5 = 0$

a) $4x + 3y - 6 = 0$
b) $2x - y + 20 = 0$.
c) $x + 2y = 0$
d) $4x + 3y - 6 = 0$

2.-
Determina la ecuación de la recta que es paralela al segmento que pasa por los puntos A(-4,6) y B(1,-3) y que pasa por el punto S(1,6).

a) $4x + 3y - 38 = 0$
b) $2x - y + 20 = 0$
c) $9x + 5y - 39 = 0$.
d) $4x + 3y - 6 = 0$

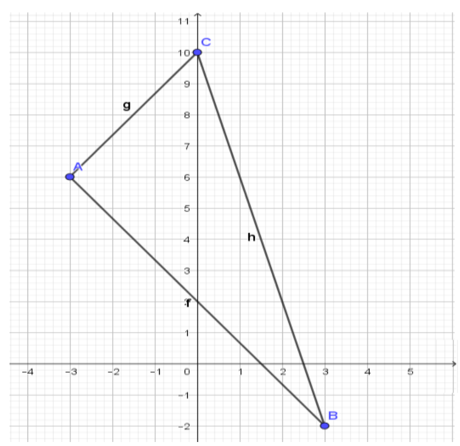
3.-
Determina la ecuación de la recta que es perpendicular al segmento que pasa por los puntos A(-4,6) y B(1,-3) y que pasa por el punto S(1,6).

a) $5x - 9y + 49 = 0$.
b) $2x - y + 20 = 0$
c) $9x + 5y - 39 = 0$
d) $4x + 3y - 6 = 0$

4.-

Un arquitecto está diseñando un jardín en un terreno triangular como el mostrado en la imagen derecha. En su proyecto necesita calcular la ecuación de la altura del lado AB.

a) $\boldsymbol{3x - 4y + 40 = 0}$
b) $x - 4y + 27 = 0$
c) $3x + 4y - 1 = 0$
d) $x - 4y + 37 = 0$

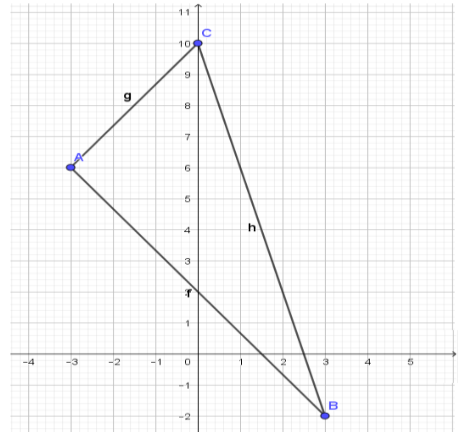


El **ortocentro** es donde concurren las alturas

5.-

Un arquitecto está diseñando un jardín en un terreno triangular como el mostrado en la imagen derecha. En su proyecto necesita calcular la ecuación de la altura del lado BC.

a) $\boldsymbol{3x - 4y + 40 = 0}$
b) $\boldsymbol{x - 4y + 27 = 0}$
c) $3x + 4y - 1 = 0$
d) $x - 4y + 37 = 0$

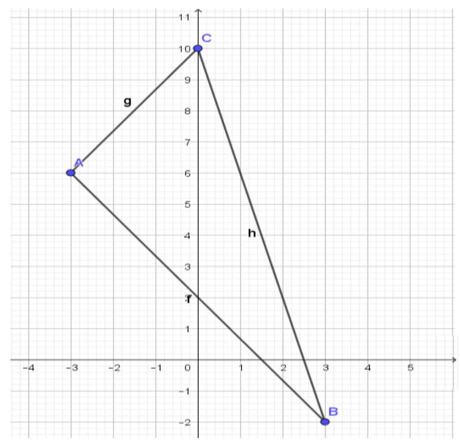


El **ortocentro** es donde concurren las alturas

6.-

Un arquitecto está diseñando un jardín en un terreno triangular como el mostrado en la imagen derecha. En su proyecto necesita calcular la ecuación de la altura del lado AC.

a) $\boldsymbol{3x - 4y + 40 = 0}$
b) $x - 4y + 27 = 0$
c) $\boldsymbol{3x + 4y - 1 = 0}$
d) $x - 4y + 37 = 0$



El **ortocentro** es donde concurren las alturas

7.- ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por el punto P(-6,2) y que es paralela a la recta $y = \frac{4}{3}x - 1$?

a) $4x + 3y - 6 = 0$
b) $4x + 3y + 30 = 0$
c) $4x - 3y + 30 = 0$ ok
d) $2x + y - 6 = 0$

8.- ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por el punto P(-5,4) y es perpendicular a la recta $y = -\frac{5}{3}x + 2$?

a) $4x + 3y - 6 = 0$
b) $3x - 4y + 6 = 0$
c) $5x - y - 7 = 0$
d) $3x - 5y + 35 = 0$ ok

9.- ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por el punto P(-4,5) y es paralela a la recta $3x - y - 5$?

a) $4x + 3y - 6 = 0$
b) $3x - y + 17 = 0$ ok
c) $5x - y - 7 = 0$
d) $3x - 5y + 35 = 0$

10.- ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por el punto P(3,-2) y es paralela a la recta $2x + 5y + 20$?

a) $2x + 5y + 4 = 0$ ok
b) $3x - 4y + 6 = 0$
c) $5x - y - 7 = 0$
d) $3x - 5y + 5 = 0$

11.- ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por el punto P(4,-2) y es perpendicular a la recta $5x - y - 3 = 0$?

a) $4x + 3y - 6 = 0$
b) $3x - y + 17 = 0$
c) $5x - y - 7 = 0$
d) $x + 5y + 6 = 0$ ok

12.- ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por el punto P(-4,-6) y es perpendicular a la recta $y = -\frac{1}{2}x + 8$?

a) $4x + 3y - 6 = 0$
b) $2x - y + 2 = 0$ ok
c) $5x - y - 7 = 0$
d) $x + 5y + 6 = 0$

13.- ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por el punto P(-3,5) y es perpendicular a la recta $y = 3x - 4$?

a) $4x + 3y - 6 = 0$
b) $2x - y + 2 = 0$
c) $x + 3y - 12 = 0$ ok
d) $x + 5y + 6 = 0$

14.- ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por el punto Q(5,4) y es perpendicular a la recta $y = \frac{2}{5}x - 10$?

a) $4x + 3y - 6 = 0$
b) $2x - y + 2 = 0$
c) $5x + 2y - 33 = 0$ ok
d) $x + 5y + 6 = 0$

Aprendizajes: Identifica y transita en las diferentes formas de la ecuación de la recta (ordinaria o canónica, general y simétrica).

Tema: Ecuación de la recta en su forma ordinaria o canónica, general y simétrica.

1.- ¿Cuál es la ecuación de la recta en la forma simétrica que pasa por el punto P(4,0) y Q(0,5) ?

a) $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=1$ ok
b) $y=-\frac{5}{4}x+5$
c) $5x+4y-2=0$
d) $\frac{x}{5}+\frac{y}{4}=1$

2.- ¿Cuál es la ecuación de la recta en la forma general que pasa por el punto P(4,0) y Q(0,5) ?

a) $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=1$
b) $y=-\frac{5}{4}x+5$
c) $5x+4y-2=0$ ok
d) $5x+4y-20=0$

3.- ¿Cuál es la ecuación de la recta en la forma general equivalente a $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=1$?

a) $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=1$
b) $y=-\frac{5}{4}x+5$
c) $5x+4y-2=0$
d) $5x+4y-20=0$ ok

4.- ¿Cuál es la ecuación de la recta $3x+4y-8=0$ expresada en su forma simétrica?

a) $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$
b) $\frac{x}{3}+\frac{y}{-4}=1$
c) $\frac{x}{\frac{8}{3}}+\frac{y}{2}=1$ ok
d) $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$

5.- ¿Cuál es la ecuación de la recta $3x+4y-8=0$ expresada en su forma ordinaria?

a) $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=1$
b) $y=-\frac{3}{4}x+2$ ok
c) $y=\frac{3}{4}x-2$
d) $\frac{x}{5}+\frac{y}{4}=1$

6.- ¿Cuál es la ecuación de la recta en la forma simétrica que pasa por el punto P(-2,0) y Q(0,3) ?

a) $-\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ ok
b) $y=-\frac{5}{4}x+5$
c) $5x+4y-2=0$
d) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$

7.- ¿Cuál es la ecuación de la recta en la forma general equivalente a $-\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$?

a) $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=1$
b) $y=-\frac{5}{4}x+5$
c) $3x+2y-6=0$
d) $-3x+2y-6=0$ ok

8.- ¿Cuál es la ecuación de la recta en la forma general equivalente a $\frac{x}{2}-y=1$?

a) $\frac{x}{2}-\frac{y}{1}=1$
b) $y=-\frac{1}{2}x+1$
c) $x-2y-2=0$ ok
d) $2x-2y+2=0$

9.- ¿Cuál es la ecuación de la recta $x+2y-6=0$ expresada en su forma simétrica?

a) $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$
b) $\frac{x}{3}+\frac{y}{-4}=1$
c) $\frac{x}{6}+\frac{y}{3}=1$ ok
d) $\frac{x}{6}+\frac{y}{-3}=1$

10.- ¿Cuál es la ecuación de la recta $2x+3y+6=0$ expresada en su forma simétrica?

a) $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$
b) $-\frac{x}{3}-\frac{y}{2}=1$ ok
c) $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$
d) $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$

11.- ¿Cuál es la pendiente de la recta en la forma simétrica $-\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$?

a) $\frac{3}{2}$ ok
b) $-\frac{1}{2}$
c) $\frac{2}{3}$
d) $-\frac{3}{2}$

12.- ¿Cuál es la pendiente de la recta en la forma simétrica $\frac{x}{4}-\frac{y}{2}=1$?

a) $\frac{1}{2}$ ok
b) $-\frac{1}{2}$
c) $\frac{1}{8}$
d) 8

13.- ¿Cuál es la pendiente de la recta en la forma simétrica $-\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=1$?

a) $-\frac{4}{5}$
b) $-\frac{1}{2}$
c) $\frac{5}{4}$ ok
d) $-\frac{5}{4}$

Aprendizajes: resuelve ecuaciones de corte euclidiano usando geometría analítica.

Tema: Intersección entre dos rectas.
Distancia de una recta a un punto.
Ecuaciones de las rectas notables del triángulo (mediatrices, medianas y alturas).

1.- Encuentra la distancia de la recta $2x + y - 3 = 0$ al punto Q(-1,2)

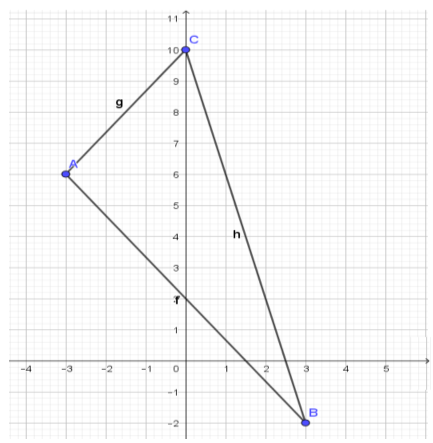
a) $\frac{4}{5}\, u$
b) $\frac{1}{5}\, u$
c) $\frac{5}{4}\, u$
d) $\frac{3}{\sqrt{5}}\, u$ ok

2.- Encuentra la distancia de la recta $2x + 3y + 4 = 0$ al punto Q(5,-3)

a) $\frac{4}{5}\, u$
b) $\frac{1}{5}\, u$
c) $\frac{5}{13}\, u$
d) $\frac{5}{\sqrt{13}}\, u$ ok

3.-

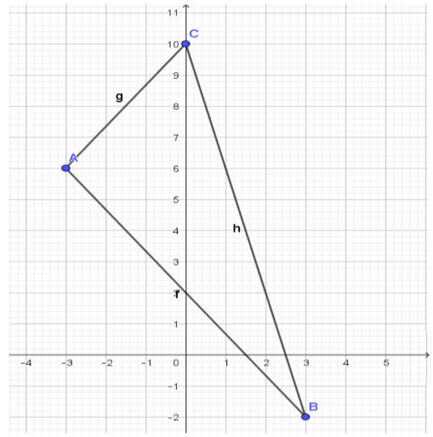
Se tiene un terreno de forma triangular cuyos vértices se ubican en los puntos A(-3,6), B(3,-2) y C(0,10). Un arquitecto necesita la ecuación de la recta que pase por el punto C y sea perpendicular al lado AB, observe la imagen de la derecha.



a) $5x - y - 6 = 0$
b) $x - 4y + 27 = 0$
c) $3x - 4y + 40 = 0$ ok
d) $3x + 4y - 1 = 0$

4.-

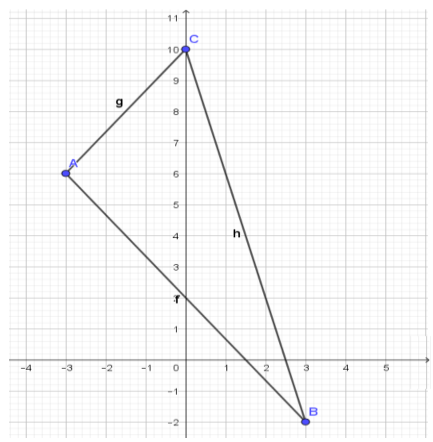
Se tiene un terreno de forma triangular cuyos vértices se ubican en los puntos A(-3,6), B(3,-2) y C(0,10). Un arquitecto necesita la ecuación de la recta que pase por el punto A y sea perpendicular al lado BC, observe la imagen de la derecha.



a) $5x - y - 6 = 0$
b) $x - 4y + 27 = 0$ ok
c) $3x - 4y + 40 = 0$
d) $3x + 4y - 1 = 0$

5.-

Se tiene un terreno de forma triangular cuyos vértices se ubican en los puntos A(-3,6), B(3,-2) y C(0,10). Un arquitecto necesita la ecuación de la recta que pase por el punto B y sea perpendicular al lado AC, observe la imagen de la derecha.



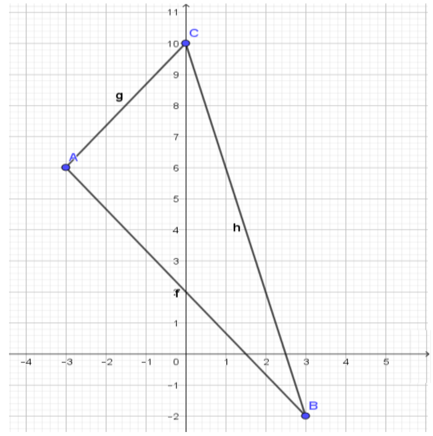
a) $5x - y - 6 = 0$
b) $x - 4y + 27 = 0$
c) $3x - 4y + 40 = 0$
d) $3x + 4y - 1 = 0$ ok

6.-

Un arquitecto está diseñando un jardín en un terreno triangular como el mostrado en la imagen derecha. En su mente determinó que una fuente estuviera ubicada en el ortocentro. Para ello calculó las ecuaciones de las alturas de cada lado del predio:

$$\mathbf{3x - 4y + 40 = 0}$$
$$x - 4y + 27 = 0$$
$$3x + 4y - 1 = 0$$

Te pide que determines las coordenadas correctas.



El **ortocentro** es donde concurren las alturas

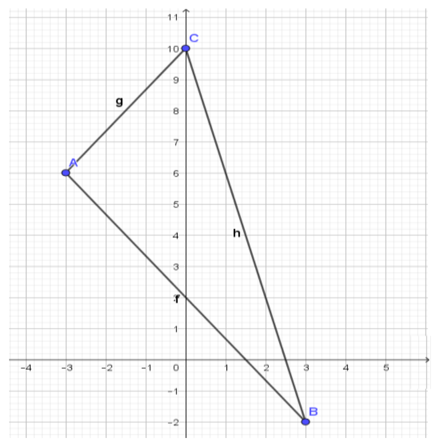
a) $\left(\frac{13}{2}, -\frac{41}{8}\right)$
b) $\left(-\frac{13}{2}, \frac{41}{8}\right)$ ok
c) $\left(-\frac{13}{2}, -\frac{41}{8}\right)$
d) $\left(\frac{13}{2}, \frac{41}{8}\right)$

7.-

Un arquitecto está diseñando un jardín en un terreno triangular como el mostrado en la imagen derecha. En su mente determinó que una fuente estuviera ubicada en el baricentro. Para ello calculó las ecuaciones de las medianas de cada lado del predio:

$$\mathbf{4x + 9y - 42 = 0}$$
$$x = 0$$
$$4x + 9y - 42 = 0$$

Te pide que determines las coordenadas correctas.

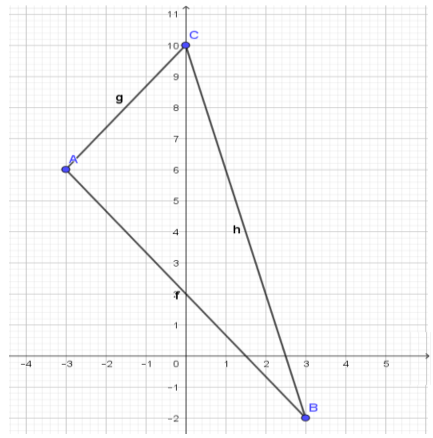


El **baricentro** es donde concurren las medianas. La **mediana** es la recta que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.

a) $\left(0, -\frac{14}{3}\right)$
b) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{14}{3}\right)$
c) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{14}{3}\right)$
d) $\left(0, \frac{14}{3}\right)$ ok

8.-

Se tiene un terreno de forma triangular cuyos vértices se ubican en los puntos A(-3,6), B(3,-2) y C(0,10). Un arquitecto necesita la ecuación de la recta (mediana) que pase por el vértice C y el punto medio del lado AB, observe la imagen de la derecha.



a) $5x - y - 6 = 0$

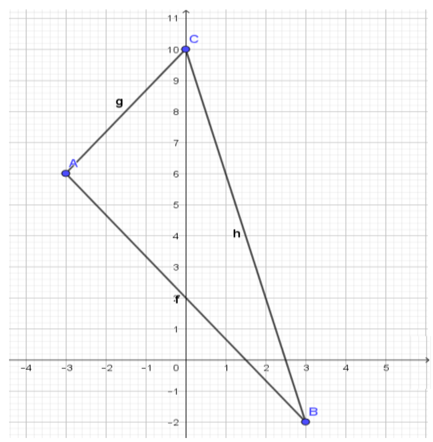
b) $x - 4y + 27 = 0$

c) $3x - 4y + 40 = 0$

d) $x = 0$ ok

9.-

Se tiene un terreno de forma triangular cuyos vértices se ubican en los puntos A(-3,6), B(3,-2) y C(0,10). Un arquitecto necesita la ecuación de la recta (mediana) que pase por el vértice A y el punto medio del lado BC, observe la imagen de la derecha.



a) $5x - y - 6 = 0$

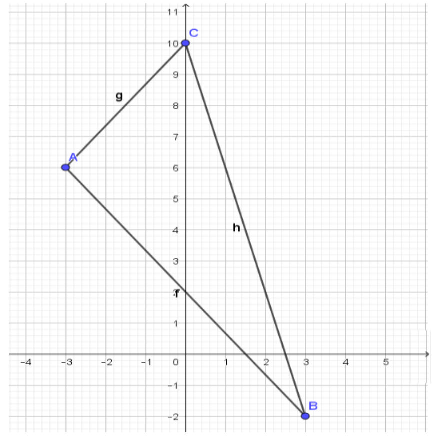
b) $x - 4y + 27 = 0$

c) $3x - 4y + 40 = 0$

d) $4x + 9y - 42 = 0$ ok

10.-

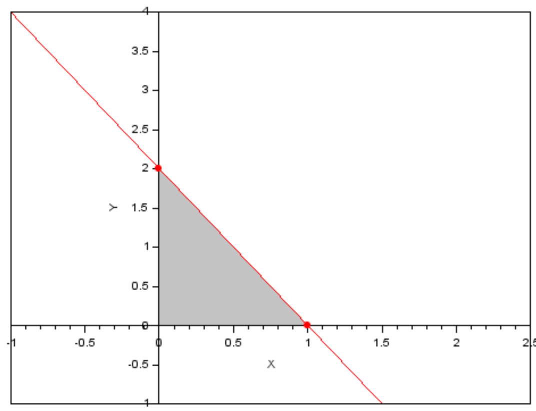
Se tiene un terreno de forma triangular cuyos vértices se ubican en los puntos A(-3,6), B(3,-2) y C(0,10). Un arquitecto necesita la ecuación de la recta (mediana) que pase por el vértice B y el punto medio del lado AC, observe la imagen de la derecha.



a) $5x - y - 6 = 0$
b) $20x + 9y - 42 = 0$ ok
c) $3x - 4y + 40 = 0$
d) $x = 0$

11.-

Un ingeniero ha modelado el perímetro de un terreno triangular como se muestra en la figura. Calcula el área del predio entre los ejes coordenados y la barda que tiene como ecuación: $\boldsymbol{y = -2x + 2}$. La unidades son km.

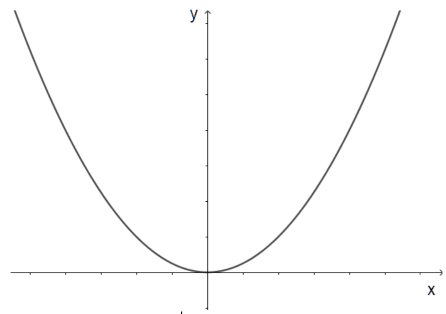


a) $2\ km^2$
b) $3\ km^2$
c) $1.5\ km^2$
d) $1\ km^2$ ok

Aprendizajes: Identifica los elementos que definen la parábola.
Reconoce la simetría de esta curva.
Obtiene por inducción la definición de parábola como lugar geométrico.

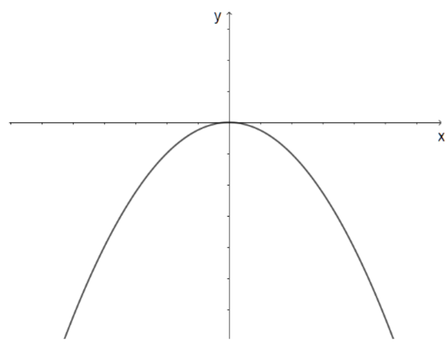
Tema: La parábola como lugar geométrico.
Elementos que la definen: foco, directriz, eje de simetría, vértice y lado recto.

1.-
De acuerdo a la imagen de la derecha, señala la ecuación ordinaria que la representa.



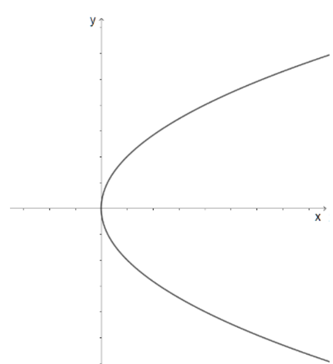
a) $y^2 = 4px$ b) $y^2 = -4px$ c) $x^2 = 4py$ √ d) $x^2 = -4py$

2.-
De acuerdo a la imagen de la derecha, señala la ecuación ordinaria que la representa.



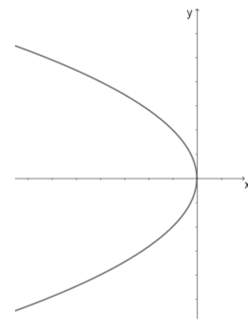
a) $y^2 = 4px$ b) $y^2 = -4px$ c) $x^2 = 4py$ d) $x^2 = -4py$ √

3.-
De acuerdo a la imagen de la derecha, señala la ecuación ordinaria que la representa.



a) $y^2 = 4px$ √ b) $y^2 = -4px$ c) $x^2 = 4py$ d) $x^2 = -4py$

4.-
De acuerdo a la imagen de la derecha, señala la ecuación ordinaria que la representa.

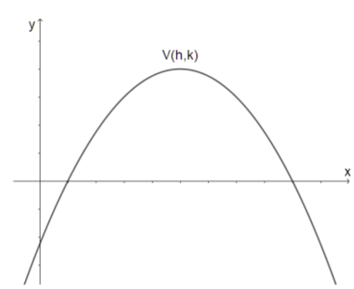


a) $y^2 = 4px$ b) $y^2 = -4px$ √ c) $x^2 = 4py$ d) $x^2 = -4py$

5.-
Elige cuál es la definición de una parábola.

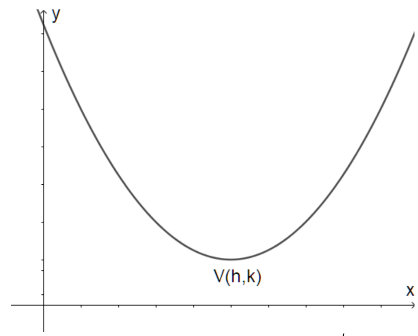
e) Es el lugar geométrico de todos los puntos en el plano, que equidistan de un punto fijo (foco) y de una recta fija (directriz). ok
f) Es el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan una distancia r (el radio) de un punto fijo C (el centro).
g) Es el lugar geométrico de los puntos en un plano, cuya suma de distancias hacia dos puntos fijos (los focos) en el plano es una constante positiva.
h) Es el lugar geométrico de cualquier par de puntos en el plano que tienen la misma pendiente.

6.-
De acuerdo a la imagen de la derecha, señala la ecuación ordinaria que la representa.



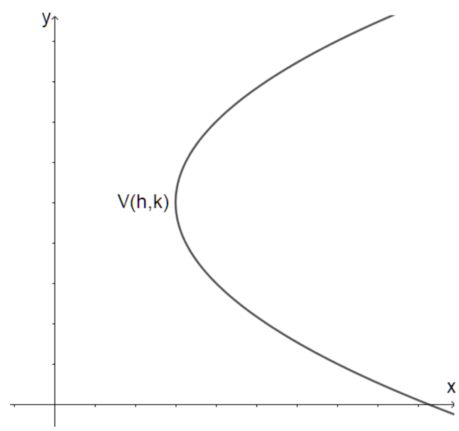
a) $(y-k)^2 = 4p(x-h)$
b) $(y-k)^2 = -4p(x-h)$
c) $(x-h)^2 = 4p(y-k)$
d) $(x-h)^2 = -4p(y-k)$ √

7.-
De acuerdo a la imagen de la derecha, señala la ecuación ordinaria que la representa.



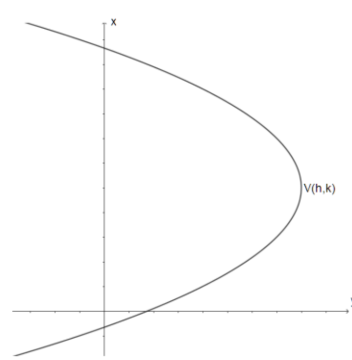
a) $(y-k)^2 = 4p(x-h)$
b) $(y-k)^2 = -4p(x-h)$
c) $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ √
d) $(x-h)^2 = -4p(y-k)$

8.-
De acuerdo a la imagen de la derecha, señala la ecuación ordinaria que la representa.



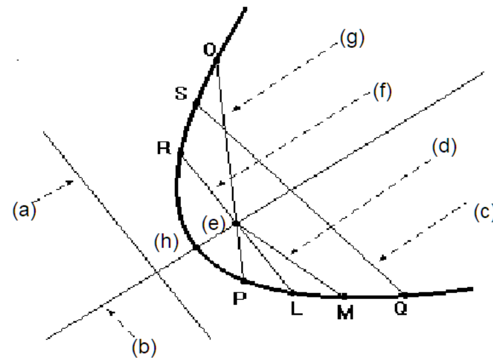
a) $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ ok
b) $(y-k)^2 = -4p(x-h)$
c) $(x-h)^2 = 4p(y-k)$
d) $(x-h)^2 = -4p(y-k)$

9.-
De acuerdo a la imagen de la derecha, señala la ecuación ordinaria que la representa.



a) $(y-k)^2 = 4p(x-h)$
b) $(y-k)^2 = -4p(x-h)$
c) $(x-h)^2 = 4p(y-k)$
d) $(x-h)^2 = -4p(y-k)$

10.-
Señala a qué elemento de la parábola pertenece cada inciso de la figura anexa.
1). Directriz ____
2). Eje focal o de simetría____
3). Recta secante____
4). Cuerda focal____
5). Foco____
6) Lado recto____
7) Radio vector____
8). Vértice____
9) ortocentro____



11.-
El lado recto de la parábola $x^2 = 2py$ es:
a). 4p
b). p
c) 2p ok
d). p/2

12.-
El punto de recepción de una antena parabólica de televisión se localiza en el foco, el cual se encuentra a un metro del vértice. Si el vértice se localiza en el origen del sistema de referencia y abre a la derecha, la ecuación que lo representa es:

a) $y^2 - 4x = 0$ ok b) $y^2 + 4x = 0$ c) $y^2 + 12x = 0$ d) $y^2 - 4x = 0$

13.-
Las cordenadas del foco de la parábola cuya ecuación es $x^2 = -16y$ son:

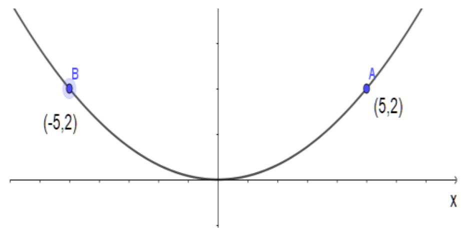
a) $(0,4)$ b) $(4,0)$ c) $(-4,0)$ d) $(0, -4)$ ok

Aprendizajes: Deduce la ecuación de la parábola con vértice en el origen y fuera de él. Entiende que un punto pertenece a una parábola si y sólo si, sus coordenadas, satisfacen la ecuación correspondiente.

Tema: Ecuación de la parábola con eje de simetría sobre uno de los ejes de coordenados y vértice en el origen.

1.-

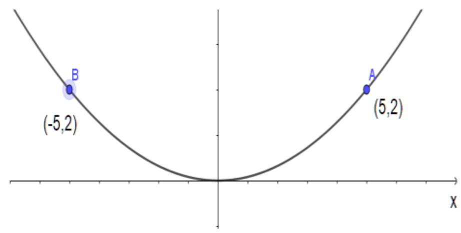
Una antena para televisión tiene forma de paraboloide con un diámetro de 10 m y 2 m de profundidad, ¿cuál es la ecuación que representa una parábola con las características del problema?



a) $y^2 = 4px$ b) $y^2 = -4px$ c) $x^2 = 4py$ ok d) $x^2 = -4py$

2.-

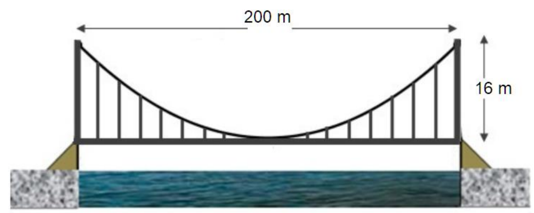
Una antena para televisión tiene forma de paraboloide con un diámetro de 10 m y 2 m de profundidad, ¿cuál es la ubicación (foco) en la que se deberá colocar un receptor?



a) $p = \frac{25}{8}\ m$ ok b) $p = \frac{25}{2}\ m$ c) $p = -\frac{25}{2}\ m$ d) $p = -\frac{25}{8}\ m$

3.-

Los cables de un puente colgante forman un arco parabólico. Los pilares que lo soportan tienen una altura de 16 metros sobre el nivel del puente y están separados 200 metros. El punto más bajo del cable queda a 6 metros sobre la calzada del puente. Calcula la altura del cable a 80 metros del centro.



a) y= 12.4 m ok b) y= 6 m c) y= 250 m d) y= 40 m

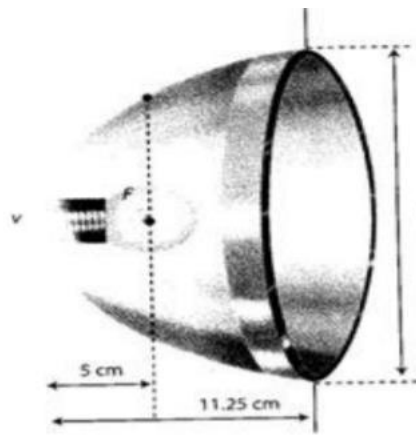
4.-

El arco parabólico que se forma en el puente de mampostería en Chester, Inglaterra de la figura tiene un claro de 80 metros y una altura máxima de 10 metros. Calcula la altura del arco a 8 metros del centro.

a) $p = \frac{25}{8}\ m$ ok b) $p = \frac{25}{2}\ m$ c) $p = -\frac{25}{2}\ m$ d) $p = -\frac{25}{8}\ m$

5.-
El faro de un automóvil tiene un reflector parabólico de 11.25 centímetros de profundidad. Si el bulbo luminoso está a 5 centímetros del vértice a lo largo del eje de simetría, determinar:

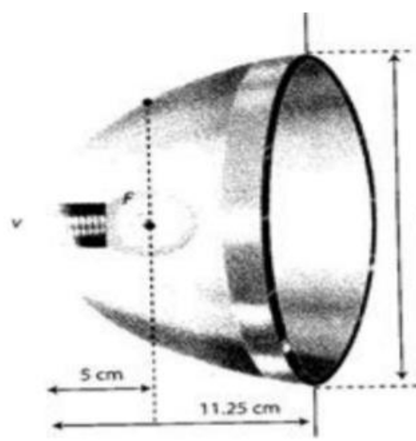
a) El diámetro del reflector.



a) $y = 15\ cm$ b) $y = 20\ cm$ c) $y = 30\ cm$ ok d) $y = 40\ cm$

5.-
El faro de un automóvil tiene un reflector parabólico de 11.25 centímetros de profundidad. Si el bulbo luminoso está a 5 centímetros del vértice a lo largo del eje de simetría, determinar:

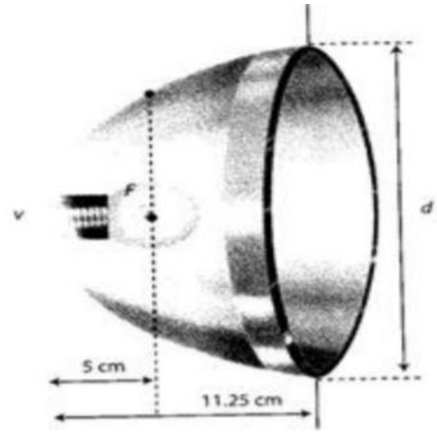
a) El diámetro que tiene el faro al nivel del bulbo luminoso.



a) $y = 15\ cm$ b) $y = 20\ cm$ ok c) $y = 30\ cm$ d) $y = 40\ cm$

6.-
El faro de un automóvil tiene un reflector parabólico de 11.25 centímetros de profundidad. Si el bulbo luminoso está a 5 centímetros del vértice a lo largo del eje de simetría, determinar:

a) Determina la ecuación de la parábola que representa el faro. Suponiendo que el vértice está en el origen de referencia y el eje de simetría coincide con el eje x.



a) $y^2 = 4x$ b) $y^2 = 20x$ ok c) $x^2 = 4y$ d) $x^2 = 20y$

7.-
Indica cuál ecuación pertenece a una parábola cuyo eje de simetría es la recta $x = -4$.

a) $y = -x^2 - 8x + 4$ ok
b) $y = -x^2 - 16$
c) $y = -x^2 - 8x - 2$
d) $y = (x - 4)^2$

8.-
Determina el eje de la parábola y el vértice de la parábola cuya ecuación es $y = 3x^2 + 18x + 24$.

a) $x = -3;\ (-3, 3)$
b) $x = 3;\ (3, -3)$
c) $x = 3;\ (3, 105)$
d) $x = -3;\ (-3, -3)$ ok

9.-
Determina el eje de la parábola y el vértice de la parábola cuya ecuación es $y = 20 - 10x - x^2$.

a) $x = -5;\ (-5,\ 45)$ ok
b) $x = 5;\ (5,\ 45)$
c) $x = 5;\ (5,\ -55)$
d) $x = 5;\ (-5,\ 45)$

10.-
Determina el eje de la parábola y el vértice de la parábola cuya ecuación es $y = -x^2 + 20$.

a) $y = 0;\ (0,\ -20)$
b) $x = 0;\ (20,\ 0)$
c) $x = 0;\ (0,\ 20)$
d) $y = 0;\ (0,\ 20)$ ok

Aprendizajes: Determina el vértice, foco, directriz, eje de simetría y el lado recto de la parábola, a partir de su ecuación cartesiana.

Tema: Vértice, eje de simetría, foco y lado recto de una parábola.

1.-
Determina la ecuación de la parábola cuyo vértice es el punto V(0,0) y directriz $x = -\frac{3}{2}$.

a) $x^2 = 2x$
b) $3y^2 = 2x$
c) $y^2 = 6x$ ok
d) $x^2 = 3y$

2.-
¿Cuál es la ecuación de la parábola que pasa por el punto A(4,6), vértice en $(0, -2)$ y eje vertical?

a) $y = x^2 - 10$
b) $y = x^2 - 4$
c) $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$ ok
d) $y = 2x^2 - 2$

3.-
¿Cuál es la ecuación de la parábola que tiene vértice V(0,0) y foco F(7,0)?

a) $x^2 = 7x$
b) $y^2 = 11x$
c) $y^2 = 28x$ ok
d) $y^2 = 7x$

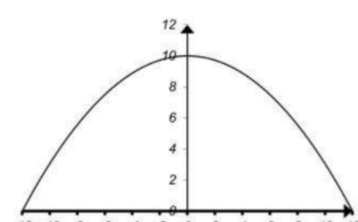
4.-
¿Cuál es vértice de la parábola $y = 3x^2 + 2x + 1$?

a) $(1,2)$
b) $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ ok
c) $(\frac{1}{3}, 2)$
d) $(-2,3)$

5.-
¿Cuál es la ecuación de la parábola cuyo eje de simetría es el eje de las ordenadas, foco el origen y que pasa por A(4,3)?

a) $x^2 = 4(y+1)$ ok
b) $y^2 = 4(x-1)$
c) $y^2 = 4(x+1)$
d) $x^2 = 4(y-1)$

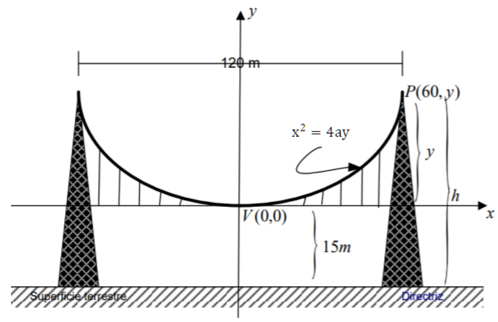
6.-
Un túnel en forma de arco parabólico vertical, tiene una altura de 10 m y sus puntos de apoyo están separados 24 m. ¿A qué altura del suelo se encuentra el foco de la parábola?



$$(x-h)^2 = -4a(y-k)$$

a)3.6 m b)5.4 m **c)6.4 m** d)11.4 m

7.-
Un puente colgante de 120 m de longitud, como se muestra en la figura anexa, tiene trayectoria parabólica sostenida por dos torres en cada extremo de igual altura. Si la directriz se encuentra representada por la superficie terrestre y el punto más bajo de los cables está ubicado a 15 m sobre la superficie terrestre. Hallar la altura *h* de las torres.



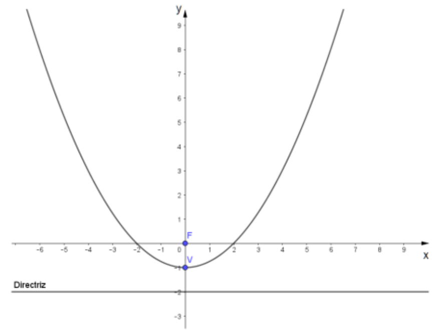
a) $h = 15\ m$
b) $h = 60\ m$
c) $h = \ 75\ m$ ok
d) $h = 90\ m$

Aprendizajes: Grafica parábolas dadas sus ecuaciones y viceversa.

Tema: Representación algebraica y gráfica de una parábola.

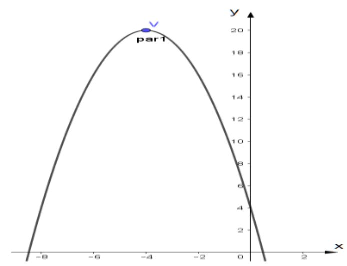
1.-
Grafica la parábola $x^2 = 4(y + 1)$ y ubica su vértice.

Sol. V(0, -1)



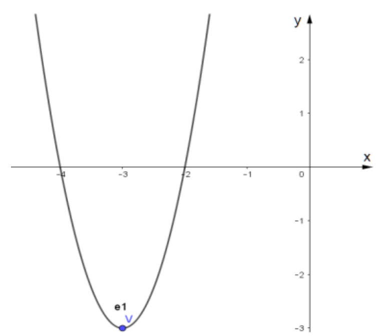
2.-
Dibuja la parábola $y = -x^2 - 8x + 4$ y ubica su vértice.

Sol, (-4, 20)



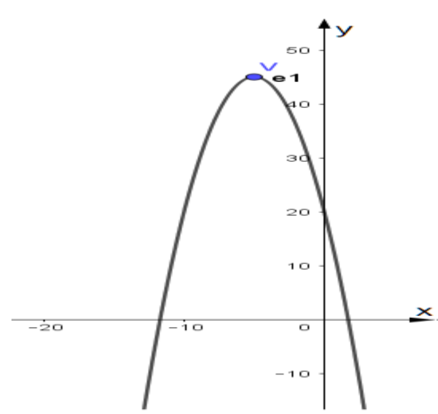
3.-
Grafica y ubica el vértice de la parábola cuya ecuación es $y = 3x^2 + 18x + 24$.

Sol. V $(-3, -3)$



4.-
Grafica y ubica el vértice de la parábola cuya ecuación es $y = 20 - 10x - x^2$.

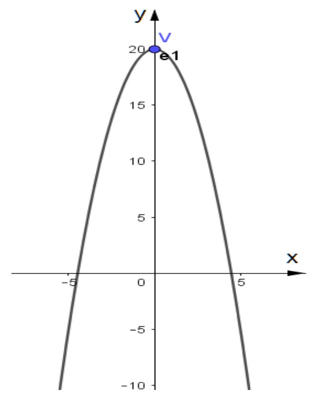
Sol. V $(-5, 45)$



5.-

Grafica y ubica el vértice de la parábola cuya ecuación es $y = -x^2 + 20$.

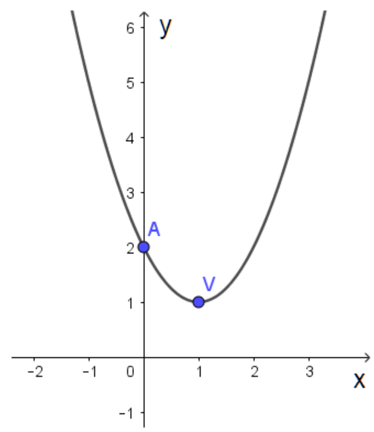
Sol. V $(0,\ 20)$



6.-

Una parábola tiene vértice V(1,1) y pasa por A(0,2). Encuentra la ecuación que la representa.

a) $y \quad (x-1)^2$+2
b) $y \quad = x^2 + 1$
c) $y \quad = (x-1)^2 + 1$ ok
d) $y \quad = x^2 - 1$



7.-

Para captar las señales de televisión emitidas desde un satélite se utiliza una antena parabólica que mide 5 m de diámetro y 1.5 m de profundidad, si el receptor está ubicado en el foco, ¿Cuál es su ubicación desde el vértice?

a) $-0.9\ m$
b) $-1.04\ m$
c) $0.225\ m$
d) $1.04\ m$ ok

Aprendizajes: Transforma la ecuación general a la ordinaria para encontrar sus elementos.

Tema: Ecuación ordinaria de la parábola y la interpretación de sus parámetros.

1.-

Determinar el vértice, foco, directriz y Lado Recto de la parábola cuya ecuación es:

a) $x^2 - 6x - 12y - 51 = 0$

a) $V\ (3,\ -5),\ F\ \ (2,1), y = 6, LR =\ 45\,u$
b) $V(3,5), F\ \ (3,2), y = 8, LR = 12\,u$
c) $V(3,\ -5),\ F\ \ (3,-2), y = -8, LR =\ 12\,u.$
d) $V\ (3,\ -5),\ F\ \ (2,1), y = 6, LR =\ 45\,u$

2.-

Determinar el vértice, foco, directriz y Lado Recto de la parábola cuya ecuación es:

$y^2 + 8x - 6y + 25 = 0$

a) $V\ (3,\ -5),\ F\ \ (2,1), y = 6, LR =\ 45\,u$
b) $V(2,3), F\ \ (0,3), x = 4, LR = 8\,u.$
c) $V(2,\ -3),\ F\ \ (0,-3), y = -4, LR =\ 8\,u$
d) $V\ (3,\ -5),\ F\ \ (2,1), y = 6, LR =\ 45\,u$

3.-

Determinar el vértice, foco, directriz y Lado Recto de la parábola cuya ecuación es:

$y^2 - 8x + 6y - 7 = 0$

a) $V(-2,-3),\ F(0,-3), x = -4, LR =\ 8\,u.$
b) $V\ \left(3,\frac{7}{2}\right), F\ \ (2,1), y = 6, LR = 8\,u$
c) $V\ (3,\ \frac{7}{2}),\ F\ \ (2,1), y = 6, LR =\ 8\,u$
d) $V\ (-2,\ 3),\ F\ \ (0,3), y = 4, LR =\ 8\,u$

4.-

Determinar el vértice, foco, directriz y Lado Recto de la parábola cuya ecuación es:

$x^2 - 8x + 5y - 4 = 0$

a) $V(-4,\ -4),\ F(-4,\frac{11}{4}), y = -\frac{11}{4}, LR =\ 5\,u$
b) $V\ \left(3,\frac{7}{2}\right), F\ \ (2,1), y = 6, LR = 5u$
c) $V(4,\ 4),\ F(4,\frac{21}{4}), y = \frac{11}{4}, LR =\ 5\,u$.
d) $V\ (3,\ \frac{7}{2}),\ F\ \ (2,1), y = 6, LR =\ 5\,u$

5.-

Determinar el vértice, foco, directriz y Lado Recto de la parábola cuya ecuación es:

$y^2 + 2y - 4x + 9 = 0$

a) $V\ (3,\ \frac{7}{2}),\ F\ \ (2,1), y = 6, LR =\ 5\,u$
b) $V\left(2,-\frac{5}{2}\right), F\ \ (2,3), y = 2, LR = 4\,u$
c) $V\ (3,\ \frac{7}{2}),\ F\ \ (2,1), y = 6, LR =\ 2\,u$
d) $V(2,\ \frac{5}{2}),\ F(2,3), y = 2,\ LR =\ 2\,u$.

6.-

Determinar el vértice, foco, directriz y Lado Recto de la parábola cuya ecuación es:
$x^2 - 4x - 4y = 0$

a) $V\ (2,-1),\ F\ \ (2,0), y = -2, LR =\ 4\,u.$
b) $V\left(2,-\frac{5}{2}\right), F\ \ (2,3), y = 2, LR = 4\,u$
c) $V\ \ (3,\ \frac{7}{2}),\ F\ \ (2,1), y = 6, LR =\ 2\,u$
d) $V(-2,\ 1),\ F(2,3), y = 2,\ LR =\ 2\,u$

7.-

Determinar el vértice, foco, directriz y Lado Recto de la parábola cuya ecuación es:
$y^2 - 14y - 24x - 119 = 0$

a) $V\ \ (3,\ \frac{7}{2}),\ F\ \ (2,1), y = 6, LR =\ 5\,u$
b) $V(-7,7), F\ \ (0,7), x = -14, LR = 24\,u.$
c) $V\ \ (3,\ \frac{7}{2}),\ F\ \ (2,1), y = 6, LR =\ 12\,u$
d) $V(-7,\ 7),\ F(0,7), y = -14,\ LR =\ 24\,u$

8.-
¿Cuál es la ecuación ordinaria equivalente a la ecuación general de la parábola
$x^2 + 2y - 4x + 9 = 0$?.

a) $(y-7)^2 = 24(x+7)$
b) $(x-2)^2 = 4(y+1)$
c) $(x-2)^2 = 2\left(y-\frac{5}{2}\right)$ ok
d) $(y+3)^2 = 8(x+2)$

9.-
¿Cuál es la ecuación ordinaria equivalente a la ecuación general de la parábola
$y^2 - 8x + 6y - 7 = 0$?.

a) $(y-7)^2 = 24(x+7)$
b) $(x-2)^2 = 4(y+1)$
c) $(x-2)^2 = 2\left(y-\frac{5}{2}\right)$
d) $(y+3)^2 = 8(x+2)$ ok

10.-
¿Cuál es la ecuación ordinaria equivalente a la ecuación general de la parábola
$x^2 - 4x - 4y = 0$?.

a) $(y-7)^2 = 24(x+7)$
b) $(x-2)^2 = 4(y+1)$ *ok*
c) $(x-2)^2 = 2\left(y-\frac{5}{2}\right)$
d) $(y+3)^2 = 8(x+2)$

11.-
¿Cuál es la ecuación ordinaria equivalente a la ecuación general de la parábola
$y^2 - 14y - 24x - 119 = 0$?.

a) $(y-7)^2 = 24(x+7)$ ok
b) $(x-2)^2 = 4(y+1)$
c) $(x-2)^2 = 2\left(y-\frac{5}{2}\right)$
d) $(y+3)^2 = 8(x+2)$

12.-
¿Cuál es la ecuación ordinaria equivalente a la ecuación general de la parábola $y^2 + 8x - 6y + 25 = 0$?.

a) $(y-3)^2 = -8(x-2)$ ok
b) $(x-2)^2 = 4(y+1)$
c) $(x-2)^2 = 2\left(y - \frac{5}{2}\right)$
d) $(y+3)^2 = 8(x+2)$

13.-
¿Cuál es la ecuación ordinaria equivalente a la ecuación general de la parábola $x^2 - 6x - 12y - 51 = 0$?.

a) $(y-3)^2 = -8(x-2)$
b) $(x-3)^2 = 12(y+5)$ ok
c) $(x-2)^2 = 2\left(y - \frac{5}{2}\right)$
d) $(y+3)^2 = 8(x+2)$

14.-
¿Cuál es la ecuación ordinaria equivalente a la ecuación general de la parábola $x^2 - 8x + 5y - 4 = 0$?.

a) $(y-3)^2 = -8(x-2)$
b) $(x+4)^2 = -5(y+1)$
c) $(x-4)^2 = -5(y-4)$ ok
d) $(y+3)^2 = 8(x+2)$

Aprendizajes: Resuelve problemas que involucren la intersección de una recta con una parábola y entre parábolas.
Resuelve problemas de aplicación.
Valora su conocimiento sobre parábola.

Tema: Sistemas de ecuaciones formados por:
Una ecuación lineal y una parábola.
Dos parábolas.
Resolución de problemas en diversos contextos.
Aplicaciones prácticas.

1.-
Determina la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje "y" y pasa por los puntos: A(1,1), B(2,4) y C(-1,7).

a) $y = -2x^2 - 9x + 12$
b) $no\ existe\ una\ parábola\ asi$
c) $y = 2x^2 - 3x + 2$ ok
d) $y = 11x^2 - 10x$

2.-
Determina la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje "y", pasa por los puntos: A(1,1), B(2,4) y corta en un solo punto a la recta y= -8.

a) $y = x^2 - 4x - 4$ ok
b) $no\ existe\ una\ parábola\ asi$
c) $y = 2x^2 - 9x + 12$
d) $y = 11x^2 - 10$

3.-
Determina la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje "y" y pasa por los puntos: A(0,3), B(1,3) y C(2,5).

a) $y = -x^2 + x + 3$
b) $no\ existe\ una\ parábola\ asi$
c) $y = 11x^2 + 3$
d) $y = x^2 - x + 3$ ok

4.-
¿En qué abcisas corta el eje x la parábola $y = (x - 2)(x + 1)$?

a) $x \ = 2 \ y \ x \ = -1$ ok
b) $y \ = -2 \ y \ y \ = 1$
c) $y \ = 2 \ y \ y \ = -1$
d) $x \ = -2 \ y \ x \ = 1$

5.-
Señala la ecuación de la parábola que intersecta al eje x en $x_1 = 4\ y\ \ x_2 = -4$.

a) $y \ \ (x - 4)^2$
b) $y \ = x^2 + 16$
c) $y \ = (x + 4)^2$
d) $y \ = x^2 - 16$ ok

6.-
Determina la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje “y” y pasa por los puntos: A(0,0), B(1,0) y C(3,6).

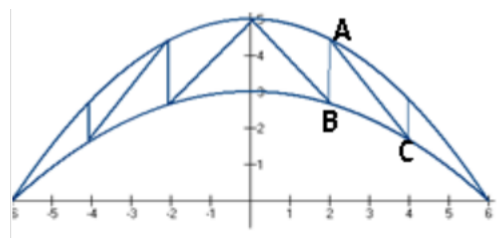
a) $y = -x^2 + x + 3$
b) $no\ existe\ una\ parábola\ asi$
c) $y = x^2 - x$ ok
d) $y = x^2 - x + 3$

7.-
Encontrar las coordenadas de los puntos donde la recta $2y - x = 4$ corta a la parábola $2y - x^2 + 2 = 0$.

a) $p_1(3,\ \frac{7}{2})\ y\ p_2(2,1)$
b) $no\ existe\ intersección$
c) $p_1(3,\ -\frac{7}{2})\ y\ p_2(-2,1)$
d) $p_1(3,\ \frac{7}{2})\ y\ p_2(-2,1)$ ok

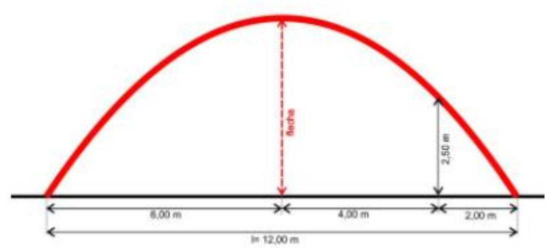
8.-
El techo de una estructura tiene cordones superior e inferior de forma parabólica. ¿Cuál es la longitud del tramo AB redondeado a un decimal?

a) $AB = 3.0\ unidades$
b) $AB = 2.7\ unidades$
c) $AB = 2.0\ unidades$
d) $AB = 1.8\ unidades$ ok



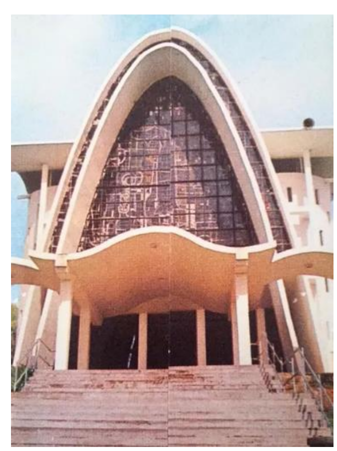
9.-
Un arco parabólico como se muestra en la figura, tiene 12 m de claro. Existe una columna a 2 metros de un extremo que tiene una altura de 2.5 m ¿Cuál es la altura (flecha) máxima?

a) $flecha = 3.0\ m$
b) $flecha = 12.5\ m$
c) $flecha = 4.5\ m$ ok
d) $flecha = 22.5\ m$



10.-
Uno de los arcos parabólicos que se forma en la entrada principal de la iglesia San Antonio ubicada en Bethania, mide en su base 3.5 m y su altura máxima es de 4 m. Suponiendo que el vértice del arco es (0,4). ¿Cuál es la ecuación del arco parabólico?

a) $y = -4x^2 + 3.5$
b) $y = -2x^2 + 4$
c) $y = -1.3x^2 + 4$ ok
d) $y = 1.3x^2 + 4$



Aprendizajes: Deduce la ecuación ordinaria de la circunferencia e identifica sus elementos: radio y coordenadas del centro.

Tema: La circunferencia como lugar geométrico.
Elementos que definen a la circunferencia.
Ecuación ordinaria con centro en el origen y fuera de él.

1.-
Hallar la ecuación ordinaria de la circunferencia con centro en (2,-3) y radio 2 unidades.

a) $(x+2)^2+(y+3)^2=4$
b) $(x-2)^2+(y+3)^2=4$ ok
c) $(x+2)^2+(y-3)^2=4$
d) $(x-2)^2+(y+3)^2=2$

2.-

Hallar la ecuación ordinaria de la circunferencia con centro en (-1, 2) y radio 4 unidades.

a) $(x+2)^2+(y+3)^2=4$
b) $(x+1)^2+(y-2)^2=4$
c) $(x+1)^2+(y-2)^2=16$ ok
d) $(x-2)^2+(y+3)^2=2$

3.-

Hallar la ecuación ordinaria de la circunferencia con diámetro MN, con M(-3,-3) y N(3,3).

a) $(x+2)^2+(y+3)^2=4$
b) $x^2+y^2=18$ ok
c) $(x+2)^2+(y-3)^2=18$
d) $(x-4)^2+(y-3)^2=3\sqrt{2}$

4.-

La recta tangente a una circunferencia es y= -x+3. Si el centro de la circunferencia es el origen de coordenadas, ¿cuál es su radio r?

a) r= $\frac{3}{\sqrt{2}}$ unidades ok
b) r= 4 unidades
c) r= 3 unidades
d) r=4.5 unidades

5.-

La recta tangente a una circunferencia es y= -x +3. Si el centro de la circunferencia es el origen de coordenadas, ¿cuál es su ecuación ordinaria?

a) $(x+2)^2+(y+3)^2=4$
b) $x^2+y^2=\frac{9}{2}$ ok
c) $x^2+y^2=\frac{3}{\sqrt{2}}$
d) $(x-2)^2+(y+3)^2=2$

6.-

Determinar el centro y radio de la circunferencia cuya ecuación es $(x - 5)^2 + (y + 6)^2 = 9$.

a) C(5. – 6); r= 3 unidades ok
b) C(-5, 6); r= 9 unidades
c) C(- 5, 6); r= 3 unidades
d)

7.-

Determinar el centro y radio de la circunferencia cuya ecuación es: $x^2 + y^2 = 12$

a) C(0,0); r=$\sqrt{12}$ unidades ok
b) C(0,0); r= 12 unidades
c) C(1,1); r= $\sqrt{12}$ unidades
d) C(0,0); r= 6 unidades

8.-

Determinar el centro y radio de la circunferencia cuya ecuación es:

$$\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{4}.$$

a) C($\frac{2}{3}$,0); r=$\frac{5}{2}$ unidades ok
b) C(0,0); r= 12 unidades
c) C($-\frac{2}{3}$,0); r= $\frac{5}{2}$ unidades
d) C($\frac{2}{3}$,0); r= $\frac{25}{4}$ unidades

9.-

Hallar la ecuación ordinaria de la circunferencia cuyo centro se localiza en el punto $C(-1,-3)$ y su radio tiene longitud igual a *7*.

a) $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 49$ ok
b) $x^2 + y^2 = 49$
c) $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 7$
d) $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 7$

10.-

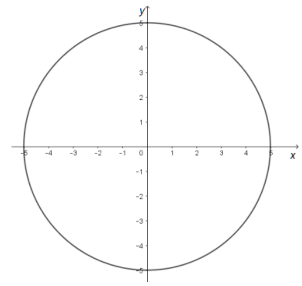
Hallar la ecuación ordinaria de la circunferencia cuyo centro se localiza en el punto $C(1, 1)$ y que pasa por el punto $P(3,4)$.

a) $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 13$
b) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 13$ ok
c) $(x+1)^2 + (y+1)^2 = \sqrt{13}$
d) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = \sqrt{13}$

11.-

Completa los elementos que faltan, de acuerdo a los datos y la figura anexa.

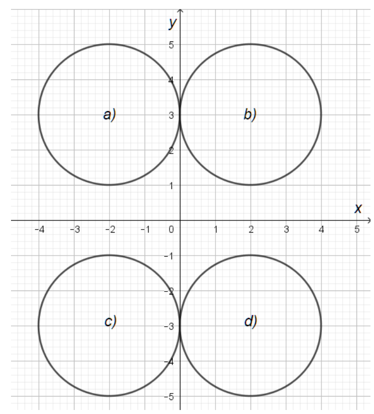
C (,   )
r =_____ unidades
Ecuación:



12.-

Elije la imagen que corresponde a la ecuación:

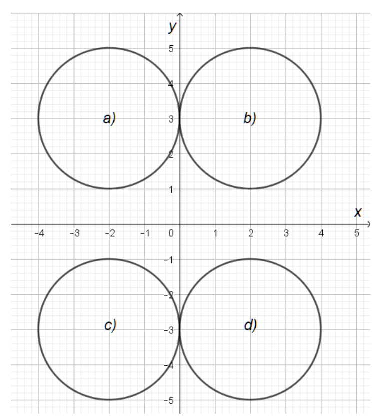
Solución: d)



13.-

Elije la imagen que corresponde a la ecuación:

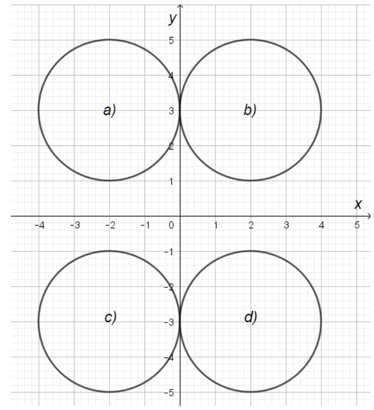
Solución: b)



14.-

Elije la imagen que corresponde a la ecuación:

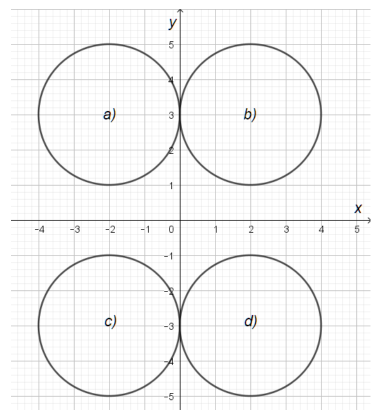
Solución: a)



15.-

Elije la imagen que corresponde a la ecuación:

Solución: c)



16.-

Elige cuál es la definición de una circunferencia:

i) Es el lugar geométrico de todos los puntos en el plano, que equidistan de un punto fijo (foco) y de una recta fija (directriz).
j) Es el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan una distancia r (el radio) de un punto fijo C (el centro). ok
k) Es el lugar geométrico de los puntos en un plano, cuya suma de distancias hacia dos puntos fijos (los focos) en el plano es una constante positiva.
l) Es el lugar geométrico de cualquier par de puntos en el plano que tienen la misma pendiente.

Aprendizajes: Obtiene la ecuación general de una circunferencia.

Tema: Ecuación general.

1.-
Hallar la ecuación general de la circunferencia con centro en (2, -3) y radio 2.

a) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 18 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 17 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$ ok
d) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 9 = 0$

2.-

Hallar la ecuación general de la circunferencia con diámetro MN, con M(-3,-3) y N(3,3).

a) $x^2 + y^2 - 18 = 0$ ok
b) $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 17 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$
d) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 9 = 0$

3.-

Hallar la ecuación general de la circunferencia cuya ecuación ordinaria es: $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 4$.

a) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 18 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 17 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 30 = 0$ ok
d) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 30 = 0$

4.-

Hallar la ecuación general de la circunferencia cuya ecuación ordinaria es: $(x+5)^2 + (y-3)^2 = 25$.

a) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 18 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 10x - 6y + 9 = 0$ ok
c) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$
d) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 9 = 0$

5.-

Hallar la ecuación general de la circunferencia cuya ecuación ordinaria es: $(x-4)^2+(y-3)^2=5$.

a) $x^2+y^2-4x+2y+18=0$
b) $x^2+y^2+4x+2y-17=0$
c) $x^2+y^2-4x+6y+9=0$
d) $x^2+y^2-8x-6y+20=0$ ok

6.-

Hallar la ecuación general de la circunferencia cuya ecuación ordinaria es: $(x-1)^2+(y+1)^2=\frac{1}{4}$.

a) $x^2+y^2-4x+2y+18=0$
b) $x^2+y^2+4x+2y-17=0$
c) $4x^2+4y^2-8x+8y+7=0$ ok
d) $x^2+y^2-2x-4y-9=0$

7.-

Hallar la ecuación general de la circunferencia cuya ecuación ordinaria es: $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{7}{4}$.

a) $12x^2+12y^2+8x+12y-5=0$ ok
b) $x^2+y^2+4x+2y-17=0$
c) $x^2+y^2-4x+6y+9=0$
d) $x^2+y^2-2x-4y-9=0$

8.-

Hallar la ecuación general de la circunferencia cuya ecuación ordinaria es: $(x-2)^2+(y+3)^2=4$.

a) $x^2+y^2-4x+2y+18=0$
b) $x^2+y^2+4x+2y-17=0$
c) $x^2+y^2-4x+6y+9=0$ ok
d) $x^2+y^2-2x-4y-9=0$

9.-

Hallar la ecuación general de la circunferencia cuya ecuación ordinaria es: $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 4$.

a) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 18 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 9 = 0$ ok
c) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$
d) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 9 = 0$

10.-

Hallar la ecuación general de la circunferencia si los extremos de uno de sus diámetros son los puntos P(6,2) y Q(-2, -4).

a) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 18 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 17 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 20 = 0$ ok
d) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 9 = 0$

Aprendizajes: Obtiene la ecuación ordinaria a partir de la ecuación general y determina el centro y el radio de una circunferencia.

Tema: Relación entre ecuación ordinaria y ecuación general.

1.-
Hallar la ecuación ordinaria de la circunferencia cuya ecuación general es: $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$.

a) $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 2$
b) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$
c) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$
d) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$ ok

2.-

Hallar la ecuación ordinaria de la circunferencia cuya ecuación general es: $4x^2 + 4y^2 - 8x + 8y + 7 = 0$.

a) $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 2$
b) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$
c) $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 18$ ok
d) $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 3\sqrt{2}$

3.-

Hallar la ecuación ordinaria de la circunferencia cuya ecuación general es: $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 30 = 0$.

a) $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 2$
b) $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 4$ ok
c) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$
d) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$

4.-

Hallar la ecuación ordinaria de la circunferencia cuya ecuación general es: $x^2 + y^2 + 10x - 6y + 9 = 0$.

a) $(x+5)^2 + (y-3)^2 = 25$ ok
b) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$
c) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$
d) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$

5.-

Hallar la ecuación ordinaria de la circunferencia cuya ecuación general es: $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 20 = 0$.

a) $(x+2)^2+(y+3)^2=2$
b) $(x+1)^2+(y-2)^2=4$
c) $(x-2)^2+(y+3)^2=4$
d) $(x-4)^2+(y-3)^2=5$

6.-

Hallar la ecuación ordinaria de la circunferencia cuya ecuación general es: $4x^2+4y^2-8x+8y+7=0$.

a) $(x+2)^2+(y+3)^2=2$
b) $(x+1)^2+(y-2)^2=4$
c) $(x-1)^2+(y+1)^2=\frac{1}{4}$ ok
d) $(x-2)^2+(y+3)^2=4$

7.-

Hallar la ecuación ordinaria de la circunferencia cuya ecuación general es: $12x^2+12y^2+8x+12y-5=0$.

a) $(x+2)^2+(y+3)^2=2$
b) $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{7}{4}$ ok
c) $(x-2)^2+(y+3)^2=4$
d) $(x-2)^2+(y+3)^2=4$

8.-

Hallar la ecuación ordinaria de la circunferencia cuya ecuación general es: $x^2+y^2-6x-4y+9=0$.

a) $(x+2)^2+(y+3)^2=2$
b) $(x+1)^2+(y-2)^2=4$
c) $(x-3)^2+(y-2)^2=4$ ok
d) $(x-2)^2+(y+3)^2=4$

9.-

Hallar la ecuación ordinaria de la circunferencia cuya ecuación general es: $x^2+y^2+6x-4y+9=0$.

a) $(x+3)^2+(y-2)^2=4$ ok
b) $(x+1)^2+(y-2)^2=4$
c) $(x-2)^2+(y+3)^2=4$
d) $(x-2)^2+(y+3)^2=4$

10.-

Hallar la ecuación ordinaria de la circunferencia cuya ecuación general es: $x^2+y^2-4x+2y-20=0$.

a) $(x+2)^2+(y+3)^2=2$
b) $(x+1)^2+(y-2)^2=4$
c) $(x-2)^2+(y+3)^2=4$
d) $(x-2)^2+(y+1)^2=25$ ok

11.-

Hallar la ecuación ordinaria de la circunferencia cuya ecuación general es: $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 9 = 0$.

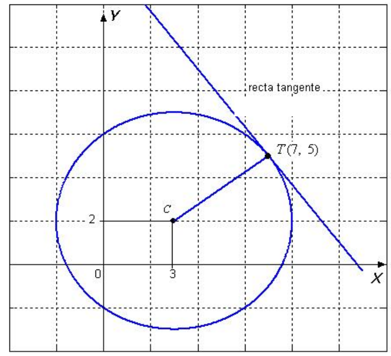
a) $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 2$
b) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$
c) $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 1$ ok
d) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$

Aprendizajes: Resuelve problemas de corte geométrico.

Tema: Problemas de aplicación.

1.-
Obtener la ecuación de la recta tangente a la circunferencia

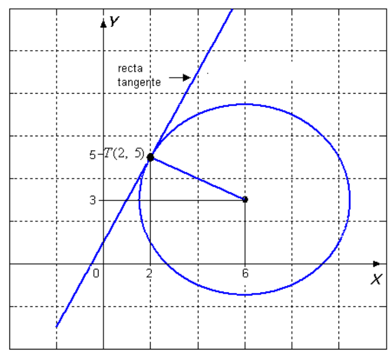
$(x-3)^2+(y-2)^2=25$ en el punto $T(7,5)$



Solución:

$4x + 3y - 43 = 0$

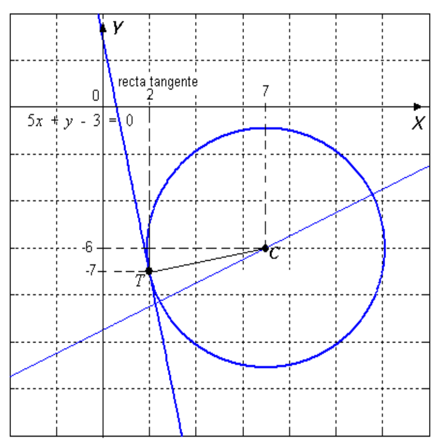
2.-
Determinar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2+y^2-12x-6y+25=0$, por el punto $T(2,5)$



Solución:

$2x - y + 1 = 0$

3.-
Hallar la ecuación de la circunferencia, tangente a la recta $5x + y - 3 = 0$ en el punto $T(2, -7)$ y cuyo centro se encuentra sobre la recta $x - 2y - 19 = 0$

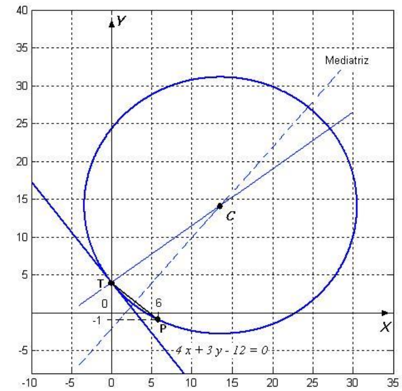


Solución:

$(x-7)^2+(y+6)^2=26$

4.-

Obtener la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $P(6,-1)$ y es tangente a la recta $4x+3y-12=0$ en el punto $T(0,4)$.

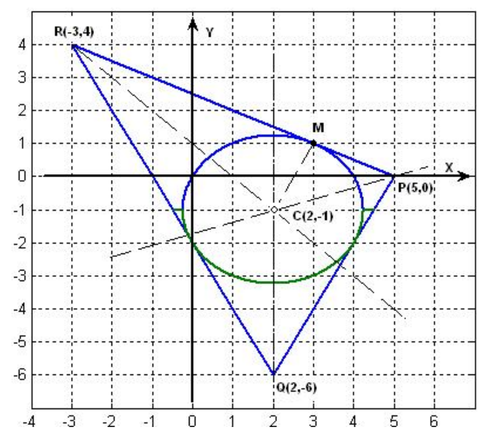


Solución:

$$\left(x-\frac{122}{9}\right)^2+\left(y-\frac{85}{6}\right)^2=\left(\frac{305}{18}\right)^2$$

5.-

Obtener la ecuación de la circunferencia inscrita al triángulo de vértices $P(5,0),\ Q(2,-6)\ y\ R(-3,4)$



Solución:

$$(x-2)^2+(y+1)^2=5$$

6.-

Encuentra la ecuación general de la circunferencia que pasa por los puntos: Q(-1, -3), R(5,5) y C(6, -2).

a) $x^2+y^2-4x+2y+18=0$
b) $x^2+y^2+4x+2y-18=0$
c) $x^2+y^2-4x-2y-20=0$ ok
d) $x^2+y^2-2x-4y-20=0$

7.-

Encuentra la ecuación general de la circunferencia que pasa por los puntos: Q(-4, -1), R(12,7) y S(-10, 11).

a) $x^2+y^2-2x-18y-43=0$ ok
b) $x^2+y^2+4x+2y-18=0$
c) $x^2+y^2-4x-2y-20=0$
d) $x^2+y^2-2x-4y-20=0$

8.-

Encuentra la ecuación general de la circunferencia que pasa por los puntos: Q(1, 5), R(7, -1) y S(13, 11).

a) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 18 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 18 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$
d) $x^2 + y^2 - 16x - 12y + 50 = 0$ ok

9.-

Encuentra los puntos donde la circunferencia $\mathbf{3x^2 + 3y^2 - 16x + 2y + 15 = 0}$ corta a la recta definida por los puntos Q(0, 1) y R(2,0).

a) $P_1(1, -2)$ y $P_2(0, -4)$
b) $P_1(\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$ y $P_2(4, -1)$ ok
c) $P_1(\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$ y $P_2(4, 1)$
d) $P_1(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3})$ y $P_2(4, -1)$

10.-

Encuentra las coordenadas del punto de tangencia "P" de la circunferencia $\boldsymbol{x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0}$ y la recta: $\boldsymbol{x + 2y = 10}$.

a) $P \quad (1, -2)$
b) $P \quad (2, 4)$ ok
c) $P \quad (4, 1)$
d) $P \quad (2,\ 1)$

11.-

Encuentra la ecuación general de la circunferencia que pasa por los puntos: Q(−3, 0), R(- 4, 1) y S(- 2, 1).

a) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 18 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 18 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$
d) $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 9 = 0$ ok

12.-

Encuentra la ecuación general de la circunferencia que pasa por los puntos: A(1, 0), B(1, - 4) y C(3, - 2).

a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ ok
b) $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 18 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$
d) $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 9 = 0$

13.-

Encuentra la ecuación general de la circunferencia que pasa por los puntos: A(10, 1), B(- 14, 1) y C(- 2, 13).

a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 139 = 0$ ok
c) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$
d) $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 9 = 0$

14.-

Encuentra la ecuación general de la circunferencia que pasa por los puntos de intersección de las rectas: 3x – y = 7, x – 2y = 4, 2x + y = 8.

a) $x^2 + y^2 - 5x - y + 4 = 0$ ok
b) $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 18 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$
d) $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 9 = 0$

Aprendizajes: Obtiene la definición de elipse como lugar geométrico e identificará sus elementos.
Obtiene la ecuación cartesiana de una elipse, con ejes paralelos a los ejes cartesianos.

Tema: Definición de la elipse como lugar geométrico.
Elementos de la elipse: vértices, focos, ejes mayor y menor, distancia focal, excentricidad y lado recto.

1.-
Elige cuál es la definición de una elipse:

m) Es el lugar geométrico de todos los puntos en el plano, que equidistan de un punto fijo (foco) y de una recta fija (directriz).
n) Es el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan una distancia r (el radio) de un punto fijo C (el centro).
o) Es el lugar geométrico de los puntos en un plano, cuya suma de distancias hacia dos puntos fijos (los focos) en el plano es una constante positiva. ok
p) Es el lugar geométrico de cualquier par de puntos en el plano que tienen la misma pendiente.

2.-

Obtener la excentricidad de la elipse cuyo eje mayor mide 26 y cuya distancia focal es de 8 unidades.

a) $e = \frac{4}{13}\ u$ ok b) $e = \frac{12}{13}\ u$ c) $e = \frac{8}{13}\ u$ d) $e = \frac{6}{13}\ u$

3.-

Obtener la excentricidad de la elipse cuyo eje mayor mide 26 y cuya distancia focal es de 8 unidades.

a) $e = \frac{4}{13}\ u$ b) $e = \frac{12}{13}\ u$ ok c) $e = \frac{8}{13}\ u$ d) $e = \frac{6}{13}\ u$

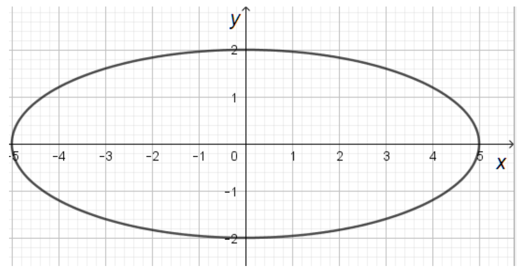
4.-

Hallar la ecuación ordinaria de una elipse con centro en (2,-3) y radio 2 unidades.

a) $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 4$ b) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$ ok
c) $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 4$ d) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 2$

5.-

Identifica la ecuación de la elipse que corresponde a la gráfica.



a) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$ ok

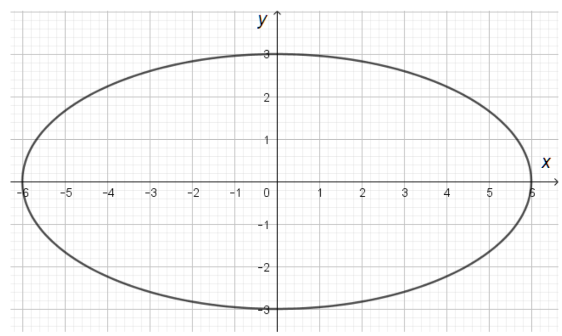
b) $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{5}=1$

c) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$

d) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{2}=1$

6.-

Identifica la ecuación de la elipse que corresponde a la gráfica.



a) $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$

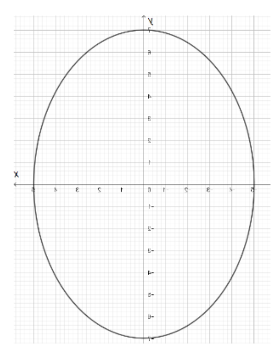
b) $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{5}=1$

c) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$ ok

d) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{2}=1$

7.-

Identifica la ecuación de la elipse que corresponde a la gráfica.



a) $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$

b) $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{5}=1$

c) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{49}=1$ ok

d) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{2}=1$

8.-

Hallar la excentricidad de la elipse cuya distancia focal es $2\sqrt{5}$ y de anchura focal igual a $LR=\frac{11}{2}$.

9.-

Identifica los elementos de la elipse:

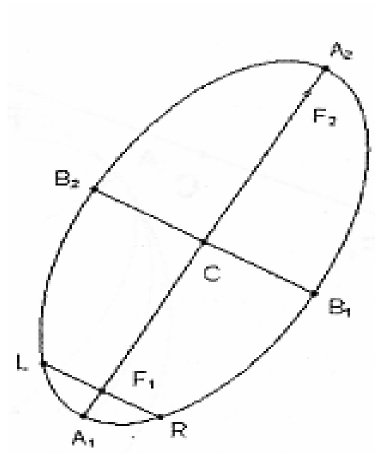
Extremos del eje mayor:

Extremos del eje menor:

Extremos del lado recto (anchura focal):

Focos:

Centro:



10.-

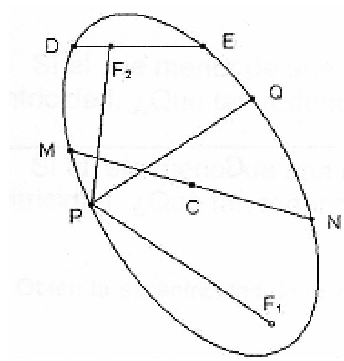
Identifica los elementos de la elipse:

Cuerda:

Cuerda focal:

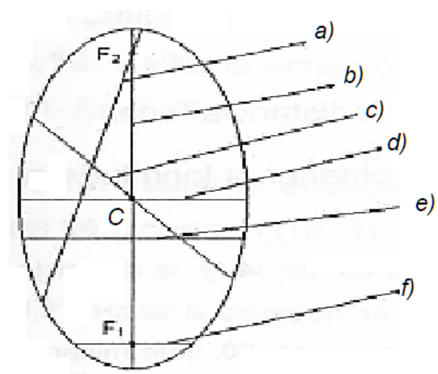
Diámetro:

Radios vectores:



11.-

Identifica los elementos de la elipse:



Lado recto:

Cuerda:

Diámetro:

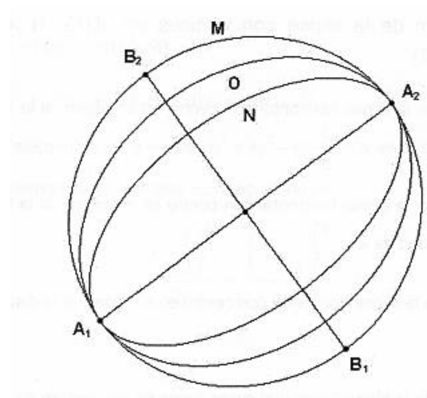
Radio vector:

Eje mayor:

Eje menor:

12.-

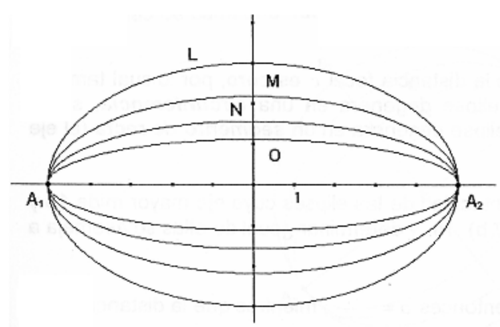
En la siguiente figura ordena las elipses, de acuerdo a la excentricidad de cada una de ellas, de menor a mayor.



Respuesta:
M, O, N

13.-

En la siguiente figura ordena las elipses, de acuerdo a la excentricidad de cada una de ellas, de menor a mayor.

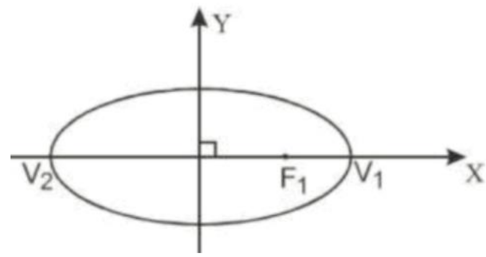


Respuesta:
L, M, N, O

Aprendizajes: Reconoce los tipos diferentes de simetría de la elipse.
Identifica el papel de los parámetros a, b y c en la gráfica de la elipse y los emplea en su construcción.

Tema: Simetría con respecto a los ejes y al centro.
La elipse y los parámetros de su representación algebraica.
Excentricidad.

1.-
Determina la ecuación ordinaria de una elipse, cuyos vértices son: $V_1(13,0)$ y $V_2(-13, 0)$. Las coordenadas de uno de sus focos: F1(12, 0).



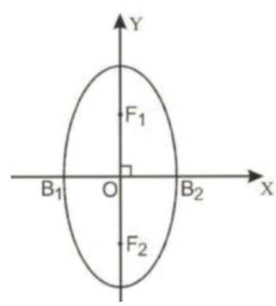
a). ok $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$

b). $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$

c). $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{169}=1$

d). $\frac{x^2}{13}+\frac{y^2}{5}=1$

2.-
Determina la ecuación ordinaria de una elipse donde $F_1O=OF_2$, $B_1B_2=4$ m, $F_1F_2=18$ m.



a). $\frac{x^2}{85}+\frac{y^2}{4}=1$

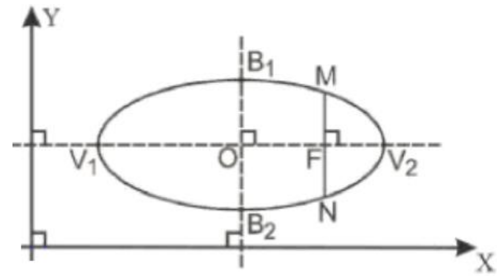
b). $\frac{x^2}{85}+\frac{y^2}{2}=1$

c). ok $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{85}=1$

d). $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{85}=1$

3.-

En la figura se muestra la parte trasera de un tanque de gas en forma de elipse y se requiere colocar una válvula de medición en M. Los puntos O, V_1 y V_2 son el centro y los vértices de una elipse. F representa uno de sus focos. Si $V_1V_2 = 2\ B_1B_2 = 8$ cm y O(6,4). Hallar la ecuación ordinaria de la elipse.



a). $\frac{x^2}{85} + \frac{y^2}{4} = 1$

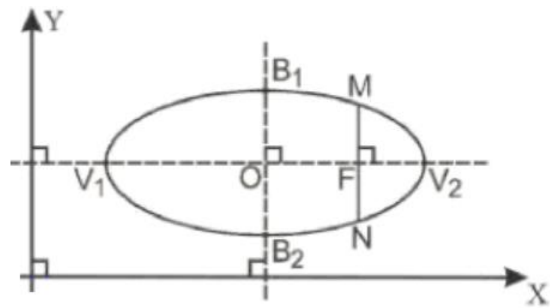
b). ok $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

c). $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$

d). $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$

4.-

En la figura se muestra la parte trasera de un tanque de gas en forma de elipse y se requiere colocar una válvula de medición en M. Los puntos O, V_1 y V_2 son el centro y los vértices de una elipse. F representa uno de sus focos. Si $V_1V_2 = 2\ B_1B_2 = 8$ cm y O(6,4). Hallar las coordenadas de N.



a). $N\ (8\sqrt{3}\,, 3)$

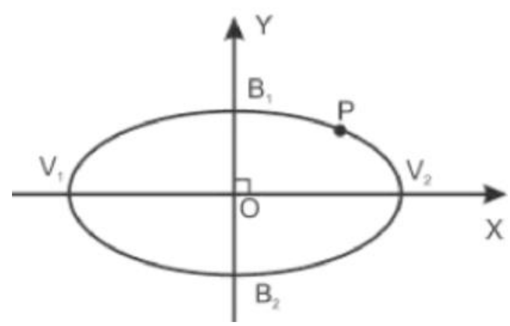
b). ok $N\ (6 + 2\sqrt{3}\,, 3)$

c). $N\ (8\sqrt{3}\,, -3)$

d). $N\ (6 + \sqrt{3}\,, 4)$

5.-

Determina la ecuación ordinaria de una elipse que pasa por el punto $\left(4, \frac{9}{5}\right)$, tiene su centro en el origen de coordenadas, eje mayor sobre el eje de las abcisas y de 10 cm de longitud.



a). ok $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

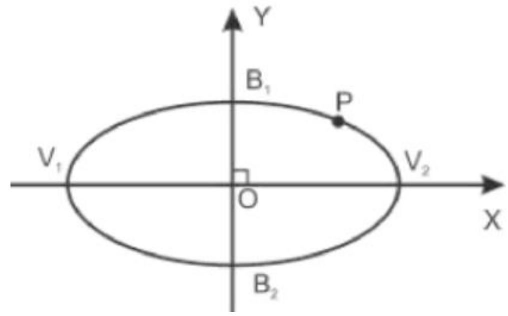
b). $\frac{x^2}{85} + \frac{y^2}{2} = 1$

c). $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$

d). $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{5} = 1$

6.-

Determina la ecuación general de una elipse que pasa por el punto $\left(4, \frac{9}{5}\right)$, tiene su centro en el origen de coordenadas, eje mayor sobre el eje de las abcisas y de 10 cm de longitud.



a). ok $9x^2 + 25y^2 = 225$

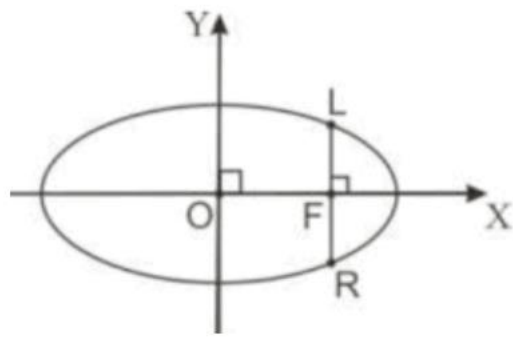
b). $25x^2 + 9y^2 = 225$

c). $9x^2 + 16y^2 = 144$

d). $16x^2 + 9y^2 = 144$

7.-

Determina la ecuación ordinaria de una elipse, cuyo centro es el origen de coordenadas, F es un foco, lado recto 6 m y a= 2c.



a). $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1$

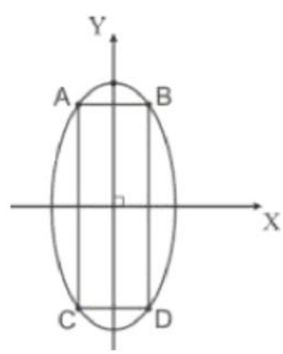
b). $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

c). ok $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$

d). $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

8.-

En la figura AB y CD son los lados rectos de la elipse $4x^2 + y^2 = 16$. Determina el área de la región rectangular ABDC en metros cuadrados.



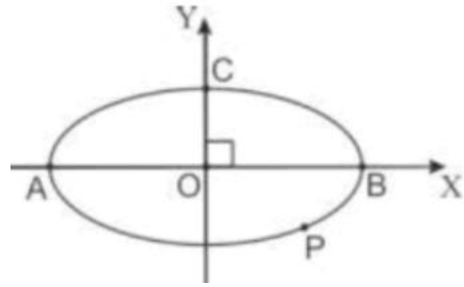
a). $6\sqrt{3}\,m^2$

b). ok $8\sqrt{3}\,m^2$

c). $8\sqrt{2}\,m^2$

d). $4\sqrt{3}\,m^2$

9.-
Determina la ecuación de la elipse donde OB= 2OC y P(2, $-\sqrt{3}$).



a). $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{16}=1$

b). ok $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$

c). $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1$

d). $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

10.-
Encuentra la ecuación ordinaria de la elipse cuyas coordenadas de los focos son: F$_1$(3,2) y F$_2$(3, - 4) y la longitud del eje mayor es 100 cm.

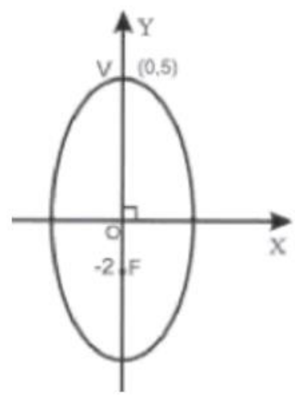
a) $\frac{(x+2)^2}{16}+\frac{(y+3)^2}{25}=1$

b) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

c) $\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y+1)^2}{25}=1$ ok

d) $\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y+3)^2}{16}=1$

11.-
Determina la ecuación ordinaria de la elipse con centro en el origen de referencia, eje mayor coincide con el eje de ordenadas, coordenadas de un vértice V(0,5) y un foco F(0, - 2).



a). $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{16}=1$

b). ok $\frac{x^2}{21}+\frac{y^2}{25}=1$

c). $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{21}=1$

d). $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$

Aprendizajes: Determina los elementos de la elipse transformando la ecuación general a su forma ordinaria.

Tema: Ecuación general.

1.- Encuentra la ecuación ordinaria de la elipse equivalente a la elipse cuya ecuación general es:
$16x^2 + 25y^2 - 64x - 150y - 111 = 0$

a) $\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1$
b) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$
c) $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$ ok
d) $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1$

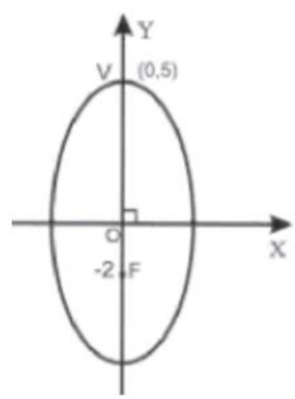
2.- Encuentra el centro de una elipse cuya ecuación general es:
$16x^2 + 25y^2 - 64x - 150y - 111 = 0$

a) $(-2, -3)$
b) $(2, 3)$ ok
c) $(2, -3)$
d) $(-2, 3)$

3.- Encuentra la ecuación general de una elipse cuyo origen coincide con el del sistema de referencia, su eje mayor coincide con el eje y, y las coordenadas de un foco son F(0, - 2) y un vértice V(0,5).

a) $16x^2 + 25y^2 - 111 = 0$
b) $16x^2 + 25y^2 - 525 = 0$
c) $25x^2 + 21y^2 - 525 = 0$ ok
d) $25x^2 + 21y^2 - 111 = 0$

4.- En la figura anexa se muestra una elipse con centro en el origen de referencia. Determina la ecuación general que la representa.



a) $16x^2 + 25y^2 - 525 = 0$
b) $25x^2 + 21y^2 - 111 = 0$
c) $16x^2 + 25y^2 - 525 = 0$
d) $25x^2 + 21y^2 - 525 = 0$ ok

5.-
Encuentra la ecuación ordinaria de la elipse equivalente a la elipse cuya ecuación general es:
$x^2 + 2y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$

a) $\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1$
b) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$
c) $\frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(y+1)^2}{1} = 1$ ok
d) $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1$

6.-
Encuentra la ecuación general de una elipse cuya ecuación ordinaria es:

$$\frac{(x-3)^2}{6} + \frac{(y-2)^2}{5} = 1$$

a) $5x^2 + 6y^2 - 30x - 24y + 39 = 0$ ok
b) $6x^2 + 5y^2 - 30x - 24y + 39 = 0$
c) $25x^2 + 21y^2 - 55 = 0$
d) $6x^2 + 5y^2 + 30x - 24y - 11 = 0$

7.-
Encuentra la ecuación ordinaria de la elipse equivalente a la elipse cuya ecuación general es:
$5x^2 + 6y^2 - 30x + 24y + 39 = 0$

a) $\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1$
b) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$
c) $\frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(y+1)^2}{1} = 1$
d) $\frac{(x-3)^2}{6} + \frac{(y-2)^2}{5} = 1$ ok

8.-
Encuentra la ecuación general de una elipse cuya ecuación ordinaria es:

$$\frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$$

a) $5x^2 + 6y^2 - 30x - 24y + 39 = 0$
b) $6x^2 + 5y^2 - 30x - 24y + 39 = 0$
c) $25x^2 + 4y^2 + 100x - 8y + 4 = 0$ ok
d) $6x^2 + 5y^2 + 30x - 24y - 11 = 0$

9.-
Encuentra la ecuación ordinaria de la elipse equivalente a la elipse cuya ecuación general es:

$$25x^2 + 4y^2 + 100x - 8y + 4 = 0$$

a) $\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1$
b) $\frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$ ok
c) $\frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(y+1)^2}{1} = 1$
d) $\frac{(x-3)^2}{6} + \frac{(y-2)^2}{5} = 1$

10.-
Determina mediante los coeficientes de x^2 y y^2, cuáles de las ecuaciones proporcionadas corresponden a elipses horizontales y cuáles a elipses verticales:

a) $5x^2 + 6y^2 - 30x - 24y + 39 = 0$
b) $6x^2 + 5y^2 - 30x - 24y + 39 = 0$
c) $25x^2 + 4y^2 + 100x - 8y + 4 = 0$ ok
d) $6x^2 + 5y^2 + 30x - 24y - 11 = 0$

a) horizontal b) vertical c) vertical d) vertical

11.-
Determina mediante los coeficientes de x^2 y y^2, cuáles de las ecuaciones proporcionadas corresponden a elipses horizontales y cuáles a elipses verticales:

a) $x^2 + 4y^2 - 5x + 2y = 0$
b) $4x^2 + y^2 + x + y - 1 = 0$
c) $6x^2 + 12y^2 + 8x = 0$
d) $8x^2 + 3y^2 - 2y - 24 = 0$

a) horizontal b) vertical c) horizontal d) vertical

12.-
Encuentra el centro, los semiejes mayor y menor de la elipse cuya ecuación general es:
$16x^2 + 4y^2 - 32x - 56y + 148 = 0$

a) $C(-1,-7);\ a = 4;\ b = 2$
b) $C(1,7);\ a = 4;\ b = 2$ ok
c) $C(2,-3);\ a = 4;\ b = 2$
d) $C(-2,3);\ a = 2;\ b = 4$

13.-
Encuentra el centro, los semiejes mayor y menor de la elipse cuya ecuación general es:
$4x^2 + 2y^2 - 8x + 4y - 2 = 0$

a) $C(-1,-7);\ a = 4;\ b = 2$
b) $C(1,-1);\ a = 2;\ b = \sqrt{2}$ ok
c) $C(2,-3);\ a = 4;\ b = 2$
d) $C(-2,3);\ a = 2;\ b = 4$

14.-
Encuentra el centro, los semiejes mayor y menor de la elipse cuya ecuación general es:
$6x^2 + 3y^2 + 12y - 6 = 0$

a) $C(0,-2);\ a = \sqrt{6};\ b = \sqrt{3}$ ok
b) $C(1,-1);\ a = 2;\ b = \sqrt{2}$
c) $C(2,-3);\ a = 4;\ b = 2$
d) $C(-2,3);\ a = 2;\ b = 4$

15.-
Encuentra el centro, los semiejes mayor y menor de la elipse cuya ecuación general es:
$x^2 + 5y^2 - 12x + 31 = 0$

a) $C(-1,-7);\ a = 4;\ b = 2$
b) $C(1,-1);\ a = 2;\ b = \sqrt{2}$
c) $C(2,-3);\ a = 4;\ b = 2$
d) $C(6,0);\ a = \sqrt{5};\ b = 1$ ok

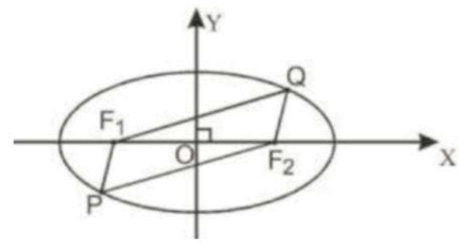
16.-
Encuentra el centro, los semiejes mayor y menor de la elipse cuya ecuación general es:
$4x^2 + 25y^2 + 16x + 250y + 541 = 0$

a) $C(-2,-5);\ a = 5;\ b = 2$ ok
b) $C(1,-1);\ a = 2;\ b = \sqrt{2}$
c) $C(2,-3);\ a = 4;\ b = 2$
d) $C(-2,3);\ a = 2;\ b = 4$

17.-
Encuentra la longitud del lado recto de la elipse cuya ecuación general es:
$x^2 + 81y^2 - 2x + 324y = -316$

a) $\frac{2}{9}\,u$
b) $\frac{2}{27}\,u$ ok
c) $\frac{4}{81}\,u$
d) $\frac{25}{27}\,u$

18.-
En la figura F_1 y F_2 son los focos de la elipse: $16x^2 + 25y^2 - 400 = 0$. Si PF_1QF_2 es un romboide, hallar PF_2+F_2Q.



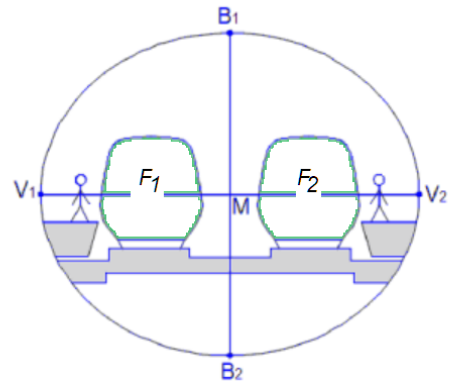
a) 9 u b) 10 u ok c) 12 u d) 14 u

Aprendizajes: Resuelve problemas geométricos y en otros contextos.

Tema: Intersección de cónicas, trazado de tangentes, propiedades ópticas y auditivas.

1.-

En la figura se muestra la sección elíptica de un tramo del metro de la CDMX, donde los vagones están situados en los focos. Si el eje mayor mide 10 m y un lado recto mide 3.6 m, encuentra la ecuación de una elipse que modele la sección.

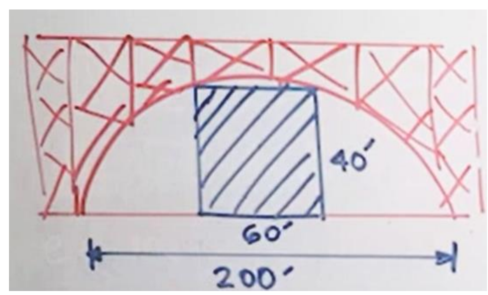


a) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ b) $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{6}=1$ c) $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{10}=1$ d) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$

ok

2.-

En la figura se muestra la sección elíptica de un tramo de un puente que se piensa construir. El río tiene un ancho de 200 pies, y se espera que cualquier embarcación con menos de 60 pies de ancho y hasta 40 pies de altura puedan pasar cómodamente debajo de él. Encuentra la ecuación ordinaria del arco.

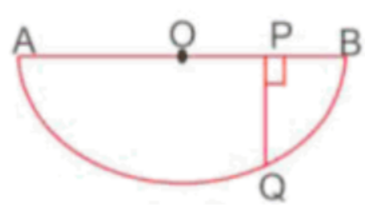


a) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{42}=1$ b) $\frac{x^2}{1000}+\frac{y^2}{1764}=1$ c) $\frac{x^2}{10\,000}+\frac{y^2}{1\,760}=1$ d) $\frac{x^2}{11\,900}+\frac{y^2}{42}=1$

ok

3.-

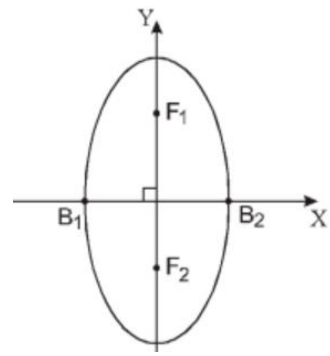
La figura representa un tramo de un canal de forma elíptica. Tiene una altura máxima de 40 m y un ancho de 100 m en la parte superior. Si OA=OB y OP= 30 m. Hallar la profundidad PQ.



a). $16\ m$ b). ok $32\ m$ c). $20\ m$ d). $24\ m$

4.-

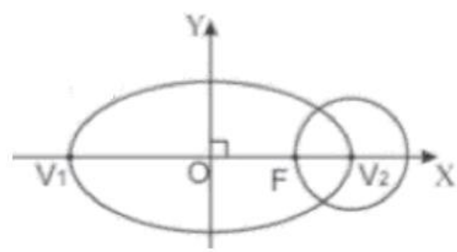
En la figura anexa se muestra una elipse con centro en el origen de referencia. $B_1B_2 = 4$ m, $F_1F_2 = 18$ m, Determina la ecuación general que la representa.



a) $85x^2 + 4y^2 - 340 = 0$ ok
b) $25x^2 + 21y^2 - 111 = 0$
c) $16x^2 + 25y^2 - 525 = 0$
d) $85x^2 + 21y^2 - 525 = 0$

5.-

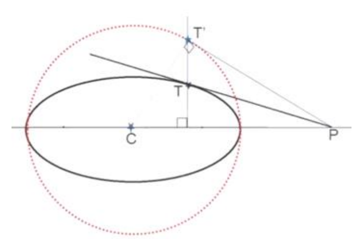
En la figura anexa se muestra una elipse, cuya ecuación ordinaria es: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. V_1 y V_2 son los vértices y F uno de sus focos. Determina la ecuación general de la circunferencia con centro V_2.



a) $(x-5)^2 + y^2 = 4$ ok
b) $(x-5)^2 + y^2 = 2$
c) $(x+5)^2 + y^2 = 4$
d) $(x-4)^2 + y^2 = 4$

6.-

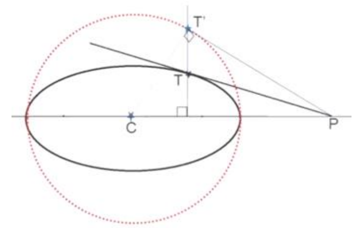
Calcular la ecuación de la recta tangente a la elipse $4x^2 + 9y^2 - 72 = 0$, en el punto T(3, 2).



a) $2x + 3y = 12$ ok
b) $2x + 3y = 14$
c) $3x + 2y = 12$
d) $3x + 4y = 12$

7.-

Calcular la ecuación de la recta tangente a la elipse $2x^2 + 3y^2 - 14 = 0$, en el punto T(1, 2).



a) $2x + 3y = 12$

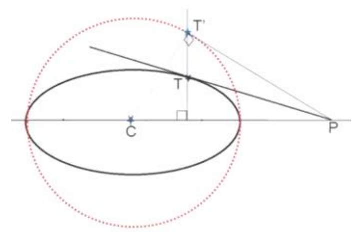
b) $x + 3y = 7$ ok

c) $3x + 2y = 12$

d) $3x + 4y = 12$

8.-

Calcular la ecuación de la recta tangente a la elipse $2x^2 + 3y^2 - 30 = 0$, en el punto T(3, 2).



a) $2x + 3y = 12$

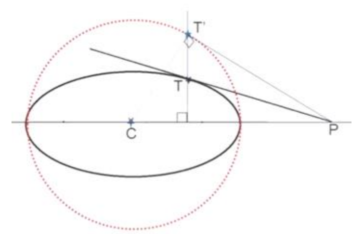
b) $x + 3y = 7$

c) $x + y = 5$ ok

d) $3x + 4y = 12$

9.-

Calcular una ecuación de la recta tangente a la elipse $4x^2 + 9y^2 = 72$, desde el punto P(0, 4).



a) $2x + 3y = 12$ ok

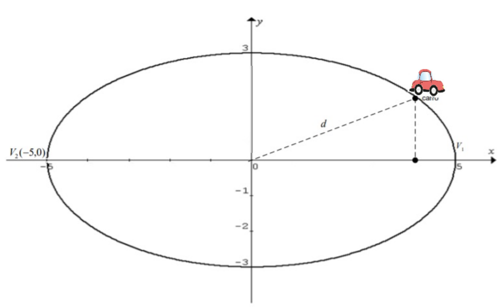
b) $2x - 3y = -12$ ok

c) $3x + 2y = 12$

d) $3x + 4y = 12$

10.-

Una pista de autos tiene forma elíptica. El eje mayor mide 10 km, el eje menor mide 6 km. En determinado momento, un auto se ubica por encima de uno de los focos. Determina la distancia *d*, del auto al centro de la elipse.



a) $3.423\ km$

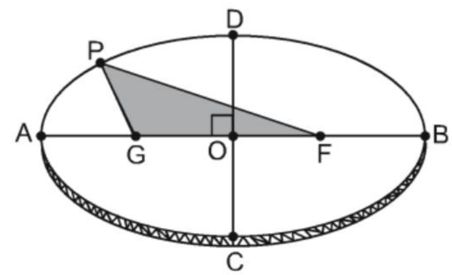
b) $4.386\ km$ ok

c) $5.217\ km$

d) $6\ km$

11.-

En la figura anexa se muestra una mesa en forma de elipse. Se hace un diseño triangular PFG para cubrirlo de vidrio oscuro. Si AB y CD son los ejes mayor y menor, respectivamente, F y G son los focos, OC= 4 m y FB= 2 m. Hallar el perímetro del diseño cubierto de vidrio oscuro.



a) $15\,m$
b) $16\,m$ ok
c) $18\,m$
d) $20\,m$

TRES MODELOS DE EXAMEN

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

EXAMEN MATEMÁTICAS III

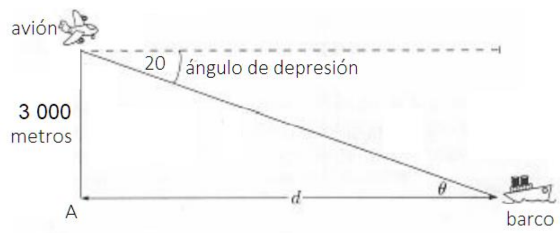
Examen **tipo 1** Gpo:_______

Nombre: _________________________

Instrucciones: Lee con atención y contesta lo que se pide. Anexa a tu examen los cálculos que realizaste de manera limpia y ordenada, numerando la pregunta.

1. .

Un avión está volando por encima del océano y dispone de un altímetro que ofrece lecturas muy precisas. El aparato indica una altura de 3 000 metros sobre el océano. El piloto observa que el ángulo de depresión respecto a un barco es de 20º. ¿Cuál es la distancia horizontal *d* (sin decimales) medida desde ese barco hasta un punto "A" que se localiza directamente abajo del avión?

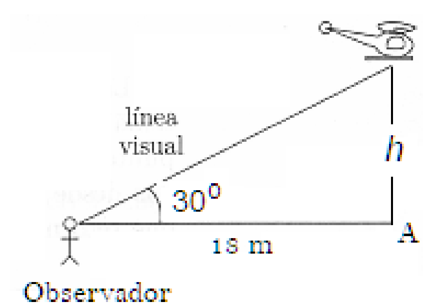


2 puntos.

a) 8 242 m b) 1 092 m c) 8 871 m d) 1 026 m

2. .

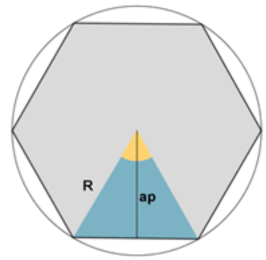
Una persona observa las maniobras de un helicóptero. El ángulo de elevación del observador al helicóptero es de 30º y se conoce que la distancia horizontal del observador a un punto "A" ubicado debajo del helicóptero es de 18 metros. Indica la distancia vertical "*h*" del helicóptero al punto "A". (1 punto)



a) $h = 3\sqrt{3}$ m b) $h = 4\sqrt{3}$ m c) $h = 5\sqrt{3}$ m **d) $\boldsymbol{h = 6\sqrt{3}}$ m**

3. .

Encuentra el área "A" de un hexágono regular inscrito en un círculo de radio de 4 unidades. (2 puntos)



a) $A = 10\sqrt{3}\,u^2$

b) $A = 18\sqrt{3}\,u^2$

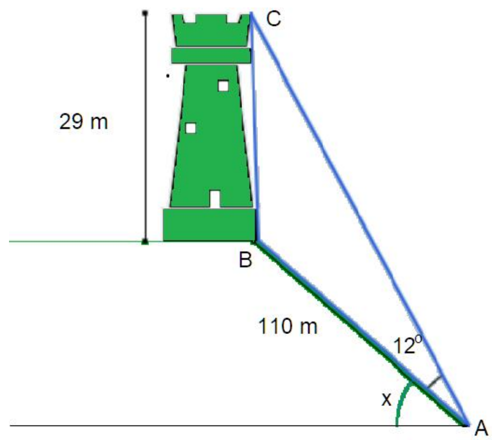
c) $A = 20\sqrt{3}\,u^2$

d) $A = 24\sqrt{3}\,u^2$

4. .

Una torre de 29 m de alto se encuentra en la cima de una colina. Desde una distancia de 110 m colina abajo, se mide el ángulo que se forma entre la base de la torre (Punto B) al punto C, que resulta ser de 12º. Encontrar el ángulo x de inclinación de la colina.

Utiliza cuatro puntos decimales para tus cálculos. (2 puntos)

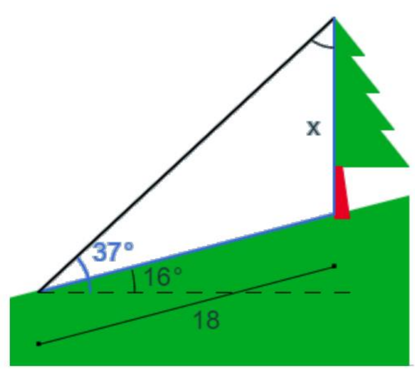


a)14.07°   b)25.94°   c)67.39°   d)18.4°

5. Ley de senos.

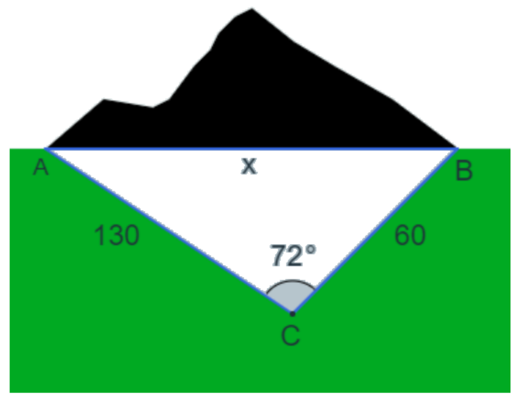
Un árbol proyecta una sombra sobre una ladera colina abajo de 18 m. Si el ángulo de inclinación de la ladera es de 16º, con respecto a la horizontal, y el ángulo de elevación del sol es de 37º. ¿Cuál es la altura del árbol?

Utiliza cuatro puntos decimales para tus cálculos. (2 puntos)



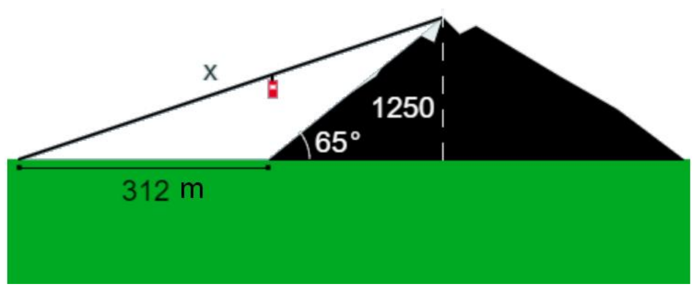
a)3.08 m   b)5.94 m   c)7.39 m   **d)8.08 m**

6. Ley de los cosenos.
Para construir un túnel, una compañía de construcción necesita conocer la longitud total entre los puntos A y B para estimar costos. Contrata a un Ingeniero Topógrafo que decide medir las distancias de A y B a un punto C y el ángulo ACB, cuyas medidas son: 130 m, 60 m y 72º, respectivamente. ¿Cuánto mide la longitud del túnel? (2 puntos)



a)93.08 m b)115.94 m **c)125.22 m** d)130.14 m

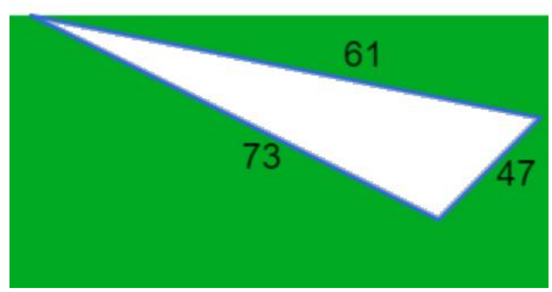
7. .
Desde la cima de una montaña de 1250 m de altura hasta un punto a 312 m de la base de ésta, se tiende un cable para sostener un teleférico. Si la montaña tiene una inclinación de 65º sobre la horizontal, ¿Cuál es la longitud más corta del cable que se necesita? Realiza tus cálculos con 4 cifras decimales. (3 puntos).



a)1493.08 m **b)1537.31 m** c)1625.22 m d)1730.14 m

8. .
Un campo triangular como el mostrado en la figura tiene lados de longitudes: 47 m, 61 m y 73 m. Encontrar el ángulo interno más grande.

Utiliza cuatro puntos decimales para tus cálculos. (3 puntos)



a)94.07^{O} b)39.82^{O} c)56.20^{O} **d)83.98^{O}**

9. En un triángulo cuyas coordenadas son A(2,-1), B(3,2) y C(-1,-1), un segmento que une a un vértice con el punto medio del lado opuesto se llama mediana del triángulo. Calcula la longitud de la mediana que parte del vértice A. (2 puntos)

a)1.803 u b)3.810 u c)3.91 u d)4.03 u

10. En un triángulo cuyas coordenadas son A(2,-1), B(3,2) y C(-1,-1), un segmento que une a un vértice con el punto medio del lado opuesto se llama mediana del triángulo. Calcula la pendiente (m) de la mediana que parte del vértice A y su ecuación en forma general. (2 puntos)

a) $m = -\frac{3}{2}$; ok $3x + 2y - 4 = 0$

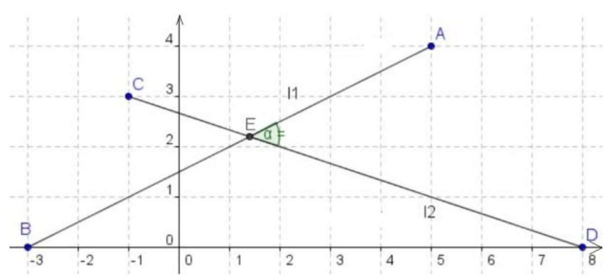
b) $m = \frac{3}{2}$; $-3x + 2y - 4 = 0$

c) $m = -\frac{3}{2}$; $3x - 2y - 4 = 0$

d) $m = -\frac{3}{2}$; $3x + 2y + 4 = 0$

11.-

Determina el valor del ángulo α que se forma cuando dos segmentos de recta AB y CD se intersectan. (2 puntos)



a)25º b)30º **c)45º** d)80º

12.-

Encontrar las abcisas de los puntos donde la recta $x - 2y + 4 = 0$ corta a la parábola $x^2 - 2y - 2 = 0$. (3 puntos).

a) $x_1 = 2;\ x_2 = -3$

b) $x_1 = -2;\ x_2 = -\frac{1}{2}$

c) $x_1 = -2;\ x_2 = 3$ ok

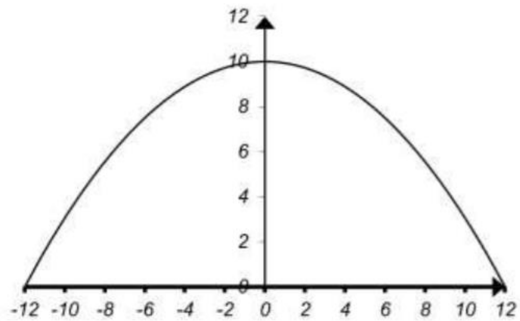
d) $x_1 = 3;\ x_2 = -1$

13.-

Un túnel en forma de arco parabólico vertical, tiene una altura de 10 m y sus puntos de apoyo están separados 24 m. ¿A qué altura del suelo se encuentra el foco de la parábola? (2 puntos)

$$(x-h)^2 = -4a(y-k)$$

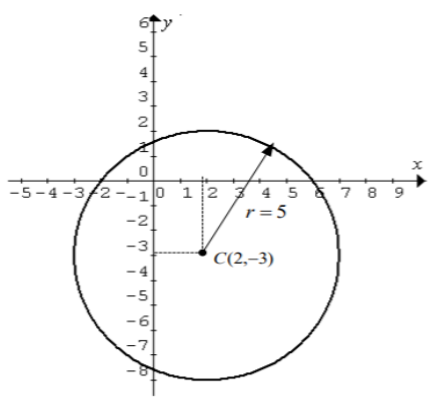
(3 puntos).



a)3.6 m b)5.4 m **c)6.4 m** d)11.4 m

14.-.

La ecuación general de la circunferencia que se ilustra en la figura es: (2 puntos)



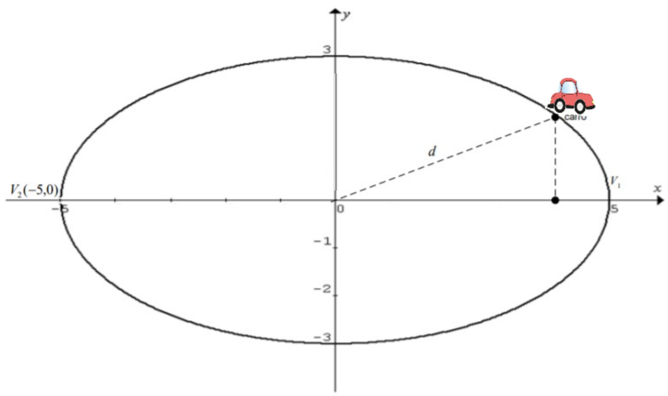
a) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$
b) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ ok
c) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 = 0$
d) $x^2 + y^2 - 6x - 12y + 20 = 0$

15.-

La ecuación general de una circunferencia es $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$. Indica el cuadrante del sistema cartesiano de referencia donde se ubican las coordenadas de su centro. (2 puntos)

a) I
b) II
c) II
d) IV ok

16.-
Una pista de autos tiene forma elíptica. El eje mayor mide 10 km, el eje menor mide 6 km. En determinado momento, un auto se ubica por encima de uno de los focos. Determina la distancia *d*, del auto al centro de la elipse. (2 puntos)



a) $3.423\ km$
b) $4.386\ km$ ok
c) $5.217\ km$
d) $6\ km$

Elaboró Grupo 401c.
Criterio de calificación:

1 -17	NA
18-20	6
21-27	8
28-34	10

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

EXAMEN MATEMÁTICAS III

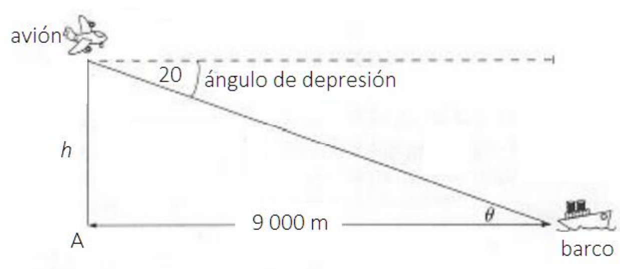
Examen **tipo 2** Gpo:_______

Nombre: _________________________

Instrucciones: Lee con atención y contesta lo que se pide. Anexa a tu examen los cálculos que realizaste de manera limpia y ordenada, numerando la pregunta.

1. .

Un avión está volando por encima del océano. El piloto calcula que el ángulo de depresión respecto a un barco es de 20º y que la distancia del barco a un punto A debajo del avión es de 9 000 m. ¿Cuál es la distancia vertical *h* (sin decimales) medida desde el avión hasta un punto "A" que se localiza directamente abajo del avión?

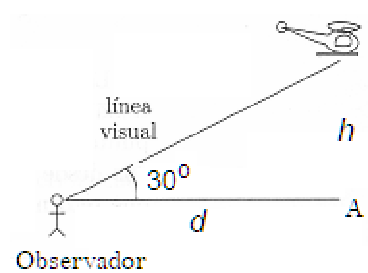


(2 puntos.)

a) 24 727 m b) 1 092 m **c) 3 276 m** d) 1 026 m

2. .

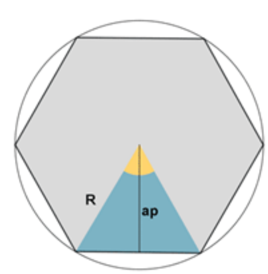
Una persona observa las maniobras de un helicóptero. El ángulo de elevación del observador al helicóptero es de 30º y se conoce que la distancia horizontal del observador a un punto "A" ubicado debajo del helicóptero es de 12 metros. Indica la distancia vertical "*h*" del helicóptero al punto "A". (2 puntos)



a) $h = 2\sqrt{3}$ m b) $h = 3\sqrt{3}$ m **c)** $\boldsymbol{h = 4\sqrt{3}}$ **m** d) $h = 5\sqrt{3}$ m

3. .

Encuentra el área "A" de un hexágono regular inscrito en un círculo de radio de 3 unidades. (2 puntos)

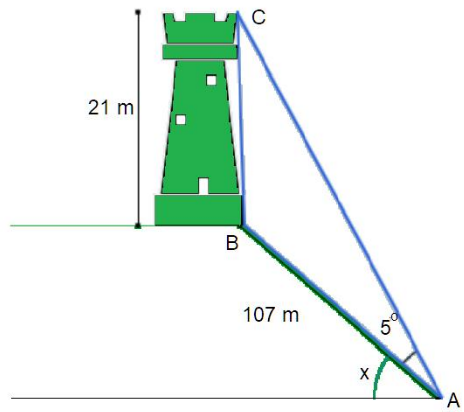


a) $A = \frac{10}{2}\sqrt{3}\, u^2$ b) $A = \frac{18}{2}\sqrt{3}\, u^2$ c) $A = \frac{20}{2}\sqrt{3}\, u^2$ **d)** $A = \frac{27}{2}\sqrt{3}\, u^2$

4. .

Una torre de 21 m de alto se encuentra en la cima de una colina. Desde una distancia de 107 m colina abajo, se mide el ángulo que se forma entre la base de la torre (Punto B) al punto C, que resulta ser de 5º. Encontrar el ángulo x de inclinación de la colina.

Utiliza cuatro puntos decimales para tus cálculos. (2 puntos)

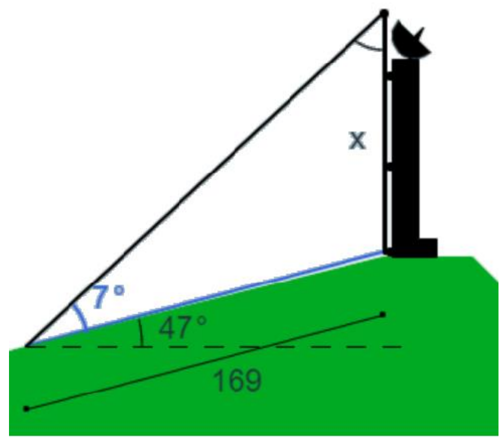


a)14.07^{O} b)25.94^{O} c)67.39^{O} **d)58.63^{O}**

5. Ley de los senos.

Una torre de telecomunicaciones se encuentra en la cima de una colina cuyo ángulo de inclinación es de 47º. La torre se ha fijado de un cable desde su parte superior y proyecta una longitud de 169 m colina debajo de la base de la torre formando un ángulo de 7º con el suelo como se muestra en la figura. ¿Cuál es la longitud del cable vertical x?

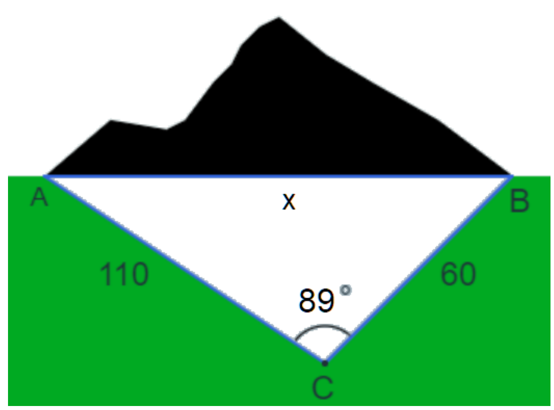
Utiliza cuatro puntos decimales para tus cálculos. (3 puntos)



a)23.08 m b)25.94 m **c)35.04 m** d)48.08 m

6. Ley de los cosenos.

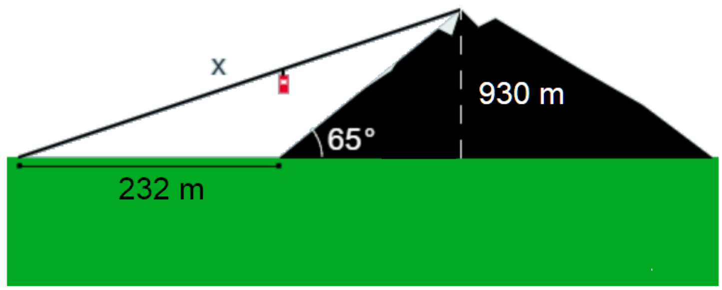
Para construir un túnel, una compañía de construcción necesita conocer la longitud total entre los puntos A y B para estimar costos. Contrata a un Ingeniero Topógrafo que decide medir las distancias de A y B a un punto C y el ángulo ACB, cuyas medidas son: 110 m, 60 m y 88º, respectivamente. ¿Cuánto mide la longitud del túnel? (3 puntos)



a)93.08 m **b)124.38 m** c)125.22 m d)130.14 m

7. .

Desde la cima de una montaña de 930 m de altura hasta un punto a 232 m de la base de ésta, se tiende un cable para sostener un teleférico. Si la montaña tiene una inclinación de 65º sobre la horizontal, ¿Cuál es la longitud más corta del cable que se necesita? Realiza tus cálculos con cuatro decimales. (3 puntos)

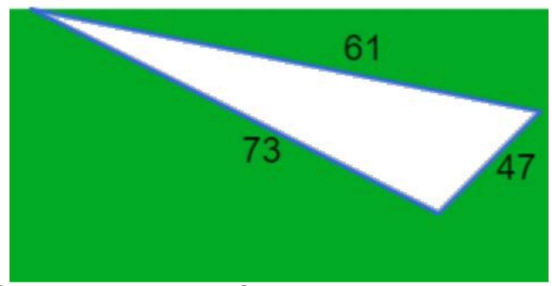


a)1135.69 m b)1537.31 m c)1625.22 m d)1730.14 m

8. .

Un campo triangular como el mostrado en la figura tiene lados de longitudes: 47 m, 61 m y 73 m. Encontrar el ángulo interno más grande.

Utiliza cuatro puntos decimales para tus cálculos. (3 puntos)



a)94.07^{O} b)39.82^{O} c)56.20^{O} **d)83.98^{O}**

9. En un triángulo cuyas coordenadas son A(2,-1), B(3,2) y C(-1,-1), un segmento que une a un vértice con el punto medio del lado opuesto se llama mediana del triángulo. Calcula la longitud de la mediana que parte del vértice B. (2 puntos)

a)1.803 u b)3.810 u **c)3.91 u** d)4.03 u

10. En un triángulo cuyas coordenadas son A(2,-1), B(3,2) y C(-1,-1), un segmento que une a un vértice con el punto medio del lado opuesto se llama mediana del triángulo. Calcula la pendiente (m) de la mediana que parte del vértice B y su ecuación en forma general. (3 puntos)

a) $m = -\frac{6}{5}$;

$6x - 5y - 8 = 0$

b) $m = -\frac{6}{5}$;

$-6x - 5y - 8 = 0$

c) $m = \frac{6}{5}$;

$6x - 5y + 8 = 0$

ok d) $m = \frac{6}{5}$;

$6x - 5y - 8 = 0$

11. Para captar las señales de televisión emitidas desde un satélite se utiliza una antena parabólica que mide 5 m de diámetro y 1.5 m de profundidad, si el receptor está ubicado en el foco, ¿Cuál es su ubicación desde el vértice?. (2 puntos)
    a) $-0.9\ m$
    b) $-1.04\ m$
    c) $0.225\ m$
    d) $1.04\ m$ ok

12.- La ecuación general de una circunferencia que pasa por los puntos A(5,0), B(0,5) y C(-5,0) es: (3 puntos).

a) $x^2+y^2+x+y-16=0$
b) $x^2+y^2+y-25=0$
c) $x^2+y^2+x+25=0$
d) $x^2+y^2-25=0$ ok

13.-.
La ecuación general de una circunferencia es $x^2+y^2-4x+6y-12=0$. El centro se encuentra ubicado en el cuadrante: (2 puntos)

a) I
b) II
c) II
d) IV ok

14.-
Los ejes mayor y menor del cometa Kohoutek miden 3600 km y 44 km, respectivamente. ¿Cuál es la excentricidad de la órbita del cometa?. (2 puntos)

a) 0.99970
b) 0.99971
c) 0.99992 ok
d) 1.00007

Elaboró Grupo 401c.
Criterio de calificación:

1 -17	NA
18-20	6
21-27	8
28-34	10

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

EXAMEN MATEMÁTICAS III

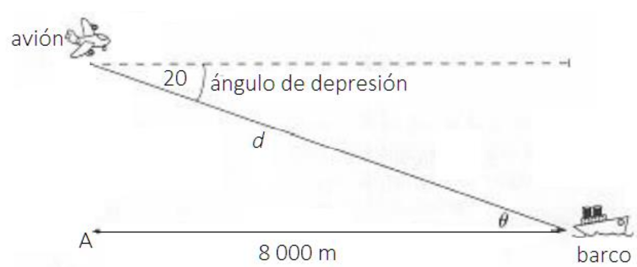
Examen **tipo 3** Gpo:_______

Nombre: ________________________

Instrucciones: Lee con atención y contesta lo que se pide. Anexa a tu examen los cálculos que realizaste de manera limpia y ordenada, numerando la pregunta.

1. .

Un avión está volando por encima del océano y se dispone a enviar un paquete de medicamentos a un barco que se encuentra varado en el océano. El piloto observa que el ángulo de depresión respecto a un barco es de 20º y además se sabe que la distancia horizontal del barco a un punto "A" ubicado exactamente debajo del avión es de 8 km. ¿Cuál es la distancia inclinada *d* (sin decimales) medida desde el avión hasta el barco?

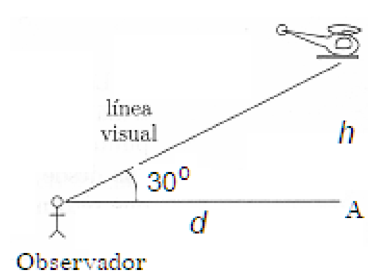


(2 puntos)

a) 8 242 m b) 1 092 m c) 8 871 m **d) 8 513 m**

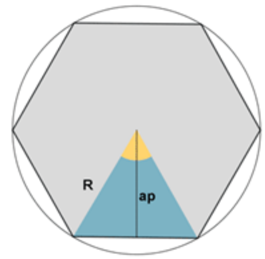
2. .

Una persona observa las maniobras de un helicóptero. El ángulo de elevación del observador al helicóptero es de 30º y se conoce que la distancia horizontal "*d*" del observador a un punto "A" ubicado debajo del helicóptero es de 6 metros. Indica la distancia vertical "*h*" del helicóptero al punto "A". (2 PUNTOS).



a) $\boldsymbol{h = 2\sqrt{3}}$ m b) $h = 3\sqrt{3}$ m c) $h = 4\sqrt{3}$ m d) $h = 5\sqrt{3}$ m

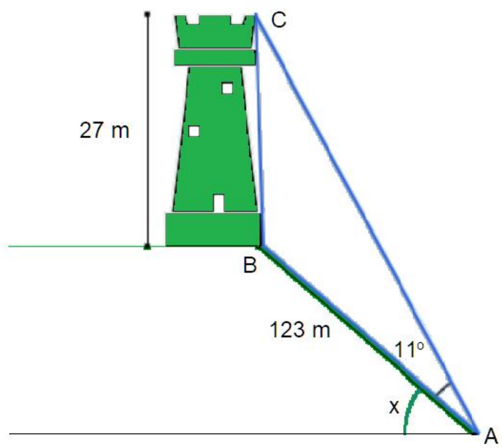
3.
Encuentra el área "A" de un hexágono regular inscrito en un círculo de radio de 6 unidades. (2 PUNTOS)



a) $\boldsymbol{A = 27\sqrt{3}\,u^2}$ b) $A = 25\sqrt{3}\,u^2$ c) $A = 24\sqrt{3}\,u^2$ d) $A = 22\sqrt{3}\,u^2$

4. .
Una torre de 27 m de alto se encuentra en la cima de una colina. Desde una distancia de 123 m colina abajo, se mide el ángulo que se forma entre la base de la torre (Punto B) al punto C, que resulta ser de 11º. Encontrar el ángulo x de inclinación de la colina.

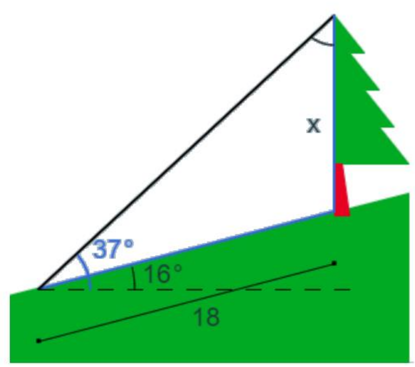
Utiliza cuatro puntos decimales para tus cálculos. (2 puntos)



a)18.63º b)25.94º c)67.39º d)71.04º

5. .
Un árbol proyecta una sombra sobre una ladera colina abajo de 18 m. Si el ángulo de inclinación de la ladera es de 16º, con respecto a la horizontal, y el ángulo de elevación del sol es de 37º. ¿Cuál es la altura del árbol?

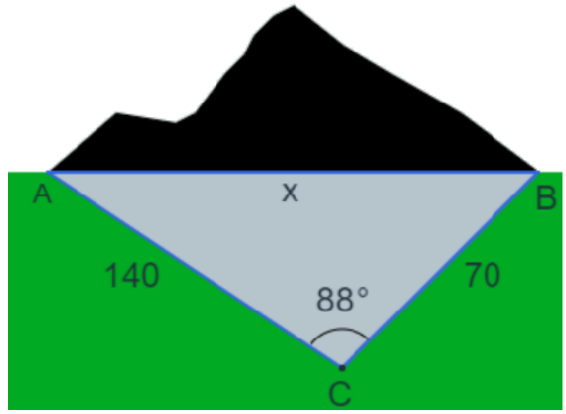
Utiliza cuatro puntos decimales para tus cálculos. (3 puntos)



a)3.08 m b)5.94 m c)7.39 m **d)8.08 m**

6. Ley de los cosenos.

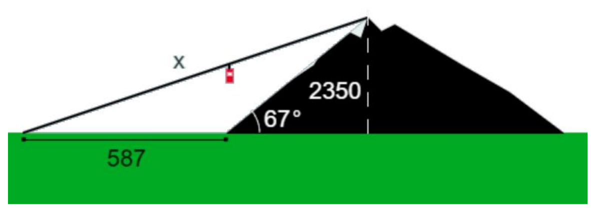
Para construir un túnel, una compañía de construcción necesita conocer la longitud total entre los puntos A y B para estimar costos. Contrata a un Ingeniero Topógrafo que decide medir las distancias de A y B a un punto C y el ángulo ACB, cuyas medidas son: 140 m, 70 m y 88º, respectivamente. ¿Cuánto mide la longitud del túnel? Utiliza cuatro decimales para tus cálculos. (3 puntos)



a)93.08 m b)115.94 m c)125.22 m **d)154.32 m**

7. .

Desde la cima de una montaña de 2350 m de altura hasta un punto a 587 m de la base de ésta, se tiende un cable para sostener un teleférico. Si la montaña tiene una inclinación de 67º sobre la horizontal, ¿Cuál es la longitud más corta del cable que se necesita? Realiza tus cálculos con 4 cifras decimales. (3 puntos)

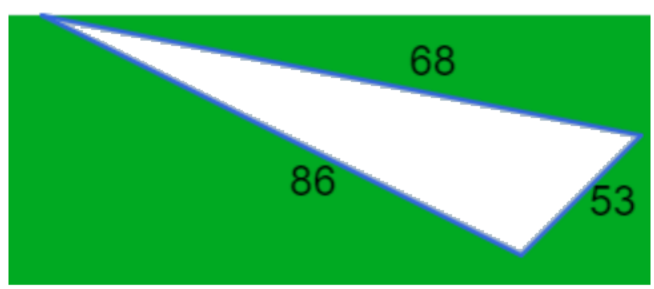


a)1493.08 m b)2537.31 m c)2625.22 m **d)2834.29 m**

8. .

Un campo triangular como el mostrado en la figura tiene lados de longitudes: 53 m, 68 m y 86 m. Encontrar el ángulo interno más grande.

Utiliza cuatro puntos decimales para tus cálculos. (3 puntos)



a)94.07^{O} **b)89.71^{O}** c)56.20^{O} d)83.98^{O}

9. En un triángulo cuyas coordenadas son A(2,-1), B(3,2) y C(-1,-1), un segmento que une a un vértice con el punto medio del lado opuesto se llama mediana del triángulo. Calcula la longitud de la mediana que parte del vértice C. (2 puntos)

a)1.803 u **b)3.810 u** c)3.91 u d)4.03 u

10. En un triángulo cuyas coordenadas son A(2,-1), B(3,2) y C(-1,-1), un segmento que une a un vértice con el punto medio del lado opuesto se llama mediana del triángulo. Calcula la pendiente (m) de la mediana que parte del vértice C y su ecuación en forma general. (2 puntos)

a) $m = \frac{3}{7}$; $3x - 7y - 8 = 0$

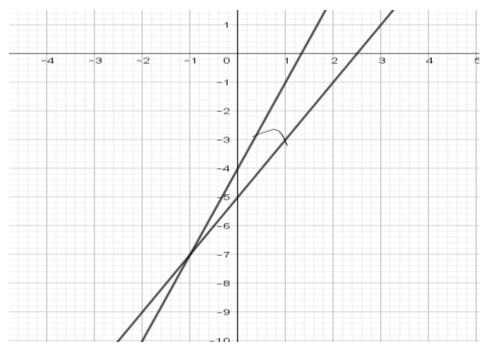
b) $m = \frac{3}{7}$; $6x - 14y - 17 = 0$ ok

c) $m = -\frac{3}{7}$; $6x - 14y - 17 = 0$

d) $m = \frac{3}{7}$; $-6x - 14y - 17 = 0$

11.-

Obtén la medida del ángulo señalado en la figura que forman las rectas: $2x - y - 5 = 0$ y $-3x + y + 4 = 0$. (2 puntos)



a) 8.13^o ok

b) 7.23^o

c) 7.09^o

d) 6.21^o

12.-

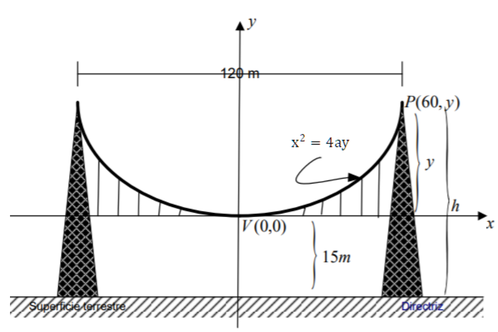
Un puente colgante de 120 m de longitud, como se muestra en la figura anexa, tiene trayectoria parabólica sostenida por dos torres en cada extremo de igual altura. Si la directriz se encuentra representada por la superficie terrestre y el punto más bajo de los cables está ubicado a 15 m sobre la superficie terrestre. Hallar la altura *h* de las torres. (2 puntos)

a) $h = 15\ m$

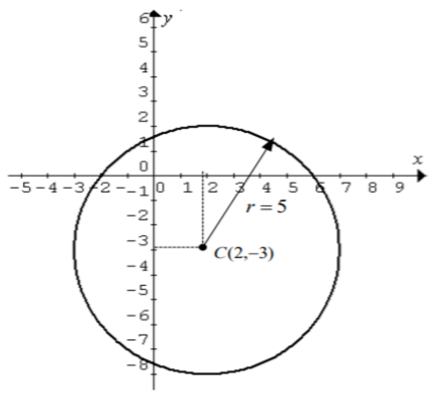
b) $h = 60\ m$

c) $h = 75\ m$ ok

d) $h = 90\ m$



13.-.
La ecuación general de la circunferencia que se ilustra en la figura es: (2 puntos)

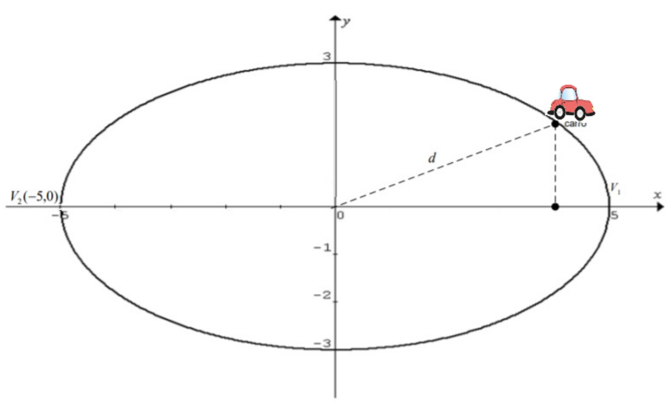


a) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$
b) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ ok
c) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 = 0$
d) $x^2 + y^2 - 6x - 12y + 20 = 0$

14.-
La ecuación general de una circunferencia es $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$. Indica el cuadrante del sistema cartesiano de referencia donde se ubican las coordenadas de su centro. (2 puntos)

a) I
b) II
c) II
d) IV ok

15.-
Una pista de autos tiene forma elíptica. El eje mayor mide 10 km, el eje menor mide 6 km. En determinado momento, un auto se ubica por encima de uno de los focos. Determina la distancia *d*, del auto al centro de la elipse. (2 puntos)



a) $3.423\ km$
b) $4.386\ km$ ok
c) $5.217\ km$
d) $6\ km$

Elaboró Grupo 401c.
Criterio de calificación:

1 -17	NA
18-20	6
21-27	8
28-34	10